

Лабораторная работа 3
Ортогональные системы функций

Скалярное произведение в пространстве функций

Ортогональные функции

Обобщенный ряд Фурье

Коэффициенты Фурье

Наилучшая аппроксимация?

Задание

Дана периодическая (с периодом $\omega = 2a$) функция $f(x)$ на отрезке $[-a; a]$.

1) Разложить функцию $f(x)$ на $[-\pi; \pi]$ в тригонометрический ряд Фурье ($a = \pi$)

2) Разложить функцию $f(x)$ на $[-1; 1]$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

В случае если Вы не сможете выразить коэффициенты разложения в общем виде, запишите три (четыре) первых, отличных от нуля, члена разложения.

3) Дайте графическую иллюстрацию полученным результатам. Т.е. постройте функцию и первые несколько частичных сумм обобщенного ряда Фурье.

Варианты заданий

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ x-1, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 5-x, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 2x-1, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 3x-1, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ x+2, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} 3-2x, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -x+1/2, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ (\pi-x)/2, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ x/2+1, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 5x+1, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 2x+3, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 1-4x, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 3-x, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} 3x+2, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} x-2, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 4-2x, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 4x-3, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} x+\pi/2, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 6x - 5, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} 6x - 2, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 4 - 9x, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} x/3 - 3, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 10x - 3, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} 1 - x/4, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ x/5 - 2, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} 2x - 11, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} 0, -a \leq x < 0, \\ 3 - 8x, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} 7x - 1, -a \leq x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq a. \end{cases}$$