ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5.
РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рекуррентные соотношения
Оператор конечных разностей
Решетчатые функции
Разностные уравнения
Производящие функции
Z-преобразование и его свойства
Свертка функций
Восстановление решетчатой функции по ее Z-преобразованию

Краткая таблица Z-преобразования основных решетчатых функций

$f(n)$	$F(z)$
$1(n)=1$	$\dfrac{z}{z-1}$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
$(-1)^n$	$\dfrac{z}{z+1}$
$e^{\alpha n}$	$\dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$
$\dfrac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
$\cos\beta n$	$\dfrac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2\cos\beta+1}$
$\sin\beta n$	$\dfrac{z\sin\beta}{z^2-2\cos\beta+1}$
n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\sum_{k=0}^{n} f(k)$	$\dfrac{z}{z-1}F(z)$
$f(n-k)$	$\dfrac{1}{z^k}F(z)$
$f(n+k)$	$z^kF(z)-\left(z^kf(0)+z^{k-1}f(1)+\cdots+zf(k-1)\right)$
$nf(n)$	$-zF'(z)$
$a^nf(n)$	$F(az)$
$f(n)*g(n)$	$F(z)G(z)$

Пример.

Найти формулу общего члена последовательности, если $x_0=1$, а каждый последующий на 2 больше удвоенного предыдущего.

Имеем рекуррентную формулу:

$$\boxed{x_{n+1}=2+2x_n, x_0=1.}$$

Пусть $x(n)$ – неизвестная решетчатая функция. Тогда имеем линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x(n+1)=2+2x(n), x(0)=1.$$

С помощью Z-преобразования переведем это уравнение ***из области оригиналов в область изображений***.

Применим Z-преобразование к обеим частям разностного уравнения

$$Z(x(n+1))=Z(2+2x(n)),$$

Учитывая свойство *линейности* Z-преобразования, получим

$$Z(x(n+1))=2Z(1)+2Z(x(n)).$$

Воспользуемся табличными значениями и применим *формулу сдвига*

$$\boldsymbol{f(n+k)\leftrightarrow z^kF(z)-\left(z^kf(0)+z^{k-1}f(1)+\cdots+zf(k-1)\right).}$$

В частности, имеем $Z(x(n))=F(z),$

$$Z(x(n+1))=zF(z)-zx(0),$$

$$Z(1)=\frac{z}{z-1},$$

и операторное соотношение относительно $F(z)$ – изображения искомого решения $x(n)$:

$$zF(z)-z\cdot 1=\frac{2z}{z-1}+2F(z),$$

или $(z-2)F(z)=\dfrac{2z}{z-1}+1,$ следовательно, $\boxed{F(z)=\dfrac{z^2+z}{(z-1)(z-2)}.}$

Восстановим решение $x(n)$, применяя теорию вычетов.

Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1=1$ и $z_2=2$ – простые полюсы.

Если $a_1,a_2,...,a_m$ – особые точки функции $F(z)$, то $\displaystyle x(n)=\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_k}F(z)z^{n-1}.$

Если a – простой полюс, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=a}F(z)z^{n-1}=\lim\limits_{z\to a}F(z)z^{n-1}(z-a).$

Если же a – полюс кратности m, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=a}F(z)z^{n-1}=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{m-1}\left(F(z)z^{n-1}(z-a)^m\right)}{dz^{m-1}}.$

Имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z^2+z}{(z-1)(z-2)}z^{n-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z}{(z-2)}z^{n-1}=-2;$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{z^2+z}{(z-1)(z-2)}z^{n-1}=\lim_{z\to 2}\frac{z^2+z}{(z-1)}z^{n-1}=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид: $\boxed{x_n=3\cdot 2^n-2.}$

Пример 2.

Решить линейное разностное уравнение, используя Z-преобразование:

$$x(n+3)-3x(n+2)+3x(n+1)-x(n)=2^n,$$
$$x(0)=0,$$
$$x(1)=0,$$
$$x(2)=1.$$

Установим соответствие:

$$x(n)\leftrightarrow F(z)$$
$$x(n+1)\leftrightarrow z(F(z)-x(0))=zF(z)$$
$$x(n+2)\leftrightarrow z^2(F(z)-x(0)-\frac{x(1)}{z})=z^2F(z)$$
$$x(n+3)\leftrightarrow z^3(F(z)-x(0)-\frac{x(1)}{z}-\frac{x(2)}{z^2})=z^3F(z)-z$$
$$2^2\leftrightarrow\frac{z}{z-2}$$

Тогда, подставляя в уравнение, получим:

$$z^3F(z)-z-3z^2F(z)+3zF(z)-F(z)=\frac{z}{z-2}.$$

Операторное уравнение имеет вид:

$$F(z)(z^3-3z^2+3z-1)=\frac{z}{z-2}+z$$
$$F(z)=\frac{z+z^2-2z}{(z-2)\big((z-1)(z^2+z+1)-3z(z-1)\big)}=$$
$$=\frac{z^2-z}{(z-2)(z-1)(z^2-2z+1)}=\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}.$$

Вычислим вычеты:

$z=2$ – простой полюс: $\operatorname*{Res}_{z=2}F(z)z^{n-1}=\lim_{z\to 2}\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-2)(z-1)^2}\cdot(z-2)=2^n,$

$z=1$ – полюс кратности 2: $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big(F(z)z^{n-1}(z-1)^2\big)=\left(\frac{z^n}{z-2}\right)'=\frac{nz^{n-1}(z-2)-z^n}{(z-2)^2},$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}F(z)z^{n-1}=\lim_{z\to 1}\frac{nz^{n-1}(z-2)-z^n}{(z-2)^2}=\frac{-n-1}{(-1)^2}=-n-1.$$

Таким образом,

$$x(n)=\operatorname*{Res}_{z=2}F(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=1}F(z)z^{n-1}=2^n-n-1.$$

Ответ: $x(n)=2^n-n-1.$

ЗАДАНИЕ 1.

1. Найти формулу общего члена x_n последовательности.

2. Найти $\sum_{k=0}^{n} x_k$.

3. Найти $\sum_{k=0}^{n} x_k x_{n-k}$. Если:

Вариант 1. $x_0 = 0$, а каждый последующий на 3 единицы больше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 2. $x_0 = 8$, а каждый последующий на единицу меньше предыдущего, умноженного на 4;

Вариант 3. $x_0 = 5$, а каждый последующий на 5 единиц больше предыдущего, умноженного на 2;

Вариант 4. $x_0 = 12$, а каждый последующий на 10 единиц меньше предыдущего, умноженного на 2;

Вариант 5. $x_0 = -6$, а каждый последующий на 9 единиц меньше предыдущего, умноженного на 2;

Вариант 6. $x_0 = 8$, а каждый последующий на 10 единиц меньше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 7. $x_0 = 18$, а каждый последующий на 2 единицы больше предыдущего, умноженного на 6;

Вариант 8. $x_0 = -12$, а каждый последующий на 2 единицы больше предыдущего, умноженного на 2;

Вариант 9. $x_0 = -16$, а каждый последующий на 6 единиц больше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 10. $x_0 = 13$, а каждый последующий на 8 единиц больше предыдущего, умноженного на 7;

Вариант 11. $x_0 = 3$, а каждый последующий на 3 единицы меньше предыдущего, умноженного на 8;

Вариант 12. $x_0 = 4$, а каждый последующий на 9 единиц больше предыдущего, умноженного на 2;

Вариант 13. $x_0 = 0$, а каждый последующий на 8 единиц меньше предыдущего, умноженного на 3;

Вариант 14. $x_0 = 0$, а каждый последующий на 5 единиц меньше предыдущего, умноженного на 2;

Вариант 15. $x_0 = -3$, а каждый последующий на 4 единиц меньше предыдущего, умноженного на 7;

Вариант 16. $x_0 = 9$, а каждый последующий на 7 единиц меньше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 17. $x_0 = 8$, а каждый последующий на 2 единицы больше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 18. $x_0 = 18$, а каждый последующий на 6 единиц меньше предыдущего, умноженного на 3;

Вариант 19. $x_0 = -1$, а каждый последующий на 9 единиц меньше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 20. $x_0 = 6$, а каждый последующий на 8 единиц больше предыдущего, умноженного на 3;

Вариант 21. $x_0 = -7$, а каждый последующий на 5 единиц меньше предыдущего, умноженного на 6;

Вариант 22. $x_0 = 17$, а каждый последующий на 3 единицы меньше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 23. $x_0 = -9$, а каждый последующий на 10 единиц меньше предыдущего, умноженного на 5;

Вариант 24. $x_0 = -18$, а каждый последующий на 4 единицы больше предыдущего, умноженного на 6;

Вариант 25. $x_0 = -2$, а каждый последующий на 2 единицы меньше предыдущего, умноженного на 8;

Вариант 26. $x_0 = 4$, а каждый последующий на 6 единиц больше предыдущего, умноженного на 8;

Вариант 27. $x_0 = -1$, а каждый последующий на 6 единиц меньше предыдущего, умноженного на 8;

Вариант 28. $x_0 = -13$, а каждый последующий на 7 единиц меньше предыдущего, умноженного на 7;

Вариант 29. $x_0 = 18$, а каждый последующий на 3 единицы меньше предыдущего, умноженного на 7;

Вариант 30. $x_0 = -20$, а каждый последующий на 6 единиц меньше предыдущего, умноженного на 4;

ЗАДАНИЕ 2.

Используя Z-преобразование, решить начальную задачу для разностного уравнения:

Вариант 1.
$$x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = n \cdot 3^n,$$
$$x(0) = 0, x(1) = 0.$$

Указание: $nf(n) \leftrightarrow -ZF'(Z)$.

Вариант 2.
$$x(n+2) - 5x(n+1) + 4x(n) = 2 \cdot (-1)^n,$$
$$x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Вариант 3. $x(n+2)-x(n)=\sin\frac{\pi n}{2}$,
$x(0)=0, x(1)=0.$

Вариант 4. $x(n+2)+16x(n)=17$,
$x(0)=1, x(1)=5.$

Вариант 5. $x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=2\cdot 4^n$,
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 6. $x(n+2)+x(n)=1-(-1)^n$,
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 7. $x(n+2)-4x(n)=4^n$,
$x(0)=x(1)=1.$

Вариант 8. $x(n+2)-x(n)=2^n$,
$x(0)=0, x(1)=0.$

Вариант 9. $x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=1$,
$x(0)=1, x(1)=-1.$

Вариант 10. $x(n+2)+6x(n+1)+13x(n)=1$,
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 11. $x(n+2)-x(n)=(-1)^n$,
$x(0)=1, x(1)=-1.$

Вариант 12. $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=(-1)^n$,
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 13. $x(n+2)-4x(n)=4^n$,
$x(0)=1, x(1)=1.$

Вариант 14. $x(n+2)-3x(n+1)-10x(n)=0$,
$x(0)=3, x(1)=-1.$

Вариант 15. $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=n$,
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 16. $x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=0$,
$x(0)=2, x(1)=3.$

Вариант 17. $x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=0$,
$x(0)=1, x(1)=2.$

Вариант 18. $x(n+2)-6x(n+1)+8x(n)=3^n$,
$x(0)=0, x(1)=0.$

Вариант 19. $x(n+2)-4x(n+1)+4x(n)=(-1)^n$,
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 20. $x(n+2)-3x(n+1)-4x(n)=1$,
$x(0)=1, x(1)=1.$

Вариант 21. $x(n+2)-10x(n+1)+25x(n)=5,$
$x(0)=1, x(1)=0.$

Вариант 22. $x(n+2)-8x(n+1)+7x(n)=n,$
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 23. $x(n+2)-5x(n)=2^n,$
$x(0)=0, x(1)=0.$

Вариант 24. $x(n+2)+2x(n+1)=2^n\cos\dfrac{\pi n}{2},$
$x(0)=1, x(1)=0.$

Вариант 25. $x(n+2)+x(n+1)-20x(n)=2\cdot 2^n,$
$x(0)=1, x(1)=1.$

Вариант 26. $x(n+2)-5x(n+1)+4x(n)=1+(-1)^n,$
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 27. $x(n+2)+6x(n+1)+9x(n)=3n,$
$x(0)=0, x(1)=1.$

Вариант 28. $x(n+2)-9x(n+1)+20x(n)=3^n,$
$x(0)=1, x(1)=1.$

Вариант 29. $x(n+2)-7x(n+1)+10x(n)=1,$
$x(0)=1, x(1)=1.$

Вариант 30. $x(n+2)-8x(n+1)=1,$
$x(0)=0, x(1)=1.$