ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§1. Периодические функции и их свойства

Многие процессы, протекающие в реальной действительности, обладают свойством повторяться через определенные промежутки времени. Такие процессы называются ***периодическими***. Математически, такие процессы описываются периодическими функциями. Функцию, определяющую периодический процесс, представляют как сумму конечного или бесконечного числа простых периодических функций $Asin(\omega x+\varphi_0)$ (либо $A\,cos(\omega x+\varphi_0)$), называемых ***гармониками***, где:
постоянная A называется ***амплитудой***;
постоянная ω называется ***частотой***;
величина $(\omega x+\varphi_0)$ называется ***фазой***;
постоянная φ_0 называется ***начальной фазой***;
постоянная $T=\frac{2\pi}{\omega}$ называется ***периодом***.
Сложные периодические процессы, например, волновые, описываются дифференциальными уравнениями. Решение таких уравнений получают как сумму (конечную или бесконечную) простых гармоник.
Далее будем иметь дело с периодическими функциями. Напомним определение и свойства периодических функций.

Определение. Функция *f(x)* называется ***периодической периода T≠*0**, если выполнены следующие условия:

1. для $\forall\ x\in D(f)\Longrightarrow x-T, x+T$ также принадлежат области определения функции *f(x);*
2. $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.

Как правило, ***периодом функции*** называют наименьший положительный период, если он существует. Например, функция *f(x)*=5, согласно определению, периодическая любого периода *T*≠0, но наименьшего периода для неё не существует.

Свойства периодических функций

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода *T* есть периодическая функция периода *T*.
2. Если функция *y=f(x)* имеет период *T,* то функция *y=f(ax)* (*a*≠0) имеет период $\frac{T}{|a|}$.
3. Определенный интеграл от периодической функции *y=f(x)* с периодом *T* по любому отрезку длиной *T* имеет одно и тоже значение, то есть для любого *x* справедливо равенство

$$\int\limits_{x}^{x+T} f(t)dt=\int\limits_{0}^{T} f(t)dt\,.$$

Замечание. Если функция *f(x)* является периодической периода T_1, а функция $g(x)$ является периодической периода T_2 и эти периоды соизмеримы, то есть $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ – рациональное число, то сумма, разность, произведение и частное этих двух функций есть функция периодическая периода $T = mT_2 = n\,T_1$. Если же отношение периодов есть число иррациональное, то сумма, разность, произведение и частное этих двух функций не будет периодической функцией.

Можно доказать, что алгебраическая сумма любого конечного, а также бесконечного числа (если ряд сходится), периодических функций с соизмеримыми периодами, есть функция периодическая. Поставим обратную задачу: ***представить любую периодическую функцию в виде ряда простейших периодических функций, например, гармоник.*** Введем предварительно некоторые вспомогательные соотношения и понятия, которые понадобятся в дальнейшем.

§2. Ортогональные системы функций

Рассмотрим множество кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций (то есть непрерывных на $[a,b]$ всюду за исключением конечного числа точек разрыва первого рода). По достаточному признаку интегрируемости по Риману существуют конечные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \text{ и } \int_a^b f^2(x)dx,$$

то есть кусочно-непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является ***интегрируемой с квадратом функцией*** на этом же отрезке. Введем на множестве кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ операцию скалярного произведения. То есть такую операцию, которая паре указанных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ставит в соответствие число (φ, ψ) и удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$;
2. $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$,
3. $(\lambda\varphi, \psi) = (\varphi, \lambda\psi) = \lambda(\varphi, \psi)$ для $\forall\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, причем $(\varphi, \varphi) = 0 \iff \varphi = 0$.

Скалярным произведением функций $\varphi(x)$ ***и*** $\psi(x)$ ***на отрезке*** $[a,b]$ будем называть число, равное

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\,.$$

Очевидно, что таким образом введенное число удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения. Число

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx} = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

называется ***нормой функции*** $\varphi(x)$, Множество всех кусочно-непрерывных на $[a{,}b]$ функций, с введенным таким образом скалярным произведением и нормой элемента, называется ***пространством интегрируемых с квадратом функций*** и обозначается $L_2[a, b]$. Очевидно, что пространство непрерывных функций уже, чем пространство интегрируемых с квадратом функций: $\mathbb{C}[a, b] \subset L_2[a, b]$.

Система (конечная или бесконечная) функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \in L_2[a, b]$$

называется ***ортогональной на*** отрезке $[a{,}b]$, если все функции этой системы ортогональны на этом отрезке, то есть их скалярное произведение

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, k \neq m, \\ \\ \neq 0, k = m. \end{cases}$$

Если при этом для любого k выполняется равенство

$$\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_k^2(x)dx = 1,$$

то система функций называется ***ортонормированной на*** $[a{,}b]$**.**

Понятие ортогональности функций введено по аналогии с ортогональностью векторов, для которых необходимым и достаточным условием ортогональности было равенство нулю их скалярного произведения.
В качестве примеров ортогональных систем функций можно рассмотреть следующие:

1. ***Тригонометрическая система функций***: 1, *cosx, sinx, cos*2*x, sin*2*x,…*

Несложно убедиться в том, что это ортогональная система на любом отрезке [-π,π], так как для любых целых *k, n*

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} sinkxdx = 0,$$

как определенный интеграл от тригонометрической функции по полному периоду, а для любых отличных от нуля целых $k \neq m$ несложно получить

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxsinkxdx = \int_{-\pi}^{\pi} cosmxcoskxdx = \int_{-\pi}^{\pi} sinmxsinkxdx = 0$$

При отличных от нуля целых $k \neq m$ последние три формулы можно заменить следующими:

$$\int_{-\pi}^{\pi} coskx \cdot sinkxdx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} cos^2kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2kxdx = \pi$$

Эти формулы получаются непосредственным интегрированием подынтегральных тригонометрических выражений. То есть, тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длины 2π, причем, норма первого элемента равна $\sqrt{2\pi}$, а всех остальных $\sqrt{\pi}$.

2. ***Основная тригонометрическая система функций***

$$1, cos\frac{\pi x}{l}, sin\frac{\pi x}{l}, cos\frac{2\pi x}{l}, sin\frac{2\pi x}{l}, cos\frac{3\pi x}{l}, sin\frac{3\pi x}{l}, \ldots$$

является ортогональной на любом отрезке длины $2l$, например [-l,l], причем норма первого члена $\sqrt{2l}$, а всех остальных $\sqrt{l}$.

3. ***Система многочленов Лежандра***

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Выпишем несколько первых членов это системы:

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!}(x^2-1)^0 = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!}(x^2-1)' = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\left((x^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{2}(3x^2-1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!}\left((x^2-1)^3\right)''' = \frac{1}{4}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!}\left((x^2-1)^4\right)^{IV} = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

Можно показать, что система многочленов Лежандра ортогональна на $[-1;1]$.

§3. Разложение 2π – периодической функции в ряд Фурье

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 cosx + b_1 sinx) + \cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1)$$

Числа a_k и b_k называются ***коэффициентами ряда***.

Преобразуем выражение, стоящее под знаком ряда:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \left| A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right| = A_n(cos\varphi_n \cos nx + sin\varphi_n \sin nx) =$$

$$= A_n cos(nx - \varphi_n), \text{ где } cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}, sin\varphi_n = \frac{b_n}{A_n} = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}.$$

С учетом последнего равенства ряд (1) можно переписать в следующем виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos(nx-\varphi_n)\ . \qquad (2)$$

Члены ряда (1) являются 2π–периодическими функциями. Поэтому сумма этого ряда (если он будет сходиться) также будет 2π–периодической. Рассмотрим 2π–периодическую функцию $f(x)\in L_2[-\pi,\pi]$ и выясним при каких условиях (налагаемых на функцию) она разложима в тригонометрический ряд (1), то есть представима в виде суммы тригонометрического ряда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (3)$$

Предположим, что ряд (3) сходится равномерно и определим в этом случае коэффициенты a_n и b_n. Так как равномерно сходящиеся ряды можно почленно интегрировать, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \ dx\right)=\pi a_0.$$

Следовательно,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \qquad (4)$$

Умножая, далее, равенство (3) на $\cos kx$ и интегрируя по отрезку $[-\pi,\pi]$ (с учетом формул §2 для интегралов тригонометрической системы, которая является ортогональной), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx\ \ dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\ \ dx\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\quad dx\right)=\begin{cases}0, k\neq n\\ \pi, k=n\end{cases}\ (k,n=1,2,3,\dots)$$

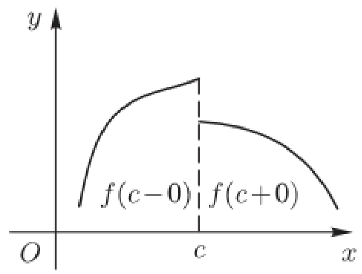
Умножим (3) на $\sin kx$ и проинтегрировав, получим окончательно формулы

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ \ (n=1,2,3,\dots) \qquad (5)$$

То есть, е*сли 2π–периодическая функция f(x) является суммой равномерно сходящегося тригонометрического ряда* (1)*, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам* (4), (5). При этом коэффициенты, определяемые этими формулами, называются ***коэффициентами Эйлера-Фурье***, а тригонометрический ряд – ***рядом Фурье функции*** *f(x)*.

Естественно возникает вопрос, при каких условиях ряд Фурье, построенный для функции *f(x)* (то есть коэффициенты этого ряда (1) вычислены по формулам (4), (5)), сходится, и если он сходится, то будет ли его сумма равна данной функции $f(x)$. Чтобы ответить на этот вопрос, введем следующее понятие. Будем говорить, что ***функция** $f(x)$ **удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке*** $[-\pi,\pi]$, если:

- на этом отрезке функция $f(x)$ непрерывна или имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода;
- в указанном интервале функция $f(x)$ имеет лишь конечное число экстремумов (или, другими словами, кусочно-монотонна на этом отрезке).



Напомним, что $x=c$ называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы этой функции в этой точке:

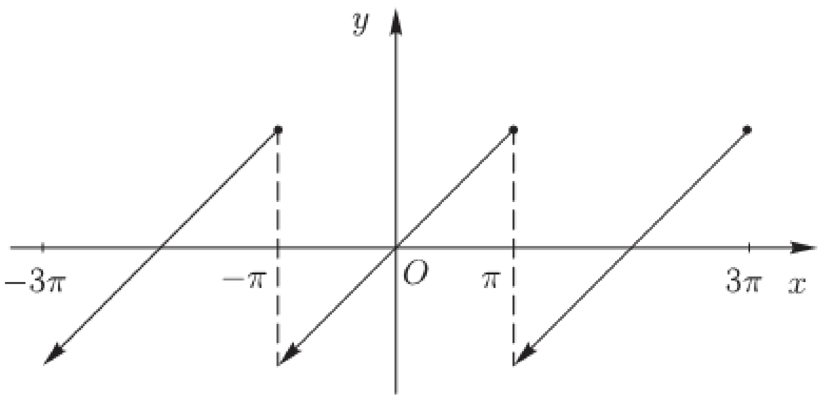
$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0),\ \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$$

и они не равны между собой.

Модуль разности этих односторонних пределов (называется скачком функции $f(x)$ в точке $x=c$) есть величина конечная.
Без доказательства приведем следующую теорему.

Теорема Дирихле. Если периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi,+\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма $S(x)$ этого ряда равна заданной функции во всех точках x, в которых $f(x)$ непрерывна, и $S(x)\Big|_{x=c} = \frac{f(x-c)+f(x+c)}{2}$ если $x=c$ есть точка разрыва первого рода функции $f(x)$.

Пример. Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π задана в интервале $(-\pi,\pi]$ формулой $f(x)=x,\ -\pi < x \le \pi$. Разложить ее в ряд Фурье.



Продолжим функцию на всю числовую ось: для интервалов $(-5\pi,-3\pi]$, $(-3\pi,-\pi]$, $(\pi,3\pi]$, $(3\pi,5\pi]$, ... график получится параллельным переносом. Из рисунка видно, что $x=\pi$ является точкой разрыва первого рода, причем предел слева $f(\pi-0)=\pi$, а предел справа $f(\pi+0)=-\pi$. Аналогично $x=-\pi$ также является точкой разрыва первого рода, для которой $f(-\pi-0)=\pi$, $f(-\pi+0)=-\pi$. Функция $f(x)=x$ является непрерывной в интервале $-\pi < x < \pi$. Внутри указанного интер-

вала функция возрастает и экстремумов не имеет. Таким образом, для рассматриваемой функции выполняются условия Дирихле на отрезке $[-\pi,+\pi]$. Найдем по формулам (4)–(5) коэффициенты Фурье функции.
По формуле (5) имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx\,dx \end{matrix}\right| = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos\pi n\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Первоначально воспользовались известным свойством определенного интеграла: интеграл по симметричному относительно начала координат промежутку от четной функции равен двум интегралам по половине промежутка. Затем применили формулу интегрирования по частям в определенном интеграле. Окончательно получили:

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Так как определенный интеграл по симметричному относительно начала координат промежутку от нечетной функции равен нулю, то коэффициенты a_0=0 и a_n=0. Таким образом, ряд Фурье для рассматриваемой функции примет вид

$$2sinx - sin2x + \frac{2}{3}sin3x + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому ряд сходится всюду. Так как в интервале $-\pi<x<\pi$ функция $f(x)=x$ непрерывна, то сумма ряда равна этой функции, то есть выполняется равенство

$$x = 2sinx - sin2x + \frac{2}{3}sin3x + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots, -\pi < \mathrm{x} < \pi\,.$$

В точке $x=\pi$ все члены ряда обращаются в нуль, поэтому сумма ряда равна нулю. С другой стороны, эта точка есть точка разрыва первого рода, и для нее $\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{\pi-\pi}{2} = 0$, то есть эта полусумма равна значению суммы ряда в точке $x=\pi$, что согласуется с утверждением теоремы Дирихле.

Из решения примера несложно сделать вывод, что ***если периодическая функция является нечетной, то ряд Фурье для нее будет состоять из синусов (то есть все коэффициенты Фурье a_i=0), а если разлагается четная функция, то разложение будет содержать только косинусы.***

§4. Ряды Фурье для функции с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$ имеет период $T=2l$, где $l>0$, то есть для любого x выполняется $f(x)=f(x\pm 2l)$. Положим $x = \frac{lt}{\pi}$, тогда $t = \frac{\pi x}{l}$. Рассмотрим функцию

$F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Легко проверить, что $F(t)$ имеет период, равный 2π. Разложим ее в ряд Фурье на интервале $[-\pi,+\pi]$

$$F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) dt = \left|\begin{matrix} x = \dfrac{lt}{\pi} & dt = \dfrac{\pi}{l}dx \\ t = \pi & x = l \\ t = -\pi & x = -l \end{matrix}\right| = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Аналогично выводятся формулы

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Тогда, учитывая замену переменной, получим ряд Фурье в следующей форме

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Так как $l = \frac{T}{2}$, то $\frac{n\pi x}{l} = n\frac{2\pi}{T}x = \left|\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ круговая частота}\right| = n\omega x$ и ряд Фурье перепишется в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

где коэффициенты Эйлера-Фурье вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx\,, a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x\, dx\,, b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x\, dx.$$

Формально ряд Фурье можно записать для любой функции $f(x)$, если она интегрируема на $[-l;l]$. Но естественно возникают вопросы:

1) сходится ли полученный ряд?;

2) можно ли поставить знак равенства между функцией и ее рядом Фурье? Ответ на эти вопросы дает, как и в предыдущем параграфе, теорема Дирихле.

Теорема Дирихле (достаточное условие сходимости ряда Фурье)**.** Пусть функция $f(x)$ имеет период $T = 2l$ и удовлетворяет условиям:

1) кусочно-непрерывна на $[-l;l]$, то есть непрерывна на этом отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода;

2) кусочно-монотонна на $[-l;l]$, т. е. монотонна на этом отрезке или отрезок можно разбить на конечное число интервалов, на которых она монотонна.

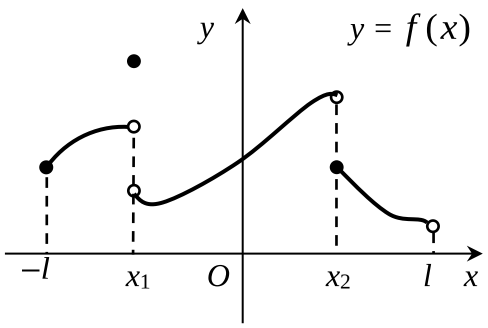
Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и его сумма $S(x)$ равна:

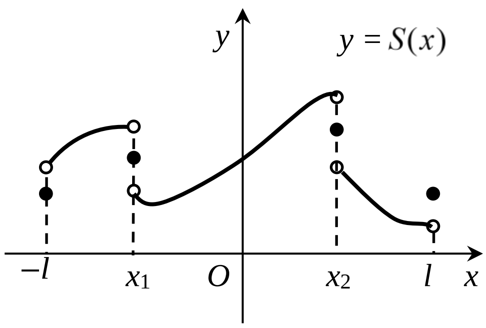
1) $S(x_0) = f(x_0)$, если в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ непрерывна;

2) $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$, если $x = x_0$ – точка разрыва функции $f(x)$;

3) $S(l) = \dfrac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}$.

Отличие такой формулировки от ранее введённой состоит только в детализации условий Дирихле и, в случае сходимости ряда к функции, детализирует поведение суммы тригонометрического ряда в точках разрыва. Важность этой теоремы заключается в том, что большинство функций, которые встречаются в технических приложениях, удовлетворяют условиям теоремы Дирихле. На рисунке приведена геометрическая интерпретация теоремы.



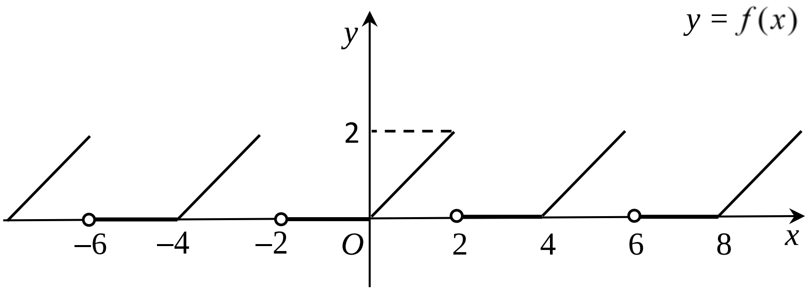


Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 4$) функцию, заданную на интервале $(-2, 2]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} -2 < x \le 0, \\ x & \text{при } 0 < x \le 2; \end{cases}$$

и изобразить графики функции и суммы полученного ряда.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рисунке.



Поскольку $T = 2l = 4$, то $l = 2$. Рассчитаем коэффициенты ряда Фурье по полученным ранее формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}0dx+\int_{0}^{2}xdx\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x; & du=dx \\ dv=\cos\dfrac{\pi n}{2}xdx; & v=\int\cos\dfrac{\pi nx}{2}dx=\dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi nx}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\pi n-0+\frac{4}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-\cos 0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\cdot 0+\frac{4}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi^2(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Так как при расчете коэффициентов ряда Фурье использовали соотношения

$$\sin\pi n=0,\quad \cos\pi n=(-1)^n.$$

Далее находим

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x; & du=dx \\ dv=\sin\dfrac{\pi n}{2}xdx; & v=\int\sin\dfrac{\pi nx}{2}dx=-\dfrac{2}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2+\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2\right)=$$

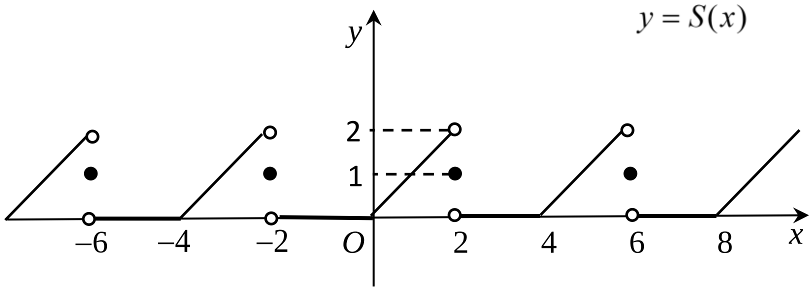
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\cos\pi n-0+\frac{4}{\pi^2n^2}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=-\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Окончательно, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$$

или

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$



В силу теоремы Дирихле график суммы $S(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ имеет вид, представленный на рисунке. Полученное разложение в ряд Фурье позволяет к тому же вычислить суммы некоторых числовых рядов. Например, подставим в полученный ряд $x=0$:

$$S(0)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos 0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin 0=$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

С другой стороны, из теоремы Дирихле следует, что $S(0)=0$, как точки непрерывности исходной, подлежащей разложению функции. Поэтому

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=0,$$

откуда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

или

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+...=\frac{\pi^2}{8}.$$

При $x=1$ получим:

$$S(1)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Поскольку $\cos\frac{\pi(2k-1)}{2}=0$ и

$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2}=(-1)^{k+1}, & \text{если } n=2k-1-\text{нечетное},\\ \sin\frac{\pi\cdot 2k}{2}=\sin\pi k=0, & \text{если } n=2k-\text{четное},\end{cases}$$

то

$$S(1)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{2k}}{\pi(2k-1)}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

По теореме Дирихле, $S(1)=1$, поэтому

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=1;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4};$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...=\frac{\pi}{4}.$$

Имеющиеся на данный момент знания по теории числовых рядов не позволяли нам получить этот результат ранее.