Лекция 3

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ФУРЬЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. *Ортогональные системы функций*

ЗАЧЕМ?

Задача линейной аппроксимации. Пусть L– линейное нормированное пространство и f, $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_n}$ – заданные его элементы. Требуется найти постоянные числа $\boldsymbol{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, чтобы сумма

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

наилучшим образом давала приближение для элемента f, т.е. чтобы расстояние от f до $\boldsymbol{T_n}$ (по норме пространства) было наименьшим. Элемент $\boldsymbol{T_n}$, для которого $\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T_n}\|$ достигает минимального значения (нижней грани) называется минимальным решением.

Говорят о **чебышевской аппроксимации (Т-аппроксимации)**, если норма$\|u - v\| = \sup|u - v|$, порождена равномерной метрикой.

Аппроксимация

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

[править | править код]

Аппроксима́ция (от лат. *proxima* — ближайшая) или **приближе́ние** — научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

В Викисловаре есть статья «аппроксимация»

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). В теории чисел изучаются диофантовы приближения, в частности, приближения иррациональных чисел рациональными. В геометрии рассматриваются аппроксимации кривых ломаными. Некоторые разделы математики в сущности целиком посвящены аппроксимации, например, теория приближения функций, численные методы анализа.

Понятие об интерполировании и обратном интерполировании

На практике, в результате наблюдения за ходом развития некоторого процесса, приходится иметь дело с функциями, заданными таблично

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Характер же функциональной зависимости между x и y неизвестен, то есть неизвестно аналитическое задание функции $y = f(x)$.

В процессе решения некоторого класса задач возникает необходимость использовать значения функции $y = f(x)$ для промежуточныхзначений аргумента, то есть отличных от табличных. В этом случае прибегают к ***приближению*** (как синоним используют термин ***интерполяция, аппроксимация)функции***.

Пусть система функции $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = \overline{0,n})$удовлетворяет следующим условиям:

1. $\{\varphi_i(x)\} \in C[a,b]$ $(i = \overline{0,n})$, то есть все они непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2. $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = \overline{0,n})$ линейно независимы на этом отрезке.
3. Функции $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = \overline{0,n})$ достаточно просто вычисляемые.

Линейная комбинация таких функций

$$\Phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\quad(\alpha_k\in\mathbb{R})$$

называется ***обобщенным многочленом степени*** n.

<u>Постановка задачи.</u> Пусть $x_0,x_1,...,x_n$ – различные точки из отрезка $[a,b]$ и известны значения $y_0,y_1,...,y_n$ функции $y=f(x)$ в них. Требуется определить обобщенный многочлен $\Phi_n(x)$ таким образом, чтобы

$$\Phi_n(x_k)=y_k\ (k=\overline{0,n}).$$

Если удается построить такой обобщенный многочлен, то он называется ***интерполяционным многочленом***, точки $x_0,x_1,...,x_n$ – ***узлами интерполирования***, а условия $\Phi_n(x_k)=y_k$ – ***условиями интерполирования по значениям функции***.

Рассматривают следующие систем функций:

1. Алгебраическая система

$$1,x,x^2,...,x^n,...;$$

2. Тригонометрическая система

$$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,...,\sin nx,\cos nx,...;$$

3. Экспоненциальная система

$$\left\{e^{\alpha_k x}\right\}_0^{\infty}\left(\alpha_i\neq\alpha_j,i\neq j;\alpha_0=0\right).$$

Процесс интерполирования по этим система называется, соответственно, ***алгебраическим, тригонометрическим и экспоненциальным интерполированием.***

Вопросы, возникающие при интерполировании:

- Каким образом по заданной табличной функции выбрать подходящую систему функций $\{\varphi_k(x)\}_0^{\infty}$;
- Если обозначить $R_n(x)=f(x)-\Phi_n(x)$ ***остаток интерполирования***, то какова будет оценка остатка интерполирования;
- Если есть возможность выбора системы узлов интерполирования, то каким образом выбрать эту систему, чтобы оценка остатка интерполирования была наименьшей.

Смежными вопросами при интерполировании по значениям функции являются:

- ***Обратное интерполирование.*** По заданному значению y^* найти значение аргумента x^* такое, чтобы $f(x^*)=y^*$;
- ***Экстраполяция.*** Интерполирование за пределы таблицы.

Помимо интерполирования по значениям функции существуют и другие способы приближения функции. В частности:

- ***Интерполирование с кратными узлами (интерполирование Эрмита).***В некоторых узлах наряду со значениями функции задаются значения производных до некоторого порядка;
- ***Сплайн интерполирование.*** Отрезок разбивается на подинтервалы интерполирования, а в точках сочленения подинтервалов выполняется сглаживание путем задания соответствующих производных;

❖ ***Приближение по методу наименьших квадратов.*** Коэффициенты обобщенного многочлена $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выбираются из условия минимума функционала

$$\int_a^b \left(f(x) - \Phi_n(x) \right)^2 dx \xrightarrow[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]{} \min .$$

Ортогональные системы функций?

Рассмотрим векторное пространство L со **скалярным произведением**.

Опр. Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пространства L называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю: $(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$

С помощью скалярного произведения в произвольном векторном пространстве определяются следующие понятия:

1) **норма вектора $\bar{x}$** (норма является аналогом модуля (длины) вектора в пространстве $\mathbf{R}^3$):

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$$

2) **угол между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$:**

$$\cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y}}) = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}$$

3) **расстояние между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$:**

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y})}$$

Опр. Если $\|\bar{x}\| = 1$, то вектор $\bar{x}$ называется ***нормированным***.

Опр. Множество (конечное или бесконечное) элементов $\{\bar{f}_i\}$ пространства L называется ***ортонормированной системой***, если

$$\left(\bar{f}_j, \bar{f}_k\right) = \begin{cases} 0 & \text{для } j \neq k, \\ 1 & \text{для } j = k. \end{cases}$$

Утверждение. Любое конечное число элементов ортонормированной системы линейно независимо.

По любой линейно независимой системе можно построить ортонормированную систему, применив ***процесс ортогонализации Грама – Шмидта***: любое конечное или счетное множество линейно независимых элементов $\{\bar{f}_i\}$ можно ортонормировать, т.е. составить из линейных комбинаций элементов $\bar{f}_i$ новую систему элементов $\bar{g}_k$, которая будет ортонормированной. Элементы $\bar{g}_k$ строятся следующим образом:

$$\bar{g}_1 = \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|}, \quad \bar{g}_k = \frac{\bar{h}_k}{\|\bar{h}_k\|},$$

$$\text{где } \bar{h}_k = \bar{f}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\bar{f}_k, \bar{g}_j\right) \bar{g}_j, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Ортогональная (ортонормированная) система в случае её полноты может быть взята в качестве **базиса** (ортонормированного) пространства.

Француз Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830), участвовавший в военных походах Наполеона, позже заинтересовался естественными науками: физикой и математикой. Занимаясь изучением законов распространения тепла (1822 г.), установил знаменитый закон теплопроводности (закон Фурье). В математике первым обратил внимание на ортогональность тригонометрической системы функций.

Обобщенный ряд Фурье. Пусть f любой элемент векторного пространства со скалярным произведением и $\{\boldsymbol{\varphi_k}\}$ – ортонормированная система этого пространства. Назовем число

$$\boldsymbol{c_k = (f, \varphi_k)} \tag{1}$$

коэффициентом Фурье элемента f относительно ортонормированной системы $\{\boldsymbol{\varphi_k}\}$, а ряд (пока формальный)

$$\boldsymbol{\sum_k c_k \varphi_k} \tag{2}$$

– ***рядом Фурье*** для f относительно этой системы. Пусть

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k} \tag{3}$$

– частичная сумма ряда Фурье; сравним ее с некоторой произвольной линейной комбинацией первых n элементов ортонормированной системы $\{\boldsymbol{\varphi_k}\}$:

$$\boldsymbol{T_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k} \tag{4}$$

Для квадрата расстояния δ между элементами f и $\boldsymbol{T_n}$ получаем выражение

$$\delta^2 = \|\boldsymbol{f - T_n}\|^2 = \left(\boldsymbol{f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k}\right) =$$

$$= \boldsymbol{(f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)} =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2.$$

Минимум этого выражения достигается тогда, когда последнее слагаемое равно 0, т.е. при

$$\alpha_k = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{5}$$

В этом случае

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{6}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема аппроксимации. Пусть в векторном пространстве со скалярным произведением требуется наилучшим образом аппроксимировать элемент f линейной комбинацией T_n первых n элементов ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$, т.е. выбрать T_n так, чтобы расстояние от f до T_n (по норме пространства) было наименьшим. Тогда минимум расстояния достигается, если T_n является частичной суммой ряда Фурье для элемента f относительно системы $\{\varphi_k\}$.

Так как всегда $\|f - T_n\|^2 \geq 0$, то из равенства (6) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n; следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{7}$$

Это неравенство называется ***неравенством Бесселя***.

Опр. Ортогональная нормированная система называется замкнутой, если для любого $\boldsymbol{f}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \tag{8}$$

называемое ***равенством Парсеваля (Парсеваля – Стеклова)***.

Понятие замкнутости ортогональной нормированной системы тесно связано с понятием полноты системы.

Рассмотрим гильбертово пространство $\boldsymbol{H}$. Пусть $\boldsymbol{c_k}$ – коэффициенты Фурье элемента f относительно элементов $\{\varphi_k\}$ (1), и S_n– частичные суммы ряда Фурье (3).

Возникает вопрос:

1) сходится ли ряд (2), т.е. стремится ли последовательность его частичных сумм (3) в смысле метрики пространства H к какому-либо пределу,
2) если он сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом f?

Опр. Ортонормированная система из элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

пространства H называется ***полной***, если ее нельзя дополнить элементами из H так, чтобы новая система была ортонормированной.

Теорема. Пусть элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ образуют ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Элементы $\{\varphi_k\}$ образуют базис пространства.
2. Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ полная.
3. Для любого элемента $f \in H$ справедливо равенство Парсеваля (8).
4. Для любых элементов $f, h \in H$ справедливо равенство

$$(f, h) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\,(\varphi_k, h).$$

5. Для любого элемента $f \in H$ частичные суммы S_n, определенные соотношениями (1), (3), сходятся к f.

Теорема Рисса – Фишера. Пусть элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве H и $\{\alpha_k\}$ – числовая последовательность, для которой сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Тогда в пространстве H найдется в точности один элемент f, имеющий коэффициенты Фурье α_k.

Ортогональные системы функций играют большую роль в анализе, главным образом в связи с возможностью разложения произвольных функций, принадлежащих к весьма широким функциональным пространствам, в ряды по ортогональным функциям, примерами которых могут служить ряды Фурье, ряды Фурье – Бесселя и др.

Примером ортонормированной системы является **система тригонометрических функций**

$$(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots),$$

которая ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$ с весом $p(x) = 1$. Проверьте!

Ряд Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (9)$$

где коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

С физической точки зрения тригонометрический ряд описывает сложное периодическое движение (колебание) как сумму (конечную или бесконечную) простых гармонических колебаний того же периода. С периодическими явлениями приходится иметь дело в самых различных областях знания – в теории упругости, акустике, радиотехнике, электротехнике и др.

Вопрос о сходимости тригонометрического ряда к функции $\boldsymbol{f(x)}$ *решается в зависимости от выбора метрики функционального пространства.*

В пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ интегрируемых с квадратом на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций, в котором *метрика* задана формулой

$$\rho(f,g)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx\right)^{1/2},$$

ряд Фурье (9) сходится к функции $f(x)\in L_2[-\pi,\pi]$ в смысле среднего квадратичного, т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

где

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx.$$

Теорема Дирихле. Пусть $f(x)$ – 2π -периодичная функция на отрезке $[-\pi;\pi]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(x)$–кусочно-непрерывна;
2. $f(x)$–кусочно-монотонна.

Тогда $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ и ряд Фурье сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$, причем:

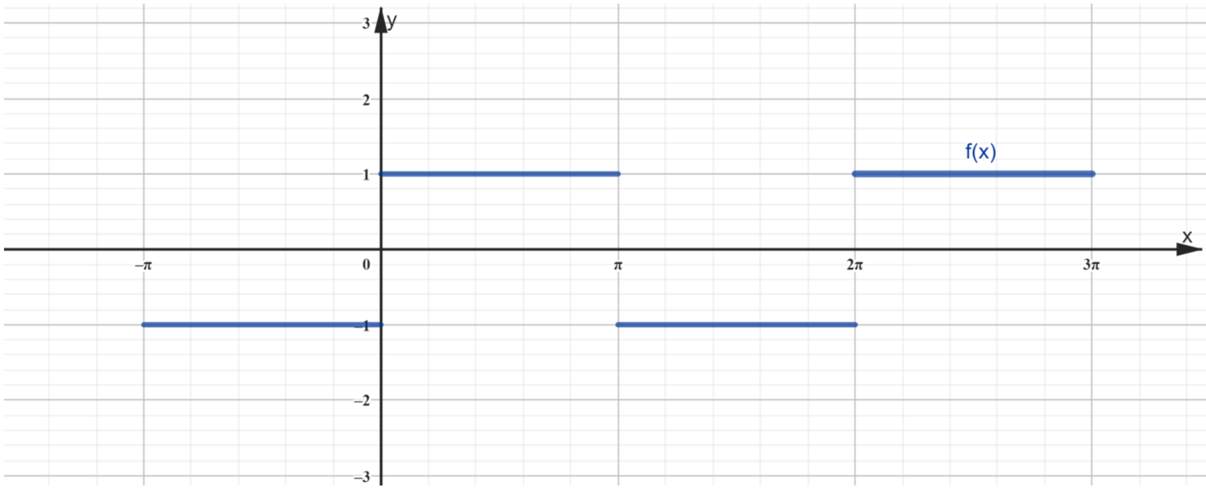
1. в точках непрерывности $S(x)=f(x)$;
2. если x_0–точка разрыва, то $S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;
3. $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Пример разложения в тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической функции

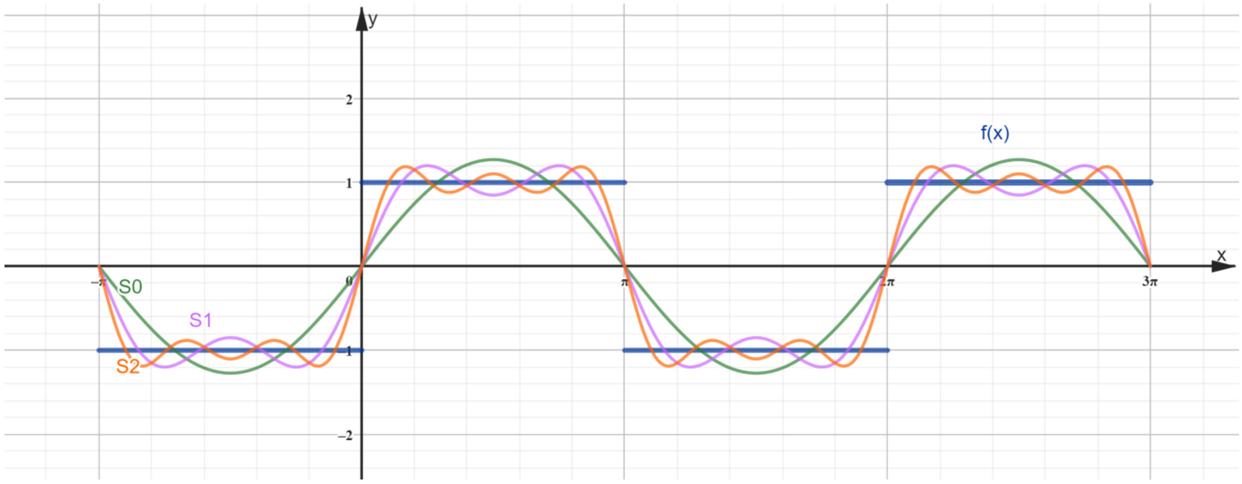
$$f(x)=\begin{cases}-1, x\in(-\pi;0),\\ 1, x\in(0;\pi).\end{cases}$$

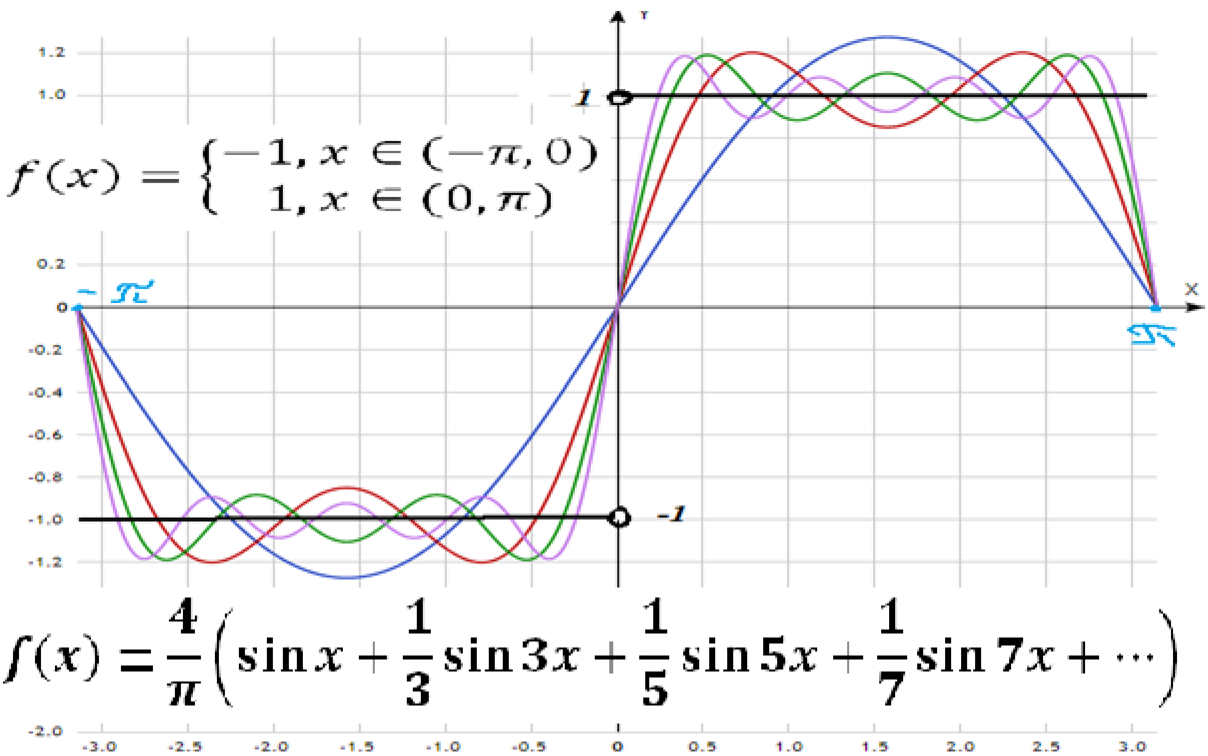
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\cdots\right)$$

Функция $f(x)$:



Функция $f(x)$ и первые три частичные суммы ее разложения в ряд Фурье:





Неполные ряды Фурье

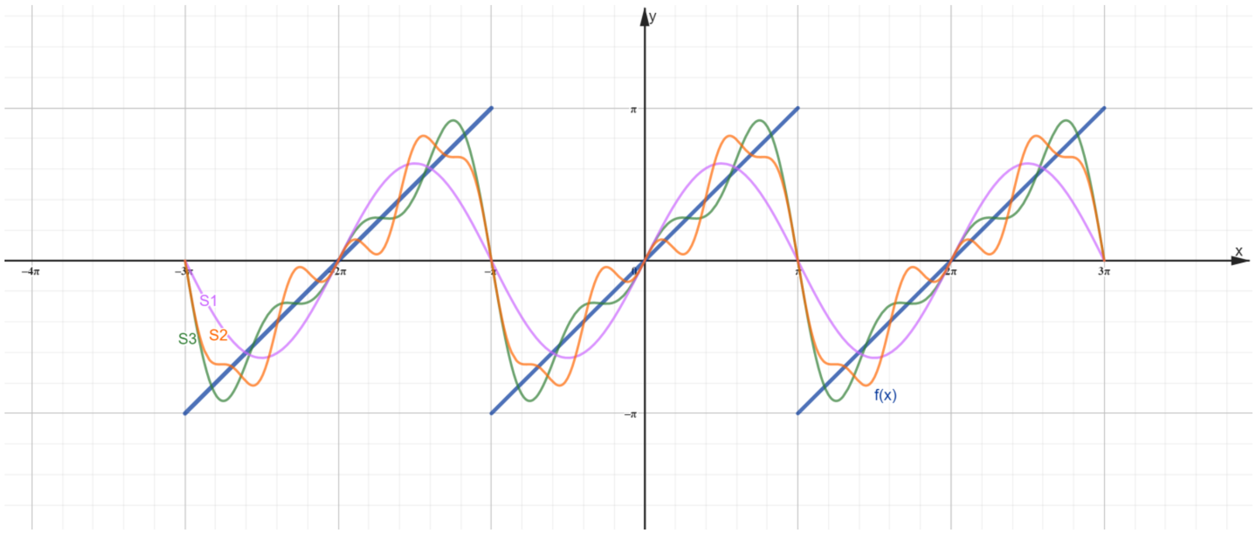
В зависимости от четности функции $f(x)$ ее разложение в ряд Фурье может упрощаться и иметь вид соответственно:

- $f(x)$ – четная: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx;$
- $f(x)$ – нечетная: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.$

Пример разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)=x, x\in(-\pi;\pi)$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right).$$

Функция $f(x)$ и первые три частичные суммы ее разложения в ряд Фурье:

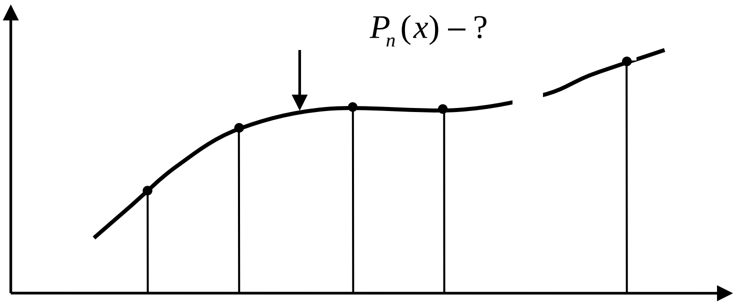


При ***алгебраическом интерполировании*** некоторая функция $y=f(x)$ задается таблицей своих значений $y_i=f(x_i)$, $i=0,1,2,\ldots,n$. Требуется найти полином степени n

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

который принимает в заданных точках x_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ те же значения, что и функция $f(x)$, то есть $P_n(x_i)=y_i$, $i=0,1,2,\ldots,n$.

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y=P_n(x)$, которая проходит через заданную систему точек $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ на плоскости.



Установлено, что система функций $\mathbf{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}, \ldots$является **полной** на отрезке $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$, но эта система ***не является ортогональной***.

В теории аппроксимации функций, в математической физике важную роль играют **ортогональные многочлены (полиномы)**. Они обладают, наряду со свойствами *ортогональности*, рядом других общих свойств, например, они являются *решениями дифференциальных уравнений* простого вида и могут быть определены как *коэффициенты разложения* по степеням t некоторой соответственно выбранной функции $w(x,t)$, которая называется **производящей функцией**.

Ортогональные многочлены можно получить при помощи ортогонализации по Шмидту системы заданных на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ функций вида $\sqrt{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{n} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots)$, где $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ – некоторая положительная функция, непрерывная на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Для отрезка $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ и $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$ получаем *полиномы Лежандра*;

для интервала $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ и $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}$ – *полиномы Чебышева первого рода*;

для полупрямой $[\mathbf{0}, +\infty)$ и $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}}$ – *полиномы Лагерра*;

для промежутка $(-\infty, +\infty)$ и $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$ – *полиномы Эрмита* и т.д.

Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется ортогональной на отрезке $[a, b]$ с весом $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$, если при всяком $m \neq n$ имеет место равенство

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \mathbf{0},$$

где $p(x)$ – некоторая фиксированная неотрицательная функция, не зависящая от индексов m и n.

Полиномы Лежандра $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ для любых вещественных или комплексных значений переменного x определяются по формуле

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}!}\frac{\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{dx}^{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}, \ \ \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \ \ \boldsymbol{P}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}),$$

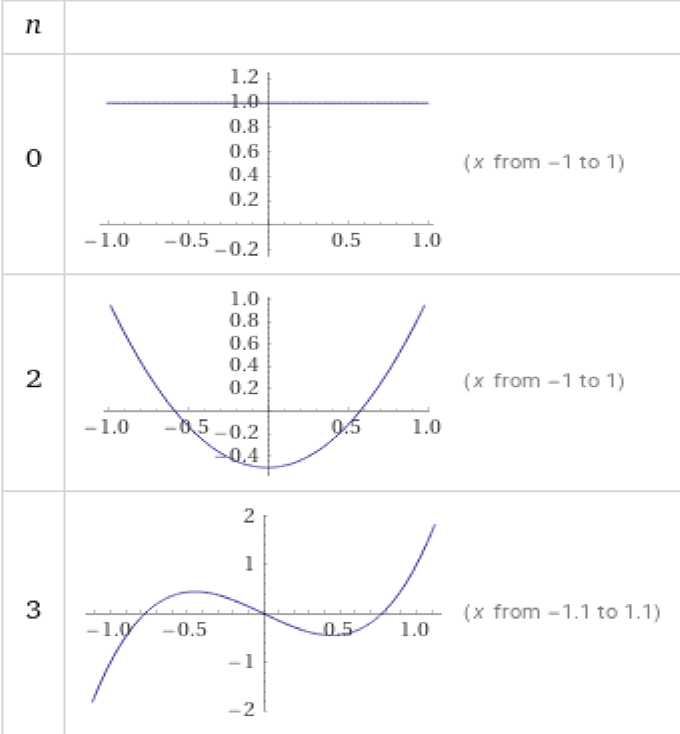
$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{3}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}) \ \ \text{и т.д.}$$

legendre polynomial

Values

n	
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

Plots



Полиномы Лежандра ортогональны в промежутке $[-1,1]$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Показано, что

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \Rightarrow \|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Чтобы пронормировать систему, нужно многочлены Лежандра разделить на соответствующие им нормы. Таким образом, функции

$$\varphi_n(x) = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(x),\ n=0,\ 1,\ 2,\dots$$

образуют ***ортонормированную систему*** функций на промежутке $[-1,1]$.

Рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Лежандра

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x) = 0, n = 1, 2, \dots,}$$

может быть использовано для последовательного вычисления рассматриваемых полиномов.

Полином Лежандра $u = P_n(x)$ является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$[(1 - x^2)u']' + n(n+1)u = 0.$$

Полиномы Лежандра $\boldsymbol{P_n(x)}$ являются *коэффициентами разложения* по степеням *t* функции

$$\boldsymbol{w(x,t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}}},$$

т.е. для достаточно малых $|\boldsymbol{t}|$ имеет место разложение:

$$\boldsymbol{(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n.} \qquad \boldsymbol{(10)}$$

Функцию $\boldsymbol{w(x,t)}$ называют ***производящей*** для этих полиномов.

В качестве примера приложения производящей функции к выводу свойств полиномов Лежандра укажем на получение равенств

$$\boldsymbol{P_0(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n,}$$

$$\boldsymbol{P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots (2n)}, \qquad P_{2n+1}(0) = 0,}$$

непосредственно вытекающих из (10), если положить *x* равным ± 1 или 0 и затем разложить левую часть по степеням *t*.

Ряд Фурье для функции $f(x)$ на $[-1,1]$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots,$$

где коэффициенты

$$\boldsymbol{c_n = \frac{\big(f(x), P_n(x)\big)}{\|P_n(x)\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx.}$$

https://thegeodesy.com/wp-content/uploads/2020/04/03-polinomy-i-prisoedinjonnye-funkcii-lezhandra.html

3. Полиномы и присоединённые функции Лежандра

Автор: Илья Ощепков

В этой части мы активно будем пользоваться средствами языка Python, поэтому сразу делаем необходимые импорты.

In [1]:
```
import copy
import numpy as np
from scipy import special
import matplotlib.pylab as plt

import matplotlib as mpl
mpl.rcParams['text.usetex']=True
mpl.rc('xtick', labelsize=14)
mpl.rc('ytick', labelsize=14)

from sympy import *
init_printing()
```

Разложение произвольной функции в ряд Лежандра

Также, как произвольный вектор может быть разложен по ортам, то есть по ортонормированным единичным векторам, так и функция может быть разложена по системе ортонормированных функций. В частности, любая кусочно-гладкая функция может быть разложена в ряд Лежандра

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t)$$

на отрезке $[-1, +1]$, где коэффициенты a_n легко найти из свойства ортогональности

$$a_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{+1} f(t)\, P_n(t)\, dt.$$

Это частный случай решения задачи аппроксимации одной функции другой функцией, как правило более простого вида. Это наиболее важное приложение специальных функций в применении их к реальным данным, когда сложные явления, описываемые функцией достаточно сложного или даже неизвестного вида, описываются более простыми и хорошо изученными функциями или их рядами.

Пример: функция sgn

Достаточно простые и гладкие функции, типа экспоненты e^x или тригонометрических функций, вполне хорошо и естественным образом раскладываются в ряд Лежандра, который в этом случае очень быстро сходится к исходной функции. Давайте разберём часто рассматриваемый, но чуть более сложный пример.

Разложим функцию sgn в ряд полиномов Лежандра на интервале $[-1, 1]$. Функция возвращает -1, если её аргумент отрицательный, $+1$, если её аргумент положительный, и 0, если её аргумент равен нулю, то есть

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t < 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Это нечётная функция, следовательно, коэффициенты при чётных членах ряда Лежандра обратятся в нуль. Пользуясь этим свойством, мы можем сократить вычисления в два раза! Произведение двух нечётных функций даёт чётную функцию, по правилу интегрирования которой можно записать теперь выражение для коэффициентов так

$$a_n = (2n+1) \int_0^1 P_n(t)\, dt.$$

In [10]:
```
def sgn2legendre(n):
    an = np.zeros(n + 1)
    for n in np.arange(1, n+1, 2):
        an[n] = (2*n + 1) * integrate(legendre_poly(n, t), (t, 0, 1))
    return np.polynomial.Legendre(an)
```

Например, члены ряда Лежандра до степени $n = 5$ имеет следующие коэффициенты:

In [11]:
```
sgn2legendre(5)
```

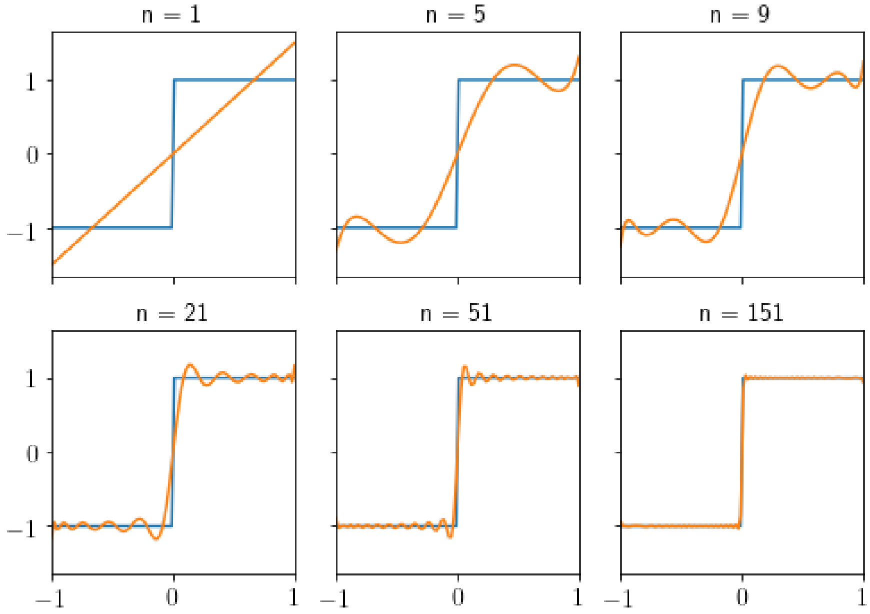
Out[11]: $x \mapsto 0.0\, P_0(x) + 1.5\, P_1(x) + 0.0\, P_2(x) - 0.875\, P_3(x) + 0.0\, P_4(x) + 0.6875\, P_5(x)$

Посмотрим, что происходит, когда степень увеличивается. Построим графики для $n = 1, 5, 9, 21, 51, 151$.

In [12]:
```
x = np.linspace(-1, 1, 100)
y = np.sign(x)

fig, axes = plt.subplots(2, 3, figsize=(7, 5),
                         sharey=True, sharex=True)
axes = axes.flatten()

degrees = [1, 5, 9, 21, 51, 151]
for i, n in enumerate(degrees):
    sgn_poly = sgn2legendre(n)
    axes[i].plot(x, y)
    axes[i].plot(x, sgn_poly(x))
    axes[i].set_title('n = {}'.format(n), fontsize=14)
    axes[i].set_xlim(-1, 1)
plt.tight_layout()
```



Итак, мы пришли к следующим результатам.

1. Из функции, которая имеет разрыв (первого рода) в нуле, получена непрерывная функция.
2. Чем больше степень, тем лучше ряд Лежандра описывает исходную фукцию $\mathrm{sgn}(t)$.
3. Но не идеально, потому что аппроксимация это всегда приближение.
4. Главные особенности исходной функции проявились уже в первых двух десятках степеней n ряда, однако для более точной аппроксимации нам понадобилось очень большое число членов ряда.
5. Несмотря на это, ещё большее увеличение числа членов ряда не приводит к абсолютно точному результату.

ЗАЧЕМ? Например,

Аппроксимация с помощью ортогональных функций

В.П. Житников
Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный технический университет
Уфа, Россия
e-mail: zhitnik@mail.ru

Н.М. Шерыхалина
Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный технический университет
Уфа, Россия
e-mail: n_sher@mail.ru

Э.И. Камалова
Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный технический университет
Уфа, Россия
e-mail: kamalova.eliz@yandex.ru

Аннотация[1]

Рассматривается возможность применения полиномов Лежандра для аппроксимации функций с целью избежания проблем с плохой обусловленностью матриц при применении метода наименьших квадратов. Показано, что применение методов численного интегрирования приводят к большой погрешности, что не позволяет применить идею ортогонализации для функций, заданных таблично. Однако использование полиномов Лежандра в качестве базовых функций в методе наименьших квадратов позволяет существенно улучшить обусловленность матриц.

1. Введение

В [1, 2] показано, что применение метода наименьших квадратов (МНК) для аппроксимации функций алгебраическими полиномами требует решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые плохо обусловлены.

На рис. 1 представлены результаты применения МНК для аппроксимации линейной функции и полинома $Q_n(x)=\sum_{i=0}^{n} x^i$ при различных числах точек задания аппроксимируемой функции $m=n+1$ и $m=5(n+1)$. По оси ординат отложены десятичные логарифмы

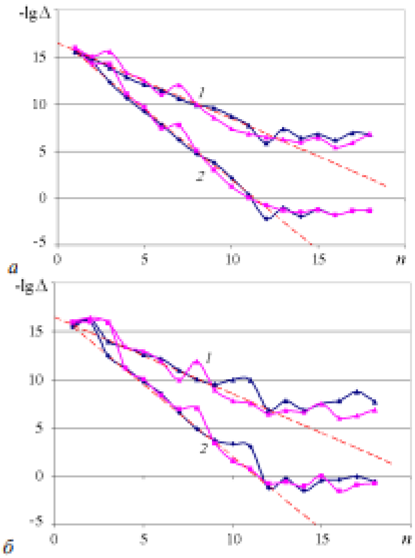


Рис. 1. Зависимость от *n* точности аппроксимации (*1*) и идентификации (*2*): *а* – полинома *n*-й степени; *б* – линейной функции. Пунктирные прямые $y = 16.5 - 0.8n$ и $y = 17 - 1.5n$

Еще немного о полиномах….

Биномиальные коэффициенты $\binom{x}{0}=1, \binom{x}{1}=x, \binom{x}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$, … являются <u>целочисленными полиномами</u> от x, т.е. принимают целые значения при целых значениях x. (*Проверьте, например, по треугольнику Паскаля*) Они образуют базис целочисленных полиномов, в котором все целочисленные полиномы выражаются как линейные комбинации с целыми коэффициентами.

Биномиальные коэффициенты для рациональных значений

Область определения биномиальных коэффициентов можно расширить, а именно:

Def: функция

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!}, & k > 0, \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

определенная для $\forall a \in R,\ k \in N \cup \{0\}$, называется **биномиальным коэффициентом**.

Для $a \in Z_+$ оба определения для биномиального коэффициента совпадают.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = 10$$

$$C_2^5 = 0$$

$$\binom{-2}{3} = \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} = \frac{-2(-3)(-4)}{3!} = -4$$

$$\binom{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}{4!} = \frac{13-9\sqrt{2}}{12}$$