ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Некоторые задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

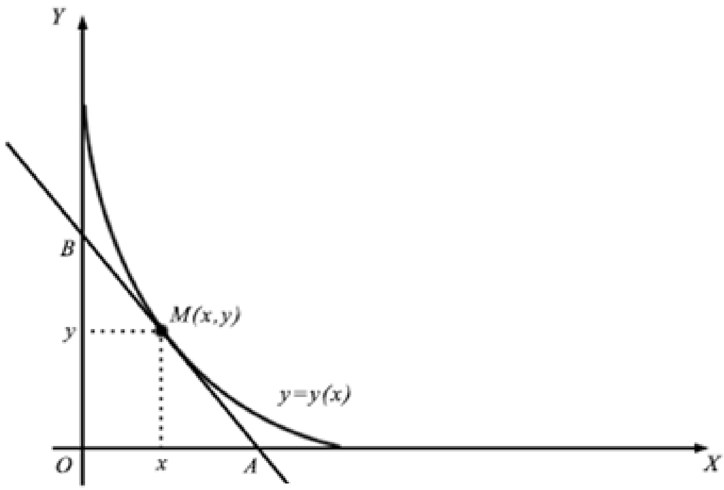
При изучении различных явлений окружающего нас мира не всегда удается найти зависимость, связывающую только величины, характеризующие данное явление. Можно лишь иногда установить закономерность между величинами, характеризующими явления, и их производными. В результате процесс описывается соотношениями, связывающими искомую функцию и ее производные (или дифференциалы). Если рассматривается функция одной переменной, то приходим к понятию обыкновенных дифференциальных уравнений (в литературе обычно обозначают ОДУ), если нескольких переменных, то задействуются частные производные и приходим к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Пример 1. ***Математическое описание процесса распада радиоактивного вещества***. Количества вещества, не распавшегося к моменту времени t обозначим через $y(t)$. Из физических соображений следует, что, если нет цепной реакции, скорость распада пропорциональна имеющемуся количеству нераспавшегося радиоактивного вещества, то есть

$$\frac{dy}{d\,t} = -\beta^2 y(t).$$

Здесь через постоянную $\beta \neq 0$ обозначен зависящий от типа вещества коэффициент пропорциональности. Знак «–» взят, так как количество вещества убывает. Несложно проверить, что этому уравнению удовлетворяет функция $y = Ce^{-\beta^2 t}$, где C – ненулевая постоянная величина. Для определения постоянной C необходимо указать начальное количество вещества. Если при t=0 его было y_0, то $C = y_0$, и, следовательно, $y = y_0 e^{-\beta^2 t}$. Часто скорость распада характеризуют *периодом полураспада* – временем за которое распадется половина массы имеющегося вещества. Если обозначить его через T, то $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-\beta^2 T}$ и период полураспада определяется из соотношения $T = \frac{1}{\beta^2}\ln 2$.

Пример 2. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M(2,3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между положительно направленными координатными осями, делится пополам в точке касания.



Пусть *M(x,y)* – текущая точка искомой кривой *y=y(x)*, *BA* – касательная к ней. Если α – угол наклона касательной, то $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$, $\angle OAB = \pi - \alpha, tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$. Тогда

$$-tg\alpha = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln y = \ln\frac{C}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x} \ ,$$

где *C* – *const*. По условию *M*(2,3) лежит на искомой кривой, следовательно, $y(2) = 3 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow xy = 6$ – лежащая в первом квадранте ветвь гиперболы.

Пример 3. Через сколько минут тело, нагретое до температуры 100^0С, охладится до 30^0С, если в течении 20 минут тело охлаждалось от 100^0С до 60^0С. Температура среды равна 20^0С

По закону Ньютона скорость изменения температуры *T* тела пропорционально разности температур тела и окружающей среды, то есть

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20^0),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Можно проверить, что функция $T = 20^0 + Ce^{-kt}$, где *C-const*, является решением последнего уравнения. При *t*=0 по условию *T*=100^0С. Следовательно, *C*=80^0С и окончательно

$$T = 20^0 + 80^0 e^{-kt}.$$

Осталось определить коэффициент пропорциональности *k*. Так как за 20 минут тело охлаждается от 100^0С до 60^0С, то

$$60^0 = 20^0 + 80^0 e^{-k20} \Rightarrow e^{-20k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20}.$$

Закон изменения температуры имеет вид

$$T = 20^0 + 80^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Положив *T*=30^0С, получим *t*=60 минут.

Рассмотрим, далее, некоторые общие понятия теории дифференциальных уравнений.

Соотношение вида $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$, связывающее независимую переменную *x,* неизвестную функцию *y(x)* и ее производные называется ***дифференциальным уравнением*** (будем обозначать ДУ). Порядок старшей производной, входящей в это уравнение, называется ***порядком дифференциального уравнения.***

Примеры:

1) $f'(x) = f(x)$ – (обыкновенное) ДУ первого порядка;
2) $y'' = cosx$ – ДУ второго порядка;
3) $0 \cdot y'' + y' = cosx$ – ДУ первого порядка;
4) уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

задает ***общий вид*** ДУ n-го порядка ***разрешенного*** относительно старшей производной;

5) уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

задает ***общий вид неоднородного*** (в случае $f(x) \not\equiv 0$) и ***однородного*** (в случае $f(x) \equiv 0$) ***линейного ДУ*** (ЛДУ) n-го порядка, где известные функции $a_1(x), \dots, a_n(x)$ называются *коэффициентами*, а $f(x)$ – ***правой частью*** ЛДУ.

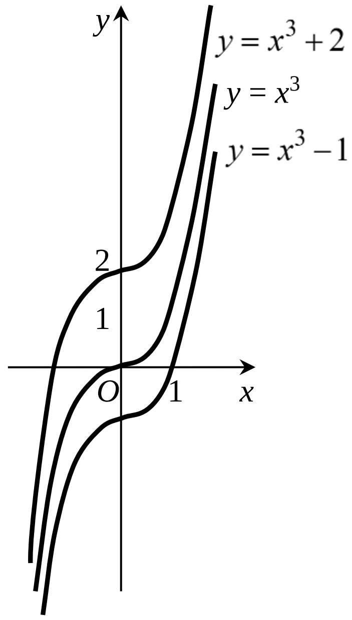
6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – уравнение колебаний струны – дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными относительно неизвестной функции $u = u(x;t)$.

Далее будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в верное тождество.

Основная задача теории дифференциальных уравнений – нахождение решений. Эта задача сводится к нахождению интегралов, поэтому процесс решения называют ***интегрированием дифференциальных уравнений***, а график решения *y= y(x)* называют ***интегральной кривой дифференциального уравнения.***

Например, функция $y = x^3$ является решением ДУ $y' = 3x^2$. При этом функции $y = x^3 + 2$, $y = x^3 - 1$ также являются решениями этого дифференциального уравнения. На рисунке изображены три интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = 3x^2$.



Таким образом, ДУ задает *семейство* интегральных кривых на плоскости.

Пример. Решить ДУ первого порядка $y' = xe^{-x}$.

Решение. Интегрируем: $y = \int xe^{-x}dx$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$y = \int xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ e^{-x}dx = dv, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Пример. Решить ДУ второго порядка $y'' = \sin x$.

Решение. Интегрируем: $y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$. Интегрируем повторно:

$$y = -\int (\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Таким образом, множество решений дифференциального уравнения первого порядка определяется одной произвольной постоянной, а второго порядка – двумя. Аналогично, множество решений дифференциального *n*-го порядка определяется *n* произвольными постоянными. Чтобы из всего множества выделить конкретное решение, обычно задают дополнительные условия на искомую функцию.

***Задачей Коши* для ДУ *n*-го порядка** $F(x; y; y'; ...; y^{(n)}) = 0,$ называется задача нахождения такого решения ДУ, которое удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{01}, \\ ..., \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0;\, n-1}. \end{cases}$$

Эти условия называются ***начальными условиями***, или ***условиями Коши*** для дифференциального уравнения n – порядка. Очевидно, что количество начальных условий совпадает с порядком ДУ и начальные условия Коши задают значения функции y и ее производных в одной и той же точке x_0.

§2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид
$$F(x, y, y') = 0.$$
Если его можно разрешить относительно первой производной неизвестной функции $y=y(x)$, то будем его называть ***ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной***:
$$y' = f(x, y).$$
Иногда ДУ первого порядка записывают в виде
$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$
и называют ***ДУ первого порядка в дифференциалах***. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то разрешенное относительно производной ДУ первого порядка всегда можно записать в дифференциалах
$$F(x,y)dx-dy=0.$$
При такой форме записи x и y равноправны и любая из них может рассматриваться как функция другой.

Рассмотрим ***задачу Коши для ДУ 1-го порядка***
$$\begin{cases} y' = f(x; y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Функция $y = \varphi(x, C)$, где C – произвольная постоянная, называется ***общим решением ДУ первого порядка***, если

- она является решением этого ДУ при любом значении произвольной постоянной;
- для любого допустимого $y(x_0) = y_0$ существует единственное $C = C_0$, такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$.

Частным решением ДУ первого порядка называется решение, которое получается из общего решения при конкретном значении произвольной постоянной. Если общее решение ДУ первого порядка можно получить только в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то оно называется ***общим интегралом ДУ.*** Если в этом соотношении положить $C = C_0$, то получим ***частный интеграл ДУ.***

Теорема (Коши). Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, содержащей точку (x_0,y_0), то найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически теорема означает, что через каждую внутреннюю точку области D проходит единственная интегральная кривая исходного ДУ первого порядка. Точки плоскости, через которые проходит более, чем одна интегральная кривая ДУ называются ***особыми точками*** этого уравнения. Интегральная кривая называется ***особой***, а соответствующее ей решение – ***особым решением ДУ***, если через каждую ее точку проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая. Другими словами, решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым***.

Например, для ДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$$

или

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3\int dx,$$

или

$$3y^{\frac{1}{3}} = 3(x + C),$$

откуда

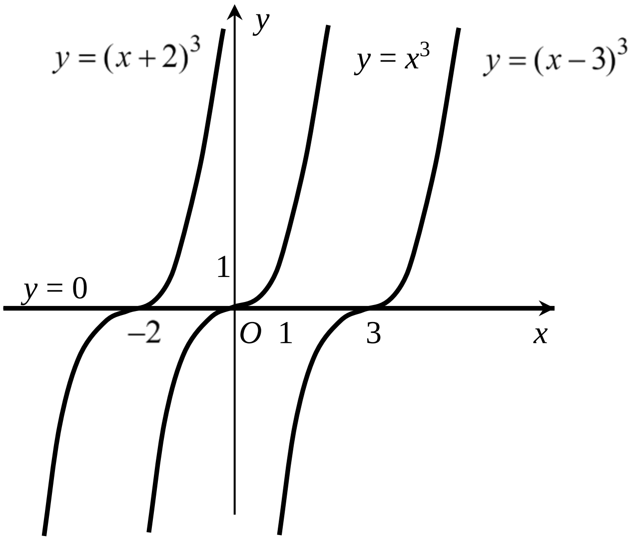
$$y = (x + C)^3$$

– общее решение, так как при любом значении постоянной C эта функция удовлетворяет данному ДУ. Проверим выполнимость условий теоремы Коши:

– функция $f(x;\, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ непрерывна во всех точках $(x;\, y)$;

– функция $f_y'(x;\, y) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ непрерывна при $y \neq 0$,

То есть условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши выполняются во всех точках вне оси Ox. Подставляя функцию $y = 0$ в ДУ, убеждаемся, что она является решением этого уравнения, однако ее нельзя получить из общего решения ни при каком значении C. Решение $y \equiv 0$ является особым, так как в каждой точке $(x_0, 0)$ этого решения нарушается единственность решения задачи Коши, то есть через эту точку проходят две интегральные кривые: кубическая парабола $y = \left(x - x_0\right)^3$ и прямая $y \equiv 0$ (ось Ox).



На рисунке изображены интегральные кривые данного ДУ: через каждую точку оси *Ox* проходят ровно две интегральные кривые данного ДУ.

Рассмотрим более подробно некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка.

§3. ДУ с разделяющими переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

или разрешенные относительно первой производной

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

(где правая часть есть произведение функции «только от *x*» на функцию «только от *y*») называются ***ДУ с разделяющимися переменными.*** Они интегрируются путем разделения переменных

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

(переменные с x в *одной* части, а переменные с y – *в* другой) и последующим интегрированием: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. В результате получим $y = \phi(x;C)$ – общее решение (либо общий интеграл). Часто входящие в это решение интегралы нельзя выразить в элементарных функциях. В этом случае говорят, что ***решение ДУ выражено в квадратурах.***

Если ДУ записано в дифференциалах, то для разделения переменных разделим на $M_2(x)N_1(y)$, предполагая, что функции, стоящие в качестве сомножителей нигде в ноль не обращаются. Получим

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$$

Считая, что $y=y(x)$, последнее равенство можно рассматривать как равенство двух дифференциалов. Причём, в левой части дифференциал выражен через независимую переменную x, а правой – через промежуточный аргумент $y=y(x)$.

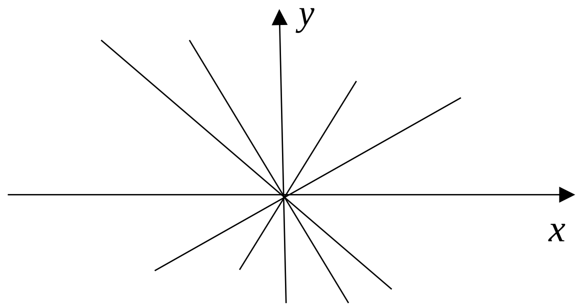
Неопределенные интегралы от этих дифференциалов будут отличаться лишь на произвольную постоянную C

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy + \mathrm{C}$$

Если это соотношение содержит все решения ДУ, то оно является общим интегралом этого ДУ. Дело в том, что при разделении переменных могут быть потеряны некоторые решения. А именно, если $y=y_0$ – корень уравнения $N_1(y)=0$, то подставляя $y=y_0$ в исходное уравнение с разделяющимися переменными, получаем тождество. То есть $y=y_0$ – решение. Если оно не получается из общего решения ни при каком значении C, то его нужно рассмотреть дополнительно к полученному решению. Аналогично обстоит дело и с корнями уравнения $M_2(x)=0$.

Пример. Решить уравнение $ydx–xdy=0$. Разделив на xy получим $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$. Проинтегрируем и получим $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow |y| = |Cx| \Rightarrow y = Cx$. При разделении переменных делили на $xy\neq 0$ и были потеряны два решения: $x=0$ и $y=0$. Второе получается из общего при $C=0$, а первое надо рассмотреть отдельно. Окончательно все решения

$$\begin{cases} y = Cx \\ x = 0 \end{cases}$$



Интегральными кривыми является семейство прямых, проходящих через начало координат. Как видно из рисунка, через каждую точку плоскости, за исключением начала координат, проходит единственная интегральная кривая, а через начало координат – бесконечное множество. Это происходит из-за нарушения условий теоремы Коши: так как $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ и частная производная $\left(\frac{y}{x}\right)_y = \frac{1}{x}$ разрывна в точке $x=0$. Точка (0,0) и есть ***особая точка уравнения.***

Пример. Проинтегрировать ДУ $xy' + y = 0$.

Решение. Разделяем переменные $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$ и интегрируем:

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = \dfrac{C}{x}$ – общее решение (в области, где $x \neq 0$) – семейство интегральных кривых – семейство гипербол.

§4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция *f(x,y)* называется ***однородной функцией*** порядка *k* относительно переменных *x* и *y*, если справедливо тождество $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Например, функция $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ – однородная функция порядка ½.

Дифференциальное уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется ***однородным дифференциальным уравнением,*** если *P(x,y)* и *Q(x,y)* являются однородными функциями одного и того же порядка.

Если разрешить однородное уравнение относительно производной

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

то, так как *P(x,y)* и *Q(x,y)* являются однородными функциями одного и того же порядка, имеем, что

$$f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

– однородная функция нулевого порядка, то есть *f(x,y)=f(tx,ty)* для любого действительного значения t. Положив, далее, $t=\frac{1}{x}$, имеем

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

То есть ***однородную функцию нулевого порядка можно представить как функцию одного аргумента*** $\frac{y}{x}$. Обозначим далее

$$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u'x+u.$$

Подставляя эту замену *y* и ее производной в исходное уравнение, получим

$$u'x+u=f(1,u) \Rightarrow \frac{du}{dx}=f(1,u)-u.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его и возвращаясь к исходным переменным, найдем общее решение.

Пример. Проинтегрировать ДУ $y'=-\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

Решение. Так как $f(x,y)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ и

$$f(tx,ty)=-\frac{tx+\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}}{ty}=f(x,y),$$

то уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Применяя подстановку в исходное дифференциальное уравнение $y=ux$, $y'=xu'+u$ получаем

$$xu'+u=-\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u} \Rightarrow xu'=-\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}-u=-\frac{1+u^2+\sqrt{1+u^2}}{u} \Rightarrow$$

$$\int\frac{udu}{1+u^2+\sqrt{1+u^2}}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{1}{1+\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}}=-\ln|x|+\ln|C| \Rightarrow$$

$$\ln\left|1+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow \left(\sqrt{1+u^2}\right)^2=\left(\frac{C}{x}-1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{C^2}{x^2}-2\frac{C}{x} \Rightarrow y^2=C^2-2Cx,$$

то есть, семейство интегральных кривых – семейство парабол.

§5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения вида

$$a(x)y'+b(x)y+c(x)=0,$$

где $a(x)\neq 0$, $b(x)$, $c(x)$ – заданные функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением* (ЛДУ) *первого порядка.***

Уравнения такого вида интегрируется заменой $y=uv$ (методом u на v), где $u=u(x)$ – новая неизвестная функция, $v=v(x)$ – вспомогательная функция. Выполняя подстановку $y=uv$ и учитывая, что $y'=u'v+uv'$, имеем

$$a(x)(u'v+uv')+b(x)uv+c(x)=0.$$

Вынося u за скобку, получаем

$$a(x)u'v+u[a(x)v'+b(x)v]+c(x)=0.$$

Выбирая вспомогательную функцию так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль, приходим к системе

$$\begin{cases} a(x)v'+b(x)v=0, \\ a(x)u'v+c(x)=0. \end{cases}$$

дифференциальных уравнений с разделяющими переменными. Интегрируя первое уравнение

$$\frac{dv}{v}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx \Rightarrow \ln|v|=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx,$$

получаем $v=e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$a(x)\cdot u'\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}+c(x)=0,$$

откуда

$$du=-\frac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}\cdot dx \Rightarrow u=C-\int\frac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}\cdot dx \Rightarrow$$

$$y=u\cdot v=\left(C-\int\frac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}\cdot dx\right)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

– общее решение искомого дифференциального уравнения.

Помнить эту формулу для общего решения не обязательно, достаточно уметь применять «метод u на v».

Пример. Найти общее решение ДУ $xy'+y=1$.

Решение. Это линейное ДУ. Делаем замену $y=u\cdot v$.

Тогда $x(u'v+uv')+uv=1 \Rightarrow xu'v+u\underbrace{(xv'+v)}_{=0}=1 \Rightarrow \begin{cases} xv'+v=0, \\ xu'v=1, \end{cases}$

Откуда $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\ln|x| \;\Rightarrow\; v=\dfrac{1}{x}$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем: $u'=1 \Rightarrow du=dx \Rightarrow u=x+C$.

Тогда $y=u\cdot v=(x+C)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{C}{x}+1$ – общее решение (в области $x\neq 0$).

При внимательном рассмотрении, очевидно, что это ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$x\frac{dy}{dx}=1-y \Rightarrow \frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1|=-\ln|x|+\ln|C| \Rightarrow y-1=\frac{C}{x},$$

откуда $y=\dfrac{C}{x}+1$ – общее решение.

Если посмотреть еще более внимательно, то заметим, что $xy'+y=(xy)'=1$, откуда $xy=x+C$ и $y=1+\dfrac{C}{x}$ – общее решение.

Рассмотренный пример показывает, что одно и то же ДУ может относиться к различным типам и, стало быть, интегрироваться различными стандартными (и даже нестандартными) методами.

Иногда удается решить ДУ, если считать искомой функцией *x*, а независимой переменной – *y*.

Пример. Найдем общее решение (общий интеграл) ДУ $y'=\dfrac{1}{x+y}$.

Решение. Отметим, что это дифференциальное уравнение

– не является ДУ с разделяющимися переменными;

– не является однородным ДУ 1-го порядка;

– не является линейным ДУ относительно неизвестной функции *y*.

Поскольку

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{dy}=x+y,$$

то, воспользовавшись теоремой о производной обратной функции, получим ДУ

$$x'_y=x+y,$$

которое является линейным относительно неизвестной функции $x = x(y)$. Для его решения используем подстановку $x(y) = u(y)v(y)$, $x'_y = u'v + uv'$ (здесь все функции зависят от переменной y и дифференцирование ведется по y). Тогда

$$u'v + uv' = uv + y; \qquad u'v + u\left(v' - v\right) = y.$$

Приравняв скобку к 0, получим систему $\begin{cases} v' - v = 0, \\ u'v = y. \end{cases}$

Разделим переменные в первом уравнении системы:

$$\frac{dv}{dy} = v; \qquad \frac{dv}{v} = dy; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int dy;$$

$$\ln|v| = y; \qquad v = \mathrm{e}^{y}.$$

Подставляя во второе уравнение системы, получим

$$u'\,\mathrm{e}^{y} = y; \qquad \frac{du}{dy} = y\,\mathrm{e}^{-y}; \qquad du = y\,\mathrm{e}^{-y}\,dy.$$

Находим функцию u, применяя формулу интегрирования по частям:

$$u = \int y\,\mathrm{e}^{-y}\,dy = \left| \begin{matrix} U = y; & dU = dy \\ dV = \mathrm{e}^{-y}\,dy; & V = \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -\mathrm{e}^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= -y\,\mathrm{e}^{-y} + \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -y\,\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} + C.$$

Отсюда, поскольку $x(y) = u(y)v(y)$, получаем общее решение (общий интеграл) уравнения: $x = (-y\,\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} + C)\mathrm{e}^{y}$, или $x = -y - 1 + C\,\mathrm{e}^{y}$.•

§6. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называют ДУ вида

$$a\left(x\right)y' + b\left(x\right)y + c\left(x\right)y^{m} = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать методом u на v, повторяя схему интегрирования ЛДУ. Действительно, полагая $y = u \cdot v$, приходим к системе

$$\begin{cases} a\left(x\right)\cdot v' + b\left(x\right)\cdot v = 0, \\ a\left(x\right)\cdot u'v + c\left(x\right)u^{m}v^{m} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения (ДУ с разделяющимися переменными) системы находим вспомогательную функцию v, после подстановки которой во второе уравнение вновь получаем ДУ с разделяющимися переменными).

При $m = 0$ уравнение Бернулли превращается в ЛДУ, при $m = 1$ – и в ЛДУ, и в ДУ с разделяющимися переменными.

Пример. Проинтегрировать ДУ $xy' - y + 4x^{3}y^{2} = 0$.

Решение 1. Это ДУ Бернулли: $a(x)=x, b(x)=-1, c(x)=4x^3, \quad m=2$. Применяем метод u на v: $y=u\cdot v$. Тогда

$$x(u'v+uv')-uv+4x^3u^2v^2=0\Rightarrow$$

$$xu'v+u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}=-4x^3u^2v^2\Rightarrow\begin{cases} xv'-v=0, \\ xu'v=-4x^3u^2v^2, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|v|=\ln|x| \;\Rightarrow\; v=x\ .$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем:

$$u'=-4x^3u^2\Rightarrow\frac{du}{u^2}=-4x^3dx\Rightarrow-\frac{1}{u}=-x^4-C\ .$$

Тогда $y=u\cdot v=\dfrac{1}{x^4+C}\cdot x=\dfrac{x}{x^4+C}$ – общее решение (в некоторой области).

Решение 2. Заметим, что $xy'-y=-4x^3y^2\Rightarrow\dfrac{y-xy'}{y^2}=4x^3\Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)'=4x^3$. Интегрируя, получаем: $\dfrac{x}{y}=x^4+C\Rightarrow y=\dfrac{x}{x^4+C}$ – общее решение.

При определении типов ДУ 1-го порядка $y'=f(x;y)$ *по виду правой части удобно пользоваться следующей таблицей*:

$f(x;y)=$	Тип (вид) ДУ	Метод интегрирования
$f(x;y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$	ДУ с разделяющими переменными	разделяем переменные и интегрируем
$f(x;y)=f(tx;ty)$	однородное ДУ	подстановка $y=ux$
$f(x;y)=$ $=\rho(x)\cdot y+q(x)$	ЛДУ	подстановка $y=uv$
$f(x;y)=$ $=\rho(x)\cdot y+q(x)\cdot y^n$	уравнение Бернулли	подстановка $y=uv$