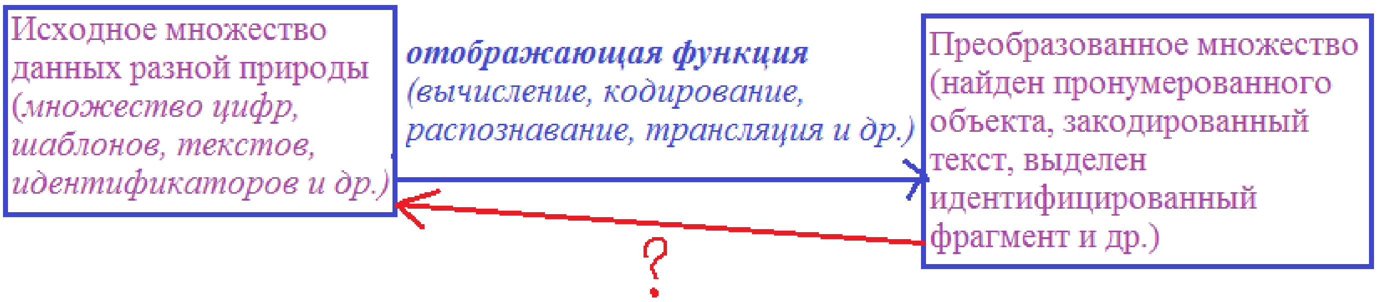
Лекция 4
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Отображения – ключевой механизм информатики.



Говорят, что отображение существует, если задана пара множеств и отображающая функция, для которой первое множество – область определения, а второе – область значения.

Чаще встречаются отображения (операторы), действующие в линейных нормированных пространствах. Наиболее изученными и важными для приложений являются линейные операторы.

Пусть L_1 и L_2 – два линейных пространства.

Опр. Если задано правило *f*, по которому каждому элементу $\bar{x} \in L_1$ ставится в соответствие некоторый элемент $\bar{y} \in L_2$, то говорят, что задан ***оператор*** (***отображение***, ***преобразование***), действующий из L_1 в L_2: $f : L_1 \to L_2$; при этом элемент $\bar{y} = f(\bar{x})$ называется ***образом*** элемента $\bar{x}$, а элемент $\bar{x}$ – ***прообразом*** элемента $\bar{y}$ (при данном отображении *f*).

Опр. Оператор $f : L_1 \to L_2$ называется ***линейным***, если для любых элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x} \in L_1$ и любого числа $\alpha \in \mathbf{R}$ выполняются условия:

1) $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$;

2) $f(\alpha\bar{x}) = \alpha f(\bar{x})$.

В учебной и научной литературе линейные операторы принято обозначать *A, B, C, T, ….*

Линейным функционалом называется линейный оператор, отображающий линейное пространство во множество чисел (действительных или комплексных).

Областью или множеством значений линейного оператора *A* называется множество

$$\mathbf{im}A = \{y \in L_2 | y = Ax, x \in L_1\}.$$

Размерность области значений $\mathbf{dim\,im}\boldsymbol{A}$ называется **рангом оператора** A и обозначается $\mathbf{rang}\boldsymbol{A}$, т.е.

$$\mathbf{rang}\boldsymbol{A} = \mathbf{dim\,im}\boldsymbol{A}.$$

Ядром ненулевого линейного оператора A называется подпространство всех векторов $\overline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{L_1}$, для которых $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, и обозначается $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{A}$, т.е.

$$\mathbf{ker}\boldsymbol{A} = \{\overline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{L_1} | \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}\}.$$

Размерность ядра оператора A называется ***дефектом*** *оператора* и обозначается $\mathbf{def}\boldsymbol{A}$, т.е.

$$\mathbf{def}\boldsymbol{A} = \mathbf{dim\,ker}\boldsymbol{A}.$$

В случае конечномерного пространства $\boldsymbol{L_1}$ размерности n справедливо утверждение:

Сумма размерностей образа и ядра линейного оператора равна размерности исходного пространства, т.е.

$$\mathbf{dim\,im}\boldsymbol{A} + \mathbf{dim\,ker}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \text{ или } \mathbf{rang}\boldsymbol{A} + \mathbf{def}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}.$$

Примеры линейных операторов.

1. **Единичный (тождественный) оператор** $I(\overline{x}) = \overline{x}$ переводит каждый элемент пространства в себя.
2. **Нулевой оператор:** $O(\overline{x}) = \overline{0}$ для всех $\overline{x} \in L_1$ ($\overline{0}-$ нулевой элемент пространства L_2).

Линейными операторами являются линейные преобразования евклидова пространства, дифференциальные и интегральные операторы, преобразования последовательностей в дискретной математике и др.

ДЕЙСТВИЯ НАД ОПЕРАТОРАМИ

Сумма и произведение операторов.

Опр. Пусть A и B – два линейных оператора, действующих из линейного пространства L_1 в пространство L_2. Назовем их суммой $A+B$ оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in L_1$ элемент

$$y = A(x) + B(x) \in L_2.$$

Опр. ***Произведение*** линейного оператора $A: L_1 \to L_2$ на число λ определяется как оператор, который элементу x ставит в соответствие элемент $\lambda A(x)$.

Опр. ***Произведением*** (***композицией***) линейного оператора $A: L_1 \to L_2$ на линейный оператор $B: L_2 \to L_3$ называется оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in L_1$ элемент

$$z = B\big(A(x)\big) \in L_3.$$

Сумма линейных операторов является линейным оператором.

При умножении линейного оператора на число получается линейный оператор.

Произведение линейных операторов является линейным оператором, который непрерывен, если A и B непрерывны.

Пусть пространства L_1 и L_2 нормированы.

Опр. Линейный оператор A называется ***ограниченным***, если существует такая постоянная C, что для любого $x \in L_1$ выполняется неравенство

$$\|Ax\| \le C\|x\|.$$

Наименьшее из чисел C, удовлетворяющее этому неравенству, называют ***нормой оператора A*** и обозначают $\|A\|$. Записывают

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ограниченность линейного оператора в нормированных линейных пространствах равносильна его непрерывности.

Если A и B – ограниченные операторы, действующие в нормированных пространствах, то их сумма и произведение являются ограниченными операторами, причем

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|,$$
$$\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|.$$

Обратный оператор, обратимость.

Пусть A – оператор, действующий из L_1 в L_2, и D_A – область определения, а $\operatorname{im} A$ – образ этого оператора.

Опр. Оператор ***A*** называется обратимым, если для любого $y \in \operatorname{im} A$ уравнение

$$Ax = y$$

имеет единственное решение.

Если A обратим, то каждому $\bar{y} \in \operatorname{im} A$ можно поставить в соответствие единственный элемент $\bar{x} \in L_1$, являющийся решением уравнения $A\bar{x} = \bar{y}$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется ***обратным к A*** и обозначается A^{-1}, т.е. $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$.

Справедливы равенства

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – тождественный оператор, для которого $Ex = x$, $x \in L_1$.

Оператор A^{-1}, обратный линейному оператору A, также линеен.

Опр. Линейный оператор $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{L_1} \to \boldsymbol{L_2}$ называется ***невырожденным***, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т.е.

$$A\overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{0},$$

в противном случае оператор называется вырожденным.

Для вырожденного оператора равенство $A\overline{x} = \overline{0}$ возможно и при некотором $\overline{x} \neq \overline{0}$

Пусть $A: L \to L$ – линейный оператор в n-мерном пространстве L.

Опр. *Ненулевой* элемент $\overline{x} \in L$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора $A: L \to L$, если существует такое число λ, что

$$A\overline{x} = \lambda \overline{x}.$$

Число λ называется ***собственным значением*** (***собственным числом***) линейного оператора A, соответствующим собственному вектору $\overline{x}$.

Совокупность всех собственных значений называется спектром оператора A, а все остальные значения λ – регулярными.

Понятие спектра – важнейшее понятие в теории операторов. Это связано с тем, что многие соотношения, связанные с линейными операторами, существенно упрощаются в системе координат, построенной на базисе из собственных векторов оператора. **Исторически они возникли при исследовании квадратичных форм и дифференциальных уравнений.**

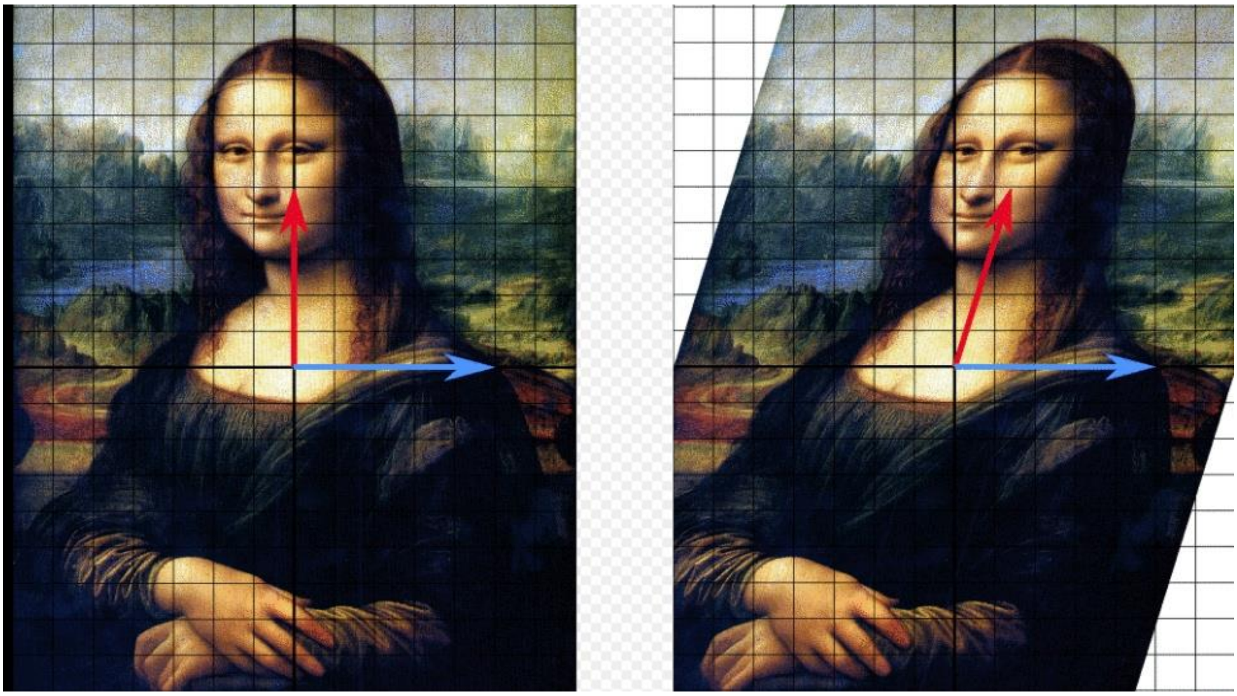
Собственный вектор линейного оператора – это такой вектор, который при действии на него данного оператора лишь масштабируется с коэффициентом λ, а его ориентация остается неизменной.

Такое уникальное свойство собственных векторов линейных операторов используется в самых разных разделах математики и механики: при исследовании поверхностей второго порядка в геометрии, при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, при моделировании вращения твердого тела и малых колебаний механических систем, в квантовой механике и др.

Вспомним об операторных задачах в линейных пространствах:

1. **Задача об отыскании корня уравнения** $A\overline{x} = \overline{y}$
2. **Задача о неподвижной точке** $A\overline{x} = \overline{x}$

3. **Задача о собственных значениях λ и собственных векторах линейного оператора $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$**
4. **Задача вариационного исчисления о нахождении элемента $\overline{x}$, доставляющего минимум функционала $\min(A\overline{x})$**



Синим цветом обозначен собственный вектор. Он, в отличие от красного, при деформации (преобразовании) не изменил направление, поэтому является ***собственным вектором*** этого преобразования, соответствующим некоторому *собственному значению* (здесь оно равно единице, так как вектор не изменил свою длину). Любой вектор, параллельный синему вектору, также будет собственным, соответствующим тому же собственному значению.

!!!!!!! Если λ – регулярная точка, то оператор $A - \lambda E$ обратим.
!!!!!!!! Спектр оператора A содержится в круге радиуса $\|A\|$.

Свойства собственных векторов

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Если $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – два собственных вектора линейного оператора A с <u>одним и тем же собственным значением</u> λ, то $\alpha\overline{x_1} + \beta\overline{x_2}$ также является собственным вектором линейного оператора A с тем же собственным значением λ, α, β – числа.

3. Собственные векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}$ линейного оператора A, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, линейно независимы.
??? Базис?

Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах и их матрицы

Пусть A линейный оператор, отображающий n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ с базисом $\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}$ в m-мерное пространство $\mathbf{R}^m$ с базисом $\overline{f_1}; \overline{f_2}; ...; \overline{f_m}$.

Если $\overline{x}$ – произвольный вектор пространства $\mathbf{R}^n$, то $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e_i}$

Элементы $A(\overline{e_1}),\ A(\overline{e_2}),\ldots,\ A(\overline{e_n})$ являются элементами линейного пространства $\mathbf{R}^m$, а значит, их можно разложить по базису $\overline{f_1};\ \overline{f_2};\ldots;\ \overline{f_m}$:

$$A(\overline{e_1})=a_{11}\overline{f_1}+a_{21}\overline{f_2}+\ldots+a_{m1}\overline{f_m},$$

$$A(\overline{e_2})=a_{12}\overline{f_1}+a_{22}\overline{f_2}+\ldots+a_{m2}\overline{f_m},$$

$$\ldots,$$

$$A(\overline{e_n})=a_{1n}\overline{f_1}+a_{2n}\overline{f_2}+\ldots+a_{mn}\overline{f_m}.$$

и в силу линейности оператора A

$$A\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i A\left(\overline{e_i}\right).$$

Таким образом, линейный оператор определяется матрицей коэффициентов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат векторов $A(\overline{e_1}),\ A(\overline{e_2}),\ldots,\ A(\overline{e_n})$, и которая называется ***матрицей линейного оператора*** A.

Утверждение. Матрица линейного оператора позволяет найти образ любого вектора по единому алгоритму.

Если $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\overline{x}\in\mathbf{R}^n$ в базисе $\overline{e_1};\overline{e_2};\ldots;\overline{e_n}$ и его образа $\overline{y}=A(\overline{x})\in\mathbf{R}^m$ в базисе $\overline{f_1};\ \overline{f_2};\ldots;\ \overline{f_m}$ соответственно, то

$$\boxed{Y=AX.}$$

Линейные отображения между конечномерными векторными пространствами (проекторы, повороты координат, гомотетии, умножение вектора на матрицу и др.) изучаются в линейной алгебре.

Проектор (математика)

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

В линейной алгебре и функциональном анализе линейный оператор P, действующий в линейном пространстве, называется **проéктором** (а также **операˊтором проециˊрования** и **проекциóнным операˊтором**) если $P^2 = P$. Такой оператор называют идемпотентным.

Несмотря на свою абстрактность, это определение обобщает идею построения геометрической проекции.

В качестве определения можно использовать следующее свойство проектора: линейный оператор $P : X \to X$ является проектором тогда и только тогда, когда существуют такие подпространства U и V пространства X, что X раскладывается в их прямую сумму, и при этом для любой пары элементов $u \in U,\ v \in V$ имеем $P(u + v) = u$. Подпространства U и V — соответственно образ и ядро проектора P, и обозначаются $\mathrm{Im}P$ и $\mathrm{Ker}P$.

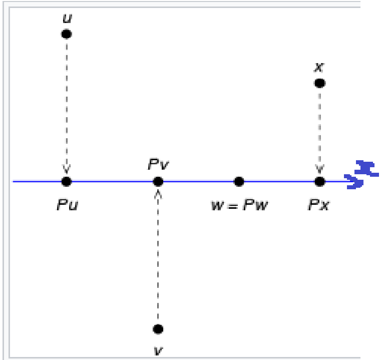
$P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad P(x, y) = (x, 0)$

$\mathrm{Im}\, P = U = \{(x, 0)\}$

$\mathrm{Ker}\, P = V = \{(0, y)\} \qquad \mathbb{R}^2 = U \oplus V$

$P(u+v) = P(u) + P(v) = u + 0 = u$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$



На этом рисунке преобразование P является ортогональной проекцией на ось Ox

- Собственными значениями проектора могут быть только 0 и 1.

ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ в пространствах функций

1. ***Оператор дифференцирования*** (производная функции $f(x)$)

$$\boxed{Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).}$$

2. ***Обыкновенный линейный дифференциальный оператор***

$$\boxed{L\big(y(x)\big) = y^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y'(x) + a_n(x) \cdot y(x)}$$

отображает пространство n раз дифференцируемых функций $y(x)$ в пространство функций.

Пусть G – область трехмерного пространства в декартовой системе координат $Oxyz$. В области G задана скалярная функция $U = U(x; y; z)$ и вектор-функция

$$\vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k},$$

где скалярные функции $P = P(x; y; z)$, $Q = Q(x; y; z)$, $R = R(x; y; z)$ являются проекциями вектор-функции $\vec{F}$ на координатные оси.

3. ***Оператор градиента*** от скалярной функции трех переменных $U(x; y; z)$

$$\boxed{\operatorname{grad} U(x; y; z) = \nabla u(x; y; z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)}$$

отображает множество дифференцируемых функций на множество векторных функций. **Градиент скалярной функции направлен в *сторону наискорейшего возрастания* этой функции.**

3. ***Оператор дивергенции*** от векторной функции $\vec{F}$ в точке M определяется соотношением:

$$\boxed{div\vec{F}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)+\frac{\partial Q}{\partial y}(M)+\frac{\partial R}{\partial z}(M)}.$$

Оператор дивергенции отображает множество дифференцируемых векторных функций на множество скалярных функций.

4. ***Оператор ротор*** векторной функции $\vec{F}=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;y;z)\vec{j}+$ $+R(x;y;z)\vec{k}$, $(x;y;z)\in G$, где функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ и их производные первого порядка по координатам непрерывны в области G, отображает множество дифференцируемых векторных функций на множество векторных функций и определяется равенством

$$\boxed{rot\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}}.$$

5. ***Оператор лапласиан*** от скалярной функции $U(x;y;z)$

$$\boxed{\nabla^2 U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U(x;y;z)=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}$$

отображает множество скалярных дважды дифференцируемых функций на множество скалярных функций.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ в пространствах функций

$$[Jy](x)=\int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

отображают множество интегрируемых функций $y(t)$ на множество функций.

1. **Преобразование Фурье**

Пусть $f(t)$ является кусочно-гладкой, т.е. имеет конечное число точек разрыва первого рода, и абсолютно интегрируемой на $(-\infty,\infty)$, т.е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ сходится. Тогда функция

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

называется прямым преобразованием Фурье функции $f(t)$ и является, вообще говоря, комплекснозначной функцией. Функцию

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$$

называют обратным преобразованием Фурье.

Преобразование Фурье является обобщением ряда Фурье на непериодические функции, в том смысле, что при некоторых условиях непериодическую функцию можно представить как суперпозицию гармонических колебаний с разными частотами с коэффициентами («амплитудами») $F(\omega)$.

Применения [править | править код]

Преобразование Фурье используется во многих областях науки — в физике, теории чисел, комбинаторике, обработке сигналов, теории вероятностей, статистике, криптографии, акустике, океанологии, оптике, геометрии и многих других. В обработке сигналов и связанных областях преобразование Фурье обычно рассматривается как деко частоты и амплитуды, то есть *обратимый* переход от *временно́го пространства* в *частотное пространство*. Богатые возможности применения основываются полезных свойствах преобразования:

- Преобразования являются линейными операторами и, с соответствующей нормализацией, унитарными (свойство, известное как теорема Парсеваля, или, в как теорема Планшереля, или, в наиболее общем, как дуализм Понтрягина).
- Преобразования обратимы, причём обратное преобразование имеет практически такую же форму, как и прямое преобразование.
- Синусоидальные базисные функции (вернее, комплексные экспоненты) являются собственными функциями дифференцирования, что означает, что данное представление превращает линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в обычные алгебраические. (Например, в линейной стационарной системе частота — консервативная величина, поэтому поведение на каждой частоте может решаться независимо).
- По теореме о свёртке, преобразование Фурье превращает сложную операцию свёртки в простое умножение, что означает, что они обеспечивают эффективный способ вычисления основанных на свёртке операций, таких как умножение многочленов и умножение больших чисел.
- Дискретная версия преобразования Фурье может быть быстро рассчитана на компьютерах с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Дискретное преобразование Фурье (в англоязычной литературе **DFT**, **Discrete Fourier Transform**) — это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в MP3, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале. Дискретное преобразование Фурье требует в качестве входа дискретную функцию. Такие функции часто создаются путём дискретизации (выборки значений из непрерывных функций). Дискретные преобразования Фурье помогают решать дифференциальные уравнения в частных производных и выполнять такие операции, как свёртки. Дискретные преобразования Фурье также активно используются в статистике, при анализе временных рядов. Существуют многомерные дискретные преобразования Фурье .

Свертка функций. Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, то

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \leftrightarrow F(\omega)G(\omega).$$

2. **Преобразование Лапласа** получается из преобразования Фурье заменой $p = i\omega$.

Для функции f, удовлетворяющей условиям:

$|f(t)| < Ce^{\gamma_0 t}$ при $t \geq 0$, $f(t) = 0$ при $t < 0$ (γ_0 и C – постоянные),

прямое и обратное преобразование Лапласа имеют вид

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty} \Phi(p)e^{pt}dp.$$

Функция Φ определена и аналитична в полуплоскости $Re\, p = -\mu > \gamma_0$.

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ последовательностей

Преобразование последовательностей включает в себя такие понятия, как **дискретные преобразования Лапласа**, Фурье, **разностные операторы**, свёртка двух последовательностей, **биномиальные**

преобразования, преобразования Стирлинга и другие. Преобразования последовательности могут использоваться для ускорения сходимости ряда.

Например, биномиальное преобразование последовательности $a_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ в $s_n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ имеет вид

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k,$$

где $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент.

Ортогональные и самосопряженные (симметрические) операторы в евклидовом пространстве

евклидово пространство	
симметрическая матрица	$A^T = A$
симметрический (самосопряжённый) оператор	$(Ax, y) = (x, Ay)$
ортогональная матрица	$A^T = A^{-1}$
ортогональный оператор	$(Ax, Ay) = (x, y)$

Пусть L– евклидово пространство.

Опр. Линейный оператор $A^*: L \to L$ называется ***сопряженным*** линейному оператору $A: L \to L$, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$

$$(A(\bar{x}), \bar{y}) = (\bar{x}, A^*(\bar{y})).$$

Теорема. Каждый линейный оператор A имеет единственный сопряженный оператор A^*.

Опр. Линейный оператор $A: L \to L$ называется ***самосопряженным***, если он совпадает со своим сопряженным, т.е. $\boldsymbol{A = A^*}$.

Опр. Линейный оператор $A: L \to L$ называется ***симметрическим***, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$

$$(A(\bar{x}), \bar{y}) = (\bar{x}, A(\bar{y})).$$

Самосопряжённый оператор является симметрическим; обратное, вообще говоря, не верно. **Для непрерывных операторов, определённых на всём пространстве, понятия симметрический и самосопряжённый совпадают**.

В <u>ортонормированном базисе</u> матрица A^* сопряженного оператора A^* является транспонированной матрицей A^{T} исходного оператора A, т.е.

$$\boldsymbol{A^* = A^{\mathrm{T}}}.$$

В <u>ортонормированном базисе</u> матрица A самосопряженного оператора совпадает со своей транспонированной $\boxed{A = A^T,}$

Теорема. Линейный оператор A является самосопряженным (симметрическим) тогда и только тогда, когда в любом *ортонормированном* базисе его матрица является симметрической.

<u>Утв</u>. Все собственные значения *симметрической* матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

<u>Утв</u>. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема. Пусть A – самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве L. Тогда в пространстве L существует ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора A.

Следствие. Матрица A самосопряженного линейного оператора в евклидовом пространстве приводима к диагональному виду.

Примеры. В пространстве $\mathbf{R}^3$ симметрическими являются операторы:

$f(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$ (где $\lambda \in \mathbf{R}$ – фиксированное число) – оператор растяжения в λ раз

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *оператор растяжения вдоль оси Ox*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$, где λ_i – коэффициенты растяжения вдоль соответствующих осей.

Опр. Линейный оператор $A: L \to L$ называется ***ортогональным***, если он сохраняет скалярное произведение элементов евклидова пространства L, т. е. если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ выполняется равенство

$$(A(\bar{x}), A(\bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Из определения следует, что ортогональный оператор сохраняет ортогональность и норму элементов евклидова пространства, поскольку

$$\text{если } (\bar{x}, \bar{y}) = 0, \text{ то } (A(\bar{x}), A(\bar{y})) = 0,$$

$$\|A(\bar{x})\| = \sqrt{(A(\bar{x}), A(\bar{x}))} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \|\bar{x}\|.$$

Теорема. Линейный оператор $A: L \to L$, действующий в евклидовом пространстве, является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис евклидова пространства L в ортонормированный базис этого пространства.

Опр. Матрица A называется ***ортогональной***, если $A^T A = E$.

Матрица A ортогонального оператора A является ортогональной. Признаком ортогональности матрицы является попарная ортогональность ее столбцов и строк.

Свойства ортогональных матриц.

1. Если A–ортогональная матрица, то $A^{-1} = A^T$.
2.Если A–ортогональная матрица, то $\det A = \pm 1$.

В пространствах $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние. Например, оператор поворота вектора на фиксированный угол; оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве.

Примерами ортогональных матриц являются:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицами каких линейных операторов указанные матрицы являются?

Дискретное косинусное преобразование (англ. *Discrete Cosine Transform, DCT*) — одно из ортогональных преобразований. Вариант косинусного преобразования для вектора действительных чисел. Применяется в алгоритмах сжатия информации с потерями, например, MPEG и JPEG. Это преобразование тесно связано с дискретным преобразованием Фурье и является гомоморфизмом его векторного пространства.

Данное преобразование является линейным, поэтому его результат можно вычислить при помощи умножения матрицы преобразования и вектора. Матрица ДКП является ортогональной (обратная матрица равна транспонированной), поэтому обратное преобразование вычисляется с помощью умножения транспонированной матрицы ДКП на вектор. На практике используется вариант ДКП с матрицей, пропорциональной ортогональной (получающейся из ортогональной умножением на константу).