Лабораторная работа 3.
Ортогональные системы функций

Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если при всяком $m \neq n$ имеет место равенство

$$\int_a^b \boldsymbol{\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0}.$$

Примером ортогональной системы на отрезке $[-\pi, \pi]$ является **система тригонометрических функций**

$$(\mathbf{1}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots),$$

Теорема Дирихле. Пусть $f(x)$ -2π -периодическая функция на отрезке $[-\pi;\pi]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(x)$ – кусочно-непрерывна;
2. $f(x)$ – кусочно-монотонна.

Тогда $\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)}$

и ряд Фурье сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$, причем:

1. в точках непрерывности $S(x) = f(x)$;
2. если x_0 – точка разрыва, то $S(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$;
3. $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$.

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Пример 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1, x \in (-\pi; 0), \\ 1, x \in (0; \pi). \end{cases}$$

Решение. По формулам найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = -\frac{1}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(0 - (-\pi)) + \frac{1}{\pi}\pi = 0,$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n}\sin n\pi + \frac{1}{\pi n}\sin n\pi = 0,$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(1 - \cos n\pi) - \frac{1}{\pi n}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos n\pi),$$

Используя равенство $(-1)^n = \cos \pi n = \begin{cases} 1, n = 2k, \\ -1, n = 2k+1 \end{cases}$, вычислим коэффициенты b_n:

$$b_n=\frac{2}{\pi n}(1-\cos\pi n)=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\cdot 2k}(1-1), n=2k,\\ \frac{2}{\pi(2k+1)}\cdot 2, n=2k+1\end{cases}=\frac{4}{\pi(2k+1)}.$$

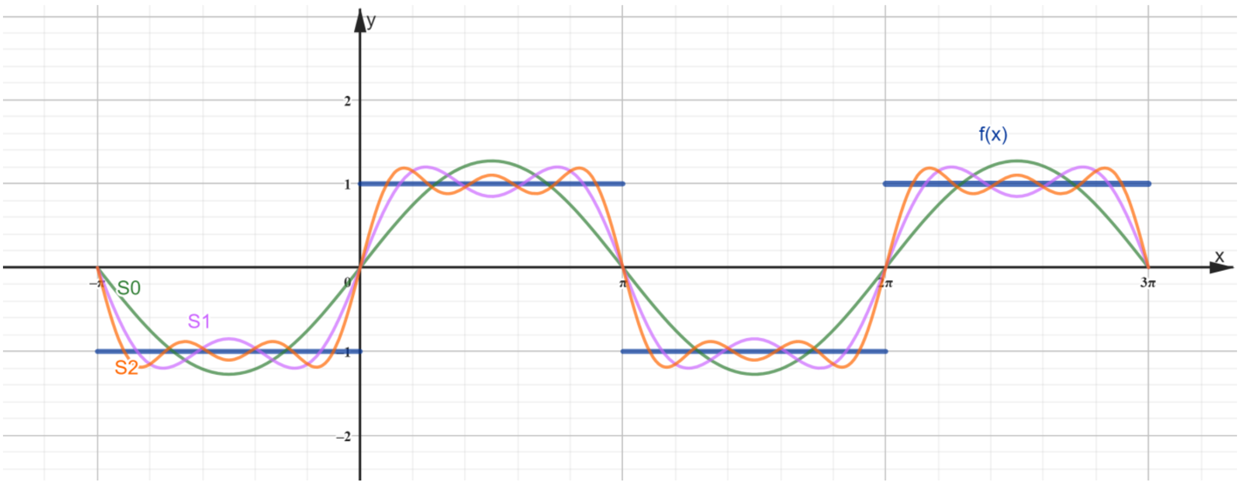
Таким образом, функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\sin nx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{1}\sin x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{2}{5}\sin 5x+\frac{2}{7}\sin 7x+...\right).$$

Частичные суммы ряда Фурье

$$\boldsymbol{S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx.}$$

$$\boldsymbol{S_1(x)=\frac{4}{\pi}\sin x,\ S_3(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\right), S_5(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)}$$



Функция $f(x)$ и первые три, отличные от нуля, частичные суммы ее разложения в ряд Фурье:

Ответ: $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$

Неполные ряды Фурье

В зависимости от четности функции $f(x)$ ее разложение в ряд Фурье может упрощаться и иметь вид соответственно:

- $f(x)$ – четная: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx;$
- $f(x)$ – нечетная: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.$

Пример 2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)=x, x\in(-\pi;\pi)$.

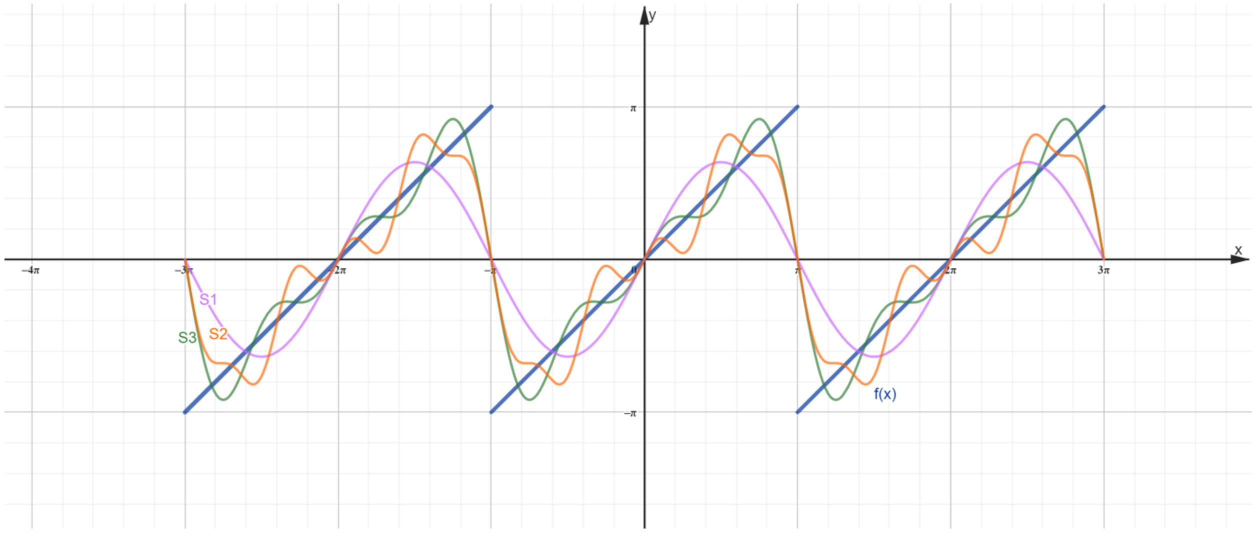
Решение. Так как функция $f(x)=x$ является нечетной, найдем для нее коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos\pi n = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Тогда разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right).$$

Функция $f(x)$ и первые три частичные суммы ее разложения в ряд Фурье:



Ответ: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$

Ортогональные многочлены можно получить при помощи ортогонализации по Шмидту системы заданных на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ функций вида $\sqrt{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\ldots)$, где $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ – некоторая положительная функция, непрерывная на $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

Для отрезка $[-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}]$ и $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}$ получаем *полиномы Лежандра*;

Многочлены Лежандра	
Общая информация	
Формула	$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$
Скалярное произведение	$(f,\ g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$
Область определения	$[-1,\ 1]$
Дополнительные характеристики	
Дифференциальное уравнение	$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0$
Норма	$\lVert P_n(x)\rVert = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$
Названы в честь	Лежандр, Адриен Мари

Первые многочлены Лежандра в явном виде:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$
$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x),$$

Ряд Фурье по полиномам Лежандра для кусочно-гладкой функции $f(x)$ на $[-1,1]$ имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+\cdots,$$

где коэффициенты

$$\boldsymbol{c_n=\frac{\big(f(x),P_n(x)\big)}{\|P_n(x)\|^2}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.}$$

Пример 3. Разложить в обобщенный ряд Фурье по полиномам Лежандра функцию $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}-1, x\in(-1,0)\\ \quad 1, x\in(0,1)\end{cases}$$

$\boldsymbol{P_0(x)=1},\quad \boldsymbol{c_0=\frac{2\cdot 0+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-1)\cdot 1dx+\frac{1}{2}\int_0^1 1\cdot 1dx}=-\frac{1}{2}x\Big|_{-1}^{0}+$
$+\frac{1}{2}x\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\big(0-(-1)\big)+\frac{1}{2}(1-0)=\boldsymbol{0}.$

$\boldsymbol{P_1(x)=x}\quad ,\qquad \boldsymbol{c_1=\frac{2\cdot 1+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}(-1)\cdot xdx+\frac{3}{2}\int_0^1 1\cdot xdx}=$
$-\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=-\frac{3}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{3}{2}.$

$\boldsymbol{P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)},\qquad \boldsymbol{c_2=\frac{2\cdot 2+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)dx=0}$, **т.к.** $\boldsymbol{f(x)P_2(x)}$ **– нечетная функция на отрезке** $[-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}]$.

$\boldsymbol{P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)}\quad ,\qquad \boldsymbol{c_3=\frac{2\cdot 3+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_3(x)dx}=$
$|$т. к. $\boldsymbol{f(x)P_3(x)}$ – четная функция на отрезке $[-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}]|=\boldsymbol{2\cdot\frac{7}{2}\int_0^1 f(x)P_3(x)dx=2\cdot}$
$\boldsymbol{\frac{7}{2}\int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)dx}=\frac{7}{2}\left(\frac{5x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{7}{2}\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{8}.$

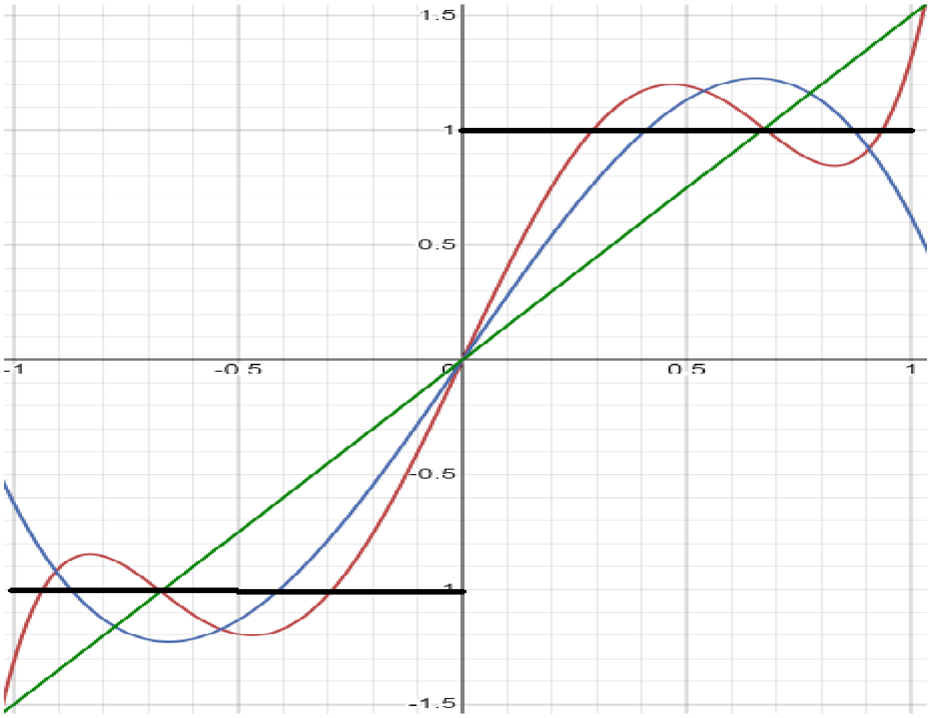
И т.д.

$$\boldsymbol{c_5=\frac{2\cdot 5+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_5(x)dx=2\cdot\frac{11}{2}\int_0^1 1\cdot\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)dx}$$
$$=\boldsymbol{\frac{11}{8}}\left(\boldsymbol{\frac{63x^6}{6}}-\frac{70x^4}{4}-\frac{15x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{8}\left(\frac{63}{6}-\frac{70}{4}-\frac{15}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{11}{16}}.$$

$$f(x)=0\cdot P_0(x)+\frac{3}{2}P_1(x)+0\cdot P_2(x)-\frac{7}{8}P_3(x)+0\cdot P_4(x)+\frac{11}{16}P_5(x)+\cdots$$

Таким образом,

$$f(x)\approx\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)+\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$



Сравните (смотри лекцию)