Элементы функционального анализа

Определение. Линейное (векторное) пространство L называется **нормированным**, если каждому элементу $\overline{x} \in L$ поставлено в соответствие действительное число, которое называется ***нормой*** этого элемента, обозначается $\|\overline{x}\|$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. $\|\overline{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = \overline{0}.$

2. $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha|\,\|\overline{x}\|$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\|\overline{x} + \overline{y}\| \le \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (***неравенство треугольника***).

Если $\|\overline{x}\| = 1$, то вектор $\overline{x}$ называется ***нормированным***.

Примерами норм вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$ являются:

$$\|\overline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

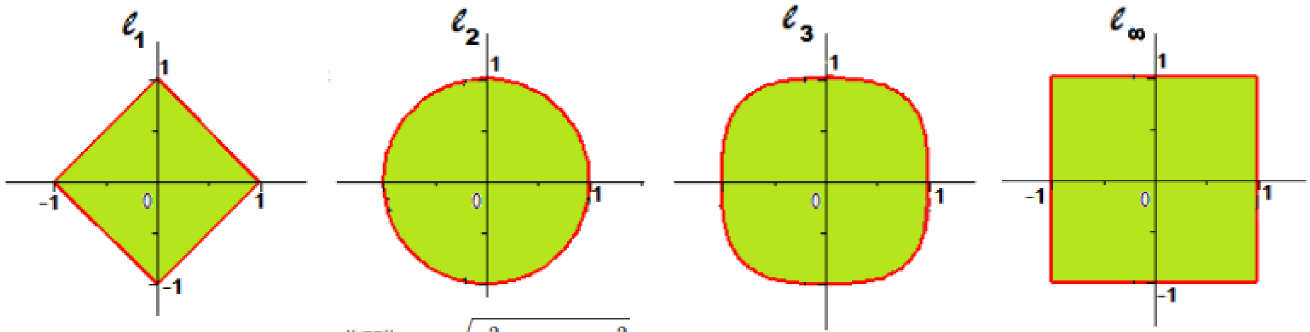
$$\|\overline{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ – евклидова норма;

$$\|\overline{x}\|_\infty = \|\overline{x}\|_c = \max_{i=1,n} |x_i|$$ – равномерная норма.

Пример. Для $X = (1, -2, 3, 4)$ имеем:

$$\|X\|_1 = 10,\ \|X\|_2 = \sqrt{30} \approx 5.477226,\ \|X\|_3 = \sqrt[3]{100} \approx 4.641588, \ldots, \|X\|_\infty = 4\,.$$

Различные способы задания нормы в одном и том же линейном пространстве порождают различные формы окрестности вектора (точки) этого пространства. Для примера изобразим 1-окрестность начала координат в $\mathbb{R}^2$ (``единичный круг"):



$\|X\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ $\quad \|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$ $\quad$ ***гёльдеровские нормы*** $\|X\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}$ $\quad \|X\|_\infty = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |x_j|$

Нормы матриц рассмотрим отдельно

Понятие расстояния между элементами множества реализовано в понятии ***метрического пространства***.

Векторное ***нормированное*** пространство одновременно является ***метрическим***, если расстояние между элементами определить с помощью нормы по формуле

$$\boxed{\rho(x,y)=\|x-y\|.}$$

Определение 1. Пусть X – непустое множество. Отображение $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ называется *метрикой на* X, если для любых x, y, $z \in X$

1) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$; $\rho(x,y)\geqslant 0$;
2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$; ***аксиома симметрии***
3) $\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$. ***аксиома (неравенство) треугольника***

Определение 2. Если ρ – метрика на X, то пара $\langle X,\rho\rangle$ называется *метрическим пространством.*

Примеры метрических пространств.

1. Множество изолированных точек с метрикой (дискретная метрика)

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{если } x=y,\\ 1, \text{если } x\neq y.\end{cases}$$

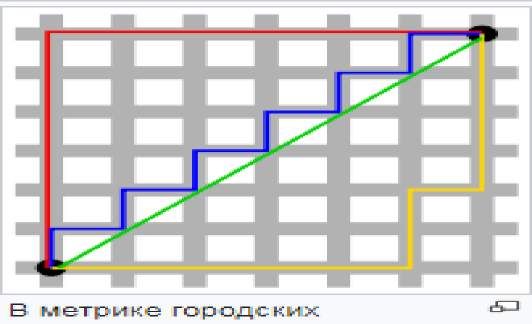
2. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x,y)=|x-y|$$

образует метрическое пространство **R**.

3. Метрики для элементов $\overline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$

- $\rho_\infty(\overline{x},\overline{y})=\max\limits_{1\le k\le n}|y_k-x_k|$ – ***равномерная метрика*** ***(Чебышева)***,
- $\rho_1(\overline{x},\overline{y})=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$ – ***метрика Минковского***,
- $\rho_2(\overline{x},\overline{y})=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ – ***евклидова метрика***.



В метрике городских кварталов длины красной, жёлтой и синей линий равны между собой (12). В геометрии Евклида зелёная линия имеет длину $6\sqrt{2}\approx 8{,}49$ и представляет собой единственный кратчайший путь.

На плоскости расстояние городских кварталов (метрика Минковского) между точками (x_1,x_2) и (y_1,y_2) равно $|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$.

Расстояние Хэмминга

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Расстоя́ние Хэ́мминга (кодовое расстояние) — число позиций, в которых соответствующие символы двух слов одинаковой длины различны[1]. В более общем случае расстояние Хэмминга применяется для строк одинаковой длины любых *q*-ичных алфавитов и служит метрикой различия (функцией, определяющей расстояние в метрическом пространстве) объектов одинаковой размерности.

Примеры

- $d(1011101, 1001001) = 2$
- $d(2173896, 2233796) = 3$
- $d(\text{toned}, \text{roses}) = 3$

Первоначально метрика была сформулирована Ричардом Хэммингом во время его работы в Bell Labs для определения меры различия между кодовыми комбинациями (двоичными векторами) в векторном пространстве кодовых последовательностей: в этом случае расстоянием Хэмминга $d(x, y)$ между двумя двоичными последовательностями (векторами) x и y длины n называется число позиций, в которых они различны. В такой формулировке расстояние Хэмминга вошло в словарь алгоритмов и структур данных национального института стандартов и технологий США (англ. *NIST Dictionary of Algorithms and Data Structures*). Расстояние Хэмминга является частным случаем метрики Минковского (при соответствующем определении вычитания):

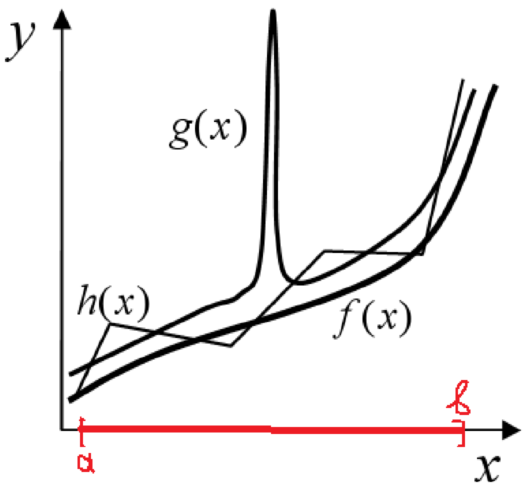
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} |x_{ik} - x_{jk}|.$$

Дополнительный материал *смотри* http://vmath.ru/vf5/codes/hamming

4. РАССМОТРИМ МНОЖЕСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ $[a, b]$ ФУНКЦИЙ.

4.1. На множестве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций расстояние ρ между элементами $f(x)$ и $g(x)$ определим по формуле

$$\rho(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|.$$

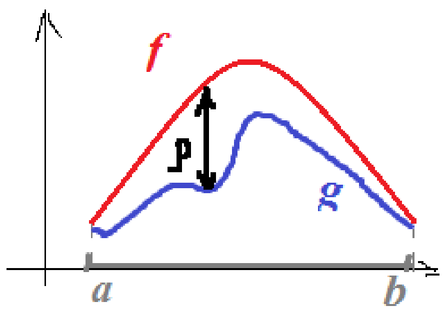


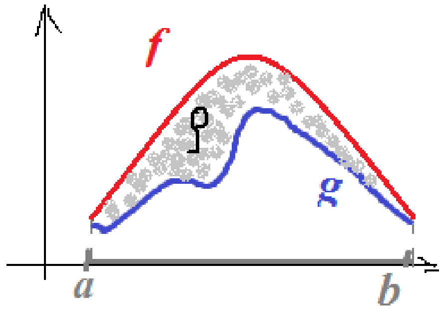
Такая метрика называется равномерной и показывает максимальное уклонение функции $f(x)$ от функции $g(x)$ на заданном отрезке.

4.2. Пространство $C_2[a, b]$ непрерывных функций с ***квадратичной метрикой***

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

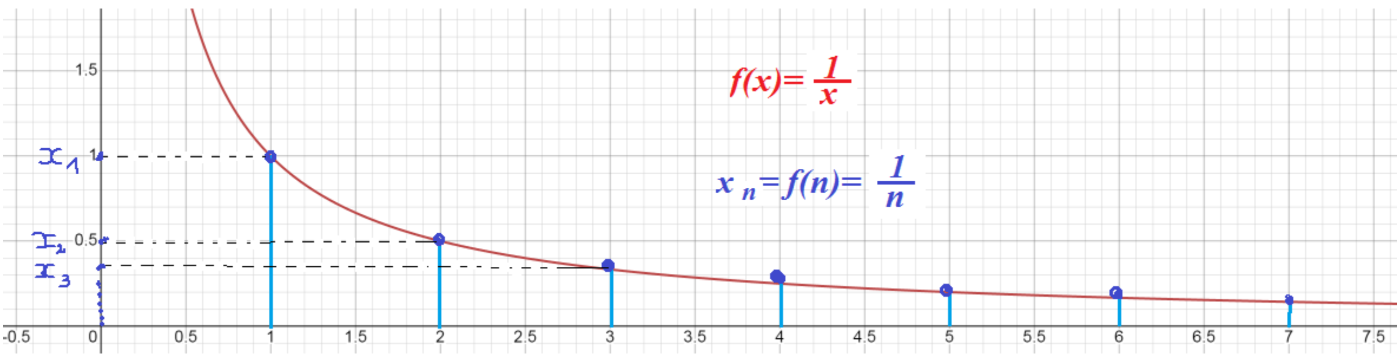
Расстояние вводится по-разному





$$\rho(f,g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| \qquad \rho(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Замечание. Числовую последовательность (конечную или бесконечную) можно рассматривать как множество значений некоторой действительной функции натурального аргумента, определенной на отрезке или бесконечном промежутке числовой прямой: $x_n = f(n)$.



5. Пространство l_2, в котором элементами служат последовательности чисел

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Бесконечные последовательности используются, например, в ***теории сигналов***.

6. Метрика, порожденная скалярным произведением, определяется формулой

$$\boldsymbol{\rho(\overline{x},\overline{y}) = \|\overline{x}-\overline{y}\| = \sqrt{(\overline{x}-\overline{y},\overline{x}-\overline{y})}.}$$

Справедливо ***неравенство Коши – Буняковского – Шварца:***

$$(\overline{x},\ \overline{y}) \le \|\overline{x}\|\|\overline{y}\|$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда элементы линейно зависимы.

Полнота метрического пространства (X,ρ)

Пусть $\{x_n\}, x_n \in X, n \in N$ – последовательность точек (элементов) в метрическом пространстве (X,ρ).

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0.$$

Точка *x* называется пределом последовательности $\{x_n\}$.

Из определения предела последовательности следует его единственность.

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства (X,ρ) называется ***фундаментальной последовательностью*** или ***последовательностью Коши***, если

$$\rho(x_n,x_m) \to 0 \text{ при } n \text{ и } m\to 0,\ \forall\ n,m \in \mathbf{N}.$$

Опр. Метрическое пространство (X,ρ) называется **полным**, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к пределу, являющемуся элементом этого пространства.

Отметим, что ***в <u>конечномерном</u> линейном пространстве все нормы эквивалентны в том смысле, что, если имеет место*** $\|X_n\|_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (где X_n – последовательность элементов пространства, α – признак нормы), то по любой другой норме также $\|X_n\|_\beta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства L со скалярным произведением называется сходящейся в L, если в L существует такой x, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x, x_n - x)} = 0.$$

Скалярное произведение есть непрерывная функция относительно нормы.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства L со скалярным произведением называется фундаментальной (последовательностью Коши), если

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x_n - x_m\| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sqrt{(x_n - x_m, x_n - x_m)} = 0\,.$$

Пространство Гильберта обобщает понятие евклидова пространства на ***бесконечномерный случай***.

Опр. Действительное линейное пространство H называется пространством Гильберта, если выполнены условия:

1) на H задано скалярное произведение,
2) H – полное метрическое пространство относительно метрики, порожденной скалярным произведением,
3) H бесконечномерно.

Примером гильбертова пространства может служить пространство $\boldsymbol{l_2}$ с элементами последовательностями чисел

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \text{ где } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k.$$

Полнота метрического пространства и разрешимость уравнений

С точки зрения решения уравнений свойство полноты является одним из ключевых.

Рассмотрим два метрических пространства: рациональных чисел **Q** и действительных чисел **R** с обычными метриками и функции:

$$f(x) = x^2 \ : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}, \qquad F(y) = y^2 \ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

Как выяснили еще пифагорейцы в IV веке до н.э., уравнение $f(x) = 2$ не имеет решения – слишком мал запас элементов в **Q**.

В то же время уравнение $F(x) = y$ имеет решение для всех $y \geq 0$. Такое различие обусловлено, в частности, тем, что пространство **R** – полное, а **Q** – нет. Отметим, что для существования решения уравнения одной полноты мало, необходимы дополнительные свойства.

Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа (например, линейных, нелинейных, матричных, дифференциальных, интегральных) можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки отображения один из простейших и в то же время наиболее важный – это **принцип сжимающих отображений**.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Опр. Отображение A пространства X в себя называется ***сжимающим***, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y).$$

Всякое сжимающее отображение непрерывно.

Точка x называется ***неподвижной точкой*** отображения A, если $Ax = x$.

Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения $Ax = x$.

Теорема (***Принцип сжимающих отображений***). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Принцип сжимающих отображений можно применять не только к доказательству теорем существования и единственности решения для уравнений различных типов, но и для приближенного нахождения этого решения.

Отметим, что способы решения уравнений и их систем в основном разделяются на две группы:

1) ***точные методы***, представляющие собой конечные алгоритмы вычисления корней;

2) ***итерационные процессы***, позволяющие получать решения с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов.

Операторные задачи в линейных пространствах:

1. **Задача об отыскании корня уравнения** $A\overline{x} = \overline{y}$
2. **Задача о неподвижной точке** $A\overline{x} = \overline{x}$
3. **Задача о собственных значениях λ и собственных векторах линейного оператора** $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$
4. **Задача вариационного исчисления о нахождении элемента** $\overline{x}$, **доставляющего минимум функционала min** $(A\overline{x})$

Пусть $A: L \to L$ –линейный оператор, $b \in L$ – заданный вектор, $x \in L$ – вектор, который следует определить из уравнения ***Ax*=*b***. Обозначим через x^* точное решение этого уравнения.

Итерационные методы основаны на построении сходящейся (по заданной норме) к точному решению x^* бесконечной рекуррентной последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$ элементов той же природы, что и x^*.

Последовательность называется рекуррентной порядка m, если каждый следующий ее член выражается через m предыдущих по некоторому правилу П (алгоритму):

$$x_n = \Pi(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}). \tag{1}$$

Задача (может возникнуть): выразить общий член рекуррентной последовательности в явном виде.

Соответствующий итерационный метод называется m-шаговым. Для реализации m-шагового метода требуется задать m первых членов $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$, называемых начальным приложением. Зная начальное приближение, по формуле (1) последовательно находят $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, \dots$.

Процесс нахождения следующего n-го члена через предыдущие называется ***n-й итерацией***. Итерация выполняется до тех пор, пока очередной член x_n не будет удовлетворять заданной точности

$$\|x_n - x^*\| < \delta.$$

Ввиду того, что точное решение x^* заранее неизвестно, обычно сходимость метода определяют по близости двух последних членов, т.е. расчеты проводят до тех пор, пока не выполнится условие

$$\|x_n - x_{n-1}\| < \varepsilon,$$

где ε – некоторая заданная малая величина. В качестве искомого решения берут последний член последовательности x_n при котором выполняется указанное неравенство.

Простой итерационный метод

Преобразуем уравнение $\boldsymbol{Ax=b}$ к виду, разрешенному относительно неизвестного x. Это можно сделать бесконечным набором способов, чем и определяется многообразие итерационных методов. Например, можно преобразовать так:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) = \Pi\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

При этом точное решение x^* является и решением (2). Здесь α – произвольный параметр, который подбирается из условия сходимости итераций.

Используем выражение (2) в качестве рекуррентной формулы (m=1):

$$x_n = \Pi(x_{n-1}).$$

Задав начальное приближение x_0, последовательно находим $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если полученная таким образом последовательность сходится к некоторому конечному пределу, то этот предел совпадает с точным решением x^*.

Геометрическая интерпретация метода итераций в пространстве действительных чисел с обычной метрикой, $f(x)$ – действительная непрерывная функция.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0. \tag{3}$$

Заменим это уравнение равносильным

$$x = \varphi(x). \tag{4}$$

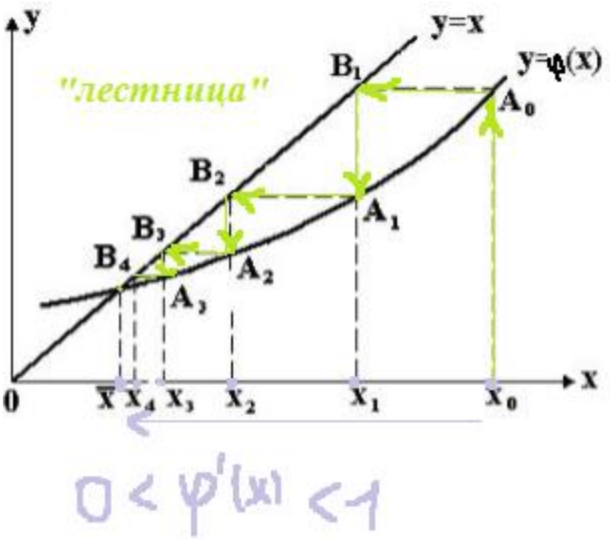
Выберем каким-либо способом грубо приближенное значение корня x_0 и подставим его в правую часть (4). Тогда получим некоторое значение $x_1 = \varphi(x_0)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность $\{x_n\}$:

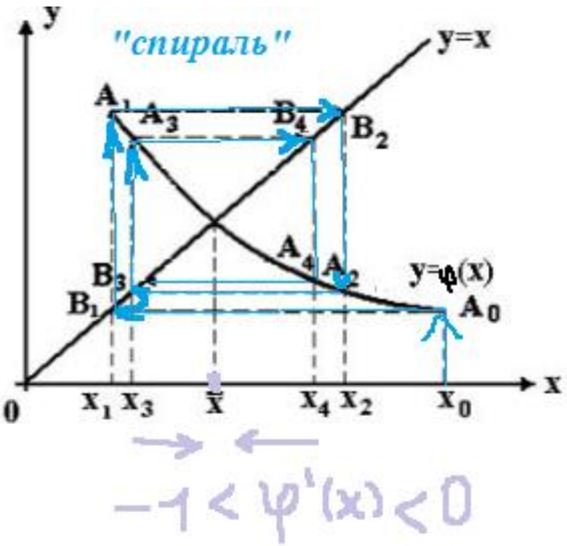
$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 1,2, \dots .$$

<u>Если эта последовательность сходящаяся</u>, то предел этой последовательности является корнем уравнения (4).

Построим на плоскости *xOy* графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень уравнения (4) является абсциссой точки пересечения *M* кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$.

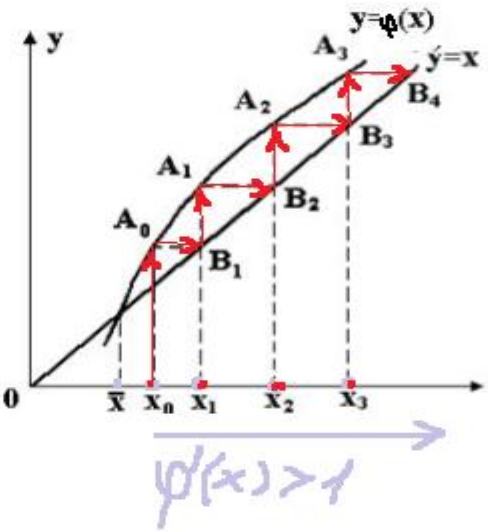
Отправляясь от некоторой точки *A₀* строим ломаную линию, звенья которой попеременно параллельны координатным осям.





Условие сжимаемости выполнено, если функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ производную $\varphi'(x)$, причем $|\varphi'(x)| \leq q < 1$.

Однако, если рассмотреть случай $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итераций может быть расходящимся.



*Для <u>практического применения метода итераций</u> необходимо выяснять **<u>достаточные условия сходимости</u>** итерационного процесса.*

Допустим, что какая-то итерационная процедура решения уравнения

$$f(x) = 0$$

привела к последовательности

$$\{x_n\}, \qquad x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 1,2,\ldots, \qquad x_0 \text{ – задано.}$$

Предположим, что удалось доказать существование такого $q < 1$, что

$$\rho(x_{n+1}, x) \le q\ \rho(x_n, x_{n-1}), \quad n \ge 1. \tag{5}$$

Тогда

$$\rho(x_{n+1}, x) \le q\ \rho(x_n, x_{n-1}) \le q^2\ \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le$$
$$\le q^3\ \rho(x_{n-2}, x_{n-3}) \le \cdots \le q^n\ \rho(x_1, x_0).$$

В силу неравенства треугольника

$$\rho(x_{n+k}, x_n) \le\ \rho(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \rho(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \cdots +\ \rho(x_{n+1}, x_n) \le$$
$$\le (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \cdots + q^n)\ \rho(x_1, x_0) \le$$
$$\le q^n(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1})\ \rho(x_1, x_0) \le$$
$$\le q^n(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} + \cdots)\ \rho(x_1, x_0) = \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0).$$

Таким образом, $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, для которой

$$\rho(x_{n+k}, x_n) \le \frac{q^n}{1-q}\ \rho(x_1, x_0), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Если пространство X полное, то последовательность $\{x_n\}, x_n \in X$, удовлетворяющая условию (5) при $q < 1$ имеет предел $x \in X$.