Раздел 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Производная. Техника дифференцирования

Производная. Дифференцируемость

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $\mathrm{B}(x_0)$ точки x_0. Придадим *аргументу* x_0 *приращение* Δx так, чтобы $x = x_0 + \Delta x \in B(x_0)$. Тогда получим ***приращение функции***

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Опр. 1. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует и конечен:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если в точке x_0 выполняется только одно из условий: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то в точке x_0 существует бесконечная производная, равная соответственно $+\infty$, $-\infty$.

Обозначения: $y', f'(x), y'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления производной *по определению*.

Пример 1. Пусть $y = f(x) = c = \mathrm{const}$. Тогда:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c \equiv 0 = \ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \Rightarrow y' = (\mathrm{c})' = 0. \bullet$$

Пример 2. Пусть $y = f(x) = x$. Тогда:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow y' = (x)' = 1. \bullet$$

Пример 3. Пусть $y = f(x) = e^x$. Тогда:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \\ \Delta x \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x \Rightarrow \left(e^x\right)' = e^x \bullet$$

Опр. 2.Функция $y = f(x)$, имеющая конечную производную в точке x_0, называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, операция нахождения производной – ***дифференцированием***.

Опр. 3. Функция называется ***дифференцируемой на промежутке***, если она дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

Т 1 (необходимое условие дифференцируемости). Существует следующая связь между дифференцируемостью и непрерывностью: если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней.

Замечание. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Доказательство. Так как функция дифференцируема, то существует конечный предел $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. По теореме о связи предела, функции и бмф производная может быть представлена в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

при $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0 \Rightarrow$ функция непрерывна в точке. $\triangleleft$

Следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 4. Исследуем непрерывность и дифференцируемость в точке $x = 0$, функции $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \ge 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$

Имеем: $f(0^-)=0=f(0)=f(0^+)\Rightarrow$ функция непрерывна в точке $x=0$, но

$$f_-'(0)=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{x}{x}=1.$$

Получили: $f_-'(0)\neq f_+'(0)\Rightarrow$ функция не дифференцируема в этой точке. •

Таким образом, непрерывность функции является необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции.

Т 2 (производная сложной функции). Рассмотрим сложную функцию $y=y(u(x))$. Если функция $u=u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y=y(u)$ дифференцируема в точке $u_0=u(x_0)$. Тогда сложная функция $y(x)=y(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная имеет вид $y_x'(x_0)=y_u'(u_0)\cdot u_x'(x_0)$. Символически:

$$\boxed{y_x'=y_u'\cdot u_x'}$$

или в других обозначениях

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}.$$

Доказательство. Из дифференцируемости функций $u=u(x)$ и $y=y(u)$ следует их непрерывность, тогда при $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta u\to 0$. Тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=u(x),\,y=y(u)\\ \text{дифференцируемы}\end{matrix}\right|=y_u'\cdot u_x'.\triangleleft$$

Отсюда правило: *производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.*

Цепочное правило дифференцирования сложной функции: для случая нескольких промежуточных аргументов:

$$\boxed{y(t) = f(g(q(u(x(t))))) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = f_g' \cdot g_q' \cdot q_u' \cdot u_x' \cdot x_t'.}$$

Т 3 (дифференцирование обратной функции). Если функция $y = y(x)$ непрерывна, строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет конечную и неравную нулю производную $y'(x_0)$, то обратная функция $x = x(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$ и ее производная имеет вид:

$$x_y'(y_0) = \frac{1}{y_x'(x_0)}$$

или кратко $\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'},}$ $\boxed{y_x' = \frac{1}{x_y'}}$, если $y_x' \neq 0, x_y' \neq 0.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $x = x(y)$. Зададим приращение $\Delta y \neq 0$. В силу строгой монотонности функции $y = y(x)$ этому приращению соответствует приращение $\Delta x \neq 0$. Так как функция $y = y(x)$ непрерывна в точке $y_0 = y(x_0)$, то $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0.$ Тогда $x_y'(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \underset{\exists y_x'(x_0)}{=} \frac{1}{y_x'(x_0)},$ что и требовалось доказать. ◁

Пример 5. $y = \ln x \Rightarrow x = e^y, y_x' = (\ln x)' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$ •

Правила нахождения производной

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции независимой переменной x, c = const. Тогда

1. $(c)' = 0$ (производная постоянной равна нулю).

2. $(x)' = 1$ (производная независимой переменной равна единице).

3. $(u+v)'=u'+v', (u-v)'=u'-v'$ (производная суммы, разности дифференцируемых функций равна сумме, разности этих функций).

4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ (производная произведения дифференцируемых функций равна производной первой функции умножить на вторую плюс вторая умножить на производную первой), в частности:

5. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$ постоянный множитель можно выносить из-под знака производной).

6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2},\ v\neq 0$.

Доказательство. Все доказательства следуют из определения производной, 1 и 2 уже доказали (см. примеры 1, 2).

Докажем 6. Найдем приращение функции $\dfrac{u(x)}{v(x)}$:

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

Так как $\Delta u=\mathrm{u}(x+\Delta x)-u(x)\Rightarrow \mathrm{u}(x+\Delta x)=\Delta\mathrm{u}+u(x)$ (аналогично для $v = v\ (x)$), то

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right)==\frac{(\Delta\mathrm{u}+u(x))v(x)-u(x)(\Delta v+v(x))}{v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{\Delta u\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v}{v(x+\Delta x)v(x)},$$

тогда

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)v(x)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения. ◃

Упражнение 1. Доказать правила 3, 4, 5.

Таблица производных

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ для $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$.

4. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$.

5. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$ при $a > 0, a \neq 1$.

6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

7. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$ при $a > 0, a \neq 1$.

8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

10. $(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

11. $(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

12. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

13. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

14. $(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

15. $(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Доказательство. Отметим, что формулы достаточно обосновать для $u(x) = x$, а затем сослаться на правило дифференцирования сложной функции. С учетом сказанного формулы 4,6 можно считать уже доказанными. Установим истинность и других формул, важное значение при этом играет основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$.

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \left(e^{\ln x^{\alpha}}\right)' = \left(e^{\alpha \cdot \ln x}\right)' = \left(e^{\alpha \cdot \ln x}\right) \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = \left(x^{\alpha}\right) \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha\text{-}1}.$

3. Следует из 1 при $\alpha = -1$

5. $\left(a^{x}\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right) \cdot (x \cdot \ln a)' = a^{x} \cdot \ln a.$

7. $\left(\log_a x\right)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

8. $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\dfrac{\dfrac{2\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} = cosx.$

9. $(\cos x)' = \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)' = -\sin x.$

10.

$(\mathrm{tg}x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = y'_x \underset{x=\sin y}{=} \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ Здесь учтено, что $y = \arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 x} \ge 0.$

Упражнение 2. Доказать формулы 11, 13, 14, 15. ◁

Пример 6. Найдем производную для функции $y = \dfrac{4}{x^2} + \sqrt[5]{7x} - 2$

$y' = \left(\dfrac{4}{x^2} + \sqrt[5]{7x} - 2\right)' = \left(\dfrac{4}{x^2}\right)' + \left(\sqrt[5]{7x}\right)' - (2)' = 4\left(x^{-2}\right)' + \sqrt[5]{7}\left(x^{1/5}\right)' - 0 =$

$= 4\cdot(-2)x^{-3} + \sqrt[5]{7}\,\dfrac{1}{5}x^{-4/5} = -\dfrac{8}{x^3} + \dfrac{\sqrt[5]{7}}{5\sqrt[5]{x^4}} = -\dfrac{8}{x^3} + \dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{7}{x^4}}\,.$

-

Пример 7. Найдем производную для функции $y = \cos^2 x\cdot\sin x$

$$y'=\left(\cos^2 x\cdot\sin x\right)'=\left[u=\cos^2 x, v=\sin x, (uv)'=u'v+uv'\right]=$$

$$=\left(\cos^2 x\right)'\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot(\sin x)'=\left[\left(\cos^2 x\right)'=\left(u^2\right)'=2u\cdot u', u=\cos x\right]=$$

$$=2\cos x\cdot(\cos x)'\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot\cos x=2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\sin x+$$
$$+\cos^3 x=-2\cos x\sin^2 x+\cos^3 x=\cos^3 x-2\cos x\sin^2 x\cdot$$

•

Пример 8. Найдем производную для функции $y=\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2}$

$$y'=\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\right)'=\left[u=\operatorname{arctg} x, v=1+x^2, \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\right]=$$

$$=\frac{(\operatorname{arctg} x)'\cdot\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg} x\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg} x\cdot(0+2x)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-2x\cdot\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot$$

•

Пример 9. Найдем производную для функции $y=\sin^3(\ln 5x)$

$$y'=\left(\sin^3(\ln 5x)\right)'=\left[\left(u^3\right)'=3u^2\cdot u', u=\sin(\ln 5x)\right]=3\sin^2(\ln 5x)\cdot\left(\sin(\ln 5x)\right)'=$$

$$=\left[(\sin u)'=\cos u\cdot u', u=\ln 5x\right]=3\sin^2(\ln 5x)\cdot\cos(\ln 5x)\cdot(\ln 5x)'=$$

$$=\left[(\ln u)'=\frac{1}{u}u', u=5x\right]=3\sin^2(\ln 5x)\cdot\cos(\ln 5x)\frac{1}{5x}(5x)'=$$

$$=3\sin^2(\ln 5x)\cdot\cos(\ln 5x)\frac{1}{5x}5=3\sin^2(\ln 5x)\cdot\cos(\ln 5x)\frac{1}{x}\cdot$$

•

Логарифмическое дифференцирование

Этот метод используется при дифференцировании степенно-показательных функций $y=u(x)^{v(x)}$ и функций вида $y=\frac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}$.

Суть метода заключается в том, что при нахождении производной функции $y=f(x)$ эту функцию сначала логарифмируют: $\ln y=\ln f(x)$, а затем дифференцируют: $(\ln y)'=\frac{y'}{y}=(\ln f(x))'$, откуда выражают искомую производную через исходную функцию и производную ее логарифма:

$$y'=y\cdot(\ln f(x))'=f(x)\cdot(\ln f(x))'.$$

Пример 10. Найдем производную функции $y=(\sin 2x)^{\sqrt[5]{x}}$.

Решение. Прологарифмируем функцию:

$$\ln y=\ln(\sin 2x)^{\sqrt[5]{x}}=\sqrt[5]{x}\cdot\ln(\sin 2x).$$

Теперь продифференцируем полученное выражение

$$\frac{y'}{y}=\left(\sqrt[5]{x}\right)'\cdot\ln(\sin 2x)+\sqrt[5]{x}\left(\ln(\sin 2x)\right)'\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\cdot\ln(\sin 2x)+\sqrt[5]{x}\,\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}.$$

Выразим из получившегося соотношения производную:

$$y'=\left(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\cdot\ln(\sin 2x)+2\sqrt[5]{x}\operatorname{ctg}2x\right)\cdot y;$$

$$y'=\left(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\cdot\ln(\sin 2x)+2\sqrt[5]{x}\operatorname{ctg}2x\right)\left(\sin 2x\right)^{\sqrt[5]{x}}.\bullet$$

Производные высших порядков

Опр. 4. Производная $y'=f'(x)$ – называется ***производной 1-го порядка*** (***первой производной***). Производная $y''=\left(f'(x)\right)'$ – производная производной 1-го порядка называется ***производной 2-го***

порядка (**второй производной**) исходной функции; $y''' = \left(f''(x)\right)'$ - ***производная 3-го порядка*** исходной функции и т. д.

В общем случае ***производная*** n***-го порядка*** (n***-ая производная)*** это производная производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Другие обозначения: $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Замечание. Под нулевой производной понимается сама функция: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Пример 11. Найдем производные указанного порядка:

1) $y = xe^x, y'''(x)$. **2)** $y = \ln(\cos x), y''(x)$.

Решение.

1) $y' = \left(xe^x\right)' = (x)' e^x + x\left(e^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$,

$$y'' = \left(e^x(x+1)\right)' = \left(e^x\right)'(x+1) + e^x(x+1)' = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2),$$

$$y''' = \left(e^x(x+2)\right)' = e^x(x+2) + e^x = e^x(x+3)\cdot$$

2) $y' = \left(\ln(\cos x)\right)' = \dfrac{1}{\cos x}(\cos x)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$,

$$y'' = (-\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}. \bullet$$

Пример 12. Найдем производные n-го порядка:

1) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x \Rightarrow y^{(n)} = e^x, n = 1,2,...$;

2)

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) \Rightarrow$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y^{IV} = \sin x = \sin(x + 2\pi) \Rightarrow$$

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), n = 0,1,2,...;$$

3)

$$y = \ln(1+x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x} \Rightarrow y'' = -(1+x)^{-2} \Rightarrow y''' = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow$$

$$y^{IV} = -6(1+x)^{-4} \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, n = 1,2,...$$

(здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$).•

Дифференцирование неявных функций

Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно с помощью уравнения

$$F(x, y) = 0.$$

Если в него подставить $y = y(x)$, то получим тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$.

Т 4. В случае дифференцируемой сложной функции $F(x, y(x))$ тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ можно дифференцировать.

Правило дифференцирования неявной функции: находим производную выражения $F(x, y(x))$ по x, полагая y функцией переменной x и применяя правило дифференцирования сложной функции $\varphi'\big(y(x)\big) = \varphi'_y y'$, и результат приравниваем к нулю, откуда затем выражаем производную y'.

Если нужно найти вторую производную $y''(x)$, то получившееся выражение для y' нужно продифференцировать, опять применяя правило дифференцирования сложной функции, или дважды продифференцировать исходное уравнение по тем же правилам и выразить затем $y''(x)$.

Пример 13. Найдем производную $y'(x)$ неявной функции $y = y(x)$, если

$$xe^{-y} + ye^{x} - x^3 - y^2 = 0.$$

Полагая $y = y(x)$ и дифференцируя соотношение, имеем:

$$(xe^{-y})' + (ye^{x})' - (x^3)' - (y^2)' = 0;$$

$$e^{-y} - xe^{-y}y' + y'e^x + ye^x - 3x^2 - 2yy' = 0,$$

откуда $y' = \dfrac{3x^2 - e^{-y} - ye^x}{e^x - xe^{-y} - 2y}$.●

Пример 14. Вычислим производные первого и второго порядка неявной функции $y = y(x)$, если $2x + 2y^3 - y - 3 = 0$.

Дифференцируем выражение. Имеем: $2 + 6y^2 \cdot y' - y' = 0$, дифференцируем снова: $12y \cdot y' \cdot y' + 6y^2 y'' - y'' = 0$ откуда находим первую и вторую производные:

$$y'(x) = \frac{2}{1-6y^2},\ y''(x) = \frac{12y\left(y'\right)^2}{1-6y^2} = \frac{12y\left(\dfrac{2}{1-6y^2}\right)^2}{1-6y^2} = \frac{48y}{\left(1-6y^2\right)^3}.$$ ●

Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ где t – вспомогательный параметр.

Т 5. Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы, причем $x'(t) \neq 0$, то

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}.$$

Доказательство. При предположениях теоремы существует обратная функция $t = t(x)$ такая, что композиция $y = y(t(x))$ дифференцируема по x. По правилам дифференцирования сложной и обратной функций: $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, и теорема доказана. ◁

Вторую производную y''_{xx} можно рассматривать как производную параметрически заданной первой производной $\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = y'_x(t), \end{cases}$ и если для такой функции выполнены условия теоремы, то

$$\boxed{y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}}$$

и т. д. для производной любого порядка.

Пример 15. Найдем производные y'_x и y''_{xx} функции $y = y(x)$, если $\begin{cases} x = t^2 + \mathrm{t} + 1, \\ y = \ln t^3. \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(3\ln t\right)'_t}{\left(t^2 + t + 1\right)'_t} = \frac{\frac{3}{t}}{2t+1} = \frac{3}{2t^2 + t};$$

тогда

$$\begin{cases} x = t^2 + \mathrm{t} + 1, \\ y'_x = \dfrac{3}{2t^2 + t}. \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(3(2t^2 + t)^{-1}\right)'_t}{(t^2 + t + 1)'_t} = \frac{-3(2t^2 + t)^{-2}(4t+1)}{2t+1} = \frac{-12t - 3}{t^2(2t+1)^3}. \bullet$$

§ 2. Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x + o\left(\Delta x\right) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

где $o(\Delta x)$ – бмф более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Опр. 1. ***Дифференциалом*** функции в точке x_0 называется *главная линейная относительно* Δx часть приращения функции в этой точке, равная произведению производной на приращение аргумента:

$$\boxed{dy\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x}.$$

Так как для независимой переменной дифференциал совпадает с приращением $dx = \Delta x$ ($dx = x'\Delta x = \Delta x$), то

$$dy = df(x) = f'(x)dx = y'dx.$$

Таким образом, дифференциал функции можно определить как произведение производной функции на дифференциал аргумента. Отсюда производную $y' = \dfrac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов.

Пример 1. Найдем дифференциал функции $y = 5^{tgx}\sqrt{x}$.

Решение. Воспользуемся формулой $dy = y'_x dx$.

$$dy = \left(5^{\operatorname{tg} x}\sqrt{x}\right)' dx = \left(\left(5^{\operatorname{tg} x}\right)'\sqrt{x} + 5^{\operatorname{tg} x}\left(\sqrt{x}\right)'\right)dx =$$

$$= \left(5^{\operatorname{tg} x}\ln 5\left(\operatorname{tg} x\right)'\sqrt{x} + 5^{\operatorname{tg} x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \left(5^{\operatorname{tg} x}\ln 5\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{5^{\operatorname{tg} x}}{2\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= 5^{\operatorname{tg} x}\frac{2x\ln 5 + \cos^2 x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}dx.$$

•

Пример 2. Найдем приращение и дифференциал функции $y = 2x - x^2$ в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0,1$.

Решение.

$y(3) = 6 - 9 = -3, y(3,1) = 6,2 - 9,61 = -3,41 \Rightarrow \Delta y = -3,41 - (-3) = -0,41;$

$dy = \left(2x - x^2\right)' dx = (2 - 2x)dx = 2(1 - x)dx$ в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0,1$ имеем: $dy = 2(1 - 3)0,1 = -0,4$.•

Замечание 1. Правила дифференцирования верны и для дифференциалов, к примеру

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0.$$

Замечание 2. Дифференциал сложной функции $y(x) = y(u(x))$ можно представить в виде: $dy = y'_x dx = y'_u du$

Таким образом, *формула для дифференциала одна и та же и для независимой переменной, и для зависимой переменной*. Это свойство называется ***инвариантностью формы 1-го дифференциала***.

Но есть и различие: $dx = \Delta x$ для независимой переменной, а $du \neq \Delta u$ в общем случае зависимой переменной.

Из определения дифференциала следует, что $\Delta y \approx dy$ при малых Δx, или в развернутой форме

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot dx,$$

откуда заменяя dx *на* Δx получим *формулу для приближенных вычислений*:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

где погрешность есть бмф более высокого порядка малости, чем Δx

Полагая $\Delta x = x - x_0$, получаем

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

что означает замену в окрестности точки x_0 функции $y = f(x)$ линейной функцией $y = kx + b$, где $k = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, т. е. *линеаризацию* функции в окрестности точки x_0.

Линеаризация находит многочисленные приложения при исследовании реальных физических процессов.

Пример 3. Вычислим приближенно $\sqrt{3,99}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. Очевидно, что $x_0 = 4, \Delta x = -0,01$. Тогда $f\left(x_0\right) = \sqrt{4} = 2, f'\left(x_0\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} = 0,25$. В итоге, применив формулу для приближенных вычислений, имеем

$$\sqrt{3,99} \approx f\left(4\right) + f'\left(4\right)\Delta x = 2 + 0,25 \cdot \left(-0,01\right) = 1,9975 \bullet$$

Дифференциалы высших порядков

Опр. 2. Дифференциал функции $dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$ – ***дифференциал 1-го порядка*** (***первый дифференциал***). Дифференциал от дифференциала 1-го порядка - ***дифференциал 2-го порядка*** (**второй дифференциал**) исходной функции

Если x независимая переменная, то $dx = \Delta x$ является константой, тогда

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)\Delta x) = \Delta x \cdot d(f'(x)) = f''(x)(\Delta x)^2 =$$
$$= f''(x)\left(dx\right)^2 = f''(x)dx^2 .$$

Замечание. Следует различать $dx^2 = (dx)^2 = (\Delta x)^2$ и $d\left(x^2\right) = dx^2 = 2xdx.$

Опр. 3. ***Дифференциалом*** $d^n y$ n***-го порядка*** функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^n y = d(d^{n-1}y).$

В случае функции $y = f(x)$ независимой переменной x имеем:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n .$$

Замечание. Дифференциалы высших порядков инвариантностью формы не обладают.

Пример 4. $y = u^2, u = x^3,$ где $x -$ независимая переменная. Имеем:

$$d^2 y = y''_{xx}(dx)^2 = \left(x^6\right)''(dx)^2 = 30x^4(dx)^2,$$

но

$$y''_{uu}(du)^2 = 2(du)^2 = 2(3x^2dx)^2 = 18x^4(dx)^2 \neq d^2 y. \bullet$$

§ 3. Геометрический и физический смысл производной и дифференциала

Геометрический смысл производной

Проведем секущую AC и рассмотрим ΔABC. $\angle BAC = \beta, tg\beta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - тангенс угла наклона секущей AC (рис. 1).

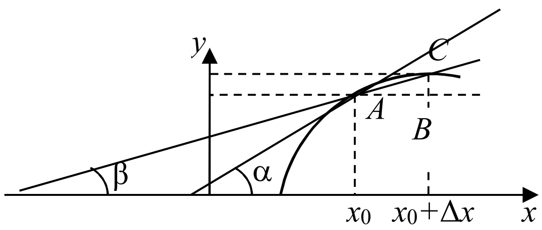


Рис. 1. Геометрический смысл производной

Под касательной понимается предельное положение секущей, когда $\Delta x \to 0$. Следовательно $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$.

Таким образом, ***геометрический смысл производной*** заключается в том, что *значение производной* $f'(x_0)$ *в точке* x_0 *равно угловому коэффициенту касательной к графику функции* $y = f\left(x\right)$ *в точке* $A(x_0, f(x_0))$.

Для получения уравнения касательной подставим угловой коэффициент k=$f'\left(x_0\right)$ и координаты точки *A* в уравнение прямой $y = kx + b$:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0 .$$

Теперь подставим *к* и *b* в уравнение $y = kx + b$:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \Rightarrow$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ ***в точке*** $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\left(x - x_0\right) \text{ или } y = y\left(x_0\right) + y'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)}.$$

Замечание. Если вспомнить формулу приближенных вычислений, то мы видим, что значение функции в точке заменяется значением касательной в этой точке, а линеаризация означает замену графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$ отрезком касательной к этому графику.

Опр. 1. ***Нормалью*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0, f(x_0))$ называется прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная касательной к этому графику в этой точке (рис. 2).

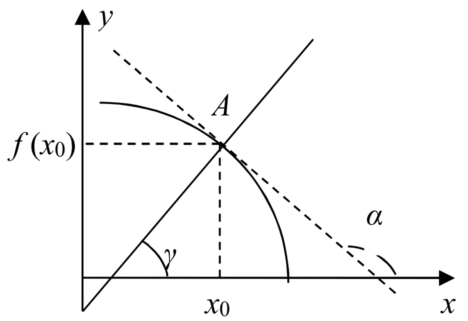


Рис. 2. Нормаль к графику функции

Пусть γ - угол наклона нормали, тогда $\gamma = \alpha \pm 90^0$ (в зависимости от наклона), тогда

$$k_{норм} = tg\gamma = tg\left(\alpha \pm 90^0\right) = -ctg\alpha = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}.$$

(если прямые перпендикулярны, то $k_1 = -\frac{1}{k_2}$)

Таким образом, ***уравнение нормали*** имеет вид:

$$\boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),}$$

Замечание. В случае бесконечной производной $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и уравнение касательной имеет вид $x = x_0$, уравнение нормали $y = f\left(x_0\right)$, т. е. касательная параллельна оси *Oy*, а нормаль оси *Ox*. Если $f'\left(x_0\right) = 0$, то касательная параллельна оси *Ox* и ее уравнение $y = f\left(x_0\right)$, уравнение нормали тогда $x = x_0$.

Геометрический смысл дифференциала

Учитывая связь между дифференциалом и производной, получим (см. рис. 3)

$$dy\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x = tg\alpha \cdot \Delta x = \Delta y_{кас} = y_{кас}\left(x_0 + \Delta x\right) - y_{кас}\left(x_0\right).$$

Таким образом, *дифференциал функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке* x_0, *когда аргумент получает приращение* Δx.

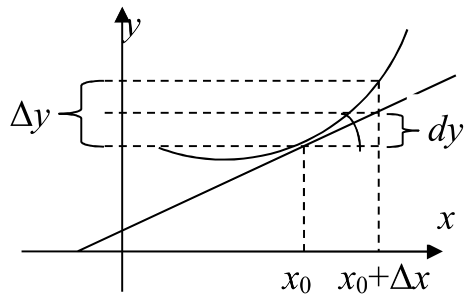


Рис. 3. Геометрический смысл дифференциала

Физический смысл производной и дифференциала

Если $S = S(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки (путь пройденный точкой за время *t)*, то $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ - путь, пройденный за время Δt. Тогда $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость на отрезке времени $[t, t+\Delta t]$, следовательно $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t) = V(t)$ – скорость движения в момент времени t, а $S''(t) = V'(t)$ – ускорение (скорость изменения скорости) в момент времени *t*.

Замечание. В общем случае, если функция описывает некоторый физический процесс, то производная функции – скорость протекания этого процесса.

Так как $dS = S'(t)dt = V(t)\Delta t$, где $V(t)$ – мгновенная скорость в момент времени *t* то, дифференциал пути равен расстоянию, пройденному материальной точкой за время Δt, если предположить, что, начиная с данного момента *t*, точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость $V(t)$.

Пример 1. Найдем уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x) = x^3$ в точке M_0 с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Находим $f(2)=2^3=8,\ f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^2 \Rightarrow f'(2)=12$, тогда $M_0(2,8)$ и $y=8+12\left(x-2\right) \Rightarrow y=12x-16$ – уравнение касательной, а $y=8-\dfrac{1}{12}\left(x-2\right) \Rightarrow y=\dfrac{49}{6}-\dfrac{x}{12}$ – уравнение нормали. •

Пример 2. Под каким углом φ пересекаются графики функций $y=f(x)=\sin x$ и $y=g(x)=\cos x,\ x\in[0,\pi]$?

Решение. Угол между кривыми в точке их пересечения – это угол между их касательными в этой точке. Нетрудно видеть, что если φ – острый угол между прямыми, то

$$\varphi=\left|\alpha_1-\alpha_2\right| \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi=\left|tg\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|.$$

Находим точку M_0 пересечения графиков функций, для чего решаем систему:

$$\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x, \end{cases} x\in[0,\pi] \Leftrightarrow \sin x=\cos x,\ x\in[0,\pi] \Leftrightarrow M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда $k_1=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad k_2=g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\mathrm{tg}\,\varphi=\left|\dfrac{\sqrt{2}}{1-\dfrac{1}{2}}\right|=2\sqrt{2}$, откуда $\varphi=\mathrm{arctg}(2\sqrt{2})$. •

Пример 3. Тело движется по закону $s(t)=3t^2-12t+1$ (t-м, s-c). Найдем момент времени t, в который скорость тела будет равна нулю и каково его ускорение этот момент?

Решение. Скорость – производная пути по времени. Следовательно, $v(t)=s'(t)=\left(3t^2-12t+1\right)'=6t-12=0 \Rightarrow t=2\left(м/с\right)$. Тогда ускорение – производная скорости по времени в этот момент равно $a(t)=s''(t)=v'(t)=\left(6t\right)'=6\left(м/с^2\right)$. •

§ 4. Теоремы о дифференцируемых функциях

Опр. 1. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (минимума) функции***, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geq f\left(x\right)$ (соответственно, $f(x_0) \leq f\left(x\right)$).

Такие точки называются ***экстремумами***. Если неравенства в этом определении строгие, то и экстремум называется строгим.

Для графика функции $y = f(x)$ под точкой экстремума понимается точка $(x_0, f(x_0))$.

Замечание 1. Только в точках экстремума для достаточно малых Δx приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не меняет знак при переходе аргумента через рассматриваемую точку x_0: $\Delta y \geq 0$ в случае минимума и $\Delta y \leq 0$ в случае максимума.

Замечание 2. Функция может иметь экстремум только во внутренних точках области определения.

Замечание 3. Локальные экстремумы следует отличать от глобальных, относящихся не к точке, а к целому промежутку, и представляющие соответственно наибольшее (*глобальный максимум*) и наименьшее (*глобальный минимум*) значения функции на этом промежутке.

Т 1 [Ферма]. Если точка x_0 является точкой локального экстремума функции $y = f(x)$ и функция дифференцируема в точке x_0, то производная этой функции в этой точке обращается в нуль: $f'(x_0) = 0$.

Пьер де Ферма́
(фр. *Pierre de Fermat*)
(1601–1665)

французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 г. – советник парламента в Тулузе. Блестящий полиглот.

Наиболее известен формулировкой ***Великой теоремы Ферма***: для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет натуральных решений x, y, z.

Ферма сформулировал эту теорему в 1637 г. на полях «Арифметики» Диофанта с припиской, что найденное им удивительное доказательство этого утверждения слишком длинно, чтобы привести его на полях книги. Строгое доказательство Великой теоремы Ферма было получено американским математиком Эндрю Уайлсом и опубликовано в журнале «Annals of Mathematics» в 1995 г., занимая 129 с.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма о дифференцируемых функциях: в точке локального экстремума касательная к графику функции параллельна оси Ox (оси абсцисс).

Доказательство. Пусть для определенности x_0 – точка локального максимума, т. е. $\Delta y \le 0$. Тогда

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0, \quad f'_-(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0,$$

откуда

$$0 \le f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \le 0.$$

Следовательно, $f'(x_0) = 0$, и теорема доказана. ◃

Т 2 [Ролля]. Предположим, что функция $f(x)$:

а) определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

б) дифференцируема на интервале (a,b);

в) значения функции на концах промежутка совпадают: $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри промежутка найдется (по крайней мере одна) точка $c, c \in (a,b)$, в которой производная функции обращается в ноль: $f'(c) = 0$. Символически: $\exists c \in (a,b) \Rightarrow f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике функции найдется хотя бы одна точка $C(c, f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox (рис. 4).

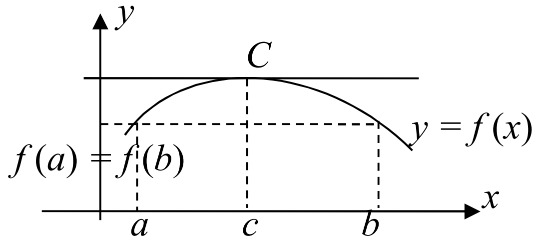


Рис. 4. Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функция постоянная на промежутке: $f(x) \equiv \text{const}, x \in [a,b]$. Тогда $f'(x) \equiv 0, x \in (a,b)$, и любую точку $c \in (a,b)$ можно взять в качестве искомой.

Пусть теперь функция не является константой на $[a,b]$. В силу теоремы Вейерштрасса, непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ достигает на этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значений и хотя бы одно из них достигается внутри промежутка (т. к. $f(a) = f(b)$ и функция не является постоянной), а, стало быть, функция достигает локального экстремума внутри промежутка. Тогда по теореме Ферма внутри (a,b) найдется точка c такая, что $f'(c) = 0$, и теорема доказана. $\triangleleft$

Лемма 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b). Тогда внутри (a,b) найдется такая точка c, $\text{c} \in (a,b)$, что $(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = (f(b) - f(a)) \cdot (g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a)) \cdot (f(x) - f(a)).$$

Нетрудно видеть, что для функции $F(x)$ все предположения теоремы Ролля выполнены, в частности, $F(a)=0=F(b)$. Поэтому найдется такая точка c, $c\in(a,b)$, что $F'(c)=0$ или

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c)-(g(b)-g(a))\cdot f'(c)=0,$$

откуда

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c)=(g(b)-g(a))\cdot f'(c),$$

и лемма доказана. ◁

Т 3 [Лагранжа]. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда найдется такая точка c, $c\in(a,b)$, что имеет место *формула конечных приращений в форме Лагранжа*:

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).}$$

(Приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a,b]$ равно приращению аргумента, умноженному на производную функции в некоторой внутренней точке отрезка.)

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Жозе́ф Луи́ Лагра́нж
(фр. *Joseph Louis Lagrange*,
итал. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*)
(1736–1813)

французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером – крупнейший математик XVIII в.

Внес огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, в теорию вероятностей и численные методы, создал вариационное исчисление. В классическом трактате «Аналитическая механика» установил фундаментальный «принцип возможных перемещений» и завершил математизацию механики.

Прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала. Пьер-Симон Лаплас дал такую характеристику деятельности Лагранжа: «…среди тех, кто самым эффективным образом раздвинул пределы наших знаний, Ньютон и Лагранж в самой высокой степени владели счастливым искусством открывания новых данных, представляющих собой существо знаний…».

Имя Лагранжа внесено в список 72 величайших ученых Франции, помещенный на первом этаже Эйфелевой башни.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции найдется хотя бы одна точка $C\big(c, f(c)\big)$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB (рис. 5).

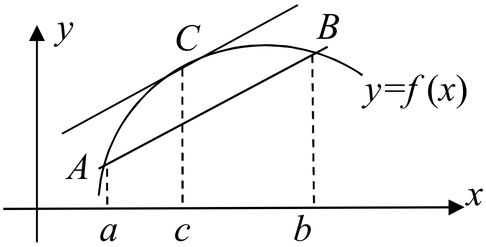


Рис. 5. Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Доказательство следует из леммы 1 при $g(x) \equiv x,\ x \in [a,b]$. $(f(b) - f(a)) \cdot x' = (b-a) \cdot f'(c)$. ◁

Т 4 [Коши]. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0,\ x \in (a,b),$ тогда найдется такая точка c, $c \in (a,b),$ что имеет место следующая *формула конечных приращений в форме Коши*:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство следует из леммы с учетом того, что из условия $g'(x) \neq 0,\ x \in (a,b),$ в силу теоремы Лагранжа вытекает $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \neq 0$. ◁

Замечание. Геометрическая интерпретация теоремы Коши такая же, как и теоремы Лагранжа, если ее применить к функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = g(t),\ y = f(t)$.

Правила Лопиталя

Правила Лопиталя – первое и второе – служат для раскрытия неопределенностей соответственно вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и сводящихся к ним. Предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Т 5 (первое правило Лопиталя). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0.$ Если при этом существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и эти пределы совпадают:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более, чем устранимый разрыв в точке x_0, то доопределим их в этой точке по непрерывности: $f(x_0) = g(x_0) = 0.$ Тогда новые функции удовлетворяют всем предположениям теоремы Коши. Тогда $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, где точка c лежит между x_0 и x. Поэтому, переходя к пределу, получим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \left| \begin{matrix} \textit{если } x \to x_0 \\ \textit{то } c \to x_0 \end{matrix} \right| = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

что и требовалось доказать. ◁

Т 6 (второе правило Лопиталя, или правило Штольца). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty.$ Если при этом существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и эти пределы совпадают:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Доказательство можно свести к доказательству первого правила, если перейти к функциям вида $\dfrac{1}{f(x)}$ и $\dfrac{1}{g(x)}$. ◁

Замечание. Правило справедливо и в случае, когда $x \to \infty$, и при вычислении односторонних пределов.

Рассмотрим примеры применения правила Лопиталя при раскрытии различных видов неопределенностей.

Пример 1. Неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2+2x+1}=\left[\frac{4}{2}\right]=2. \bullet$$

Пример 2. Неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3^x+x^2}{x^3+x^2+x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{3^x\ln 3+2x}{3x^2+2x+1}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{3^x ln^2 3+2}{6x+2}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{3^x ln^3 3}{6}=$$

•

Пример 3. Неопределенность $\left[0\cdot\infty\right]$:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{?}{\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0\Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=0$ (функция $f(x)=x$ быстрее стремится к нулю, чем $\ln x$ к $-\infty$).•

Пример 4. Неопределенность $\left[0^0\right]$:

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)}\underset{2А+Б42.4}{=}e^0=1.$$

(Здесь использован результат примера 3.)•

Пример 5. Приведем пример, когда правило Лопиталя не работает.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1-\cos x)\ \textit{не существует}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)}{x}=\left[1+\frac{\textit{огр.ф.}}{\infty}\right]=1$$

•

Шкала роста

1) *Степенная функция при* $x\to+\infty$ *растет быстрее логарифма:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}\underset{\alpha>0}{=}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0;$$

2) *показательная функция при* $x\to+\infty$ *растет быстрее степенной:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}\underset{a>1}{=}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\ln a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{\text{пр.Лопит.}}{=}\ldots=\left[\frac{\text{огр.}}{\infty}\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0$$

3) *функция* x^{x} *при* $x\to+\infty$ *растет быстрее показательной:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x}}{x^{x}}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>a}}\left(a/x\right)^{x}=\left[\left(0^{+}\right)^{+\infty}\right]=0.$$

§ 5. Формула Тейлора

Эта формула является главной формулой дифференциального исчисления. Она позволяет значительно облегчить изучение поведения функции в окрестности заданной точки. И при выполнении определенных условий приближенно представить функцию в виде многочлена.

Предположим, что функция $f(x)$, определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные до n-го порядка включительно, тогда для этой функции в точке x_0 имеет место ***формула Тейлора***

$$\boxed{f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)}$$

Многочлен $P_n(x)$ называется n-м многочленом Тейлора ($n!$ - факториал числа n - произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n,\ 2! = 1\cdot 2 - 2,\ 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120, \quad 0! = 1, 1! = 1$);

$R_n(x)$ называется n***-ым остаточным членом*** формулы Тейлора.

Замечание 1. В точке $x = x_0$ значения многочлена и его производных до n-го порядка совпадают со значениями функции $f(x)$ и ее n производных, т.е.

$$f(x_0) = P_n(x_0),\ f'(x_0) = P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0)$$

Замечание 2. Частным случаем многочлена Тейлора при $n = 1$ является уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Т 1. Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности и имеет в этой окрестности производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется такая точка c, лежащая между x_0 и x, что справедлива формула

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{(n)}}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x}{n!}}$$

где

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{n!}}$$

(***остаточный член в форме Лагранжа***).

Остаточный член в форме Лагранжа напоминает следующий очередной член формулы Тейлора, лишь вместо того, чтобы вычислить $(n+1)$-ю производную в точке x_0, эту производную берут для некоторого среднего — между x_0 и x — значения c.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Т 2. Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, то справедлива формула

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{(n)}}{n!}+o\left((x-x_0)^n\right)}$$

где $o\left((x-x_0)^n\right)$ - бмф более высокого порядка малости, чем $(x-x_0)$ при $x\to x_0$.

Формула Маклорена

Если положить в формуле Тейлора $x_0=0$, то получим ***формулу Маклорена:***

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^{(n)}}{n!}+R_n(x)}$$

Некоторые разложения по формуле Маклорена.

1. $f(x)=e^x$, тогда $f^{(n)}(x)=e^x$, при любом n и $f^{(n)}(0)=1$, имеем

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

2. $f(x)=\sin x$, тогда $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, тогда

$$f^{(2n)}(0)=\sin\pi n=0,\ f^{(2n-1)}(0)=\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{n-1},$$

имеем

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x)$$

.

3. $f(x)=\cos x$, тогда $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, тогда

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n,\ f^{(2n-1)}(0)=0,$$

имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

4. $f(x) = (1+x)^m$

$f(x) = (1+x)^m; f'(x) = m(1+x)^{m-1}; f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}; f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m$

$f(0) = 1; f'(0) = m; f''(0) = m(m-1); \ldots f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1)$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}x^n + R_n(x)$$

5.

$$f(x) = \ln(1+x); f'(x) = \frac{1}{1+x}; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(-1)^{n-1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

Некоторые приложения формулы Тейлора

1. Приближенное вычисление значения функции. Если в формуле Тейлора отбросить остаточный член, то получится приближенная формула, заменяющая функцию сложной природы многочленом

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{(n)}}{n!}$$

Качество этой формулы оценивается двояко: либо указывают границу погрешности $R_n(x)$, обычно пользуясь лагранжевой формой остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{n!}, \textit{где } c = x_0 + \theta(x-x_0), (0 < \theta < 1)$$

либо, следуя Пеано, указывают порядок малости этой погрешности при $x \to x_0$: $R_n(x) = o\left(\left(x - x_0\right)^n\right)$.

Пример 1. Вычислим $\sin 1$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Используем формулу Маклорена

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

в этом случае остаточный член:

$$R_{2n}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = (-1)^n \cos\theta x \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

и погрешность оценивается $\left|R_{2n}(x)\right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Для того, чтобы обеспечить заданную точность, нужно потребовать, чтобы ошибка по абсолютной величине не превосходила заданной точности $\left|R_{2n}(x)\right| \le \frac{1}{(2n+1)!} < 0{,}001$.

При $n = 1$ имеем $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} > \frac{1}{1000}$;

при $n = 2$: $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} > \frac{1}{1000}$;

$n = 3$: $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000}$.

Тогда $\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120}$.●

$n = 3$

2. Использование формулы Тейлора при раскрытии неопределенностей.

Пример 2. Используя основные разложения по формуле Маклорена, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^5\right)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

•

§ 6. Исследование функций и построение графиков

Монотонность функции

Т 1 (необходимое условие возрастания (убывания) функции). Если дифференцируемая функция $y=f\left(x\right)$ возрастает (убывает) на промежутке $\left(a,b\right)$, то на этом промежутке $f'\left(x\right)\geq 0$ $\left(f'(x)\leq 0\right)$ $\forall x\in\left(a;b\right)$.

Доказательство. Рассмотрим возрастающую на промежутке $\left(a,b\right)$ функцию $y=f\left(x\right)$. Возьмем на промежутке $\left(a,b\right)$ произвольные точки x и $x+\Delta x$, тогда при $\Delta x>0$ $f(x+\Delta x)-f(x)>0$, а при $\Delta x<0$ $f(x+\Delta x)-f(x)<0$. В любом случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$$
.

Тогда, так как функция дифференцируема на промежутке $\left(a,b\right)$, переходя к пределу в неравенстве, получим

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

Для убывающей функции доказательство аналогичное. ◃

Т 2 (достаточное условие возрастания (убывания) функции). Если дифференцируемая функция $y=f\left(x\right)$ на промежутке $\left(a,b\right)$ имеет положительную (отрицательную) производную $f'\left(x\right)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ $\forall x\in\left(a;b\right)$, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться формулой Лагранжа для любых $x_1,x_2\in\left(a,b\right)$, так что $x_1<x_2$ имеем $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f'\left(c\right)\left(x_2-x_1\right)$. Так как $f'(\mathrm{c})>0$ $\left(f'(\mathrm{c})<0\right)$ и $x_2-x_1>0\Rightarrow f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)\left(f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)\right)$. ◃

Если говорить о нестрогой монотонности, то можно сформулировать следующую теорему.

Т 3. Для того, чтобы дифференцируемая на промежутке (a,b) функция $y=f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом промежутке необходимо и достаточно, чтобы производная функции $f'(x)$ была неотрицательна (неположительна) $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ $\forall x\in(a;b)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущих теорем. ◁

Замечание. Функция $y=f(x)$ постоянна на интервале $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ в каждой точке этого интервала.

Точки локального экстремума функции $f(x)$

Т 4 (необходимое условие экстремума). Если x_0 — точка локального экстремума, то $f'(x_0)=0$, либо не существует (следует из теоремы Ферма).

Опр. 1. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются ***стационарными***. Стационарные точки и точки области определения, в которых производная не существует, называются ***критическими точками*** (или ***точками, подозрительными на экстремум***).

Таким образом, функция может иметь экстремум лишь в критических точках (рис. 6).

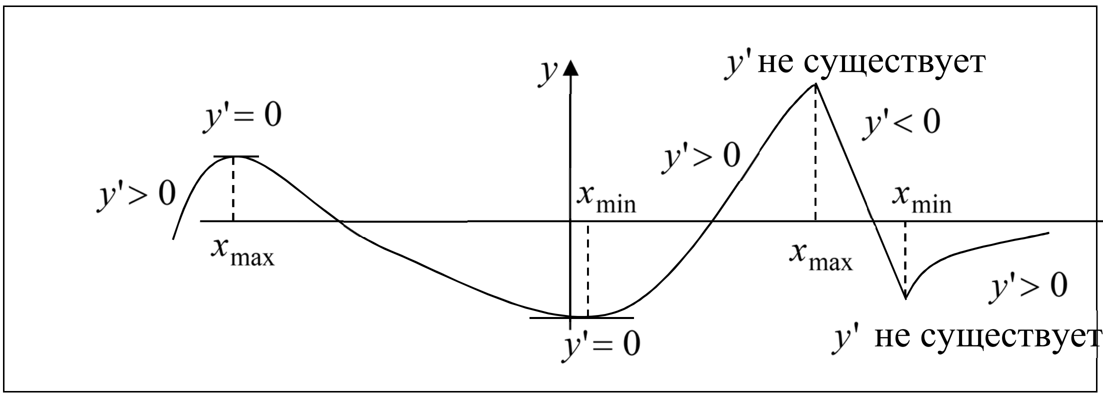


Рис. 6. Примеры точек экстремума

Т 5 (первое достаточное условие экстремума). Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 (за исключением, быть может, самой точки x_0). Тогда если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (минимум). Если при переходе через точку x_0 производная функции не меняет знака, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет экстремума.

Доказательство. Рассмотрим окрестность точки x_0. Пусть $f'(x) < 0\, при\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0\, при\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда функция убывает на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и возрастает на $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$. Значит точка x_0 - точка локального максимума. Аналогично для минимума. ◃

Т 6 (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, тогда:

- если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума,

- если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.

Эта теорема - частный случай следующей.

Т 7 (третье достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ n-раз непрерывно дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{n-1}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, тогда:

- если n - нечетно, то точка x_0 не является точкой локального экстремума;

- если n - четно, то точка x_0 является точкой локального экстремума, при этом: если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то функция в точке x_0 имеет минимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то функция в точке x_0 имеет максимум.

Доказательство. Напомним, что x_0 — точка локального экстремума функции $f(x)$, если существует такая окрестность x_0, в которой приращение функции не меняет знак ($\Delta y \geq 0$ в случае минимума и $\Delta y \leq 0$ в случае максимума). По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots +$$

$$+ f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{(n)}}{n!} + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Тогда

$$\Delta y = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o\left((x - x_0)^n\right)}{(x - x_0)^n} \right)$$

Для достаточно близких точек x к x_0 знак в больших скобках определяется знаком производной *n*-го порядка. В случае $n = 2k$ $(x - x_0)^n$ знак не меняет, тогда если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то и Δy положительно (не меняет знак), если же $f^{(n)}(x_0) < 0$, то и Δy отрицательно, т. е. x_0 точка локального экстремума. При $n = 2k + 1$ выражение $(x - x_0)^n$ при переходе через точку x_0 знак меняет, а вместе с ним и приращение Δy меняет знак, следовательно в этом случае x_0 точкой локального экстремума не является. ◁

Схема определения промежутков монотонности и точек локального экстремума с помощью первой производной

1. Найти область определения функции $y = f(x)$ и интервалы непрерывности.

2. Найти $f'(x)$.

3. Найти критические точки (производная равна нулю или не существует) и наносим их вместе с точками разрыва на числовую прямую. Эти точки разбивают область определения на интервалы, в которых производная сохраняет знак.

4. Определить знак производной в каждом из полученных интервалов. Если производная больше нуля, то это интервал строгого возрастания функции, если же производная меньше нуля – интервал строгого убывания.

5. Определить точки локального экстремума: если при переходе слева направо через критическую точку x_0 *производная меняет знак «−» на «+»,* то x_0 -точка *локального минимума*; если с *«+» на «−»,* то *локального максимума*.

6. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

Пример 1. Найдем интервалы монотонности и точки локального экстремума функции $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Область определения: (−∞; + ∞). Функция непрерывна на всей числовой оси.

$$y' = \sqrt[3]{x-1} + x\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x-1} + \frac{x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Приравнивая производную к 0, находим критические точки:

$y' = \dfrac{4x-3}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}; x = 1$ - критические точки.

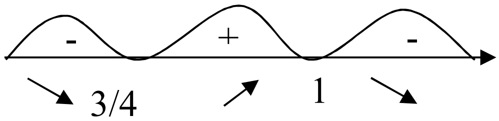


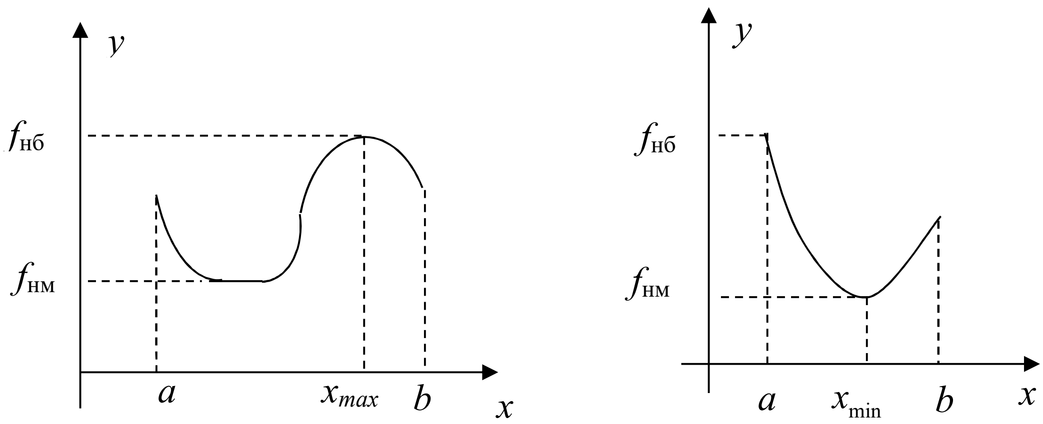
Рис. 7. Интервалы монотонности

Нанесем критические точки на числовую прямую и отметим знак y' (рис. 7). Следовательно, функция на промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ убывает, на промежутке $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ возрастает; $y_{\min}\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$.●

Глобальные экстремумы и их нахождение

Под глобальными экстремумами будем понимать наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.

Согласно теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$ принимает на нем наименьшее и наибольшее значения: $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x^*)$, $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_*)$. Если какое-то из этих значений достигается внутри промежутка, то здесь обязательно будет локальный экстремум (см. рис. 8).



$$\min_{[a;b]} f(x) = f_{\text{нм}} \qquad \min_{[a;b]} f(x) = f(x_{\min}) = f_{\text{нм}}$$

$$\max_{[a;b]} f(x) = f(x_{\max}) = f_{\text{нб}} \qquad \max_{[a;b]} f(x) = f(a) = f_{\text{нб}}$$

Рис. 8. Глобальные экстремумы функции на отрезке

Поэтому, для отыскания наибольшего и наименьшего значений на отрезке пользуются следующей схемой.

1.Найти производную функции $f'(x)$.

2.Найти критические точки функции, принадлежащие отрезку $[a,b]$.

3.Найти значения функции в этих критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x^*)$ и наименьшее $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_*)$.

Пример 2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ на отрезке $[-2;1]$.

Решение. Найдем производную

$$y' = \frac{2x\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Приравняем производную к 0: $y' = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ - критическая точка, $x = 0 \in [-2;1]$. Найдем значения функции в этой точке и на концах отрезка, и выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$$y(-2) = 0{,}6 = y_{\max}[-2;1];\ y(1) = 0;\ y(0) = -1 = y_{\min}[-2;1].\ \bullet$$

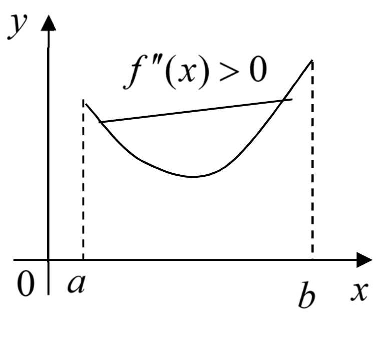
Пример 3. Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Найдем концентрацию кислорода, при которой окись азота окисляется с максимальной скоростью. (В условиях практической необратимости скорость реакции $2NO + O_2 = 2NO_2$ выражается формулой $v = cx^2y$, где x – концентрация NO (окиси азота) в любой момент времени, у – концентрация кислорода O_2, c – константа скорости реакции, зависящая от температуры (c>0)).

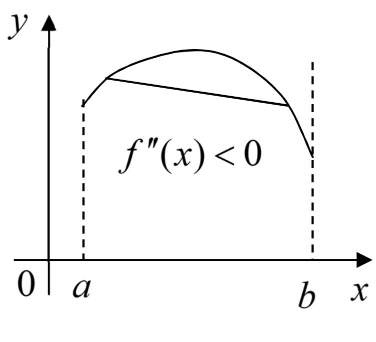
Если выразить концентрацию газов в объёмных процентах, получим $y = 100 - x$, $v = cx^2(100 - x)$). Тогда

$$v' = 200cx - 3cx^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x_{\max} = \frac{200}{3} \approx 66{,}7\ .\bullet$$

Выпуклость функции, точки перегиба

Опр. 2. Функция называется ***выпуклой вверх (вниз)*** на интервале (a,b), если любая дуга графика лежит не ниже (не выше) стягивающей дугу хорды (рис. 9).





(а) (б)

Функция выпукла вниз Функция выпукла вверх

Рис. 9. К определению выпуклости графика функции

Т 8 (достаточное условие выпуклости (вогнутости)). Если на интервале (a,b) $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), то функция $y = f(x)$ на интервале (a,b) выпукла вверх (вниз). Если эти неравенства строгие, то и выпуклость (вогнутость) будет строгая.

Опр. 3. Точка x_0 называется ***точкой перегиба функции***, если в этой точке функция непрерывна и меняет направление выпуклости. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется ***точкой перегиба графика функции*** $y = f(x)$.

Если функция дифференцируема в точке перегиба, то ее график в этой точке расположен по обе стороны от касательной.

Т 9 (достаточное условие перегиба). Если:

1) функция непрерывна в точке x_0;

2) вторая производная в точке x_0 равна нулю $f''(x_0) = 0$ или не существует;

3) при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак,

то x_0 точка перегиба функции.

Схема исследования функции на выпуклость и отыскания точек перегиба

1. Найти область определения функции $y = f(x)$.

2. Найти $f''(x)$.

3. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, и отмечаем их на числовой прямой.

4. Определить знак второй производной в каждом интервале. Если $f''(x)$<0, то в этом интервале функция выпукла вверх, если $f''(x)$>0, то выпукла вниз.

5. Среди точек, в которых функция непрерывна, а вторая производная равна нулю или не существует, определить те, при

переходе через которые вторая производная меняет знак. Эти точки являются точками перегиба.

6. Найти значение функции в этих точках.

Пример 4. Определим промежутки выпуклости вверх, вниз, точки перегиба функции $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

Решение. Область определения: $(-\infty;\ +\infty)$. Функция непрерывна на всей числовой оси.

$$y' = \frac{2x}{x^2+1};\ y'' = \frac{2\left(x^2+1\right) - 4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Приравняем к 0 и найдем критические точки:

$$y'' = \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Нанесем эти точки на числовую прямую и отметим знак y'' (рис. 10).

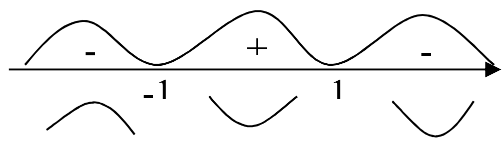


Рис. 10. Интервалы выпуклости

Следовательно, функция на промежутках $(-\infty;-1);(1;+\infty)$ выпукла вверх, на промежутке $(-1;1)$ выпукла вниз, $(\pm 1;\ln 2)$ – точки перегиба графика функции. •

Асимптоты графика функции.

Опр. 4. ***Асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Различают асимптоты *вертикальные* (параллельные оси Оy), *горизонтальные* (параллельные оси Оx) и *наклонные*.

Утв. 1. Прямая $x = c$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Вертикальные асимптоты $x = c$ следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения, если концевые точки - конечные числа.

Прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если эта функция представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Т 10. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k}, \boxed{\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = b}.$$

Доказательство. Пусть линия $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. Согласно определению асимптоты расстояние $MN_1 \to 0$ при $x \to \infty$ (см. рис. 11). Рассмотрим расстояние MN, т.е. разность ординат точки M и точки N, лежащей на асимптоте и имеющей ту же абсциссу, что и точка M. Имеем $MN = \frac{MN_1}{\cos\alpha}$, $MN_1 = MN\cos\alpha$, где α— угол между асимптотой и осью Ox ($\cos\alpha \neq 0$, т.к. $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$); поэтому расстояния MN_1 и MN стремятся к нулю одновременно. $MN = \left| f(x) - (kx + b) \right|$.

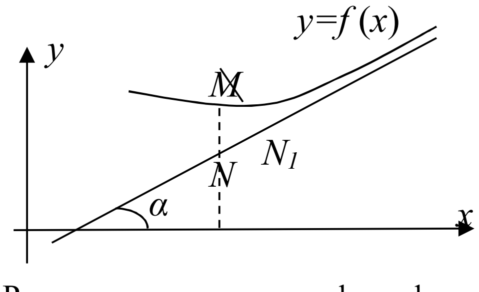


Рис. 11. Расстояние от точки графика функции до асимптоты

Значит, если $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-\left(kx+b\right)\right)=0$, то линия $y=f\left(x\right)$ имеет асимптоту $y=kx+b$.

Таким образом, вопрос о существовании и нахождении наклонной асимптоты линии $y=f\left(x\right)$ сводится к вопросу о существовании таких чисел k и b, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx-b\right)=0. \qquad (1)$$

Если это имеет место, то $f\left(x\right)=kx+b+\alpha\left(x\right)$, $\alpha\left(x\right)$— величина бесконечно малая при $x\to\infty$. Разделим обе части равенства на x и перейдем к пределу при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha\left(x\right)}{x}\right).$$

Так как $\frac{b}{x}\to 0$ и $\frac{\alpha\left(x\right)}{x}\to 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=k$. Из (1) находим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=b$. ◁

Замечание 1. Эти пределы могут быть различными при $x\to\pm\infty$, тогда график функции имеет различные правостороннюю (при $x\to+\infty$) и левостороннюю (при $x\to-\infty$) асимптоты.

Замечание 2. Если $k=0$, то $b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. И $y=b$ − уравнение *горизонтальной асимптоты*, т. е. горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной.

Пример 5. Найдем асимптоты графика функции $y=\frac{4x^2}{x-2}$.

Решение. Область определения $D\left(y\right)=\left(-\infty;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. $x=2$ - точка разрыва. Найдем односторонние пределы функции при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4x^2}{x-2}=\left[\frac{16}{-0}\right]=-\infty;\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{4x^2}{x-2}=\left[\frac{16}{+0}\right]=+\infty$$

Следовательно, точка $x=2$ - точка разрыва второго рода (точка бесконечного разрыва), и прямая $x=2$ – вертикальная асимптота.

Для нахождения наклонной асимптоты $y=kx+b$ найдем

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{x(x-2)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=4.$$

Теперь найдем

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^2}{x-2}-4x\right)=\left[\infty-\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^2-4x^2+8x}{x-2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x}{x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=8.$$

Следовательно, $y=4x+8$ - уравнение наклонной асимптоты. •

Общая схема исследования функции и построения графика

1.Предварительное исследование функции:

- найти область определения функции;

- исследовать функцию на непрерывность, классифицировать точки разрыва (изображая поведение функции в окрестностях этих точек), найти вертикальные асимптоты;

- исследовать функцию на четность (если да, то график симметричен относительно оси Oy) нечетность (график симметричен относительно начала координат);

- исследовать функцию на периодичность (если да, то можно ограничиться исследованием функции на периоде);

- найти наклонные (горизонтальные) асимптоты, а если их нет, то исследовать поведение функции на бесконечности (найти пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$);

- найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат и отметить их на схеме графика.

2.Исследование с помощью первой производной:

- найти $f'(x)$;

- найти точки подозрительные на экстремум: $f'(x)=0$ или не существует;

- найти интервалы возрастания ($f'(x)>0$) и убывания ($f'(x)<0$) функции;

- найти точки максимума и минимума, вычислить значения функции в этих точках; изобразить на чертеже поведение функции в окрестности каждой из этих точек.

3.Исследование с помощью второй производной:

- найти $f''(x)$;

- найти точки подозрительные на точки перегиба: $f''(x)$=0 или не существует;

- найти интервалы выпуклости вверх ($f''(x)$ <0), вниз($f''(x)$ >0).

- найти точки перегиба, вычислить значения функции в этих точках и изобразить поведение функции в окрестности этих точек на чертеже.

4.Построить график.

Пример 6. Проведем полное исследование и построим график функции $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 0$. $x=0$ - точка разрыва.

Найдем односторонние пределы функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to -0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}}=\left[-2e^{+\infty}\right]=-\infty; \quad \lim_{x\to +0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}}=\left[2e^{-\infty}\right]=0$$

Следовательно, точка $x=0$ - точка разрыва второго рода (точка бесконечного разрыва), и прямая $x=0$ – вертикальная левосторонняя асимптота.

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x)=(-x-2)e^{\frac{1}{x}} \neq \left[\begin{array}{l} y(x) \\ -y(x) \end{array}\right.$$

Функция не является периодической.

Для нахождения наклонной асимптоты $y=kx+b$ найдем

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\left[\frac{\infty\cdot e^{0}}{\infty}\right]=1.$$

Теперь найдем

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(x-2\right)e^{-\frac{1}{x}} - x\right) = \left[\infty - \infty\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{по пр. Лопиталя}}{=}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \left(1-\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2e^{-\frac{1}{x}} + \left(1-\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}{-1} = -3.$$

Следовательно, $y = x - 3$ - уравнение наклонной асимптоты.

Точка пересечения с осью Ox (2;0), с осью Oy точек пересечения нет, т.к. в точке x=0 функция не определена.

2. $y' = e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2} = \dfrac{\left(x^2 + x - 2\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

$$\frac{\left(x^2 + x - 2\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \Rightarrow x \neq 0,\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 - \text{критические точки}$$

Нанесем критические точки на числовую ось и определим знак производной на каждом интервале (рис. 12).

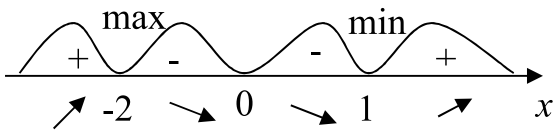


Рис. 12. Интервалы монотонности

Таким образом, функция возрастает при $x \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$, убывает при $x \in (-2;0) \cup (0;1)$.Экстремумы: точка максимума $x = -2$, $y(-2) = -4\sqrt{e} \approx -6,6$; точка минимума $x = 1$, $y(1) = -\frac{1}{e} \approx -0.37$.

$$3.\ y'' = \left(\frac{\left(x^2 + x - 2\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \right)' =$$

$$= \frac{\left((2x+1)e^{-\frac{1}{x}} + \left(x^2 + x - 2\right)e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \right)x^2 - 2x\left(x^2 + x - 2\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} =$$

$$= \frac{\left(2x^3 + x^2 + x^2 + x - 2 - 2x^3 - 2x^2 + 4x\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{(5x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$$

$$\frac{(5x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} = 0 \Rightarrow x \neq 0,\ 5x - 2 = 0 \underset{\text{Точка перегиба}}{\Rightarrow} x = 0,4$$

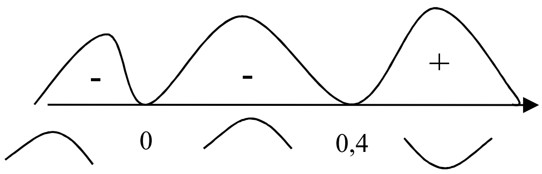


Рис. 13. Интервалы выпуклости

Точка перегиба графика функции $(0,4;-0,13)$ (см. рис. 13). Функция выпукла вверх при $x \in (-\infty;0) \cup (0;0,4)$, выпукла вниз при $x \in (0,4;+\infty)$.

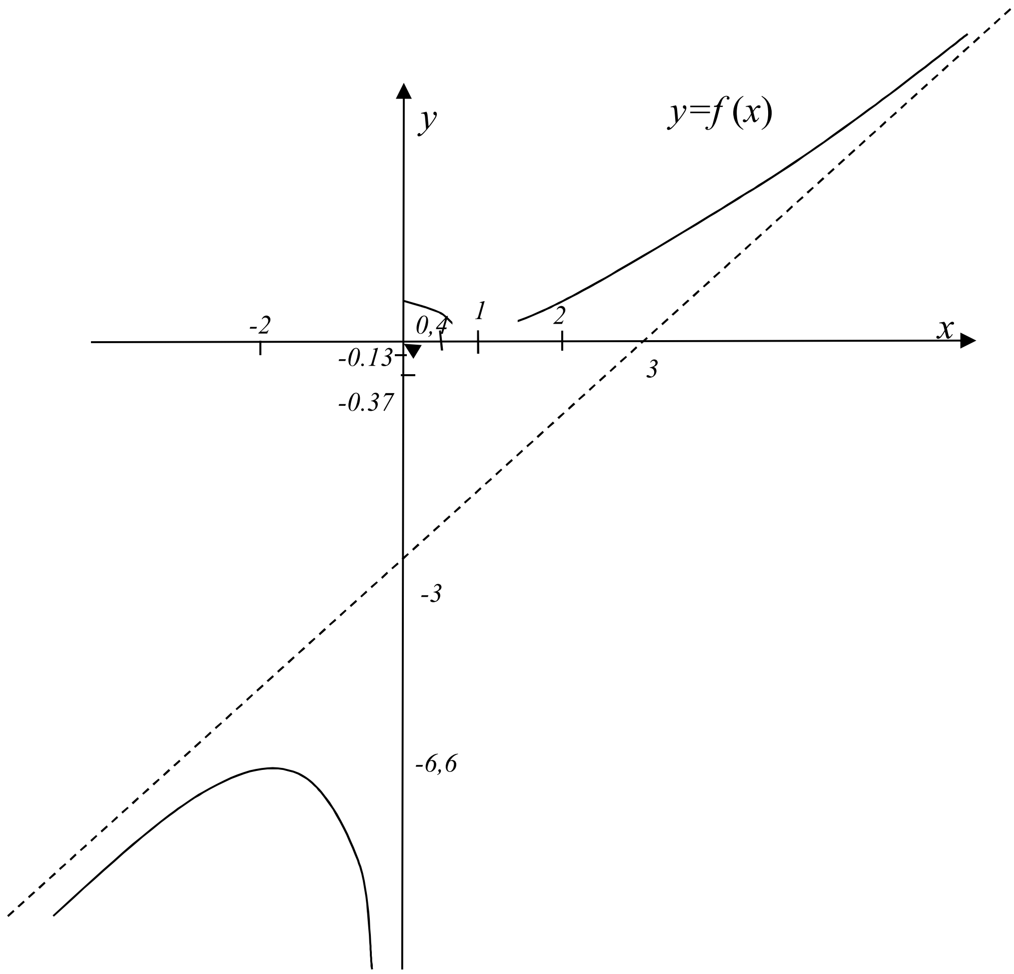


Рис. 14. График функции

•