8. Линейные пространства. Линейные операторы. Квадратичные формы

1. Являются ли линейными пространствами следующие множества с естественными операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число:

а) множество всех действительных чисел, по модулю больших 1;

б) множество всех действительных положительных чисел;

в) множество всех целых чисел;

г) множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

д) множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

е) множество всех плоских векторов, длина которых равна 7;

ж) множество всех плоских векторов, коллинеарных данной прямой;

з) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих первой четверти;

и) множество всех векторов, вторая координата которых равна 7;

к) множество всех векторов, вторая координата которых равна 0;

л) множество всех векторов, сумма координат которых равна 0;

м) множество всех векторов, сумма координат которых меньше либо равна 0;

н) множество всех векторов, имеющих равные координаты;

о) множество всех векторов, ортогональных данной прямой;

п) множество всех векторов, образующих с данной прямой угол $30°$;

р) множество всех функций $f\,(x)$, заданных на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию $f(0)=0$;

с) множество всех функций $f\,(x)$, заданных на и удовлетворяющих условию $f(0)=1$;

т) множество всех линейных функций $f\,(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

у) множество всех четных функций $f\,(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

ф) множество всех нечетных функций $f\,(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

х) множество всех многочленов вида ax^4+bx^2+c, где $a,b,c\in\mathbb{R}$?

2. Показать, что в линейном пространстве квадратных матриц 2-го порядка элементы $\overline{e_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \overline{e_2}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \overline{e_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \overline{e_4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ образуют базис, и найти в указанном базисе координаты элемента $\overline{a}=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. Чему равна размерность данного линейного пространства?

3. Показать, что многочлены $\overline{e_1} = x^2 + x + 1, \overline{e_2} = x^2 + 2x + 4,$ $\overline{e_3} = x^2 + 3x + 9$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 2. Определить координаты многочлена $x^2 + 4x + 16$ и произвольного квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ в указанном базисе.

4. Показать, что в линейном пространстве нечетных многочленов степени не выше 5 многочлены $\overline{e_1} = x^5 - x^3, \overline{e_2} = x^3 - 2x,$ $\overline{e_3} = x^5 - 3x$ образуют базис, и найти в этом базисе координаты многочлена $2x^5 - 2x^3 - 3x$.

5. Определить размерность линейного пространства матриц размера $m \times n$ и привести пример базиса.

6. Определить размерность линейного пространства L и привести пример базиса:

а) L – множество матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

б) L – множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) L – множество всех симметрических матриц 3-го порядка, т. е. матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

7. Показать, что множество положительных действительных чисел

$$L = \{\overline{x} = x : x > 0\},$$

в котором операции сложения элементов и умножения элемента на действительное число α определены правилами:

$$\overline{x} \boxed{+} \overline{y} = xy, \alpha \boxed{\times} \overline{x} = x^\alpha,$$

является линейным пространством. Найти размерность и базис этого пространства; найти координаты чисел 1; 2; 3; 4 в этом базисе.

8. Являются ли линейно независимыми:

а) векторы $\overline{x_1} = (1; 1; 2; -1), \overline{x_2} = (3; 5; 0; 5), \overline{x_3} = (0; 0; 1; -1),$ $\overline{x_4} = (0; 5; 6; -1)$ в $\mathbb{R}^4$;

б) матрицы $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \overline{e_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \overline{e_4} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) многочлены $\overline{e_1} = x + 3x^2 - x^3, \overline{e_2} = 2x^3 + x - 2, \overline{e_3} = 3 + x - x^2,$ $\overline{e_4} = x + 2x^2 + x^3$?

9. Найти координаты:

а) вектора $\overline{y}=(5;10;8;7)\in\mathbb{R}^4$ в базисе $\overline{x_1}=(0;1;3;-1)$, $\overline{x_2}=(-2;1;0;2)$, $\overline{x_3}=(3;1;-1;0)$, $\overline{x_4}=(0;1;2;1)$;

б) матрицы $\overline{a}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -7 & 5\end{pmatrix}$ в базисе $\overline{e_1}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 4\end{pmatrix}$, $\overline{e_2}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $\overline{e_3}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $\overline{e_4}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$;

в) многочлена $\overline{y}=13-2x-8x^2-9x^3$ в базисе $\overline{e_1}=x+3x^2-x^3$, $\overline{e_2}=2x^3+x-2$, $\overline{e_3}=3+x-x^2$, $\overline{e_4}=x+2x^2+x^3$.

10. Можно ли представить в виде линейной комбинации:

а) векторов $\overline{x_1}=(0;1;3;-1)$, $\overline{x_2}=(-2;1;0;2)$, $\overline{x_3}=(3;1;-1;0)$ вектор $\overline{y}=(1;-2;4;-5)\in\mathbb{R}^4$;

б) матриц $\overline{e_1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\overline{e_2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\overline{e_3}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\overline{e_4}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ матрицу $\overline{a}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -3 & 6\end{pmatrix}$;

в) многочленов $\overline{e_1}=1+x+x^2+x^3$, $\overline{e_2}=x+x^2+x^3$, $\overline{e_3}=1+x+x^2$ многочлен $\overline{y}=4+6x+6x^2+x^3$?

11. Является ли элементом линейной оболочки:

а) $<\overline{x_1};\overline{x_2};\overline{x_3}>$ вектор $\overline{x_4}=(0;2;6;-1)$, если $\overline{x_1}=(1;1;2;-1)$, $\overline{x_2}=(4;6;5;4)$, $\overline{x_3}=(1;1;1;0)$;

б) $<\overline{x_1};\overline{x_2};\overline{x_3};\overline{x_4}>$ матрица $\overline{a}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, если $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\overline{x_2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\overline{x_3}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\overline{x_4}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$;

<u>в)</u> $<\overline{y_1};\overline{y_2};\overline{y_3}>$ многочлен $\overline{y}=4+3x+2x^2+x^3$, если $\overline{y_1}=1+x+x^2+x^3$, $\overline{y_2}=x+x^2+x^3$, $\overline{y_3}=1+x+x^2$?

12. Даны векторы $\overline{x_1}=(1;2;0;6)$, $\overline{x_2}=(2;0;3;1)$, $\overline{x_3}=(3;2;3;7)$, $\overline{x_4}=(7;2;9;9)$ в $\mathbb{R}^4$. Найти размерность и базис линейной оболочки $<\overline{x_1};\overline{x_2};\overline{x_3};\overline{x_4}>$ этих векторов; определить координаты векторов $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4}$ в указанном базисе.

13. Даны векторы $\overline{x_1}=(1;1;1;1;1;7)$, $\overline{x_2}=(3;2;1;1;-3;-2)$, $\overline{x_3}=(0;1;2;2;6;23)$, $\overline{x_4}=(5;4;3;3;-1;12)$ в $\mathbb{R}^6$. Найти размерность и базис оболочки $<\overline{x_1}; \overline{x_2}; \overline{x_3}; \overline{x_4}>$ этих векторов; определить координаты векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}$ в указанном базисе.

14. Даны векторы $\overline{x_1} = (1; 1; 1), \overline{x_2} = (1; 2; 3), \overline{x_3} = (2; 1; 0), \overline{x_4} = (3; 4; 5).$ Доказать равенство линейных оболочек: $<\overline{x_1}; \overline{x_2}> = <\overline{x_3}; \overline{x_4}>$.

15. Даны векторы $\overline{x_1} = (1; 1; 0; 1), \overline{x_2} = (0; 2; 1; 0), \overline{x_3} = (3; 7; 2; 3),$ $\overline{x_4} = (1; -3; -2; 1),$ $\overline{x_5} = (0; 4; 2; 0),$ $\overline{x_6} = (1; -1; -1; 1)$ в $\mathbb{R}^4$. Доказать равенство линейных оболочек: $<\overline{x_1}; \overline{x_2}> = <\overline{x_3}; \overline{x_4}; \overline{x_5}; \overline{x_6}>$.

<u>16.</u> Найти матрицы перехода от базиса $\{x^2; x; 1\}$ к базису $\{(x+1)^2; x+1; 1\}$ и от базиса $\{(x+1)^2; x+1; 1\}$ к базису $\{x^2; x; 1\}$.

<u>17.</u> Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$ к базису $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$. Найти координаты вектора $\overline{a} = 4\overline{e_1'} + \overline{e_2'}$ в базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$ и координаты вектора $\overline{b} = 5\overline{e_1} + 7\overline{e_2}$ в базисе $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$.

<u>18.</u> Найти матрицу перехода от базиса $\{\overline{a_1}; \overline{a_2}\}$ к базису $\{\overline{b_1}; \overline{b_2}\}$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$: $\overline{a_1} = \overline{e_1} + 4\overline{e_2};$ $\overline{a_2} = 3\overline{e_1} + 5\overline{e_2};$ $\overline{b_1} = 7\overline{e_1} + \overline{e_2};$ $\overline{b_2} = \overline{e_2}.$

<u>19.</u> Найти матрицу перехода от базиса $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$ к базису $\{\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}\}$ и матрицу перехода от базиса $\{\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}\}$ к базису $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$, если $\overline{a} = 2\overline{e_1} + 2\overline{e_3};$ $\overline{b} = 3\overline{e_3} - \overline{e_2};$ $\overline{c} = 3\overline{e_1} + \overline{e_3}.$

<u>20.</u> Пусть L – множество свободных векторов в пространстве. Является ли линейным оператор $f: L \to L$, если:

а) $f(\overline{x}) = k\overline{x},$ где k – фиксированное число (*f* – оператор растяжения в k раз);

б) $f(\overline{x}) = \overline{x} + \vec{a},$ где $\vec{a} \neq \vec{0}$ – фиксированный вектор (*f* – оператор сложения с фиксированным вектором $\vec{a}$);

в) $f(\overline{x}) = (\overline{x} \cdot \vec{e})\vec{e},$ где $\vec{e}$ – фиксированный единичный вектор, $(\overline{x} \cdot \vec{e})$ – скалярное произведение векторов $\overline{x}$ и $\vec{e}$ (*f* – оператор проектирования на ось вектора $\vec{e}$)?

<u>21.</u> Пусть L_1 – множество свободных векторов в пространстве, L_2 – множество действительных чисел. Является ли линейным оператор $f: L_1 \to L_2$, если:

а) $f(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \vec{a},$ где $\vec{a} \neq \vec{0}$ – фиксированный вектор;

б) $f(\overline{x}) = \cos(\overline{x} \cdot \vec{a}),$ где $\vec{a} \neq \vec{0}$ – фиксированный вектор;

в) $f(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{x}$?

22. Пусть L – множество многочленов от действительной переменной t. Является ли линейным оператор $f: L \to L$, если:

а) $f(x(t)) = x(-t)$; **б)** $f(x(t)) = x(t+1)$; **в)** $f(x(t)) = tx(t)$?

23. Пусть L – множество квадратных матриц порядка n. Является ли линейным оператор $f: L \to L$, если:

а) где k – фиксированное число;

б) $f(\overline{x}) = \overline{x} + A$, где $A \in L$ – фиксированная ненулевая матрица;

в) $f(\overline{x}) = \overline{x} \cdot A$, где $A \in L$ – фиксированная матрица?

24. Пусть L – множество свободных векторов на плоскости, φ – фиксированный угол; линейный оператор $f: L \to L$ ставит в соответствие вектору $\overline{x} \in L$ вектор $\overline{y} = f(\overline{x})$, который получается при повороте вектора $\overline{x}$ вокруг его начала на угол φ против часовой стрелки**.** Найти матрицу линейного оператора f в базисе $\{\vec{i}; \vec{j}\}$.

25. Доказать линейность оператора $f(\overline{x}) = (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3; 3x_1 + x_3)$, где $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$; записать матрицу этого оператора.

26. Доказать линейность оператора $f(\overline{x}) = \overline{x} \times \vec{a}$, где $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; записать матрицу этого оператора.

27. Доказать, что оператор $f(\overline{x}) = (x_1^2; x_1 - x_3; x_2 + x_3)$, где $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, не является линейным.

28. Доказать, что оператор $f(\overline{x}) = (x_1 + x_2; x_3 - x_1; x_2 + 1)$, где $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, не является линейным.

29. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (7x_1 + 4x_3; 4x_2 - 9x_3; 3x_1 + x_2)$. Найти матрицы операторов f и f^2 и явный вид оператора f^2.

30. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (2x_1; x_2 + 5x_3; -x_1)$, $g(\overline{x}) = (x_1 - x_2; x_2 + x_3; 0)$. Найти матрицы операторов f и g, а также матрицы и явный вид операторов $2f + 3g$, fg, gf.

31. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (2x_1; x_2 + 3x_3; x_2 - x_1)$, $g(\overline{x}) = (x_1 - x_2; x_2 + x_3; x_1)$. Найти матрицы операторов f и g, а также матрицы и явный вид операторов gf, $2f - g^2$.

32. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (x_2 - 6x_3; 3x_1 + 7x_3; x_1 + x_2 - x_3)$, $g(\overline{x}) = (x_1 - x_2 + x_3; 3x_2 - 7x_3; -x_3)$. Найти матрицы операторов f и g, а также матрицы и явный вид операторов $2f + g$, $(2f + g)^2$, $fg - gf$.

33. Даны два базиса $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$ линейного пространства и матрица

$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$, если $\overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$, $\overline{e_2'} = \overline{e_1} - \overline{e_2}$.

34. Даны два базиса $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$ и $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; \overline{e_3'}\}$ линейного пространства и матрица $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; \overline{e_3'}\}$, если $\overline{e_1'} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$, $\overline{e_2'} = -2\overline{e_1} + \overline{e_2} - \overline{e_3}$, $\overline{e_3'} = -5\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + \overline{e_3}$.

35. Линейный оператор f имеет матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\overline{e_1'} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2}$, $\overline{e_2'} = 2\overline{e_1} + 3\overline{e_2}$; линейный оператор g имеет матрицу $A_g' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ в базисе $\overline{e_1''} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2}$, $\overline{e_2''} = 4\overline{e_1} + 2\overline{e_2}$. Найти матрицу оператора $f + g$ в базисе $\{\overline{e_1''}; \overline{e_2''}\}$.

36. Убедиться, что вектор $\overline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является собственным вектором оператора f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; найти собственное значение для указанного вектора.

37. Какие из векторов $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{x_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{x_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ являются собственными векторами линейного оператора f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$?

38. Какие из векторов $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\overline{x_2}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overline{x_3}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$, $\overline{x_4}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$ являются собственными векторами линейного оператора f с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-6&2\end{pmatrix}$?

39. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, имеющего в некотором базисе матрицу:

а) $A=\begin{pmatrix}1&4\\9&1\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}3&2\\6&2\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; ***д)*** $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\4&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$; **е)** $A=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\2&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&0&3\\1&3&0\end{pmatrix}$; **з)** $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; **и)** $A=\begin{pmatrix}2&0&-6\\1&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

40. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора *f*, имеющего в некотором базисе матрицу $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. Каков геометрический смысл этого оператора?

41. Проверить, что данную матрицу нельзя привести к диагональному виду:

а) $A=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

42. В базисе $\{\overline{e_1};\overline{e_2}\}$ линейный оператор *f* задается матрицей $A_f=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$. Найти базис, в котором матрица оператора f примет диагональный вид.

43. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $q(x_1;x_2)=x_1^2-2x_2^2-4x_1x_2$ к каноническому виду; записать квадратичную форму в каноническом виде.

44. Привести квадратичную форму к каноническому виду:

а) $q(x_1;x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$;

б) $q(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

в) $q(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$.

45. Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка:

а) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$; **б)** $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

в) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$; **г)** $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$;

д) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$.

46. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат:

а) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$;

б) $3x^2+6y^2+3z^2-4xy-8xz-4yz+8x-26y+8z+17=0$.

47. Установить с помощью критерия Сильвестра, является ли данная квадратичная форма знакоопределенной:

а) $4x^2+2xy+3y^2$; ***б)*** $-x^2+2xy-2y^2$;

в) $-16x^2+24xy-9y^2$; ***г)*** $2x^2+9y^2+19z^2+8xy+4xz$;

д) $-x^2-2y^2-3z^2+2xy+2yz$; **е)** $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+2yz$;

ж) $xy+xz+yz$; **з)** $xy+yz-x^2-y^2-z^2$;

и) $8x^2+8y^2+z^2+16xy+4xz+4yz$.

Ответы. **1. а)** нет; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да; **д)** да; **е)** нет; **ж)** да; **з)** нет; **и)** нет; **к)** да; **л)** да; **м)** нет; **н)** да; **о)** да; **п)** нет; **р)** да; **с)** нет; **т)** да; **у)** да; **ф)** да; **х)** да. **2.** $\{3;4;-2;1\}$; $\dim L = 4$. **3.** $\{1;-3;3\}$; $\left\{3a+\dfrac{c-5b}{2};4b-c-3a;a+\dfrac{c-3b}{2}\right\}$. **4.** $\{1;-3;3\}$. **5.** $\dim L = mn$; простейший базис составляют матрицы, у которых один элемент равен 1, а все остальные равны 0. **6. а)** $\dim L = 6$; **б)** $\dim L = 5$; **в)** $\dim L = 6$. **7.** $\dim L = 1$; в качестве базисного элемента можно взять любое число, отличное от 1; например, если в качестве базисного элемента взять число 2, то координаты чисел 1; 2; 3; 4 в этом базисе будут равны соответственно 0; 1; $\log_2 3$; 2. **8. а)** линейно зависимы; **б)** линейно независимы; **в)** линейно независимы. **9. а)** $\{1;2;3;4\}$; **б)** $\{-9;0;-16;9\}$; **в)** $\{1;-2;3;-4\}$. **10. а)** $\overline{y}=\overline{x_1}-2\overline{x_2}+4\overline{x_3}-5\overline{x_4}$; **б)** невозможно; **в)** $\overline{y}=-\overline{e_1}+2\overline{e_2}+5\overline{e_3}$. **11. а)** да; **б)** нет; **в)** нет. **12.** $\dim L = 2$; в качестве базиса можно взять, например, векторы $\overline{x_1};\overline{x_2}$; тогда координаты векторов $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4}$ в указанном базисе будут: $\overline{x_1}=\{1;0\}$, $\overline{x_2}=\{0;1\}$, $\overline{x_3}=\{1;1\}$, $\overline{x_4}=\{1;3\}$. **13.** $\dim L = 2$; в качестве базиса можно взять, например, векторы $\overline{x_1};\overline{x_2}$; тогда координаты векторов $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4}$ в указанном базисе будут: $\overline{x_1}=\{1;0\}$, $\overline{x_2}=\{0;1\}$, $\overline{x_3}=\{3;-1\}$, $\overline{x_4}=\{2;1\}$. **16.** $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$;

$T_1 = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **17.** $\overline{a} = 10\overline{e_1} + 6\overline{e_2}$; $\overline{b} = 3\overline{e_1{}'} + 2\overline{e_2{}'}$. **18**. $T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -32 & 3 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}$.

19. $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. **20.** **а)** да; **б)** нет; **в)** да. **21.** **а)** да; **б)** нет; **в)** нет. **22.** **а)** да; **б)** да; **в)** да. **23.** **а)** да; **б)** нет; **в)** да.

24. $A_f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. **25.** $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **26.** $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

29. $A_f = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{f^2} = \begin{pmatrix} 61 & 4 & 28 \\ -27 & 7 & -36 \\ 21 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

$f^2(\overline{x}) = (61x_1 + 4x_2 + 28x_3; -27x_1 + 7x_2 - 36x_3; 21x_1 + 4x_2 + 3x_3)$.

30. $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{2f+3g} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 13 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$(2f + 3g)(\overline{x}) = (7x_1 - 3x_2; 5x_2 + 13x_3; -2x_1)$; $A_{fg} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$fg(\overline{x}) = (2x_1 - 2x_2; x_2 + x_3; -x_1 + x_2)$; $A_{gf} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$gf(\overline{x}) = (2x_1 - x_2 - 5x_3; x_1 + x_2 + 5x_3; 0)$. **31.** $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$A_{gf} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $gf(\overline{x}) = (2x_1 - x_2 - 3x_3; -x_1 + 2x_2 + 3x_3; 2x_1)$;

$A_{2f-g^2}=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&1&5\\-3&3&0\end{pmatrix}$; $(2f-g^2)(\overline{x})=(3x_1+2x_2+x_3;-x_1+x_2+5x_3;-3x_1+3x_2)$.

32. $A_f=\begin{pmatrix}0&1&-6\\3&0&7\\1&1&-1\end{pmatrix}$; $A_g=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&-7\\0&0&-1\end{pmatrix}$; $A_{2f+g}=\begin{pmatrix}1&1&-11\\6&3&7\\2&2&-3\end{pmatrix}$;

$(2f+g)(\overline{x})=(x_1+x_2-11x_3;6x_1+3x_2+7x_3;2x_1+2x_2-3x_3)$;

$A_{(2f+g)^2}=\begin{pmatrix}-15&-18&29\\38&29&-66\\8&3&1\end{pmatrix}$;

$(2f+g)^2(\overline{x})=(-15x_1-18x_2+29x_3;38x_1+29x_2-66x_3;8x_1+3x_2+x_3)$;

$A_{fg-gf}=\begin{pmatrix}2&1&13\\1&4&-32\\2&3&-6\end{pmatrix}$;

$(fg-gf)(\overline{x})=(2x_1+x_2+13x_3;x_1+4x_2-32x_3;2x_1+3x_2-6x_3)$.

33. $A_f{}'=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-5\end{pmatrix}$. **34**. $A_f{}'=\begin{pmatrix}-19&9&-16\\-36&18&-24\\6&-3&4\end{pmatrix}$. **35.** $A_{f+g}{}'=\begin{pmatrix}44&44\\-29{,}5&43\end{pmatrix}$.

36. 5. **37.** $\overline{x_2},\overline{x_4}$. **38.** $\overline{x_1},\overline{x_4}$. **39.** **а)** $\lambda_1=-5$; $\overline{x_1}=(-2;3)$; $\lambda_2=7$; $\overline{x_2}=(2;3)$; **б)** $\lambda_1=-2$; $\overline{x_1}=(-1;1)$; $\lambda_2=1$; $\overline{x_2}=(-4;1)$; **в)** $\lambda_1=-1$; $\overline{x_1}=(1;-2)$; $\lambda_2=6$; $\overline{x_2}=(2;3)$; **г)** $\lambda_1=3$; $\overline{x_1}=(1;1;0)$; $\lambda_2=\lambda_3=1$; $\overline{x_2}=(-1;1;0)$; $\overline{x_3}=(-1;0;1)$; **д)** $\lambda_1=-3$; $\overline{x_1}=(-1;1;1)$; $\lambda_2=1$; $\overline{x_2}=(1;3;-1)$; $\lambda_3=3$; $\overline{x_3}=(7;11;5)$; **е)** $\lambda_1=1$; $\overline{x_1}=(1;1;1)$; $\lambda_2=2$; $\overline{x_2}=(1;0;1)$; $\lambda_3=3$; $\overline{x_3}=(1;1;0)$; **ж)** $\lambda_1=1$; $\overline{x_1}=(-2;1;1)$; $\lambda_2=3$; $\overline{x_2}=(0;1;1)$; $\lambda_3=-3$; $\overline{x_3}=(6;-7;5)$; **з)** $\lambda_1=0$; $\overline{x_1}=(-2;0;1)$; $\lambda_2=1$; $\overline{x_2}=(1;0;0)$; $\lambda_3=3$; $\overline{x_3}=(0;1;0)$; **и)** $\lambda_1=-1$; $\overline{x_1}=(2;0;1)$; $\lambda_2=3$; $\overline{x_2}=(0;1;0)$; $\lambda_3=4$; $\overline{x_3}=(3;5;-1)$. **40.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$; все ненулевые векторы являются собственными векторами данного оператора; геометрически действие этого оператора сводится к растяжению всех векторов в 3 раза. **42.** $\overline{e_1{}'}=\overline{e_1}-\overline{e_2}$; $\overline{e_2{}'}=2\overline{e_1}+3\overline{e_2}$. **43.** $x_1=\dfrac{1}{\sqrt5}x_1{}'-\dfrac{2}{\sqrt5}x_2{}'$; $x_2=\dfrac{2}{\sqrt5}x_1{}'+\dfrac{1}{\sqrt5}x_2{}'$; $q_1(x_1{}';x_2{}')=-3(x_1{}')^2+2(x_2{}')^2$. **44.** **а)** $3(x_1{}')^2-(x_2{}')^2$; **б)** $5(x_1{}')^2-(x_2{}')^2-(x_3{}')^2$; **в)** $7(x_1{}')^2+4(x_2{}')^2-4(x_3{}')^2$. **45.** **а)** эллипс $\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{Y^2}{1}=1$; **б)** парабола

$Y^2 = 4\sqrt{2}X$; **в)** гипербола $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$; **г)** пара параллельных прямых $X = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; **д)** эллипс $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{30} = 1$. **46.** **а)** эллипсоид $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} + \frac{Z^2}{2/3} = 1$; $O' = (1; 2; -1)$; $\overline{e_1} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; $\overline{e_2} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; $\overline{e_3} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; **б)** двуполостный гиперболоид $\frac{X^2}{7} - \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} = 1$; $O'\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$; $\overline{e_1} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; $\overline{e_2} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}; -\frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$; $\overline{e_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

47. **а)** знакоположительная; **б)** знакоотрицательная; **в)** не является знакоопределенной; **г)** знакоположительная; **д)** знакоотрицательная; **е)** не является знакоопределенной; **ж)** не является знакоопределенной; **з)** знакоотрицательная; **и)** не является знакоопределенной.