Odwiedziny

Jan Karwowski

Kameleon Kazik chciałby odwiedzić Gekona Grzesia. Niestety Kazik mieszka w lesie i jest dzikim kameleonem, a Grześ jest gekonem udomowionym i mieszka w mieście. Chcąc odwiedzić Grzesia, Kazik musi przejść przez miasto niepostrzeżenie, żeby żadne z dzieci bawiących się na ulicy nie złapało go i nie próbowało go udomowić. Na szczęście Kazik jest kameleonem i potrafi zmieniać kolor tak, aby wtopić się w kolor ulicy. Niestety, w związku ze zbliżającymi się wyborami burmistrz miasta postanowił uruchomić rezerwę budżetową i pomalował ulice miasta na różne kolory. Dla Kazika jest to dodatkowe utrudnienie, bo nie może on zmieniać kolorów dowolnie. Na przykład, Kazik potrafi wykonać zmianę swojego koloru z czerwonego na zielony i z zielonego na niebieski, ale bezpośrednio z czerwonego na niebieski już nie. To oznacza, że Kazik może przejść niezauważony idąc najpierw czerwoną ulicą, potem skręcając w inną czerwoną ulicę, potem skręcając w zieloną ulicę (i zmieniając kolor na zielony), a następnie skręcić w niebieską ulicę i zmienić kolor na niebieski. Nie może natomiast przejść skręcając z czerwonej ulicy w niebieską, bo zostanie od razu zauważony.

Aby pomóc Kazikowi, musisz napisać program, który:

Etap1 stwierdzi czy możliwe jest dojście do domu Gekona Grzesia bez bycia zauważonym oraz

Etap2 obliczy jak przejść tę trasę wykonując jak najmniejszy wysiłek.

Wysiłek Kazika związany z przejściem trasy jest sumą dwóch elementów: wysiłkiem związanym z chodzeniem, przejście każdej ulicy w mieście to wysiłek energetyczny 1 oraz wysiłek zmiany koloru, który jest inny dla każdej zmiany i podany jako waga krawędzi w grafie zmian kolorów (patrz: Dane).

Dodatkową komplikacją jest fakt, że istnieje kilka punktów w mieście, które są wejściami z lasu. Kazik, jak dzikie zwierzę porusza się w lesie bezwysiłkowo, więc powinien wybrać taki punkt wejściowy, który da mu możliwie mały wysiłek.

Dane

Kolory ulic reprezentowane są jako liczby od 0 do $n - 1$

- *int n* — liczba różnych kolorów ulic
- `DiGraph<int> c` — graf, w którym wierzchołkami są kolory, a krawędź między wierzchołkami jest wtedy, gdy Kazik potrafi wykonać daną zmianę koloru, waga krawędzi definiuje wysiłek związany z wykonaniem tej zmiany,
- `Graph<int> g` — graf opisujący strukturę ulic w mieście, waga krawędzi oznacza kolor danej ulicy,
- *int target* — lokalizacja domu Grzesia (numer wierzchołka w grafie g),
- *int start* (pierwszy etap) lub *int[] start* (drugi etap) — wierzchołki, które są wejściami z lasu do miasta.

Szukane

W pierwszym etapie należy zwrócić parę `bool` i `int[]`, gdzie pierwszy element to informacja, czy Kazik jest w stanie odwiedzić Grzesia, a drugi element to tablica odwiedzonych przez Kazika wierzchołków (pierwszy musi być start, a ostatni target).

W drugim etapie należy zwrócić parę `int?` i `int[]`, gdzie pierwszy element to informacja to minimalny wysiłek Kazika konieczny do odwiedzenia Grzesia lub null, gdy to niemożliwe, a drugi element to tablica odwiedzonych przez Kazika wierzchołków (pierwszy musi być któryś wierzchołek z tablicy start, a ostatni target).

W obu etapach, jeśli znalezienie trasy jest niemożliwe, jako drugi element pary należy zwrócić tablicę o długości 0.

Przykłady

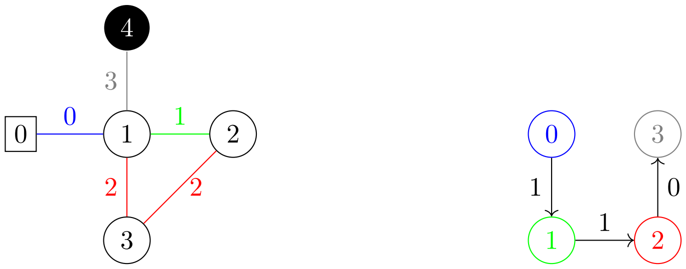
Przykład 1

Przykład pierwszy, gdzie miasto ma formę cyklu, ale Kazik może przejść jedną stroną cyklu, bo zmiany kolorów na drugiej stronie są niemożliwe:

Rysunek 1: Z lewej graf opisujący miasto. Etykiety krawędzi to numery kolorów. Kwadratem oznaczony wierzchołek startowy, a zamalowany wierzchołek to dom Grzesia. z prawej graf z dopuszczalnymi zmianami kolorów. Etykiety wierzchołków, to numery kolorów, te same co na krawędziach miasta, etykiety krawędzi to wysiłek potrzebny do zmiany koloru.

W tym przykładzie jedyną możliwą trasą dla Kazika jest sekwencja wierzchołków $0 \to 1 \to 2 \to 4$. Co prawda trasa $0 \to 3 \to 4$ jest krótsza, ale do wierzchołka 3 Kazik wchodzi w kolorze 0 i nie potrafi wykonać zmiany na kolor 2, żeby wyjść krawędzią $3 \to 4$.

Przykład 2

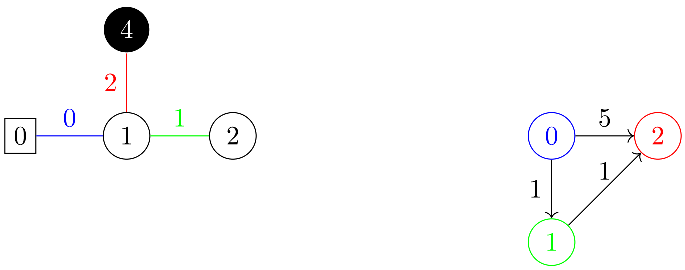


Rysunek 2: Z lewej graf opisujący miasto. Etykiety krawędzi to numery kolorów. Kwadratem oznaczony wierzchołek startowy, a zamalowany wierzchołek to dom Grzesia. z prawej graf z dopuszczalnymi zmianami kolorów. Etykiety wierzchołków, to numery kolorów, te same co na krawędziach miasta, etykiety krawędzi to wysiłek potrzebny do zmiany koloru.

W tym przykładzie jedynym rozwiązaniem jest sekwencja $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4$. Kazik nie może przejść krótszą trasą $0 \to 1 \to 4$, bo nie potrafi zmienić koloru 0 na 3. Zrobienie dodatkowej pętli w kolorze 1 i ponowne odwiedzenie wierzchołka 1 pozwala mu jednak wejść na krawędź $1 \to 4$, bo w tym momencie Kazik przyjdzie z wierzchołka 3 i będzie w kolorze 2. A zmiana koloru 2 na 3 jest możliwa.

Wysiłek dla tego rozwiązania to 5 krawędzi po 1, zmiana 0 na 1, wysiłek 1, zmiana 1 na 2, wysiłek 1, zmiana z 2 na 3, wysiłek 0. W sumie wysiłek $5 + 1 + 1 + 0 = 7$.

Przykład 3



Rysunek 3: Z lewej graf opisujący miasto. Etykiety krawędzi to numery kolorów. Kwadratem oznaczony wierzchołek startowy, a zamalowany wierzchołek to dom Grzesia. z prawej graf z dopuszczalnymi zmianami kolorów. Etykiety wierzchołków, to numery kolorów, te same co na krawędziach miasta, etykiety krawędzi to wysiłek potrzebny do zmiany koloru.

Ten pokazuje sytuację, gdy nadkładając drogi Kazik popełni mniejszy wysiłek niż idąc pozornie najkrótszą trasą. Są dwa dopuszczalne rozwiązania:

1. $0 \to 1 \to 4$, to jest bardziej oczywiste, a jego koszt to dwie krawędzie plus zmiana koloru z 0 na 2, która kosztuje 5 wysiłku. W sumie 7.

2. $0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 4$, rozwiązanie pozornie dłuższe, gdzie Kazik robi pętlę idąc do wierzchołka 2 i zawracając. Ale to wymaga przejścia 4 krawędzi (krawędź z $(1,2)$ jest odwiedzona dwa razy), oraz dwóch zmian koloru, 1 wysiłku każda. W sumie 6. Zatem to jest najlepsze rozwiązanie.

Przykład 4

Rysunek 4: Z lewej graf opisujący miasto. Etykiety krawędzi to numery kolorów. Kwadratem oznaczony wierzchołek startowy, a zamalowany wierzchołek to dom Grzesia. z prawej graf z dopuszczalnymi zmianami kolorów. Etykiety wierzchołków, to numery kolorów, te same co na krawędziach miasta, etykiety krawędzi to wysiłek potrzebny do zmiany koloru.

Nieco ekstremalny przykład, gdzie rozwiązanie wymaga wielokrotnego odwiedzenia wierzchołka 1, żeby w końcu wejść do niego w kolorze, który pozwoli wyjść kolorem 5. Rozwiązanie to $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 1 \to 5 \to 1 \to 6$.

Punktacja

Etap 1:

- Tylko odpowiedź true/false, bez trasy: 1pkt
- Odpowiedź i trasa 0.5 pkt

Etap 2: Całość 1pkt

Złożoność

- Gdy istnieje kilka możliwych tras, można zwrócić dowolną z nich.
- Wymagana złożoność czasowa dla pierwszego etapu to $O(kn)$, gdzie k jest liczbą krawędzi w grafie g, a n jest liczbą kolorów.
- Wymagana złożoność czasowa dla drugiego etapu to $O(lm + k\log(nl))$, gdzie k jest liczbą krawędzi w grafie g, l jest liczbą wierzchołków w grafie g, n jest liczbą wierzchołków w grafie c (liczbą kolorów), a m jest liczbą krawędzi w grafie c.