**Тема: Линейные пространства. Линейные операторы. Квадратичные формы**

**Задача 1**.
Является ли линейным пространством множество всех целых чисел с естественными операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число?
**Задача 2**.
Является ли линейным пространством множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих первой четверти, с естественными операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число?
**Задача 3**.
Является ли линейным пространством множество всех векторов, сумма координат которых равна 0, с естественными операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число?
**Задача 4**.
Является ли линейным пространством множество всех векторов, имеющих равные координаты, с естественными операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число?
**Задача 5**.
Является ли линейным пространством множество всех четных функций $f(x)$, заданных на $\boldsymbol{R}$, с естественными операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число?
**Задача 6**.
Показать, что множество положительных действительных чисел

$$L = \{\bar{x} = x \colon x > 0\},$$

в котором операции сложения элементов и умножения элемента на действительное число α определены правилами

$$\bar{x} \boxed{+} \bar{y} = xy; \ \alpha \boxed{\times} \bar{x} = x^{\alpha},$$

является линейным пространством.
**Задача 7**.
Доказать критерий линейной зависимости системы элементов линейного пространства: система элементов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.
**Задача 8**.
Являются ли линейно зависимыми функции $y_1 = \cos^2 x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = 1$?
**Задача 9**.
Являются ли линейно зависимыми функции $y_1 = (1-x)^3,\ y_2 = x^3,\ y_3 = x^2 - x,\ y_4 = 1$?
**Задача 10**.

Определить размерность и привести пример базиса линейного пространства симметрических матриц 3-го порядка, т.е. матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$.

**Задача 11**.

Найти координаты элемента $y = 5x - x^3 + 2x^5$ в базисе $y_1 = 2x + x^5$, $y_2 = x^3 - x^5$, $y_3 = x + x^3$.

**Задача 12**.

Доказать, что линейная оболочка заданных элементов линейного пространства $L$ является линейным подпространством линейного пространства $L$.

**Задача 13**.

Даны векторы $\overline{x_1} = (1;2;0;6)$, $\overline{x_2} = (2;0;3;1)$, $\overline{x_3} = (3;2;3;7)$, $\overline{x_4} = (6;0;9;3)$ в $\mathbf{R}^4$. Является ли вектор $\overline{x_4}$ элементом линейной оболочки $<\overline{x_1}; \overline{x_2}; \overline{x_3}>$?

**Задача 14**.

Доказать, что сумма подпространств линейного пространства $L$ также является подпространством линейного пространства $L$.

**Задача 15**.

Пусть $L$ – множество свободных векторов в пространстве. Является ли линейным оператор $f(\bar{x}) = \bar{x} + \vec{a}$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$ - фиксированный вектор ($f$ - оператор сложения с фиксированным вектором $\vec{a}$)?

**Задача 16**.

Пусть $L$ – множество свободных векторов в пространстве. Является ли линейным оператор $f(\bar{x}) = (\bar{x} \cdot \vec{e})\vec{e}$, где $\vec{e}$ - фиксированный единичный вектор, $(\bar{x} \cdot \vec{e})$ - скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $\vec{e}$ ($f$ - оператор проектирования на ось вектора $\vec{e}$)?

**Задача 17**.

Пусть $L$ – множество свободных векторов в пространстве. Является ли линейным оператор $f(\bar{x}) = \bar{x} \times \vec{a}$, где $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ ?

**Задача 18**.

Показать, что сумма двух линейных операторов является линейным оператором.

**Задача 19**.

Показать, что произведение линейного оператора на число является линейным оператором.

**Задача 20**.

Показать, что произведение двух линейных операторов является линейным оператором.

**Задача 21**.

Доказать, что множество собственных векторов данного линейного оператора, соответствующих одному и тому же собственному числу, вместе с нулевым элементом образуют подпространство линейного пространства.

**Задача 22**.

Доказать, что если $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ - собственные векторы линейного оператора $f$, соответствующие собственным значениям $\lambda_1$ и $\lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ линейно независимы.

**Задача 23**.

Пусть $\bar{x}$ - собственный вектор линейного оператора $f$, соответствующий собственному значению $\lambda$. Доказать, что $\bar{x}$ является также собственным вектором оператора $f^3$. Чему равно соответствующее собственное значение?

**Задача 24**.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $f$, имеющего в некотором базисе матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Каков геометрический смысл этого оператора?

**Задача 25**.

Показать, что в пространстве $\mathbf{R}^2$ операция $\bar{x} \circ \bar{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, где $\bar{x} = (x_1; x_2)$, $\bar{y} = (y_1; y_2)$, удовлетворяет всем четырем аксиомам скалярного произведения.

**Задача 26**.

Пусть $L = V^3$ (множество векторов в пространстве). Проверить, удовлетворяет ли аксиомам скалярного произведения операция $\bar{x} \circ \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \sin(\bar{x} \hat{;} \bar{y})$, где $\bar{x}$, $\bar{y} \in V^3$.

**Задача 27**.

Доказать неравенство треугольника для элементов евклидова пространства.

**Задача 28**.

В евклидовом пространстве найти $\|4\bar{x} + \bar{y}\|$, если $\|\bar{x}\| = 2$, $\|\bar{y}\| = 1$ и $\|\bar{x} - 3\bar{y}\| = 4$.

**Задача 29**.

Исследовать знакоопределенность квадратичной формы $2px^2 + (2p+8)xy + (p+1)y^2$ в зависимости от параметра $p$.

**Задача 30**.

С помощью критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм доказать, что $-11x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 12xy - 12xz + 6yz \leq 0$ при любых $x, y, z$.