“Simulación Numérica de Yacimientos”

Asignatura: Simulación numérica de yacimientos
Nombre del Profesor: Ing. José Villegas
Autores: Alex Zambrano / Alisson Giler / Kevin Soto / Fabián Rivera

1. DEDUCCIÓN DE FORMULA A UTILIZAR

A continuación, presentamos la deducción de la fórmula presentada en clases:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{v}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{v^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Partimos desde la ecuación de Convección:

La ecuación de convección unidimensional se puede escribir como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Discretizamos la Ecuación de Convección, para deducir la formula utilizamos el método de diferencias finitas.

- Diferencias Finitas en el Tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta \mathrm{t}}$$

- Diferencias Finitas en el Espacio

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta \mathrm{x}}$$

- Término de difusión artificial

Se agrega un término de difusión artificial para mejorar la estabilidad del método. El término es la segunda derivada espacial, que se aproxima por diferencias finitas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta \mathrm{x}^2}$$

Sabiendo que el número de Courant es:

$$C = v\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Para términos adecuados de la difusión artificial

$$\frac{v^2}{2} = C\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Multiplicamos la segunda derivada con el número de Courant para estabilizar la solución y reducir oscilaciones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta \mathrm{x}^2}\right)$$

Unificamos las formulas:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta \mathrm{t}} = -a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta \mathrm{x}} + C\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta \mathrm{x}^2}\right)$$

Simplificamos al multiplicar por un delta (Δt)

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -a(\Delta t)\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta \mathrm{x}} + C(\Delta t)\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta \mathrm{x}^2}\right)$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -a\left(\frac{\Delta t}{\Delta \mathrm{x}}\right)\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} + C\left(\frac{\Delta t}{\Delta \mathrm{x}^2}\right)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\left(\frac{\Delta t}{\Delta \mathrm{x}}\right)\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} + C\left(\frac{\Delta t}{\Delta \mathrm{x}^2}\right)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Sabiendo que $v = a\left(\frac{\Delta t}{\Delta \mathrm{x}}\right)$ y $\frac{v^2}{2} = C\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{v}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{v^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

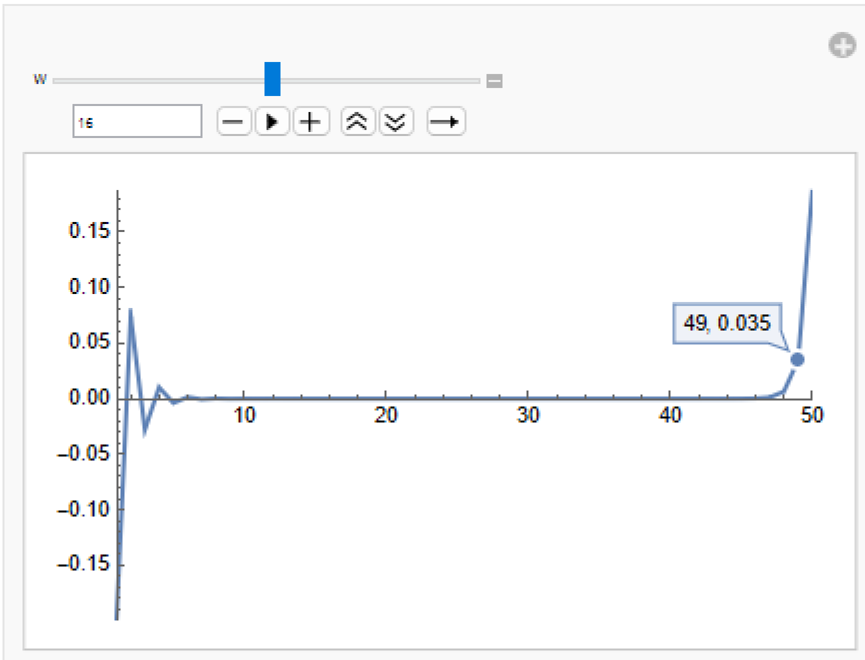
Se ha deducido la fórmula para u_i^{n+1} partiendo de la ecuación de convección y utilizando un esquema de diferencias finitas con términos de difusión artificial. Este método proporciona una solución numéricamente estable para la ecuación de convección.

2. ESCRITURA DE CÓDIGO PARA EMPLEAR FÓMULA

```
nels=50;
l=10;
a=1;
dx=l/nels;
dt=0.1;
tasaimp=1;
CFL=a*dt/dx;
v=a*dt/dx;
valimp=1;
Print["CFL = ",CFL];
niteraciones=30;

(*Ecuación de advección*)
(*Ecuación 3*)

(*unp1[[1]]=0.5 v (un[[1]]-tasaimp)+0.5 v^2 (un[[1]]+tasaimp);*)
```

```
(*Crear vectores que almacenan las saturaciones por elemento*)

un=Table[0,{i,1,nels,1}];
unp1=un;

(*Crear un vector que almacene todas las saturaciones*)

allsols={};

For[ni=1,ni<=niteraciones,ni++,

(*Seteando las condiciones de contorno*)
(*unp1[[1]]=un[[1]]-(a dt/dx) (un[[1]]-tasaimp);*)

unp1[[1]]=0.5*v*(un[[1]]-tasaimp)+0.5*v^2*(un[[1]]+tasaimp);

 (*Calcular las saturaciones para los demás elementos*)

For[i=2,i<=nels-1,i++,

unp1[[i]]=0.5*v*(un[[i]]-un[[i-1]])+0.5*v^2*(un[[i]]+un[[i+1]]);
];

 (*Calcular la solución para el último elemento*)

unp1[[nels]]=0.5*v*(un[[nels]]-un[[nels-1]])+0.5*v^2*(un[[nels]]+tasaimp);
 AppendTo[allsols,unp1];
 un=unp1;
  ]

(*Postprocesar los resultados*)

Manipulate[ListPlot[allsols[[w]],Joined->True,PlotRange-
>{{1,nels},{Min[Flatten[allsols]],Max[Flatten[allsols]]}}],{w,1,niteraciones,1}]
```

CFL = 0.5



Para evaluar la ecuación utilizamos el número de Courant, que para efecto de nuestra ecuación la adaptamos de la siguiente manera:

$$C = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

En nuestro trabajo lo denotamos como CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), lo que nos permite determinar si un esquema numérico será estable o no. Para un esquema explícito, el número de Courant debe ser menor o igual a 1 para mantener la estabilidad. Esto significa que la información no debe viajar más allá de una celda espacial en un paso de tiempo.

Si ν>1, el esquema numérico puede volverse inestable, resultando en soluciones numéricas oscilantes o crecientes exponencialmente.