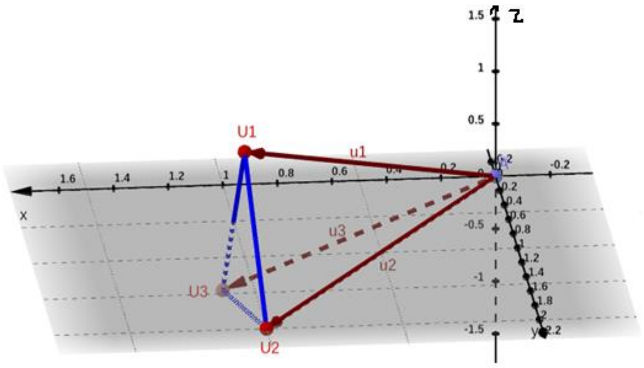
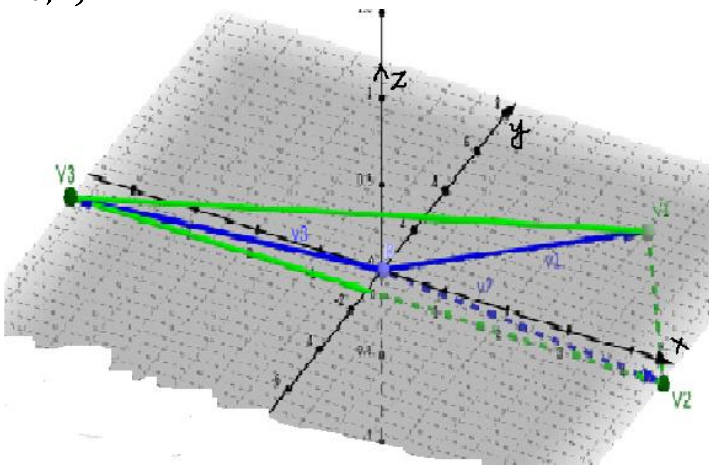
# Лабораторная работа 4. Линейные операторы

*Примеры и указания*

Линейное преобразование в пространстве $\mathbf{R}^3$
Матрица оператора в разных базисах
Собственные векторы и собственные значения
Характеристический многочлен
Приведение матрицы к диагональному виду

Линейное преобразование $A$ трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$ переводит треугольник с вершинами в точках $U_1(1,1,1)$, $U_2(1,2,0)$, $U_3(1,0,-1)$ соответственно в треугольник с вершинами $V_1(3,5,0), V_2(3,6,-1), V_3(-3,-8,1)$.






Запишем радиус-векторы указанных точек

$$u_1 = (1,1,1)^T, u_2 = (1,2,0)^T, u_3 = (1,0,-1)^T$$
$$v_1 = (3,5,0)^T, v_2 = (3,6,-1)^T, v_3 = (-3,-8,1)^T.$$

Искомое преобразование $V = AU$ существует и единственно, так как векторы $u_1, u_2, u_3$ – линейно независимы (проверьте!) и, следовательно, составляют базис пространства $\mathbf{R}^3$.

**1. Найдем матрицу $A_{ijk}$ преобразования $A$ в ортонормированном базисе $i, j, k$.**

Имеют место соотношения $v_i = Au_i,\ i = 1,2,3,$ которые могут быть записаны в виде матричного уравнения $V = A_{ijk}U$ или

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Предложите несколько способов решения матричного уравнения.

Один из способов (не самый рациональный). Умножая каждую строку матрицы $A$ на столбцы матрицы $U$, запишем и решим три системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3, \\ a_{11} + 2a_{12} = 3, \\ a_{11} - a_{13} = -3, \end{cases} \begin{cases} a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5, \\ a_{21} + 2a_{22} = 6, \\ a_{21} - a_{23} = -8, \end{cases} \begin{cases} a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1, \\ a_{31} + 2a_{32} = -1, \\ a_{31} - a_{33} = 1. \end{cases}$$

Искомая матрица линейного оператора в ортонормированном базисе ***i***, ***j***, ***k*** имеет вид

$$A_{ijk}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение в Excel матричного уравнения $V = A_{ijk}U$: $\boxed{A_{ijk} = V \cdot U^{-1}}$

G6 {=МУМНОЖ(B6:D8;G2:I4)}

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | U= | 1 | 1 | 1 | | U^-1= | 0,666667 | -0,33333 | 0,666667 |
| 3 | | 1 | 2 | 0 | | | -0,33333 | 0,666667 | -0,33333 |
| 4 | | 1 | 0 | -1 | | | 0,666667 | -0,33333 | -0,33333 |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | V= | 3 | 3 | -3 | | Aijk=VU^-1 | -1 | 2 | 2 |
| 7 | | 5 | 6 | -8 | | | -4 | 5 | 4 |
| 8 | | 0 | -1 | 1 | | | 1 | -1 | 0 |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | |

## 2. Найдем матрицу $A_u$ преобразования $A$ в базисе $u_1$, $u_2$, $u_3$.

Матрицу $A_u$ ищем по формуле $A_u = U^{-1}A_{ijk}U$, где

$$U=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

– матрица перехода от базиса ***i***, ***j***, ***k*** к базису $u_1$, $u_2$, $u_3$.

Вычислив обратную матрицу $U^{-1}$, перемножив матрицы, получим

$$A_u=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 7 & 10 & -14\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

L6 {=МУМНОЖ(L2:N4;B2:D4)}

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | U= | 1 | 1 | 1 | | U^-1= | 0,666667 | -0,33333 | 0,666667 | | U^-1 Aijk= | 1,333333 | -1 | 2,22E-16 | |
| 3 | | 1 | 2 | 0 | | | -0,33333 | 0,666667 | -0,33333 | | | -2,66667 | 3 | 2 | |
| 4 | | 1 | 0 | -1 | | | 0,666667 | -0,33333 | -0,33333 | | | 0,333333 | -1,7E-16 | 2,22E-16 | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | V= | 3 | 3 | -3 | | Aijk=VU^-1 | -1 | 2 | 2 | | Au= | 0,333333 | -0,66667 | 1,333333 | |
| 7 | | 5 | 6 | -8 | | | -4 | 5 | 4 | | | 2,333333 | 3,333333 | -4,66667 | |
| 8 | | 0 | -1 | 1 | | | 1 | -1 | 0 | | | 0,333333 | 0,333333 | 0,333333 | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | |

**!!!!!Матрица линейного оператора зависит от выбора базиса.**

**Утверждение.** Матрица линейного оператора позволяет найти образ любого вектора по единому алгоритму в выбранном базисе.

**Утверждение.** Матрица линейного оператора имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого линейного оператора. В этом случае на главной диагонали матрицы стоят собственные числа.

## Собственные значения и собственные векторы оператора *A*.

**Опр.** *Ненулевой* элемент $\bar{x} \in L$ $(\bar{x} \neq \bar{0})$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора $A: L \to L,$ если существует такое число $\lambda,$ что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}.$$

Число $\lambda$ называется ***собственным значением*** (***собственным числом***) линейного оператора *A*, соответствующим собственному вектору $\bar{x}$.

### Характеристический многочлен матрицы линейного оператора

Для нахождения собственных чисел матрицы *A* следует решить уравнение $\det(A - \lambda E) = 0,$ т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется ***характеристическим уравнением*** матрицы *A*, а его корни называются ***характеристическими числами***, или ***собственными значениями*** матрицы *A*. Многочлен *n*-й степени в левой части характеристического уравнения (1), называется ***характеристическим многочленом*** матрицы *A*.

Характеристический многочлен имеет *n* корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

*Замечание.* Собственными значениями линейного оператора в *действительном* линейном пространстве являются только *действительные* корни характеристического уравнения.

**!!!!!!Утверждение. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.**

**3. Найдем характеристический многочлен и собственные значения матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение*. 1 способ. Собственные значения определим из условия $\boxed{\det(A - \lambda E) = 0,}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(-1-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda)+3) - 3(-3+3\lambda-3) - (-9+15-3\lambda) = 0;$$

$$-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0;$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0.$$

2 способ. Характеристический многочлен матрицы $A$ может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E})=(-\boldsymbol{\lambda})^{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{s_1}(-\boldsymbol{\lambda})^{\boldsymbol{n-1}}+\cdots+\boldsymbol{s_{n-1}}(-\boldsymbol{\lambda})+\boldsymbol{s_n},$$

где коэффициент $s_k$ этого многочлена равен сумме диагональных миноров порядка $k$.

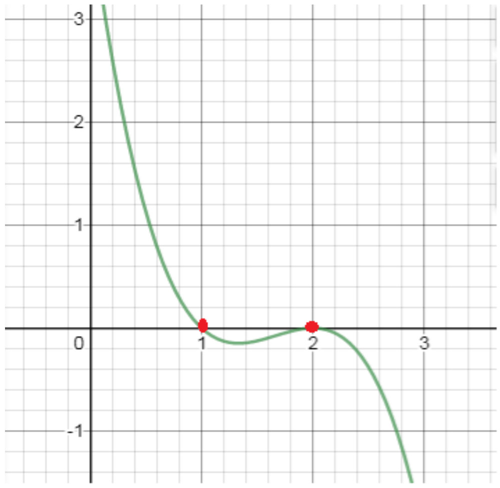
Найдем главные миноры матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

$s_1=-1+5+1=5,$ $\qquad s_2=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8,$

$$s_3=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{vmatrix}=4$$

Характеристический многочлен имеет вид $\det(A-\lambda E)=f(\lambda)=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4.$

4. Построив (он-лайн) график функции $f(\lambda)=0$, можно оценить корни характеристического уравнения с учетом их кратности.




$f(\lambda)=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4$

5. Найдем характеристические числа. Ищем корни среди делителей свободного члена, т.е. среди чисел $\pm1$, $\pm2$, $\pm4$. Заметим, что $\lambda_1=1$ является корнем этого уравнения. Разделим характеристический многочлен на $\lambda-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\lambda^3 & -5\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \lambda-1\\
\cline{5-5}
\lambda^3 & -\lambda^2 & & & \lambda^2-4\lambda+4\\
\cline{1-2}
 & -4\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \\
 & -4\lambda^2 & +4\lambda & & \\
\cline{2-3}
 & & 4\lambda & -4 & \\
 & & 4\lambda & -4 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Таким образом, $(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=0$, откуда получим **собственные значения матрицы:** $\lambda_1=1; \lambda_2=\lambda_3=2.$

6. Найдем собственные векторы оператора.

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A-\lambda E)X=O$,

подставляя $\lambda=1$, для собственного вектора $X_1=(x_1,x_2,x_3)^T$ получим систему

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 3 & -1 \\ -3 & 5-1 & -1 \\ -3 & 3 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+4x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2=0. \end{cases}$$

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ x_2-x_3=0, \\ 0=0, \end{cases} \qquad \text{т. е. } x_1=x_2=x_3.$$

Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид

$$\boxed{X_1=(1,1,1)^T.}$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda=2$.
Их координаты удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 & -1 \\ -3 & 5-2 & -1 \\ -3 & 3 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-x_3=0, \end{cases} \qquad -3x_1+3x_2-x_3=0.$$

Полагая $x_1=c_1, x_2=c_2$, получим $x_3=-3c_1+3c_2$.

Эти формулы при $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ задают все решения системы и, соответственно, все собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda=2$.

При $c_1=1, c_2=0$ получим собственный вектор $\boxed{X_2=(1,0,-3)^T;}$

при $c_1=0, c_2=1$ получим собственный вектор $\boxed{X_3=(0,1,3)^T.}$

Собственные векторы $X_1, X_2, X_3$ линейно независимы. Проверьте!

**Свойства собственных векторов**

**1.** Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

**2.** Если $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – два собственных вектора линейного оператора $A$ с одним и тем же собственным значением $\lambda$, то $\alpha\overline{x_1}+\beta\overline{x_2}$ также является собственным вектором линейного оператора $A$ с тем же собственным значением $\lambda$, $\alpha$, $\beta$ – числа.

**3.** Собственные векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}$ линейного оператора $A$, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

**!!!!!!!Утверждение.** Число линейно независимых собственных векторов, отвечающих одному и тому же корню характеристического уравнения, не превышает кратности этого корня.

**!!!!!!!Если ранг матрицы $A-\lambda_j E$ равен $r$ ($r<n$), то существует $k = n- r$ линейно независимых собственных векторов $x^{(1j)}, x^{(2j)}, \ \ldots, x^{(kj)}$, отвечающих корню $\lambda_j$**

Ранг матрицы – наивысший из порядков всевозможных ненулевых миноров этой матрицы.

В рассмотренном примере ранг матрицы $A-2E$ равен 1, так как с помощью элементарных преобразований эту матрицу можно привести к виду

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, существует $k$ =3–1=2 линейно независимых собственных вектора, соответствующих корню $\lambda$=2. Они найдены.

## 7. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

**Опр.** Матрица $A$ линейного оператора называется ***приводимой к диагональному виду***, если существует такая невырожденная матрица $T$ (такое преобразование базиса), что матрица $D=T^{-1}AT$ является диагональной.

***Замечание.*** Не каждый линейный оператор $n$-мерного линейного пространства имеет $n$ линейно независимых собственных векторов, а следовательно, не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

**Утверждение.** Если линейный оператор $A$, действующий в *действительном* линейном пространстве $L$, $\dim L=n$, имеет $n$ различных действительных собственных значений, то существует базис пространства $L$ из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица $A$ приводима к диагональному виду.

**Т.е.** ***если корни характеристического уравнения различны, то каждому собственному значению соответствует с точностью до коэффициента пропорциональности один и только один собственный вектор.***

При $n=3$ и корне характеристического уравнения кратности 2 в каком случае матрица линейного оператора приводима к диагональному виду?

В рассмотренном выше примере матрица $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$ приводима к диагональному виду, так как существуют три линейно независимых собственных вектора $X_1=(1,1,1)^T$, $X_2=(1,0,-3)^T$, $X_3=(0,1,3)^T$, образующих базис пространства $R^3$. Более того, эти векторы являются столбцами матрицы $T$, такой что $D=T^{-1}AT$, т.е.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Матрица $A_{ijk}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ также приводима к диагональному виду и справедливо равенство

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1/2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1/2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Контроль. $\boxed{A_{ijk}X=\lambda X}$, где $X$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda$.

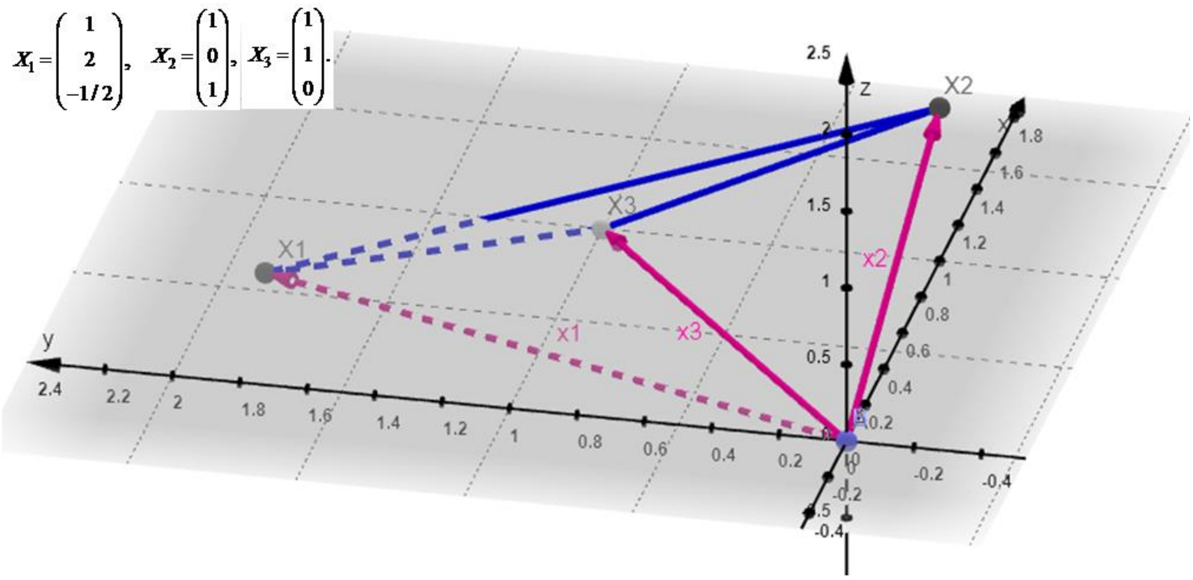
Собственные векторы матрицы $A_{ijk}$: $X_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1/2\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot(-1/2)\\ -4\cdot 1+5\cdot 2+4\cdot(-1/2)\\ 1\cdot 1-1\cdot 2+0\cdot(-1/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+2\cdot 0+2\cdot 1\\ -4\cdot 1+5\cdot 0+4\cdot 1\\ 1\cdot 1-1\cdot 0+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

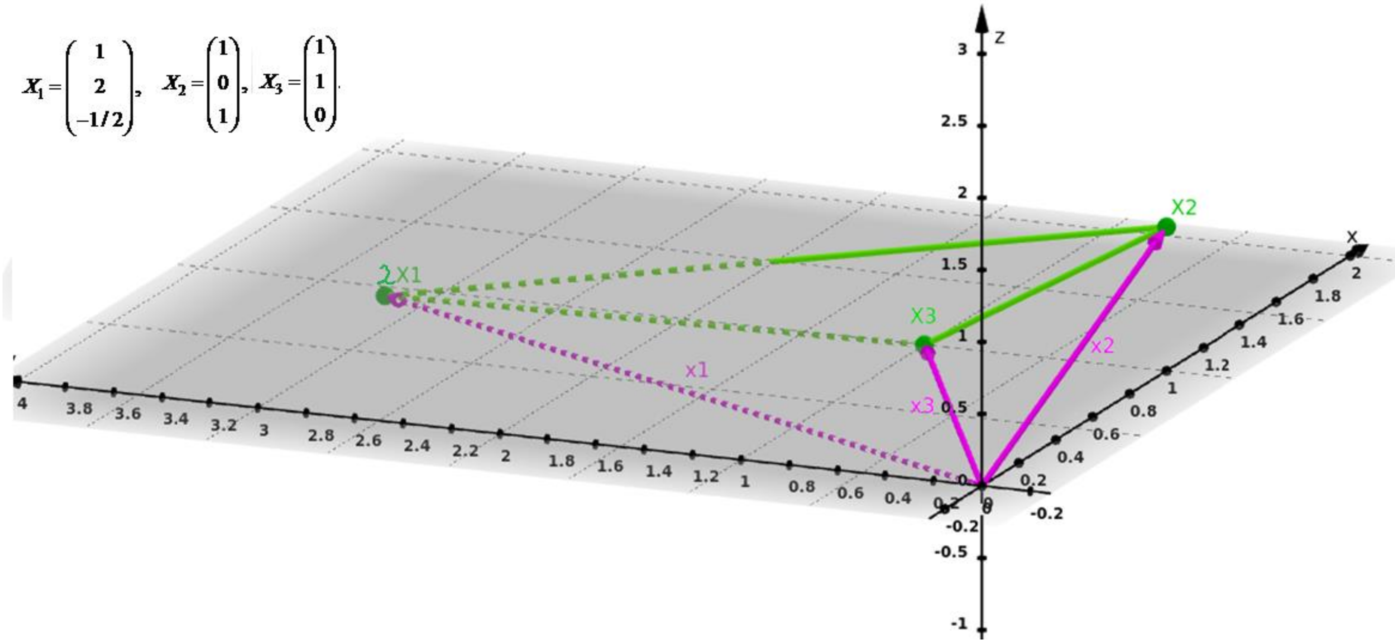
$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 0\\ -4\cdot 1+5\cdot 1+4\cdot 0\\ 1\cdot 1-1\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

**Построим треугольник с вершинами в точках, радиус-векторы которых являются собственными векторами матрицы** $A_{ijk}$, и треугольник, полученный в результате линейного преобразования.



**В результате линейного преобразования векторы $X_2$ и $X_3$ не изменились, вектор $X_1$ не изменил направления, а его модуль увеличился в два раза**

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1/2\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$




**Еще о свойствах спектра……**

**!!!!!!!! Спектр оператора $A$ содержится в круге радиуса $\|A\|$.**

**О нормах матриц смотри тему 2.**

***Критерий сходимости итерационного процесса.***

Пусть система $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{X}^*$. Преобразуем эту систему к виду $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{D}$. Итерационный процесс

$$\boldsymbol{X}^{(n+1)}=\boldsymbol{CX}^{(n)}+\boldsymbol{D},\quad \boldsymbol{n}\geq \boldsymbol{0},$$

сходится к решению $\boldsymbol{X}^*$ при любом начальном приближении $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{0}}$ тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы $\boldsymbol{C}$ по модулю меньше единицы.