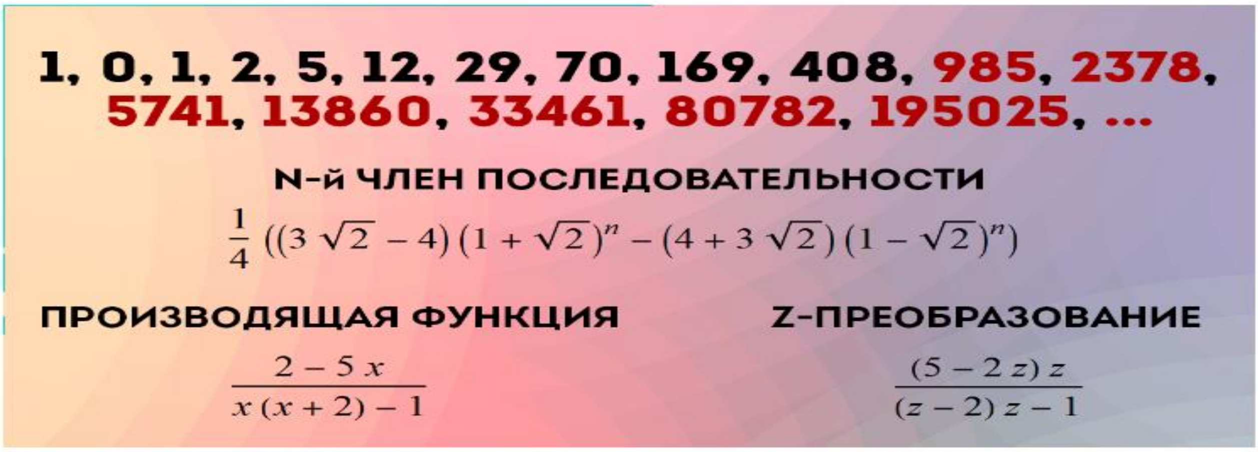
Лекция 5

РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ.

Другими словами: Применение преобразования Лапласа и Z-преобразования при решении задач. Разностные уравнения.

Для любознательных https://habr.com/ru/company/wolfram/blog/475728/



OsipovRoman 13 ноя 2019 в 18:51

Какой следующий член...? — Ищем формулу для n-го члена последовательности, производящие функции и Z-преобразование

8 мин 6.2K

Блог компании Wolfram Research, Занимательные задачки, Программирование*, Алгоритмы*, Математика*

Туториал

Скачать файл с кодом и данные можно в оригинале поста в моем блоге

ЗАДАЧА. Рассмотрим последовательность Фибоначчи. Рекуррентное задание: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $n = 0, 1, 2,\ldots$, $a_0=0$, $a_1=1$.

Чи́сла Фибона́ччи (вариант написания — **Фибона́чи**) — элементы числовой последовательности

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, ...

1) Найти формулу общего члена a_n в явном виде, как функцию от n.
2) Найти $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
3) Найти $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k}$.

НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЙ МЕТОД работы с числовыми последовательностями заключается в преобразовании бесконечных рядов, «генерирующих» эти последовательности.

Пусть $\{a_n\}$, $n \in N$, – последовательность. Этой последовательности поставим в соответствие ряд по целым степеням z:

$$f^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots.$$

Предположим, что всегда существует неотрицательное α, для которого $|a_n| < \alpha^n$, и в этом случае всякой последовательности a_n однозначно соответствует ряд $f^*(z)$ по целым степеням z, который является аналитической функцией в области $|z| < \frac{1}{\alpha}$.

Соответствие между последовательностью $\{a_n\}$ и функцией $f^*(z)$ в этом случае взаимно однозначное. **Функция $f^*(z)$ называется производящей функцией последовательности $\{a_n\}$**. Общий член последовательности a_n представляет собой функцию от n, $n = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через $f(n)$, т.е.

$$a_n = f(n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Рассматривают производящие функции другого типа, называемые ***экспоненциальными производящими функциями***

$$f^e(z) = a_0 + a_1 z + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n z^n}{n!} + \cdots,$$

а также ***производящие функции по линейно независимой системе*** функций $\{\varphi_n\}$

$$\varphi^*(z) = a_0\varphi_0(z) + a_1\varphi_1(z) + a_2\varphi_2(z) + \cdots + a_n\varphi_n(z) + \cdots.$$

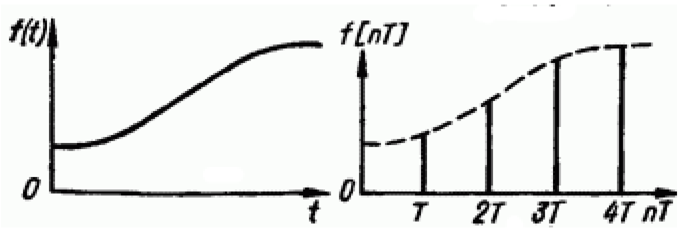
Требование взаимно однозначного соответствия между $\{a_n\}$ и $\varphi^*(z)$, приводит к условию линейной независимости всех функций φ_n.

Эти функциональные преобразования применяются самым различным образом во многих областях: комбинаторике, теории вероятностей, математической статистике, электронике (импульсные режимы), исчислении конечных разностей, дискретных физических теориях и т.д.

Понятие о решетчатой функции. Рассмотрим функцию $f(t)$, определенную в дискретных точках $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ некоторого промежутка, причем $t_{n+1} > t_n$.

Решетчатой называется функция, которую образуют ординаты непрерывной функции при дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной. Решетчатая функция существует только при дискретных значениях аргумента. Между этими значениями аргумента решетчатая функция равна нулю.

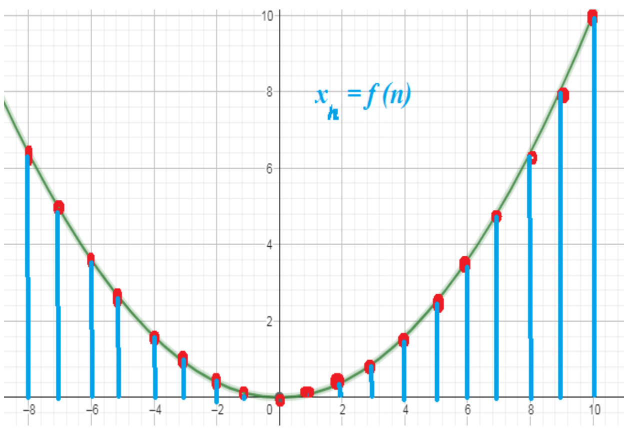
Решетчатую функцию обозначают $f[nT]$, где T – период дискретности, n – любое целое число.



Пусть *T*=1. На рисунке точками отмечены значения функции $f(t)$

при $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Получили последовательность значений

$$\{x_n\} = \{f(n)\} = \{\dots, f(-n), \dots, f(-1), f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\}.$$



Примеры решетчатых функций.

1. $1(n) = 1$ – решетчатая единичная функция, $n = 0,1,2, \dots$.

2. $f(n) = C = const$ – решетчатая постоянная функция, $n \epsilon \mathbf{Z}$;

3. $f(n) = a^n, 0 < a \neq 1$ – решетчатая показательная функция, $n\epsilon\mathbf{Z}$;

4. $f(n) = n^k$ – решетчатая степенная функция, $n = 1,2, \ldots$, $k\epsilon\mathbf{R}$.

Для решетчатых функций применяют дискретное преобразование Лапласа. Различают **D-преобразование**

$$D(f[nT]) = \Phi_T(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]e^{-nTp}$$

и **Z-преобразование**

$$Z(f[nT]) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]z^{-n}.$$

Рассмотрим *Z*-преобразование решетчатой функции $f(n)$ (последовательности чисел), причем $f(n) \equiv 0$ при $n < 0$. Функция $F(z)$ комплексной плоскости z, определяемая равенством

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \cdots + \frac{f(n)}{z^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}, \qquad (1)$$

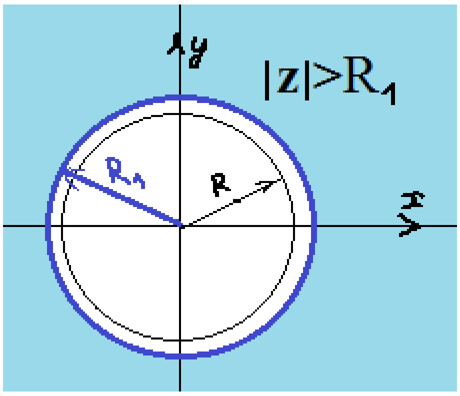
является ***Z-преобразованием решетчатой функции*** $f(n)$ или ее ***преобразованием Лорана*** или ***производящей функцией для последовательности***.
Записывают $f(n) \leftrightarrow F(z)$.

Функция $F(z)$ может рассматриваться

– как функция комплексной переменной z, обладающая всеми стандартными свойствами, доказываемыми в учебниках по анализу
– как формальный степенной ряд в других случаях.

Правая часть равенства (1) является рядом Лорана функции $F(z)$, который сходится абсолютно в области $|z| > R$, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f(n)|} = R.$$



Пример. Найти Z-преобразование решетчатой единичной функции $1(n) = 1$.
Имеем по формуле (1)

$$Z[1(n)] = F(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-1/z} = \frac{z}{z-1},$$

если $|1/z| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$.

Основные свойства Z-преобразования

(набор приемов преобразования производящих функций)

1. **Линейность.** Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, $g(n) \leftrightarrow G(z)$, то при любых α и β из **R**

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \leftrightarrow \alpha F(z) + \beta G(z). \tag{2}$$

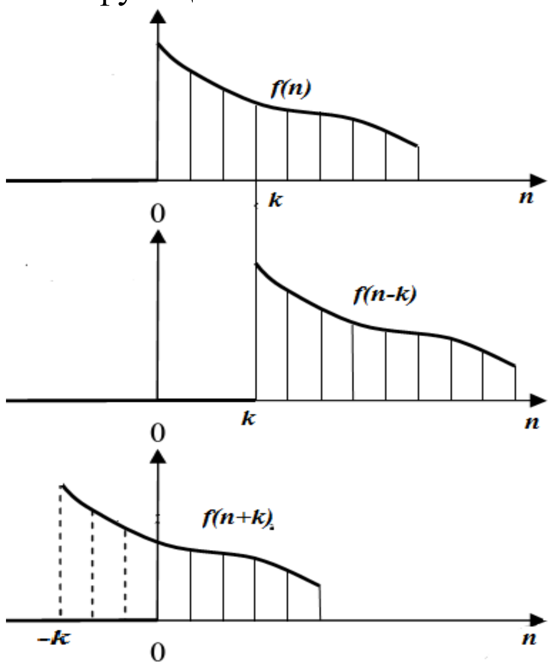
2. **Сдвиг.** Z-преобразование смещенной решетчатой функции.

Рассмотрим следующие функции:

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n = 0,1,\dots,k-1; \\ f(n-k), & n = k, k+1, \dots; \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 0, & n = -(k+1), -(k+2), \dots; \\ f(n+k), & n = -k, -k+1, \dots, 0,1,2, \dots; \end{cases}$$

Функция $f_1(n)$ получается из $f(n)$ смещением ее по оси n вправо на k единиц, а функция $f_2(n)$ – из $f(n)$ смещением последней на k единиц влево. Такие функции называются смещенными решетчатыми функциями. Их графики



Z-преобразование смещенных решетчатых функций:

$$f(n-k) \leftrightarrow \frac{1}{z^k} F(z), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{f(n+k) \leftrightarrow z^k F(z) - \left(z^k f(0) + z^{k-1} f(1) + \dots + z f(k-1)\right)}. \tag{4}$$

3. Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то

$$\boldsymbol{a^n f(n) \leftrightarrow F(az)}. \tag{5}$$

4. **Дифференцирование Z-преобразования**. Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то

$$\boldsymbol{n f(n) \leftrightarrow -z F'(z)}. \tag{6}$$

5. **Z-преобразование свертки решетчатых функций**. ***Сверткой*** двух решетчатых функций $f(n)$ и $g(n)$ называется решетчатая функция

$$\boldsymbol{f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) g(n-k)}. \tag{7}$$

Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, $g(n) \leftrightarrow G(z)$, то справедлива формула

$$\boldsymbol{f(n) * g(n) \leftrightarrow F(z) G(z)}. \tag{8}$$

6. **Преобразование конечной суммы** $S(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$.

Так как $S(n) = f(n) * 1(n)$ и $1(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$, то по формуле (8) имеем

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} f(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z)}. \tag{9}$$

Найдем производящую функцию (1) для последовательности Фибоначчи: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $n = 0, 1, 2,\ldots$, $a_0=0$, $a_1=1$.

Запишем рекуррентное соотношение в виде

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n), \qquad f(0) = 0, f(1) = 1.$$

Применим Z-преобразование. Учитывая свойство линейности (2) и формулы сдвига (4), т.е.

$$f(n+1) \leftrightarrow zF(z) - zf(0),$$

$$f(n+2) \leftrightarrow z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1),$$

получим

$$z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1) = zF(z) - zf(0) + F(z).$$

Имеем операторное уравнение

$$F(z)[z^2 - z - 1] = z \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}.$$

Производящая функция вида (1) последовательности чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{5}{z^5} + \frac{8}{z^6} + \cdots = \frac{z}{z^2 - z - 1},$$

или

- Производящей функцией последовательности чисел Фибоначчи является:

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Краткая таблица Z-преобразования основных решетчатых функций

$f(n)$	$F(z)$
$1(n) = 1$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
$e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}}$
$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
$\cos\beta n$	$\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2 - 2\cos\beta + 1}$
$\sin\beta n$	$\frac{z\sin\beta}{z^2 - 2\cos\beta + 1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$

n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

Восстановление решетчатой функций по ее Z-преобразованию.

При восстановлении решетчатой функции в простейших случаях можно использовать таблицу основных Z-преобразований.

В общем случае справедлива

Теорема. Пусть $f(n) \leftrightarrow F(z)$. Тогда

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} F(z)z^{n-1}dz\,, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{10}$$

где Γ – любая окружность радиусом $|z| = R_1 > R$, обходимая против часовой стрелки.

Интеграл (10) в общем случае можно вычислить с помощью вычетов. Вычет совпадает с коэффициентом c_{-1} при $(z-a)^{-1}$ ряда Лорана функции в некоторой окрестности особой точки a.

А именно:

$$\boldsymbol{f(n) = \sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k}(F(z)z^{n-1}),} \tag{11}$$

где z_k– особые точки функции $F(z)$, лежащие внутри контура $|z| = R_1$.

Вычет функции $F(z)z^{n-1}$ в простом полюсе z_0 вычисляется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(F(z)z^{n-1}) = \lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)F(z)z^{n-1}\right), \tag{12}$$

а в полюсе m-го порядка – по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(F(z)z^{n-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m F(z)z^{n-1}). \tag{13}$$

Для последовательности Фибоначчи найдем формулу общего члена – восстановим решетчатую функцию по Z-преобразованию

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}.$$

Функция $F(z)$ имеет два простых полюса:

$$z_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \text{ (решения уравнения } z^2 - z - 1 = 0).$$

Замечание, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение.

По формулам (11) и (12) имеем

$$f(n) = \operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(\frac{z}{z^2-z-1}z^{n-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=z_2}\left(\frac{z}{z^2-z-1}z^{n-1}\right),$$

$$\underset{z=z_1}{\mathbf{Res}}\left(\frac{z}{z^2-z-1}z^{n-1}\right)=\lim_{z\to\frac{1+\sqrt5}{2}}\left(\left(z-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\frac{z}{\left(z-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)}z^{n-1}\right)=$$

$$=\lim_{z\to\frac{1+\sqrt5}{2}}\left(\frac{z^n}{z-\frac{1-\sqrt5}{2}}\right)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt5}{2}-\frac{1-\sqrt5}{2}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}$$

$$\underset{z=z_2}{\mathbf{Res}}\left(\frac{z}{z^2-z-1}z^{n-1}\right)=\lim_{z\to\frac{1-\sqrt5}{2}}\left(\left(z-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\frac{z}{\left(z-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)}z^{n-1}\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{-\sqrt5}$$

Для последовательности Фибоначчи нашли формулу общего члена в явном виде как функцию от *n* (формула Бине):

$$\boxed{f(n)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}}$$

Используя формулу (9), можно найти конечную сумму $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ чисел Фибоначчи, восстановив решетчатую функцию по ее *Z*-преобразованию

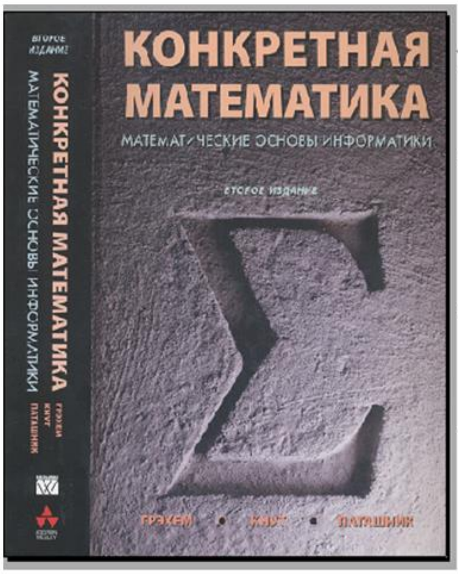
$$F(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z^2-z-1)}$$

ПРОВЕРЬТЕ. $\sum_{k=0}^{n} f(k)=\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt5}-1$

Используя формулу (8), можно найти конечную сумму произведений чисел Фибоначчи $\sum_{k=0}^{n} f(k)f(n-k)$, восстановив решетчатую функцию по ее *Z*-преобразованию

$$F^2(z)=\frac{z^2}{(z^2-z-1)^2}$$

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



Оглавление

КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ РЕШЕТЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

Конечной разностью первого порядка $\Delta f(n)$ решетчатой функции $f(n)$ называется выражение

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \tag{14}$$

а разностью второго порядка $\Delta^2 f(n)$ – выражение

$$\Delta^2 f(n) = \Delta\big(\Delta f(n)\big) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) =$$
$$= \big(f(n+2) - f(n+1)\big) - \big(f(n+1) - f(n)\big) =$$
$$= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \tag{15}$$

Аналогично для разности третьего порядка $\Delta^3 f(n)$

$$\Delta^3 f(n) = \Delta\big(\Delta^2 f(n)\big) = \Delta^2 f(n+1) - \Delta^2 f(n) =$$
$$= f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n). \tag{16}$$

По индукции для разности k-го порядка $\Delta^k f(n)$ можно получить формулу

$$\Delta^k f(n) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f(n)\right) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) -$$
$$- \cdots + (-1)^i C_k^i f(n+k-i) + \cdots + (-1)^k f(n), \tag{17}$$

где C_k^i – биномиальные коэффициенты, определенные формулой

$$C_k^i = \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{i!}. \tag{18}$$

Разности первого порядка приближают производные первого порядка, разности второго – производные 2-го порядка и т.д.

Формулы (14) – (17) определяют разности решетчатых функций через значения этих функций в целочисленных точках. Можно выразить саму функцию $f(n)$ через ее разности различных порядков. Находим

$$f(n+1) = f(n) + \Delta f(n), \tag{19}$$
$$f(n+2) = f(n) + 2\Delta f(n) + \Delta^2 f(n), \tag{20}$$
$$f(n+3) = f(n) + 3\Delta f(n) + 3\Delta^2 f(n) + \Delta^3 f(n), \tag{21}$$

....

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \Delta f(n) + C_k^2 \Delta^2 f(n) + \cdots + \Delta^k f(n). \tag{22}$$

Эти формулы определяют значения решетчатой функции через ее конечные разности до порядка k включительно. Они представляют собой ***аналог формул Тейлора для непрерывных функций***.

Основные понятия разностных уравнений. Линейные разностные уравнения получаются из линейных дифференциальных уравнений для решетчатых функций. Любое соотношение, связывающее решетчатую функцию $x(n)$ и ее разности до порядка k, называется разностным уравнением -го порядка. Будем рассматривать ***линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами*** вида

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \cdots + a_{k-1} x(n+1) + a_k x(n) = f(n), \tag{23}$$

где a_i – const, $i = 0,1,\dots,k$; $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$; $x(n)$ – неизвестная решетчатая функция. Порядок этого уравнения определяется разностью $k = (n+k) - n$ наибольшего и наименьшего значений аргумента функции $x(n)$, входящей в уравнение.

Если $f(n) \neq 0$, то уравнение (23) называется ***неоднородным***, если $f(n) = 0$, – то ***однородным***. ***Решением уравнения*** (23) называется решетчатая функция (последовательность) $x_n = \varphi(n)$, которая при подстановке ее в уравнение (23) превращает его в тождество при $n = 0,1,2,\dots$.

По аналогии с задачей Коши для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка ***задача с начальными данными для разностного уравнения*** (11) (начальная задача) формулируется следующим образом: найти решетчатую функцию $x(n)$, удовлетворяющую уравнению (23) и начальным условиям

$$x(n_0) = x_0;\ x(n_0+1) = x_1; \dots; x(n_0+k-1) = x_{k-1}, \tag{24}$$

где n_0 – некоторое начальное значение аргумента; $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ – заданные числа.

Решение $x_n = x(n)$ уравнения (23), удовлетворяющее начальным условиям (24), называется ***частным решением*** этого уравнения.

Пусть даны линейное разностное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \cdots + a_{k-1} x(n+1) + a_k x(n) = f(n) \tag{23}$$

и начальные условия:

$$x(0) = x_0;\ x(1) = x_1; \dots; x(k-1) = x_{k-1}. \tag{25}$$

Применив Z-преобразование с учетом его свойств к обеим частям разностного уравнения (23), получим алгебраическое операторное уравнение относительно функции $X(z) \leftrightarrow x(n)$. По найденному $X(z)$ восстановим искомое решение – решетчатую функцию $x(n)$.