

La méthode DEA

analyse des performances

© HERMES Science Publications, Paris, 1999

HERMES Science Publications
8, quai du Marché-Neuf
75004 Paris

Serveur web : <http://www.hermes-science.com>

ISBN 2-7462-0032-5

Catalogage Electre-Bibliographie

Badillo, Patrick-Yves*Paradi, Joseph C. (sous la direction de)
La méthode DEA : analyse des performances – Paris : Hermès Science Publications, 1999

ISBN 2-7462-0032-5

RAMEAU : efficience dans l'industrie : évaluation
entreprises : productivité : évaluation

DEWEY : 658.15 Gestion des entreprises. Prise de décision
Analyse des systèmes. Recherche opérationnelle

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

sous la direction de

Patrick-Yves Badillo

Joseph C. Paradi



hermes
Science
publications

K. Kerstens
Université Catholique de Lille, LABORES

J.-B. Lesourd
Directeur de recherche CNRS, GREQAM

A.-Y. Lewin
Professeur, Duke University

J.-C. Paradi
Professeur à l'Université de Toronto et Directeur du CMTE

P. Plane
Directeur de recherche CNRS, CERDI, Université d'Auvergne

S. Rehm
Université de Toronto, CMTE

N. Romain
Chercheur à l'EJCM-CID, Université de la Méditerranée

C. Schaffnit
Université de Toronto, CMTE

L.-M. Seiford
*Professeur à l'Université du Massachusetts,
 Directeur de Programme à la National Science Foundation*

S. Simon
Ingénieur d'étude, Université de Reims

H. Tulkens
Professeur à l'Université Catholique de Louvain, CORE

Ph. Vanden Eeckaut
Université Catholique de Louvain, Institut de Statistique

G. Westermann
*Professeur et Doyen, Hochschule Harz, University of Applied Studies and Research,
 Wernigerode*

L. Weill
Université Robert Schuman, Institut d'Etudes Politiques de Strasbourg, CEPF

Table des matières

Préface

L. M. SEIFORD et H. TULKENS	15
-----------------------------------	----

Introduction - DEA : de la mesure de la performance à l'éthique

P.-Y. BADILLO	17
---------------------	----

Première partie - Présentation et extensions de la méthode DEA

Chapitre 1. Panorama de DEA : LA méthode pour mesurer la performance dans le secteur des services

L. M. SEIFORD	29
---------------------	----

1.1. Ce qu'est DEA.....	29
-------------------------	----

1.2. Comment fonctionne la méthode DEA	30
----------------------------------------------	----

1.3. Exemples d'application de DEA.....	33
-----------------------------------------	----

1.4. Evolution de l'« état de l'art » sur DEA	37
-----------------------------------------------------	----

Chapitre 2 - Data Envelopment Analysis : théorie, méthodologie et applications

A. CHARNES, W. W. COOPER, A. Y. LEWIN et L. M. SEIFORD	39
--------------------------------------------------------------	----

2.1. Introduction	39
-------------------------	----

2.1.1. Introduction	39
---------------------------	----

2.1.2. L'analyse DEA ou "Data Envelopment Analysis" : le concept	40
------------------------------------------------------------------------	----

2.1.3. L'analyse DEA comme nouvelle façon d'organiser et d'analyser les données.....	43
-----------------------------------------------------------------------------------------	----

2.1.4. Repères dans l'évolution de l'analyse DEA	46
--------------------------------------------------------	----

2.2. Les modèles DEA de base	50
------------------------------------	----

2.2.1. Introduction	50
---------------------------	----

2.2.2. Le modèle additif	53
--------------------------------	----

2.2.3. Les modèles multiplicatifs	57
-----------------------------------------	----

2.2.4. Le modèle BCC	59
----------------------------	----

2.2.4.1. L'orientation input de BCC	59
-------------------------------------------	----

2.2.4.2. L'orientation output de BCC	62
--------------------------------------------	----

8 La méthode DEA

2.2.5. Le modèle CCR	64
2.2.5.1. L'orientation input du CCR.....	64
2.2.5.2. L'orientation output du CCR.....	66
2.2.6. Caractérisations des formes ratios.....	68
2.2.6.1. La forme ratio du modèle CCR	68
2.2.6.2. La forme ratio du modèle BCC	71
2.2.7. Résumé des caractéristiques des modèles.....	72

Chapitre 3. Mesurer l'efficacité : avec ou sans frontières ?

H. TULKENS et P. VANDEN EECKAUT	75
3.1. Introduction	75
3.1.1. Intention	75
3.1.2. Le succès de DEA	75
3.1.3. Deux limites importantes	76
3.1.4. Notre propos	77
3.2. DEA et FDH : rappels et observations sur deux manières (parmi d'autres) de mesurer l'efficacité par les frontières.....	77
3.2.1. L'objet de l'analyse	77
3.2.2. La méthode	78
3.2.3. Le calcul	80
3.2.4. Quelques propriétés comparées des méthodes DEA et FDH	81
3.2.5. Quelques questions et une suggestion	84
3.3. EDA : Mesurer l'efficacité par la dominance.....	87
3.3.1. La dominance en efficacité (ou E-dominance) : définitions	87
3.3.2. Mesures de la E-dominance d'une observation vis-à-vis de l'ensemble Y_0	90
3.3.3. Mesures de la E-dominance globale dans un ensemble.....	93
3.3.4. Application à 235 communes de Belgique.....	94
3.4. Pour conclure.....	99

**Chapitre 4 - Décomposition de l'efficacité technique : illustration
sur base des technologies FDH et DEA**

K. KERSTENS et P. VANDEN EECKAUT	101
4.1. Introduction	101
4.2. Efficacité technique et d'échelle pour des technologies convexes et non convexes	102
4.2.1. Efficacité technique et d'échelle	102
4.2.2. Mesure de l'efficacité technique et d'échelle sur des technologies déterministes convexes et non convexes	104
4.2.3. Relation entre les décompositions convexe et non convexe	109
4.3. Calcul des décompositions convexe et non convexe	111

4.3.1. Le calcul de l'efficacité technique et d'échelle sur les technologies convexes et non convexes	111
4.3.2. Identification des rendements d'échelle	114
4.4. Illustration empirique : le contraste entre les décompositions OTE convexe et non convexe	115
4.5. Conclusions et perspectives futures	119

Deuxième partie - Applications de DEA.....**Chapitre 5. Banque et télécommunications.....**

5.1. Mesure de l'efficience et développement stratégique : application de la méthode DEA aux succursales bancaires	129
G. WESTERMANN	129
5.1.1. Introduction	129
5.1.2. Les banques analysées	131
5.1.3. Le modèle analytique DEA	131
5.1.4. Données et modèle de productivité appliqués aux banques	133
5.1.5. Principaux résultats	134
5.1.6. Remarques générales et conclusions	143
5.2. Etude de la productivité du réseau d'une grande banque canadienne : comparaison entre les scores DEA et les estimations de performances de la banque	144
C. SCHAFFNIT et J. C. PARADI	144
5.2.1. Introduction	144
5.2.2. Modèles et données	146
5.2.2.1. Modèle de production	146
5.2.2.2. Modèles DEA	148
5.2.2.3. Échantillon	149
5.2.3. Résultats DEA	151
5.2.4. Évaluation d'un regroupement <i>a priori</i> des agences	152
5.2.5. Comparaison entre les scores DEA et les évaluations menées par la banque	154
5.2.5.1. Technique d'évaluation propre à la banque	154
5.2.5.2. Résultats des comparaisons	155
5.2.6. Commentaires supplémentaires sur les deux méthodes	158
5.2.7. Commentaire final	159
5.3. Les performances des banques de dépôts françaises : une évaluation par la méthode DEA	160
M. DIETSCH et L. WEILL	160
5.3.1. Introduction	160
5.3.2. La DEA appliquée aux banques : une revue de la littérature	162
5.3.3. Les banques françaises de dépôts : quelques observations sur les coûts et la production	165

10 La méthode DEA

5.3.3.1. Un bref aperçu du secteur bancaire français.....	165
5.3.3.2. Analyse des coûts	166
5.3.3.3. Composition des inputs et des produits	168
5.3.4. Les mesures d'efficience.....	169
5.3.4.1. Une analyse de la productivité des banques françaises avec les indices de Malmquist.....	170
5.3.4.2. Les scores d'efficience	171
5.3.4.3. Régression des scores d'efficience : recherche des déterminants de l'efficience des banques	174
5.3.5. Conclusion	177
5.4. L'efficience des opérateurs de télécommunications : une comparaison internationale	
P.-Y. BADILLO	178
5.4.1. Introduction.....	178
5.4.2. Dynamique de l'efficience dans les télécommunications : quelques enseignements d'une revue de la littérature	179
5.4.3. Définition d'une méthodologie	183
5.4.3.1. Productivité, efficience et performance.....	184
5.4.3.2. Définition des outputs et des inputs.....	185
5.4.4. Efficience et performances des opérateurs de télécommunication – application de la méthode DEA.....	187
5.4.4.1. Une première approche : les performances des firmes pour obtenir un chiffre d'affaires élevé.....	188
5.4.4.2. L'évolution pour la période récente 1992-1997 : une « window analysis »	190
5.4.4.3. Performances des opérateurs : la capacité à utiliser le réseau	191
5.4.4.4. Le développement des services de télécommunications	193
5.4.5. Conclusions : facteurs clé pour la productivité et les performances	195
5.4.6. Annexe : liste des opérateurs	197
5.5. Analyse de performance des équipes d'ingénierie à Bell Canada	
J. C. PARADI, S. REHM et C. SCHAFFNIT	198
5.5.1. Introduction.....	198
5.5.2. Intérêt de la méthode DEA.....	198
5.5.3. Evaluation de l'efficacité des équipes techniques.....	199
5.5.3.1. Équipes de conception technique du réseau d'accès	199
5.5.3.2. Analyse fonctionnelle des équipes techniques	200
5.5.4. Modèles.....	200
5.5.4.1. Modèles de base de pleine activité pour équipes techniques.....	200
5.5.4.2. Approche économique.....	202
5.5.4.3. Modèles DEA et contraintes des multiplicateurs.....	203
5.5.5. Echantillon	205
5.5.6. Résultats	205

5.5.6.1. Résultats du modèle de pleine activité concernant les équipes de l'Ontario	206
5.5.6.2. Analyse des commandes retenues dans le cas des équipes de l'Ontario.....	206
5.5.6.3. Modèles économiques pour les équipes de l'Ontario et du Québec.....	209
5.5.6.4. Changement d'objectif de comportement	211
5.5.7. Conclusions et recommandations	212
5.5.8. Annexes	214

Chapitre 6. Efficacité de l'action publique 217

6.1. Efficacité des systèmes d'enseignement supérieur au sein de l'OCDE	
B. BAYENET et O. DEBANDE	217
6.1.1. Introduction.....	217
6.1.2. Le concept de frontières déterministes non-paramétriques	220
6.1.2.1. Notion d'efficacité	220
6.1.2.2. La méthode DEA.....	222
6.1.3. Efficacité et enseignement	225
6.1.3.1. Enseignement supérieur et mesure d'efficacité	226
6.1.3.2. Objectifs et outputs des institutions d'enseignement supérieur	226
6.1.3.3. Les inputs des institutions d'enseignement supérieur.....	228
6.1.3.4. Analyse des données et choix des inputs et outputs	228
6.1.3.5. Choix de la méthode d'analyse de l'efficacité des pays en matière éducative	231
6.1.4. Analyse comparative de l'efficacité de l'enseignement supérieur au sein de l'O.C.D.E	233
6.1.4.1. Description des modèles.....	233
6.1.4.2. Analyse quantitative de l'efficacité des systèmes d'enseignement supérieur de l'O.C.D.E.....	235
6.1.4.3. Analyse qualitative de l'efficacité des systèmes d'enseignement supérieur de l'O.C.D.E.....	237
6.1.5. Conclusion	239
6.2. Les performances comparées dans le secteur de l'éducation : premiers résultats pour les universités françaises	
P.-Y. BADILLO et S. SIMON	241
6.2.1. Introduction	241
6.2.2. Les outputs et les inputs retenus : définition des modèles	242
6.2.2.1. Le choix des outputs	242
6.2.2.2. Le choix des inputs	244
6.2.3. Les résultats	245
6.2.3.1. Les modèles réels	246
6.2.3.2. Les modèles avec prise en compte de la dimension financière	253

12 La méthode DEA

6.2.4. Conclusion	254
6.3. Disparité et évolution des performances des régions françaises : une approche non paramétrique	
J. BERNARD et U. CANTNER.....	255
6.3.1. Introduction.....	255
6.3.2. Présentation du modèle analytique.....	256
6.3.2.1. Analyse statique : le modèle Data Envelopment Analysis (DEA)	256
6.3.2.2. Analyse dynamique : l'indice de productivité de Malmquist	259
6.3.2.3. Progrès technologique localisé, méthode DEA et indice de productivité de Malmquist	261
6.3.3. Analyse empirique des 21 régions françaises	262
6.3.3.1. Les données de base	262
6.3.3.2. Analyse statique	262
6.3.3.3. Analyse dynamique	268
6.3.4. Conclusion	273
6.4. Efficacité, aide publique et PME : application aux régions françaises	
P.-Y. BADILLO et N. ROMAIN	274
6.4.1. Les données.....	275
6.4.2. Application de la méthode DEA à l'évaluation des performances des PME régionales.....	277
6.4.3. Présentation et analyse des résultats.....	278
6.4.3.1. La « productivité » des subventions.....	278
6.4.3.2. La performance des PME régionales	281
6.4.3.3. Vers une typologie des situations.....	284
6.4.4. Conclusions.....	285
6.5. Rentabilité des cultures énergétiques et frontières d'efficacité	
H. EL ASRAOUI, J.-P. BOUSSEMART et J.-B. LESOURD.....	286
6.5.1. Introduction.....	286
6.5.2. Quelques données de cadrage	286
6.5.3. Estimation de la fonction de coût translog pour l'ensemble des producteurs	287
6.5.4. Sélection des meilleures pratiques culturelles et analyse de la rentabilité économique.....	291
6.5.4.1. Spécification des modèles	291
6.5.4.2. Analyse de l'efficacité et mesure de la rentabilité économique des entités efficaces	294
6.5.4.3. Incidences sur le revenu du producteur efficace	296
6.5.5. Prise en compte du score d'efficacité productive	297
6.5.5.1. Réestimation de la fonction de coût	298
6.5.5.2. Analyse des coûts et de la rentabilité économique	299
6.5.6. Conclusion	300

6.5.7. Annexes.....	300
6.5.7.1. Annexe I : Méthode de coût d'opportunité	300
6.5.7.2. Annexe II : Equilibre technique	303
Chapitre 7. Autres approches de l'efficacité	305
7.1. Mesure et diagnostic de l'efficacité des prestations de l'électricité dans les immeubles	
F. CARLEVARO et J.-L. BERTHOLET.....	305
7.1.1. Introduction.....	305
7.1.2. Constitution de l'échantillon.....	306
7.1.3. Sources d'information et données	307
7.1.4. Décomposition statistique de la consommation d'électricité relevée au compteur par catégorie de prestations	307
7.1.5. Spécification et estimation d'indices de consommation électrique par catégorie de prestations	309
7.1.6. Analyse des meilleures pratiques d'utilisation de l'électricité dans les bâtiments.....	311
7.1.7. Conclusion	315
7.2. Efficience technique et privatisation : quelle sensibilité aux modèles paramétriques ?	
L. HOFMAN et P. PLANE.....	316
7.2.1. Introduction	316
7.2.2. Les modèles de frontières paramétriques	316
7.2.2.1. Eléments d'une justification	316
7.2.2.2. Frontières déterministe ou stochastique ?	318
7.2.2.3. Les estimations du modèle	320
7.2.2.4. Les facteurs explicatifs de l'efficience technique	322
7.2.3. Une interprétation néo-institutionnelle des résultats	324
7.2.4. Conclusion	326
7.3. Mesures d'efficacité et évaluation de regroupement de bureaux distributeurs : une approche non paramétrique	
C. CAZALS, M. DE RYCKE et J.-P. FLORENS	327
7.3.1. Introduction	327
7.3.2. Fonction de coût estimée : deux concepts	327
7.3.2.1 Fonction de coût espéré	329
7.3.2.2 Fonction de coût minimum espéré	329
7.3.3. Prévision des coûts pour des regroupements de bureaux	331
7.3.4. Données et résultats	332
7.3.5. Annexes	335

Postface

J. C. PARADI	343
--------------------	-----

l'inefficacité (c'est-à-dire à la dominance) ainsi mesurée peut et doit s'étendre à toutes les occurrences de celle-ci, et non plus seulement à ses cas extrêmes comme c'est le cas dans les travaux qui régressent les degrés d'efficacité-frontière sur diverses variables potentiellement explicatives.

Signalons enfin quelques développements parallèles observés dans la profession : Hougaard and Tvede [HOU 93] proposent des indices *vectoriels* de dominance ; Bardhan, Bowlin, Cooper, and Suyeoshi [BAR 96] calculent des indices non radiaux de dominance ; Triantis et Vanden Eeckaut [TRI 96] proposent une mesure "floue" (fuzzy) de la dominance ; enfin, Vanden Eeckaut [VAN 97] propose dans son chapitre 5 d'introduire une notion de *rendements d'échelle* (non frontière) associée à chaque observation, dont une des propriétés est de permettre de discriminer entre les (toujours nombreuses) observations non dominées (*i.e.* FDH efficaces).

Chapitre 4

Décomposition de l'efficacité technique Illustration sur base des technologies FDH et DEA*

4.1. Introduction

Les mesures de l'efficacité et de la productivité sont devenues récemment des méthodes usuelles dans l'analyse empirique de la production. Pour cette analyse, plusieurs types de frontières ont été proposés et il existe différentes manières pour décomposer la mesure d'efficacité (voir [LOV 93]). L'identification de la source de l'efficacité et de la productivité est utile, aussi bien d'un point de vue managérial que théorique. Une analyse aussi détaillée isole les causes possibles de bonnes ou mauvaises performances. Ce papier identifie deux sources d'inefficacité sur base de technologies déterministes non-paramétriques basées sur l'enveloppe de libre disposition (dénommée ci-après FDH pour "Free Disposal Hull" voir [DEP 84]). Sur base de ces technologies, il est possible d'imposer plusieurs hypothèses de rendements d'échelle. Ces hypothèses autorisent une décomposition de l'efficacité technique. Cette décomposition est similaire, mais moins complète, que celle proposée dans [FÄR 83, 85b].

Ce papier se structure comme suit : la section 4.2 présente la décomposition de l'efficacité technique, celle-ci est basée sur la technologie déterministe convexe (connue sous le nom de modèle DEA pour "Data Envelopment Analysis"). Cette section propose aussi une analyse similaire sur base des technologies non convexes FDH. La section 4.3 discute le calcul de la décomposition en détail. La section suivante (section 4.4) illustre les différences entre les décompositions résultantes de l'approche

* Chapitre rédigé par K. Kerstens et P. Vanden Eeckaut.

convexe traditionnelle et la nouvelle approche non convexe. Cette illustration est basée sur un échantillon de bureaux municipaux de collecte des taxes locales en Angleterre analysé par [THA 87]. La section finale résume les principaux résultats de l'analyse et suggère des pistes pour les recherches futures.

4.2. Efficacité technique et d'échelle pour des technologies convexes et non convexes

4.2.1. Efficacité technique et d'échelle

L'enveloppe de l'ensemble des possibilités de production peut être reconstruite en utilisant plusieurs méthodologies (voir par exemple [LOV 93]). Des décompositions étendues ont été développées pour des technologies de référence déterministes de type convexe. Dans ce domaine, la première procédure opérationnelle pour mesurer l'efficacité technique et allocative remonte à [FAR 57]. [FÄR 83, 85b] ont proposé ensuite une typologie plus complète du concept d'efficacité. L'objet principal de cet article est la distinction entre l'efficacité technique et d'échelle.

Définie de manière informelle, l'efficacité technique (TE pour "Technical Efficiency") demande de produire sur l'enveloppe de l'ensemble des possibilités de production. Si la production s'effectue à l'intérieur de l'enveloppe de l'ensemble des possibilités de production, alors le producteur est techniquement inefficace. Il s'agit d'un objectif spécifique défini pour le meilleur intérêt du producteur. Un producteur est efficace sur le plan de l'échelle (SCE pour "SCale Efficiency") si sa taille de production correspond à un profit d'équilibre général de long terme nul ; sinon il est inefficace sur le plan de l'échelle. Cet objectif social se réfère à la possible divergence entre la configuration actuelle et optimale des inputs et outputs. Dès lors, une production soumise aux rendements d'échelle de type constant est à ce titre optimale.

La technologie de production est basée sur k observations qui utilisent un vecteur d'inputs $x \in \mathbb{R}_+^n$ pour produire un vecteur d'outputs y . La technologie est représentée par ses possibilités de production ou l'ensemble de transformation $GR = \{(x,y) : x \text{ est capable de produire } y\}$, c'est-à-dire, l'ensemble des vecteurs d'inputs/outputs qui sont réalisables. Une représentation alternative de la technologie est son ensemble de possibilités en inputs : $L(y) = \{x : (x,y) \in GR\}$, ce qui implique : $x \in L(y) \Leftrightarrow (x,y) \in GR$.

Les technologies peuvent présenter différentes hypothèses concernant les caractéristiques d'échelle. Une hypothèse essentielle pour notre analyse est l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Une technologie est soumise aux

rendements d'échelle constants (CRS pour "Constant Returns to Scale") si $\delta GR = GR$, où $\delta > 0$ est un scalaire.

Selon [FAR 57], l'efficacité est mesurée de manière radiale ou proportionnelle. La mesure d'efficacité radiale en input $DF_i(x,y)$ est :

$$DF_i(x,y) = \min\{\lambda : \lambda \geq 0, \lambda x \in L(y)\}.$$

Cette mesure indique la réduction radiale maximale possible des inputs tout en restant dans son ensemble de possibilités en inputs. $DF_i(x,y)$ a pour valeur maximale 1, ce qui représente une production efficace sur l'isoquant de $L(y)$.¹

L'efficacité technique est traditionnellement mesurée sur base d'une technologie de production dépourvue d'hypothèses spécifiques concernant les rendements d'échelle. Par contre, l'efficacité d'échelle est évaluée par rapport à une technologie à rendements d'échelle constants, car cette technologie est la référence d'équilibre général de long terme. L'efficacité calculée sur base de cette dernière technologie combine donc efficacité d'échelle et efficacité technique. Dès lors, la définition de l'efficacité d'échelle est immédiatement déduite comme le ratio de deux mesures d'efficacité : l'une calculée sur une technologie à base des rendements d'échelle constants ($DF_i(x,y | CRS)$), et une autre calculée sur une technologie à base des rendements d'échelle variables ($DF_i(x,y | VRS)$).

Formellement, la mesure d'efficacité d'échelle orientée en input ($SCE_i(x,y)$) est définie comme : $SCE_i(x,y) = DF_i(x,y | CRS)/DF_i(x,y | VRS)$. Ce ratio indique la plus petite combinaison d'inputs possible capable de produire la même quantité d'outputs à long terme comme une combinaison techniquement efficace située sur la technologie à rendements d'échelle variables. Comme $DF_i(x,y | CRS) \leq DF_i(x,y | VRS)$, on en déduit que $0 < SCE_i(x,y) \leq 1$.²

Ces deux concepts d'efficacité statiques sont mutuellement exclusifs et la mesure radiale nous en procure une décomposition multiplicative (voir [FÄR 85b : 188-191]). L'efficacité technique globale (OTE pour "Overall Technical Efficiency") diffère de l'efficacité technique (TE) dans le sens qu'elle est toujours mesurée relativement à une technologie CRS à forte disposition. Ceci nous amène à la décomposition suivante :

1. Une définition plus précise, notamment considérant la valeur de $DF_i(x,y)$ pour $x \notin L(y)$, est dans [FÄR 85b].

2. Pour la proposition initiale, voir [FÖR 79]. [FÄR 83] insistent sur le fait que la taille optimale est considérée sur un plan technique (sans liaisons avec les prix ou le profit maximal). Voir également [BAN 84].

$$OTE = TE \cdot SCE. Or: DF_i(x,y | CRS) = DF_i(x,y | VRS) \cdot SCE_i(x,y).$$

La technologie est de type CRS si l'observation considérée ou son point de projection orienté en input a une mesure $SCE_i(x,y) = 1$. Si $SCE_i(x,y) < 1$, alors l'observation considérée n'est pas située ou projetée sur une facette où la technologie CRS s'impose. Pour cette observation, il est possible de déterminer la nature exacte des rendements d'échelle pour sa projection sur l'enveloppe. Plusieurs méthodes existent pour obtenir des informations qualitatives concernant les caractéristiques d'échelles locales. Les aspects numériques seront abordés à la section 4.3.

4.2.2. Mesure de l'efficacité technique et d'échelle sur des technologies déterministes convexes et non convexes

Nous orientons notre analyse sur la mise en oeuvre de cette décomposition présentée ci-dessus en utilisant des technologies déterministes non paramétriques basées sur l'analyse des activités (voir [KOO 51]). Nous introduisons d'abord les modèles de production traditionnels de type convexe (modèles DEA), et ensuite nous présentons les technologies non convexes.³

La première technologie de référence est un modèle de production convexe à rendements constants :

$$GR^{DEA-CRS} = \{(x, y): M'z \geq y, N'z \leq x, z \in \mathbb{R}_+^k\},$$

où M est la matrice $k \times m$ des outputs observés, N est la matrice $k \times n$ des inputs observés, z est un vecteur $k \times 1$ de variables d'intensité ou d'activité, y et x sont des vecteurs $m \times 1$ d'outputs et $n \times 1$ d'inputs, et le signe ' désigne la transposition. Comme il n'y a pas de restrictions sur le vecteur d'intensité z , CRS est imposé sur cette technologie. Nous admettons également la forte disposition en inputs et outputs.

Un autre modèle plus flexible est nécessaire pour évaluer TE. Ceci est réalisé en utilisant un modèle modifié qui impose les rendements d'échelle variables (VRS). Il résulte des définitions précédentes en contrignant la somme des variables d'intensité à un ($I'_k z = 1$, où I_k est un vecteur unitaire $k \times 1$).⁴

Pour déterminer les rendements d'échelle deux technologies additionnelles sont nécessaires. Les technologies convexes qui imposent les rendements d'échelle non

3. La technologie convexe est définie, entre autres, dans [BAN 84], [FÄR 83, 85b]. Les technologies FDH et dérivées, ont été proposées, entre autres, dans [BOG 96], [DEP 84], et [TUL 93].

4. La technologie VRS satisfait les rendements d'échelle non croissants ou non décroissants selon les régions (voir [FÄR 94]).

croissants (NIRS) ou non décroissants (NDRS) sont aussi obtenues en ajoutant une contrainte par rapport au modèle CRS. Plus spécifiquement, les technologies NIRS et NDRS demandent que la somme du vecteur d'activité soit respectivement plus petite ou plus grande que l'unité ($I'_k z \leq 1$ et $I'_k z \geq 1$).

Les technologies non convexes correspondantes sont définies de la manière suivante.⁵ Une technologie, non convexe, qui impose les rendements d'échelle constants est définie comme :

$$GR^{FDH-CRS} = \{(x, y): M'w \geq y, N'w \leq x, I'_k z = 1, z_i \in \{0,1\}, w_i = \delta z_i, \delta \geq 0\}.$$

Dans cette formulation, il y a un vecteur d'activité z qui est soumis à la contrainte de la non convexité et un vecteur d'activité mis à l'échelle w qui autorise toutes mises à l'échelle des observations constituant la frontière. Le paramètre d'échelle (δ) est libre de part l'hypothèse CRS.

Ce modèle est très proche de la technologie traditionnelle FDH, qui impose la forte disposition et pas d'hypothèse sur les rendements d'échelle (proposée initialement par [DEP 84]) :

$$GR^{FDH} = \{(x, y): M'z \geq y, N'z \leq x, I'_k z = 1, z_i \in \{0,1\}\}.$$

Le modèle FDH est un cas spécial du modèle précédent où l'on fixe le paramètre d'échelle (δ) à 1.

Parallèlement au cas convexe, il est aussi possible de définir deux technologies additionnelles basées sur FDH qui retiennent les hypothèses NIRS et NDRS. Il suffit pour les obtenir de modifier le paramètre d'échelle inclus dans la technologie $GR^{FDH-CRS}$ afin qu'il soit plus petit ou égal à un ($\delta \leq 1$) ou plus grand ou égal à un ($\delta \geq 1$).⁶

5. Ces technologies ont été mentionnées par [BOG 96 : 464], mais sans beaucoup de détails.

6. Ainsi, une technologie non convexe VRS peut se définir comme une intersection de technologies NIRS et NDRS convexe et non convexe ($GR^{FDH-VRS} = GR^{FDH-NIRS} \cap GR^{FDH-NDRS}$). Clairement, $GR^{FDH} \subseteq GR^{FDH-VRS}$; tandis que $GR^{FDH-VRS} \subseteq GR^{FDH-NIRS}$ et $GR^{FDH-VRS} \subseteq GR^{FDH-NDRS}$. $GR^{FDH-VRS}$ est comparable à un modèle VRS convexe sauf la convexité. Ce qui peut se réécrire : $GR^{DEA-VRS} = GR^{DEA-NIRS} \cap GR^{DEA-NDRS}$. Dans les deux cas, l'efficacité orientée en input est calculée comme suit : $DF_i(x,y | VRS) = \text{Max} \{DF_i(x,y | NIRS), DF_i(x,y | NDRS)\}$. De manière similaire, les modèles CRS peuvent être assimilés à une union des technologies NIRS et NDRS. Alors, l'efficacité en input se calcule comme : $DF_i(x,y | CRS) = \text{Min} \{DF_i(x,y | NIRS), DF_i(x,y | NDRS)\}$. Ces manières de calculer les technologies VRS et CRS n'ont pas été signalées dans la littérature.

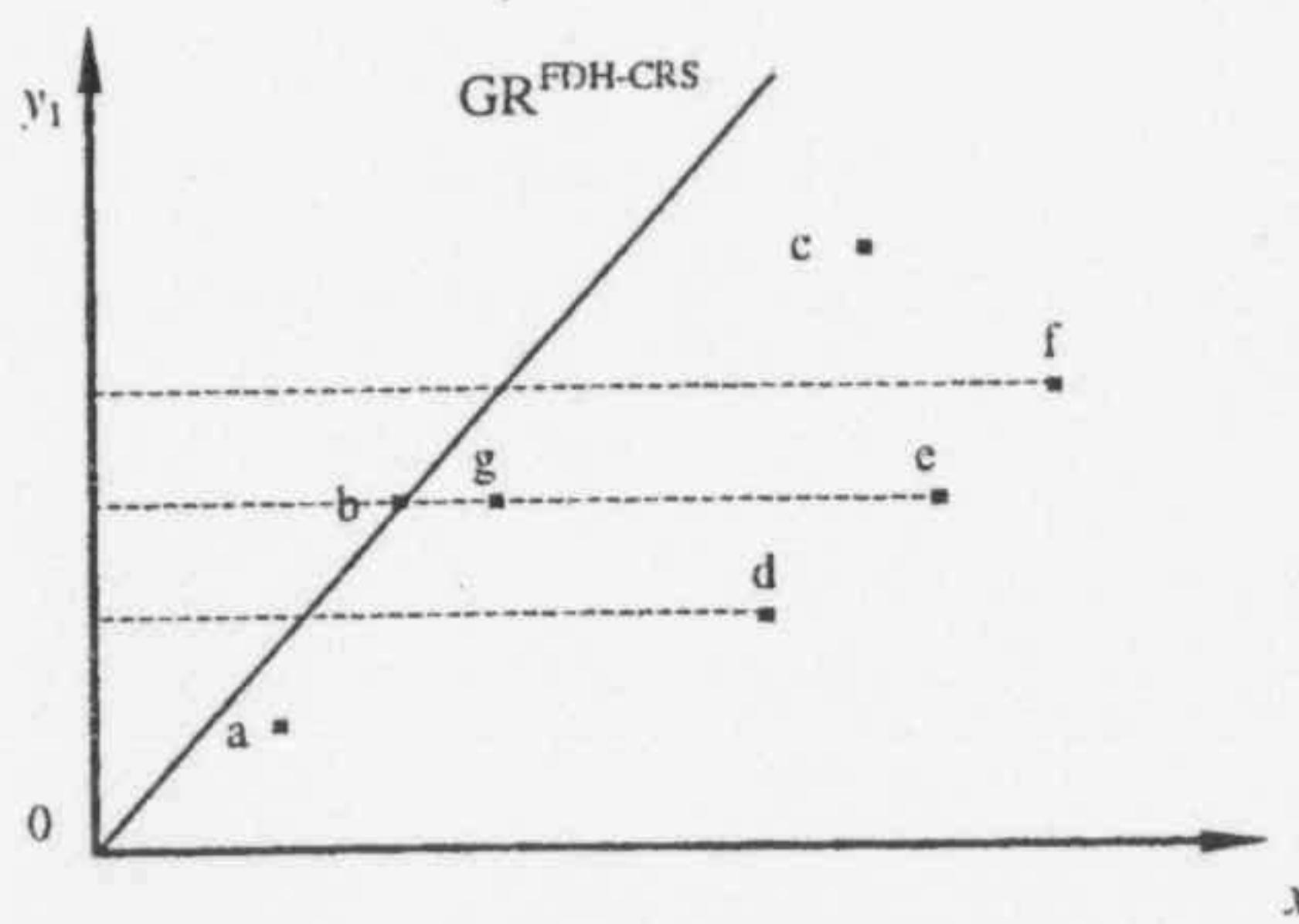


Figure 4.1a. Modèle CRS non convexe

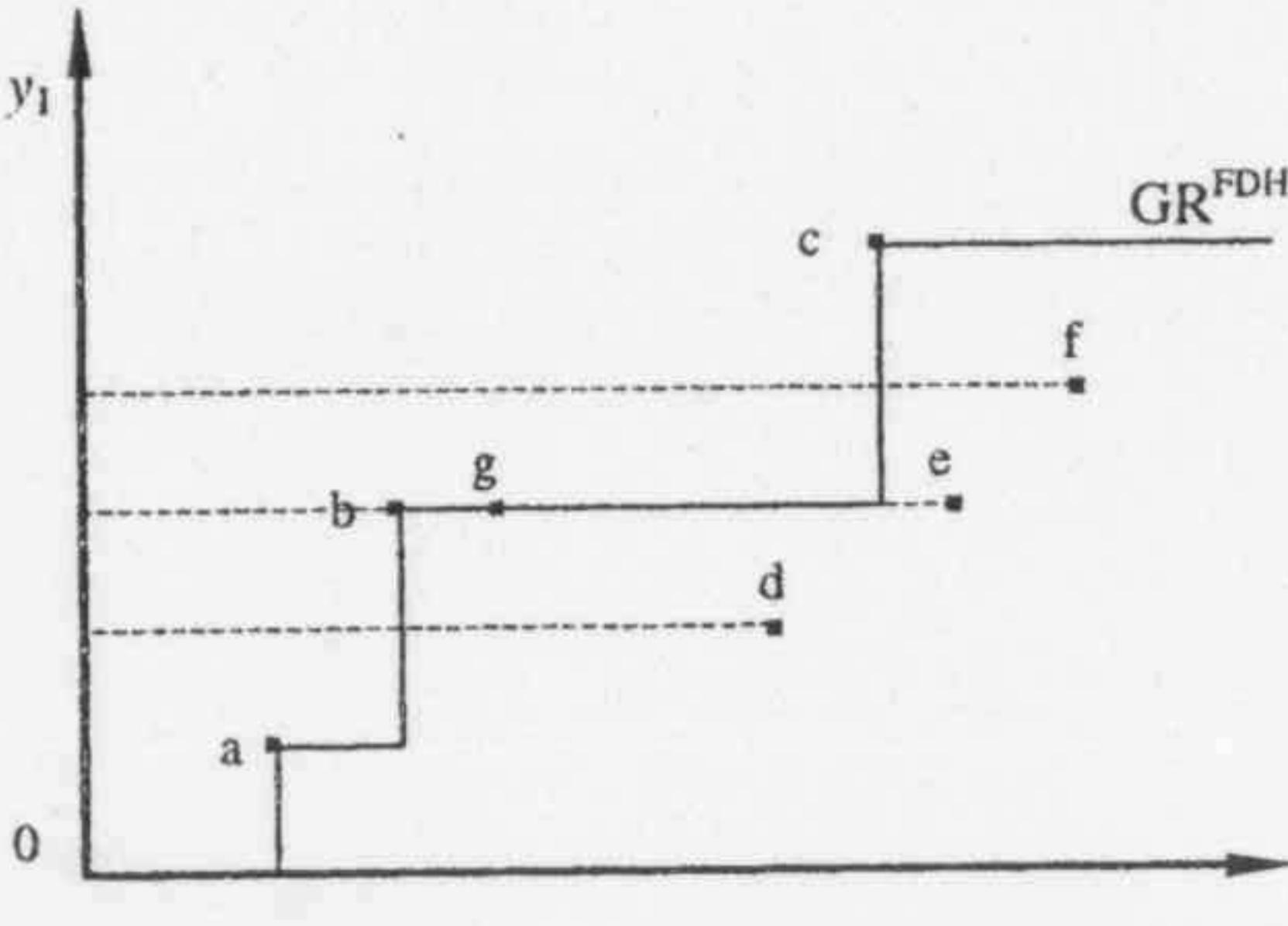


Figure 4.1b. Modèle FDH non convexe

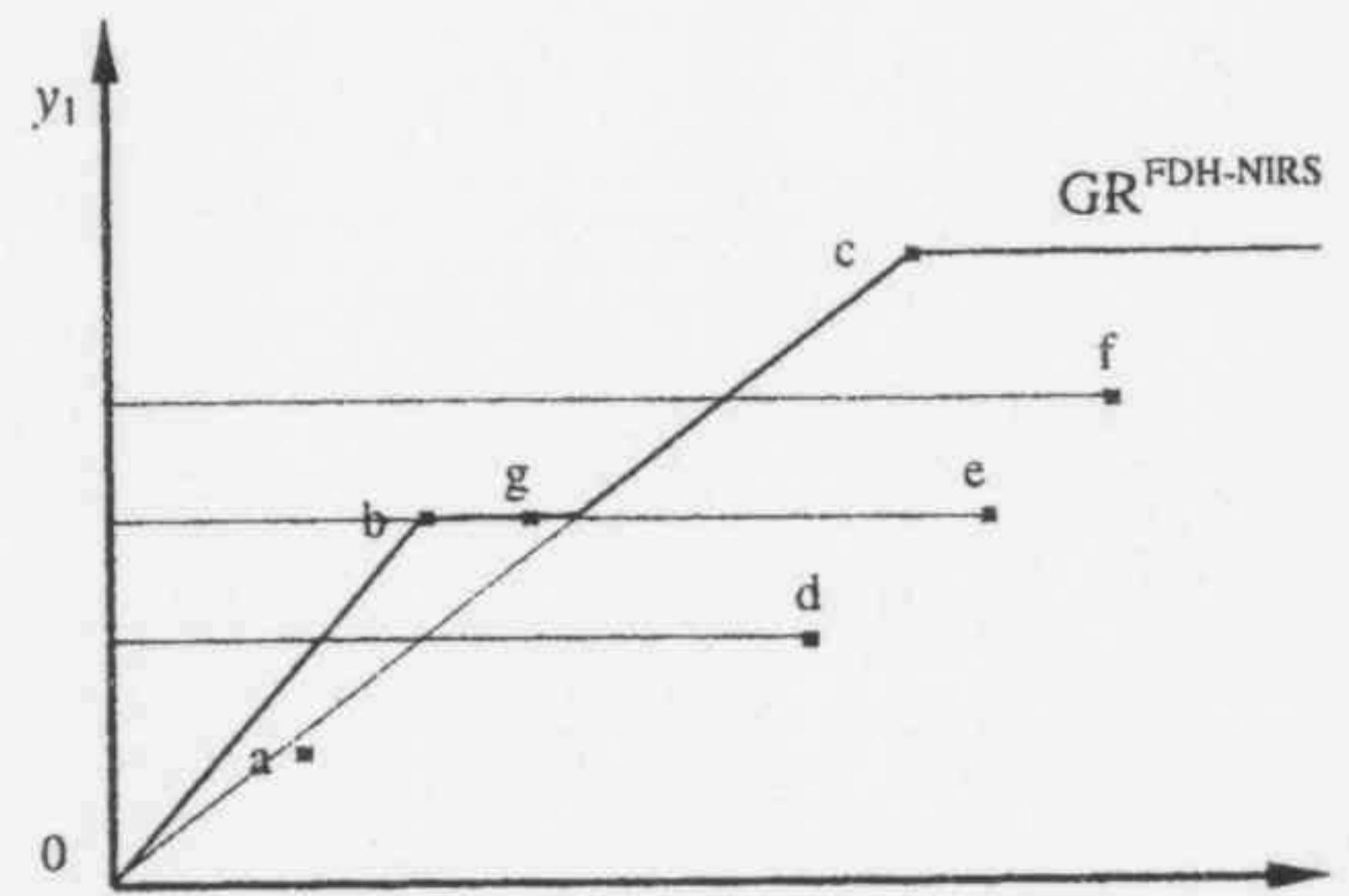


Figure 4.1c. Modèle NIRS non convexe

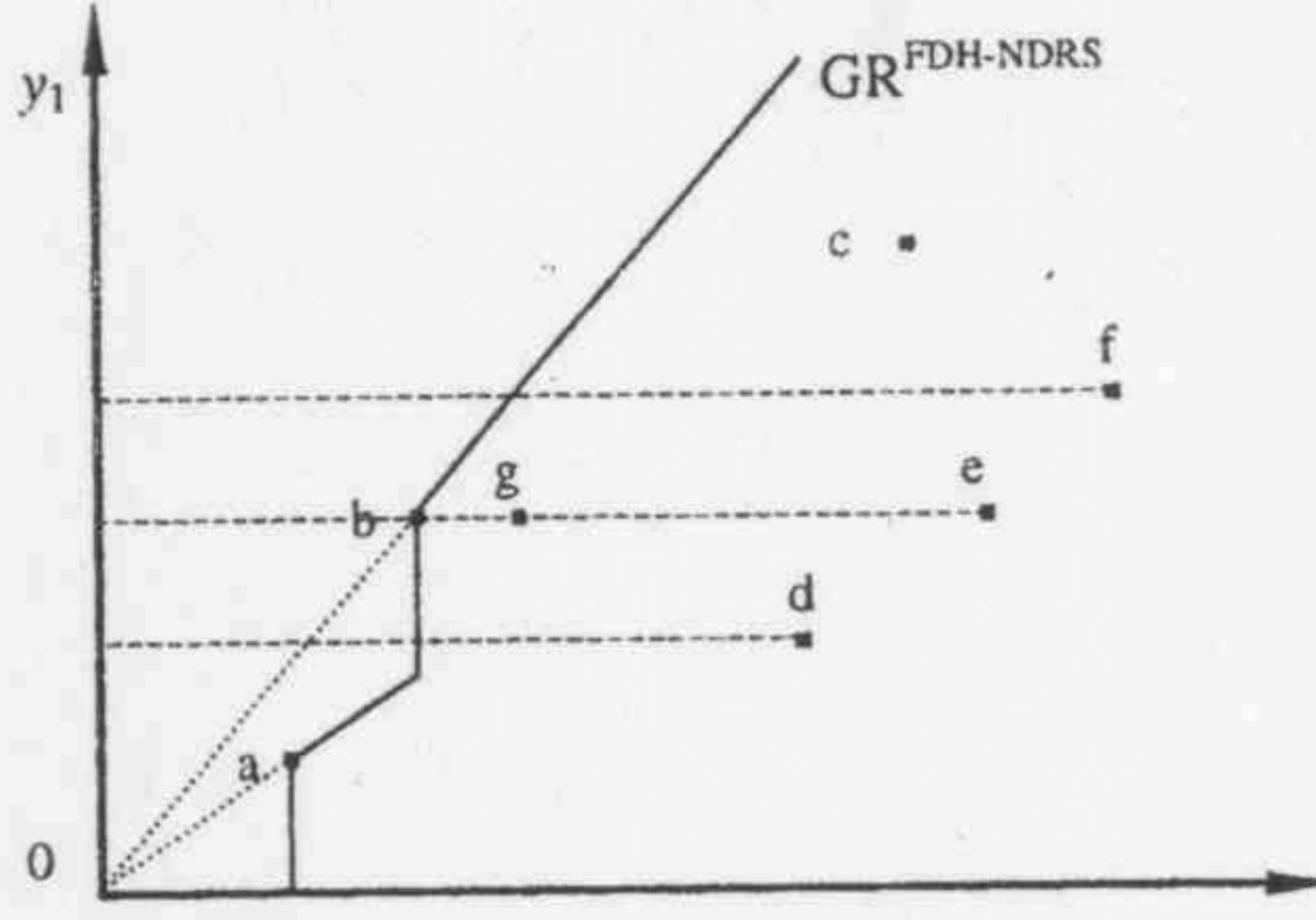


Figure 4.1d. Modèle NDRS non convexe

Contrairement aux modèles DEA, ces modèles non convexes n'ont jamais été utilisés empiriquement. Afin de fournir l'intuition graphique, ces trois technologies non convexes proposées par [BOG 96], sont illustrées, accompagnées par le FDH classique, dans l'espace input output de la figure 4.1. Tandis que GR^{FDH-CRS} autorise une mise à l'échelle non contrainte des activités, GR^{FDH-NIRS} et GR^{FDH-NDRS} autorisent seulement une mise à l'échelle respectivement décroissante ou croissante des activités observées par le paramètre d'échelle (δ). GR^{FDH-NIRS} et GR^{FDH-NDRS} sont liés aux technologies proposées par [PET 90], mais ce dernier maintient l'hypothèse de la convexité pour l'espace des inputs et des outputs.⁷

7. Dans le cas d'un input et d'un output unique, GR^{FDH-CRS} coïncide avec la technologie GR^{DEA-CRS}, ainsi que GR^{FDH-NIRS} et GR^{FDH-NDRS} coïncident avec les technologies qui sont définies par [PET 90].

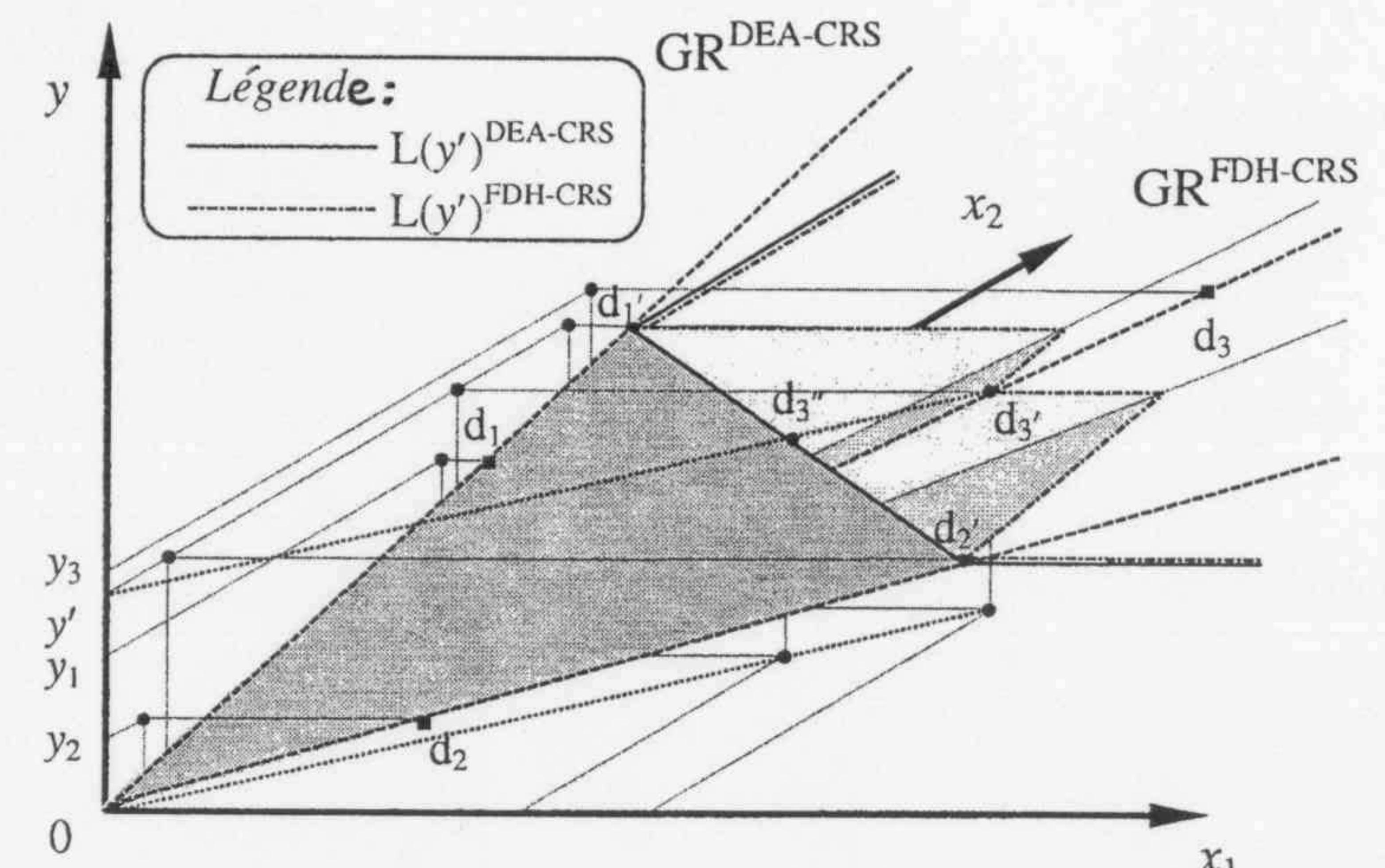


Figure 4.2. Comparaison des modèles convexes et non convexes dans l'espace tridimensionnel

Une comparaison entre un modèle DEA et un modèle CRS non convexe est proposée à la figure 4.2. Cette représentation est réalisée dans un espace tridimensionnel (2 inputs et un output). Les observations d_1 , d_2 , et d_3 définissent la frontière. La section en input associée au niveau d'output y' coupe l'isoquant DEA au points d_1 , et d_2 , tandis que les observations mises à l'échelle d_1' , d_2' et d_3' constituent l'isoquant FDH. La surface grisée foncée représente la facette DEA passant par l'origine, d_1 , et d_2 . La surface grisée claire représente les facettes FDH passant par l'origine, d_1' , d_2' et d_3' . Le point d_3' est efficace pour le modèle non convexe, mais il est inefficace en input pour le modèle convexe (pour une quantité $y'd_3''/y'd_3'$).

La figure 4.3. illustre ces deux concepts d'efficacité statique sur une technologie convexe. Elle présente les deux ensembles des possibilités de production et leurs enveloppes respectives, chacune d'elles montrant les combinaisons d'inputs capables de produire le vecteur d'outputs. L'ensemble GR^{DEA-CRS} est caractérisé par CRS. L'ensemble GR^{DEA-VRS} impose l'hypothèse VRS. Clairement, ces technologies sont imbriquées : $GR^{DEA-VRS} \subseteq GR^{DEA-CRS}$.

Ces deux concepts d'efficacité statique et leurs mesures radiales sont illustrés en commentant les positions de l'observation f (à l'intérieur de l'ensemble GR^{DEA-VRS}) et leurs points de projection par rapport à ces deux technologies.

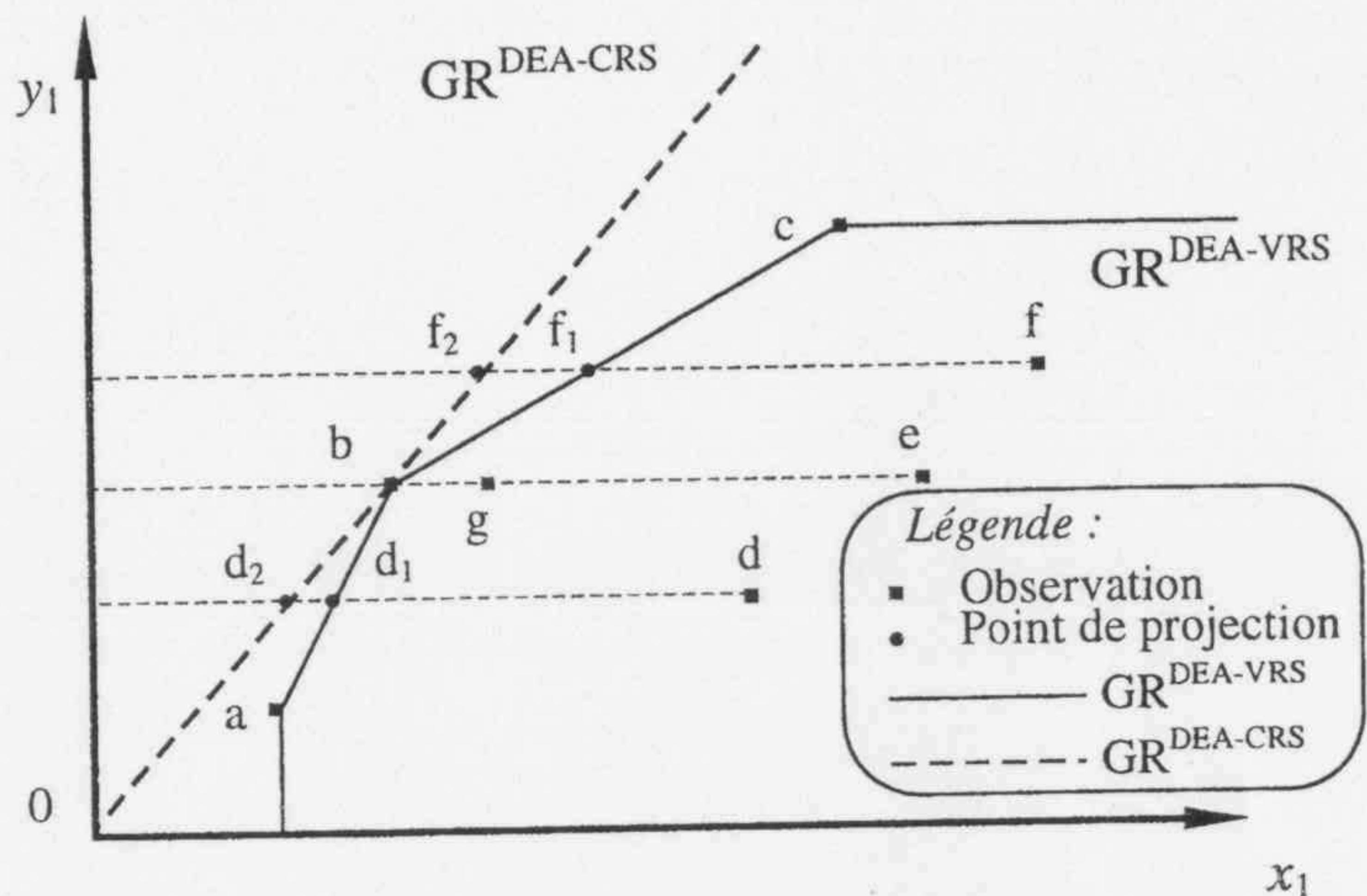


Figure 4.3. Efficacité technique globale : Typologie illustrée sur base des technologies convexes

Premièrement, l'observation f est techniquement inefficace (TE) car elle utilise plus d'input pour produire exactement le même output comme, par exemple, le point de projection f_1 sur l'enveloppe de l'ensemble $GR^{DEA-VRS}$. L'efficacité technique dans le sens de [FAR 57] est représentée par le ratio de distances Of_1/Of mesuré par rapport à une technologie de référence stipulant la forte disposition ($GR^{DEA-VRS}$). Deuxièmement, l'efficacité d'échelle (SCE) est illustrée en utilisant l'unité f_2 , qui est une autre projection radiale du point f . Ce point sur l'enveloppe de l'ensemble $GR^{DEA-VRS}$ est inefficace sur le plan de l'échelle car il nécessite de fournir plus d'input pour obtenir le même niveau d'output comme, par exemple, le point de projection f_2 sur l'enveloppe de l'ensemble $GR^{DEA-CRS}$. Ce dernier point est soumis à une technologie aux rendements d'échelle constants. L'efficacité d'échelle est représentée par le ratio Of_2/Of_1 , c'est-à-dire, en comparant des technologies à forte disposition de court terme ($GR^{DEA-VRS}$) et de long terme ($GR^{DEA-CRS}$).

La figure 4.4. propose une décomposition similaire pour les technologies non convexes. Ces modèles de production sont imbriqués : $GR^{FDH} \subseteq GR^{FDH-CRS}$.

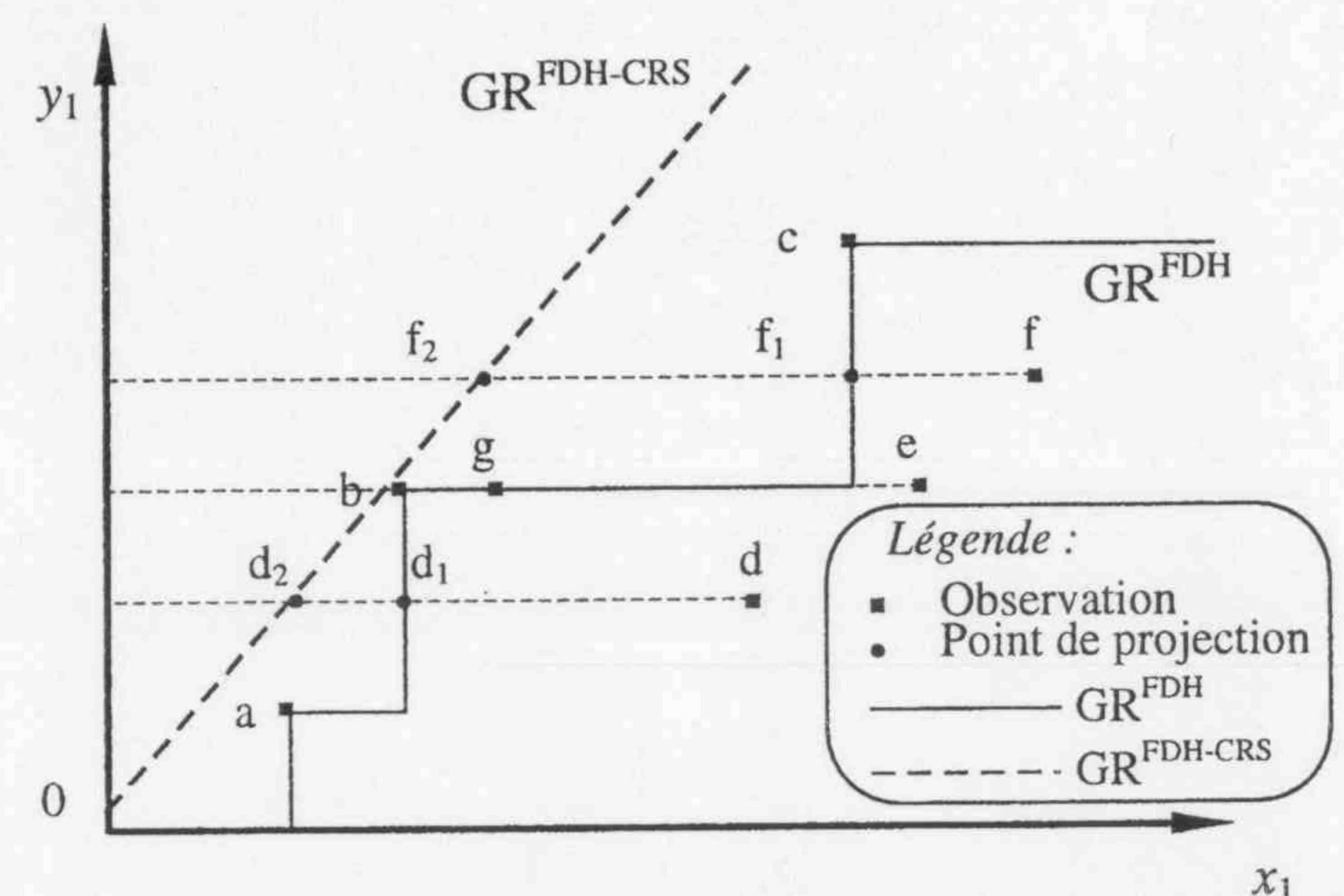


Figure 4.4. Efficacité technique globale : Typologie illustrée sur base des technologies non convexes

4.2.3. Relation entre les décompositions convexe et non convexe

La relation entre les deux décompositions convexe et non convexe demande quelques clarifications. Comme résultat préliminaire, nous observons que toutes les technologies non convexes sont imbriquées dans leurs équivalents convexes :

$$GR^{FDH} \subseteq GR^{DEA-VRS} ; \text{ et } GR^{FDH-CRS} \subseteq GR^{DEA-CRS}$$

La composante de l'efficacité globale non convexe ne peut pas être plus élevée que son équivalent convexe ($OTE^{Convexe} \leq OTE^{Non Convexe}$).⁸ La différence entre les deux composantes est complètement imputable à l'hypothèse de convexité. En effet, les deux technologies imposent les mêmes rendements d'échelle constants et la même hypothèse de forte disposition. Dès lors, il est possible d'ajouter une composante liée à la convexité (CRE pour "Convexity Related Efficiency") à la décomposition non convexe afin de la faire coïncider avec la décomposition convexe : $OTE^{Convexe} = CRE \cdot OTE^{Non Convexe}$. Cette composante liée à la convexité est calculée comme le ratio entre l'efficacité technique globale convexe et non convexe : $CRE = OTE^{Convexe}/OTE^{Non Convexe}$. Comme $OTE^{Convexe} \leq OTE^{Non Convexe}$, dès lors $0 < CRE \leq 1$. Les deux composantes de l'efficacité technique globale coïncident (ce qui implique

8. OTE est identique pour les décompositions orientées input et output. Ceci provient du fait que sous CRS les efficacités inputs et outputs sont identiques (voir [FÄR 78] ou [DEP 83] pour les démonstrations).

110 La méthode DEA

CRE=1) dans les deux cas suivants : (i) lorsqu'une observation inefficace est projetée sur les hyperplans parallèles aux axes (avec des variables d'écart positives) ; (ii) lorsqu'une observation efficace est sur ces hyperplans parallèles aux axes ou fait partie des frontières FDH et DEA simultanément.

Ensuite, comme ces technologies sont imbriquées, il est évident que la composante de l'efficacité technique est plus large si elle est calculée sur base d'une technologie non convexe ($TE^{Convexe} \leq TE^{Non Convexe}$).

Finalement, il n'y a pas de classement a priori entre les composantes d'échelle des deux décompositions. Alors que les mesures d'efficacité respectives peuvent être ordonnées (car à nouveau les technologies non convexes sont des sous-ensembles des technologies convexes), il est impossible de classer les ratios entre les mesures d'efficacité évaluées par rapport aux technologies convexes et non convexes ($SCE^{Convexe} \leq SCE^{Non Convexe}$, or $SCE^{Convexe} \geq SCE^{Non Convexe}$).

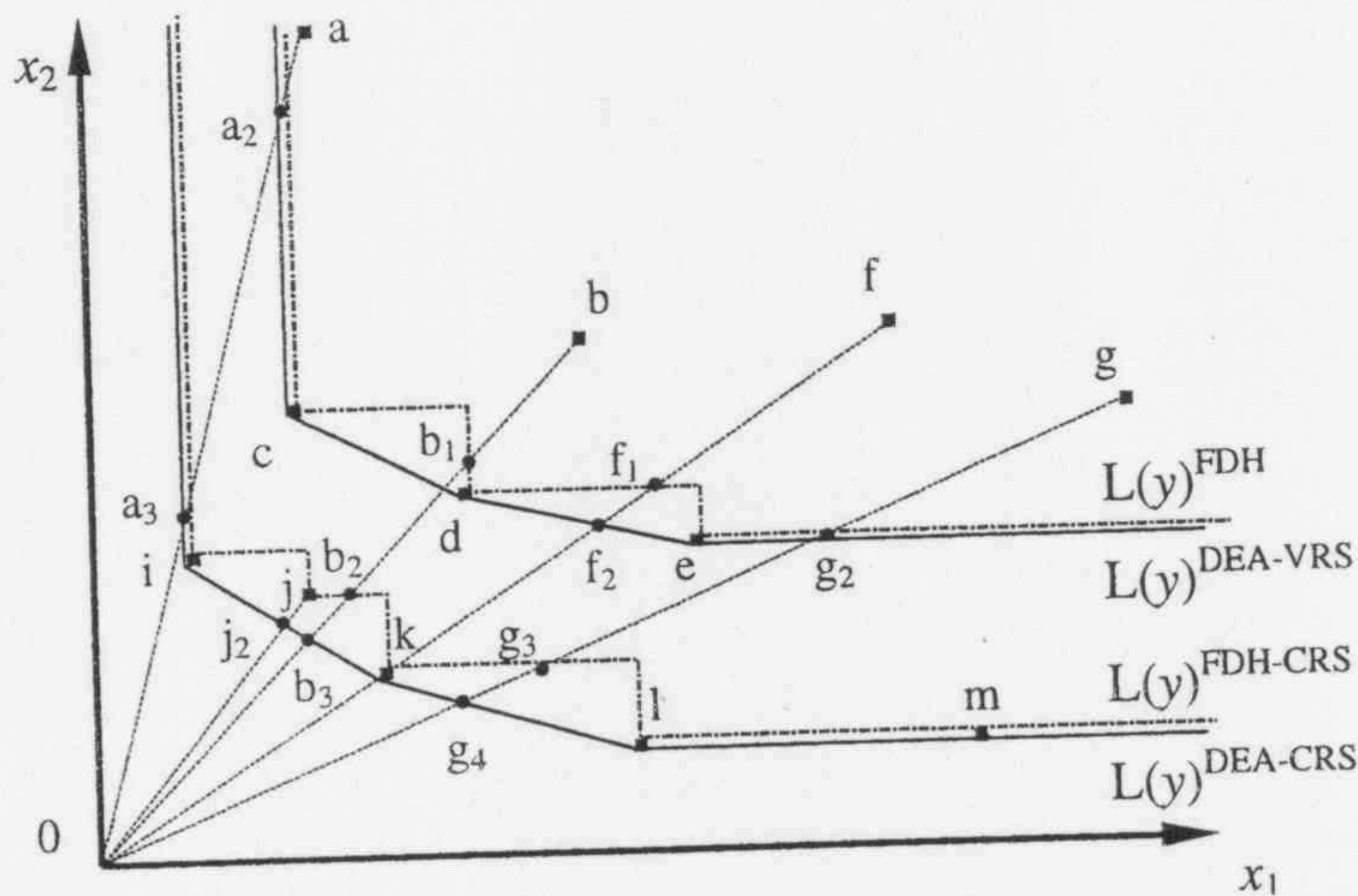


Figure 4.5. Lien entre les décompositions convexe et non convexe par le terme CRE

La différence essentielle entre les deux décompositions est aisément illustrée sur la figure 4.5. Premièrement, l'efficacité technique globale non convexe ne peut pas être plus petite car la technologie $L(y)^{FDH-CRS}$ est imbriquée dans $L(y)^{DEA-CRS}$. Par exemple, le ratio $0b_3/0b$ évalué sur $L(y)^{DEA-CRS}$ est plus petit que le ratio $0b_2/0b$ par rapport à $L(y)^{FDH-CRS}$. Le même constat s'applique pour les composantes de l'efficacité technique. Deuxièmement, le score d'inefficacité d'échelle peut se réduire ou s'accroître, selon les

données. Ceci trouve illustration en comparant les points f et g. Pour f, le terme SCE augmente avec la convexité (le ratio $0k/0f_2 \geq 0k/0f_1$), l'inverse est vrai pour g (ratio convexe $0g_4/0g_2 \leq$ ratio non convexe $0g_3/0g_2$). Troisièmement, le terme CRE est 1 pour deux types d'observations : (i) une observation inefficace (par exemple, le point a) qui est projetée sur le plan parallèle aux axes, (ii) une observation efficace qui est membre de ces plans parallèles aux axes (observation m), ou qui fait part des frontières FDH et DEA simultanément (observation k). Dans les autres cas, le terme CRE est plus petit que 1.

4.3. Calcul des décompositions convexe et non convexe

4.3.1. Le calcul de l'efficacité technique et d'échelle sur les technologies convexes et non convexes

Le calcul de l'efficacité sur les modèles DEA demande la résolution de programmes linéaires (LP) pour chacune des observations (x^o, y^o) sous évaluation (voir [FÄR 94]). Nous présentons à nouveau ces formulations afin de faciliter les comparaisons ultérieures. L'efficacité radiale en input calculée sur $GR^{DEA-CRS}$, $GR^{DEA-VRS}$, $GR^{DEA-NIRS}$, et $GR^{DEA-NDRS}$ demande la résolution pour chaque observation (x^o, y^o) du LP suivant :

$$\begin{aligned} DF_i(x, y) = \min_{\lambda, z} \quad & \lambda \\ \text{s.c.q.} \quad & \sum_{k=1}^K y_{km} z_k \geq y_{km}^o, \quad m = 1, \dots, M, \\ & \sum_{k=1}^K x_{kn} z_k \leq \lambda x_{kn}^o, \quad n = 1, \dots, N, \\ & \lambda \geq 0, z_k \in \Gamma(s), \quad k = 1, \dots, K, \\ \text{ou} \quad (i) \quad & \Gamma(s) = \{z_k: z_k \geq 0\} \quad \text{si } s = \text{DEA - CRS}; \\ (ii) \quad & \Gamma(s) = \{z_k: \sum_{k=1}^K z_k = 1, z_k \geq 0\} \quad \text{si } s = \text{DEA - VRS}; \\ (iii) \quad & \Gamma(s) = \{z_k: \sum_{k=1}^K z_k \leq 1, z_k \geq 0\} \quad \text{si } s = \text{DEA - NIRS}; \\ (iv) \quad & \Gamma(s) = \{z_k: \sum_{k=1}^K z_k \geq 1, z_k \geq 0\} \quad \text{si } s = \text{DEA - NDRS}. \end{aligned}$$

Pour les technologies non convexes, par contre, la résolution du problème passe par la programmation linéaire en entier. Cette section montre qu'il est possible d'utiliser des algorithmes d'énumération complète. L'efficacité en input est calculée

par rapport à $\text{GR}^{\text{FDH-CRS}}$, GR^{FDH} , $\text{GR}^{\text{FDH-NIRS}}$, et $\text{GR}^{\text{FDH-NDRS}}$ en résolvant pour chaque observation (x^o, y^o) le programme non linéaire en entier suivant :

$$\begin{aligned} \text{DF}_i(x, y) &= \underset{\lambda, z, \delta}{\text{Min}} \quad \lambda \\ \text{s.c.q.} \quad & \sum_{k=1}^K y_{km} \delta z_k \geq y_{km}^o, \quad m = 1, \dots, M, \\ & \sum_{k=1}^K x_{kn} \delta z_k \leq \lambda x_{kn}^o, \quad n = 1, \dots, N, \\ & \sum_{k=1}^K z_k = 1, \\ & z_k \in \{0, 1\}, \\ & \delta \in \Gamma(s), \\ & \lambda \geq 0, z_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

- ou (i) $\Gamma(s) = \{\delta: 0 < \delta\}$ si $s = \text{FDH-CRS}$;
(ii) $\Gamma(s) = \{\delta: \delta = 1\}$ si $s = \text{FDH}$;
(iii) $\Gamma(s) = \{\delta: 0 < \delta \leq 1\}$ si $s = \text{FDH-NIRS}$;
(iv) $\Gamma(s) = \{\delta: 1 \leq \delta\}$ si $s = \text{FDH-NDRS}$.

Ce problème est non linéaire et de plus il contient des restrictions en entier. Il peut être résolu par une simple comparaison de vecteurs basée sur un algorithme d'énumération complète. Cet algorithme destiné à résoudre l'efficacité radiale sur ces technologies non convexes est similaire à celui décrit précédemment dans la littérature (voir [TUL 93]).

Dans un premier temps, un nouvel ensemble d'observations dominantes est défini. Cet ensemble permet une mise à l'échelle de l'observation selon l'hypothèse de rendements d'échelle choisie. Le vecteur de comparaison de dominance tient compte de la possibilité de mettre à l'échelle les observations selon un intervalle donné. Par simplicité, ce vecteur est appelé ensemble supérieur mis à l'échelle (SVD pour "Scaled Vector Dominance"). Le SVD de l'observation (x^o, y^o) est donc :

$$\begin{aligned} B(x^o, y^o|s) &= \{(x_k, y_k): \delta x_k \leq x^o, \delta y_k \geq y^o, \delta \in \Gamma(s)\}, \\ \text{ou (i)} \quad & \Gamma(s) = \{\delta: 0 < \delta\} \text{ si } s = \text{FDH-CRS}; \\ & \text{(ii)} \quad \Gamma(s) = \{\delta: \delta = 1\} \text{ si } s = \text{FDH}; \\ & \text{(iii)} \quad \Gamma(s) = \{\delta: 0 < \delta \leq 1\} \text{ si } s = \text{FDH-NIRS}; \\ & \text{(iv)} \quad \Gamma(s) = \{\delta: \delta \geq 1\} \text{ si } s = \text{FDH-NDRS}. \end{aligned}$$

Dans une seconde étape, la mesure d'efficacité en input est calculée compte tenu de la connaissance de paramètre d'échelle. Il n'est pas nécessaire de tester toutes les valeurs de ce paramètre d'échelle (δ). En effet, pour toute observation évaluée, il est

seulement nécessaire de définir les valeurs limites pour le paramètre d'échelle selon les hypothèses retenues pour l'orientation et l'échelle.

La valeur limite pour le paramètre d'échelle pour une mesure d'efficacité en input (δ^I) est définie comme suit :

$$\delta^I = \underset{m=1, \dots, M}{\text{Min}} \left(\frac{y_{km}^o}{y_{km}} \right).$$

Si cette valeur limite se trouve entre les bornes supérieures et inférieures liées aux hypothèses choisies, alors l'observation remise à l'échelle est membre du SVD, sinon elle n'est pas un élément de cet ensemble :

$$\begin{aligned} \text{Si } \delta^I \in \Gamma(s), \text{ alors } (x_k, y_k) &\in B(x^o, y^o|s); \\ \text{sinon } (x_k, y_k) &\notin B(x^o, y^o|s). \end{aligned}$$

Proposition

La mesure radiale d'efficacité en input est calculée comme suit :

$$\text{DF}_i(x^o, y^o) = \underset{(x_k, y_k) \in B(x^o, y^o|s)}{\text{Min}} \underset{n=1, \dots, N}{\text{Max}} \left(\frac{\delta^I x_{kn}}{x_{kn}^o} \right).$$

La démonstration de cette procédure, basée sur le vecteur de dominance, se trouve dans l'appendice. Les preuves associées aux autres orientations sont basées sur le même principe.

FDH est simplement un cas particulier où la mise à l'échelle n'est pas permise. Dès lors, le paramètre d'échelle (δ) est fixé à 1. Ceci nous donne le FDH traditionnel exprimé sous la forme d'un problème de programme linéaire en entier. Comme présenté dans [TUL 93] (voir aussi [DEB 98] et [LOV 95]), ce problème se solutionne en deux étapes en utilisant l'algorithme d'énumération complète. Pour la première étape, une procédure basée sur le vecteur de dominance détermine pour chaque observation l'ensemble des observations dominantes, dans une seconde étape la mesure d'efficacité est calculée par application directe de la définition ci-dessus :

- (i) Pour chaque observation (x^o, y^o) évaluée, on définit un ensemble supérieur $B(x^o, y^o)$ qui contient les observations qui dominent faiblement (x^o, y^o) :

$$B(x^o, y^o) = \{(x_k, y_k): x_k \leq x^o, y_k \geq y^o\}.$$

- (ii) Calculer la mesure d'efficacité en input en utilisant l'algorithme suivant :

$$\text{DF}_i(x^o, y^o) = \underset{(x_k, y_k) \in B(x^o, y^o)}{\text{Min}} \underset{n=1, \dots, N}{\text{Max}} \left(\frac{x_{kn}}{x_{kn}^o} \right).$$

Ceci s'inscrit dans l'algorithme dérivé ci-dessus pour la famille des technologies de type FDH.

4.3.2. Identification des rendements d'échelle

Il est possible d'identifier les rendements d'échelle des observations individuelles. Pour les observations situées sur la frontière ou dans l'ensemble des possibilités de production, il est possible d'obtenir de l'information sur la nature des rendements d'échelle locaux. Pour une observation inefficace, cette caractérisation des rendements d'échelle dépend naturellement de l'orientation choisie pour la mesure de l'efficacité. Trois méthodes équivalentes ont été utilisées à ce jour pour l'évaluation des rendements d'échelle avec les technologies DEA (voir [BAN 96]) :

- la somme du vecteur d'activité sur un modèle à rendements d'échelle constants,
- l'analyse de la coordonnée à l'origine de plans calculés sur base d'une technologie à rendements d'échelle variables,
- et finalement la comparaison des mesures d'efficacité imbriquées sous les hypothèses de rendements constants, non croissants et variables.

Cependant, ces méthodes ne s'appliquent pas dans le cadre des technologies non convexes proposées ci-dessus.⁹

Dès lors, une nouvelle méthode basée sur le critère de la qualité d'ajustement (“goodness of fit”) a été proposée. Cette méthode repose sur le critère de la qualité d'ajustement. L'hypothèse de rendements d'échelle qui enveloppe au mieux un point est celle qui est considérée (voir [KER 99]). Pratiquement, l'efficacité technique est calculée sur base de trois technologies différentes qui imposent des rendements d'échelle constants, non croissants et non décroissants. Comme ces trois technologies ne sont pas imbriquées l'une dans l'autre, il est possible d'identifier l'hypothèse de rendements d'échelle pour chaque observation. Il suffit en effet d'identifier la technologie qui assigne la mesure d'efficacité la plus élevée pour une observation donnée. Cette technologie est donc l'hypothèse de rendements d'échelle qui enveloppe au mieux ce point. Cette nouvelle procédure est plus générale que les méthodes précédentes.

L'usage des technologies NIRS et NDRS n'est pas limité à l'obtention d'information sur les économies d'échelles locales, il est également possible d'utiliser ces technologies pour identifier l'impact de l'hypothèse de la convexité. En effet, toutes différences entre mesures d'efficacité évaluée sur base d'une même hypothèse

de rendements d'échelle mais par rapport à des technologies convexes et non convexes sont complètement imputables à l'hypothèse de la convexité. Ainsi, en plus de la CRE calculée par rapport à deux technologies de type CRS, il est possible de comparer deux technologies NIRS (ou NDRS) : l'une convexe et l'autre non convexe. Ces comparaisons nous procurent une méthode simple pour appréhender l'impact de l'hypothèse de la convexité conditionnellement à une hypothèse de rendements d'échelle.

4.4. Illustration empirique : le contraste entre les décompositions OTE convexe et non convexe

Cette section duplique partiellement des résultats antérieurs et ceci afin de contraster les décompositions OTE obtenue sur base de technologies convexes avec nos résultats sur base de technologies non convexes. Notre choix de l'application empirique s'est porté sur l'article de [THA 87] car les données y sont mentionnées.¹⁰

[THA 87] examinent les performances relatives de 62 bureaux municipaux de collectes de taxes locales en Angleterre et ceci pour l'année fiscale 1982/1983. Plus spécifiquement, les bureaux de Londres et sa banlieue (“London Boroughs and Metropolitan District Councils”) sont évalués. Les données sont composées de quatre outputs : le nombre de taxes extérieures perçues, le nombre de réductions de taxes accordées, le nombre de rappels, et la valeur nette des taxes extérieures collectées. Pour l'input, on ne dispose pas de détails. Les ressources sont représentées par les dépenses totales. Les résultats publiés sont basés sur l'efficacité radiale en input sur base d'un modèle DEA de type CRS. Le tableau 4.1 résume les statistiques descriptives.

Ces résultats, par suite de l'utilisation des coûts pour calculer l'efficacité d'échelle, ne sont pas identiques à ceux que l'on obtiendrait avec des quantités d'inputs si elles se révélaient disponibles. [FÄR 85a] montrent que les approches duales et primales de mesure de l'efficacité d'échelle coïncident si (i) toutes les entités sont confrontées au même vecteur de prix, et (ii) l'efficacité allocative est identique avec des mesures calculées sur base de technologies basées des rendements d'échelle constants et variables.

9. La valeur optimale du paramètre d'échelle δ n'est pas informative concernant les rendements d'échelle. Il s'agit seulement d'un instrument pour l'élaboration de la frontière.

10. En fait, les données ont été publiées comme Annexe 2 dans [DYS 88].

	Coût total de la collecte	Taxes extérieures perçues	Déductions de taxes accordées	Rappels	Taxes collectées
	Input	Output 1	Output 2	Output 3	Output 4
Moyenne	10,45	8,81	29,41	13,33	6,41
Ecart-type	6,21	4,50	23,54	9,38	5,57
Minimum	4,86	1,78	0,16	1,31	1,84
Maximum	50,26	32,33	150,00	54,22	39,01

Tableau 4.1. Statistiques descriptives des données

Dans notre analyse, les résultats sont calculés sur base de l'orientation output. Dans les tableaux proposés ci-après, les résultats de la décomposition convexe de l'efficacité technique globale sont présentés en parallèle avec la nouvelle décomposition non convexe. Les descriptions statistiques des résultats des décompositions convexe et non convexe sont présentées au tableau 4.2. Afin de respecter la nature multiplicative de la décomposition, les moyennes géométriques sont utilisées. Il est évident que les sources de l'inefficacité diffèrent de manière nette pour les deux méthodes. Les distributions de fréquence pour les décompositions sont illustrées à la figure 4.6 (a et b).

	Décomposition non convexe				Décomposition convexe		
	TE	SCE	OTE	CRE	TE	SCE	OTE
Moyenne*	0,9041	0,8588	0,7764	0,8672	0,8167	0,8244	0,6733
Ecart-type	0,1367	0,1223	0,1764	0,1192	0,1840	0,1586	0,1870
Minimum	0,4796	0,5792	0,3975	0,5744	0,4249	0,3280	0,3280
Maximum	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
# Obs. eff.	39	15	15	14	13	7	7

* Moyennes géométriques

Tableau 4.2. Résultats des décompositions convexe et non convexe

Premièrement, pour le cas convexe les moyennes de TE et SCE sont environ égales tandis que pour la décomposition non convexe TE est en moyenne plus élevée que SCE. Deuxièmement, afin de rendre les décompositions comparables, une composante liée à la convexité a été ajoutée. CRE relie OTE sous les deux décompositions : ainsi, l'identité $0,7764 \cdot 0,8672 = 0,6733$ se vérifie sous les moyennes géométriques. De fait que le terme OTE est en moyenne différent sous les deux décompositions, on peut en déduire que la convexité joue un rôle important pour expliquer l'inefficacité dans cet exemple. Ainsi, le terme CRE représente 13 % en moyenne. Etant donné une efficacité

moyenne de 0,6733 pour le terme OTE convexe, ceci signifie que presque la moitié de l'inefficacité mesurée (13 % de 33 %) peut être attribuée à l'hypothèse de la convexité.

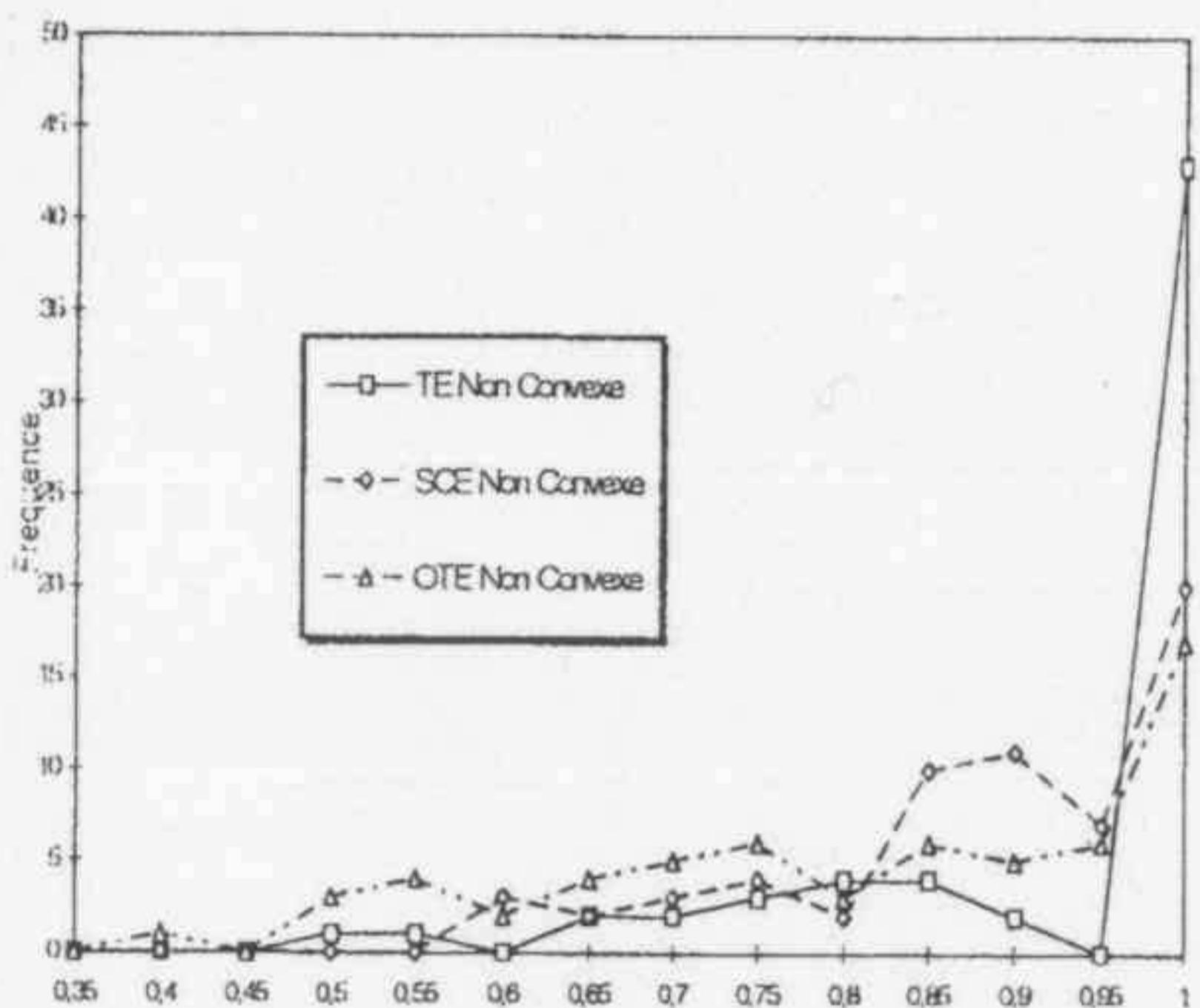


Figure 4.6a. Distribution de fréquence des décompositions OTE non convexe

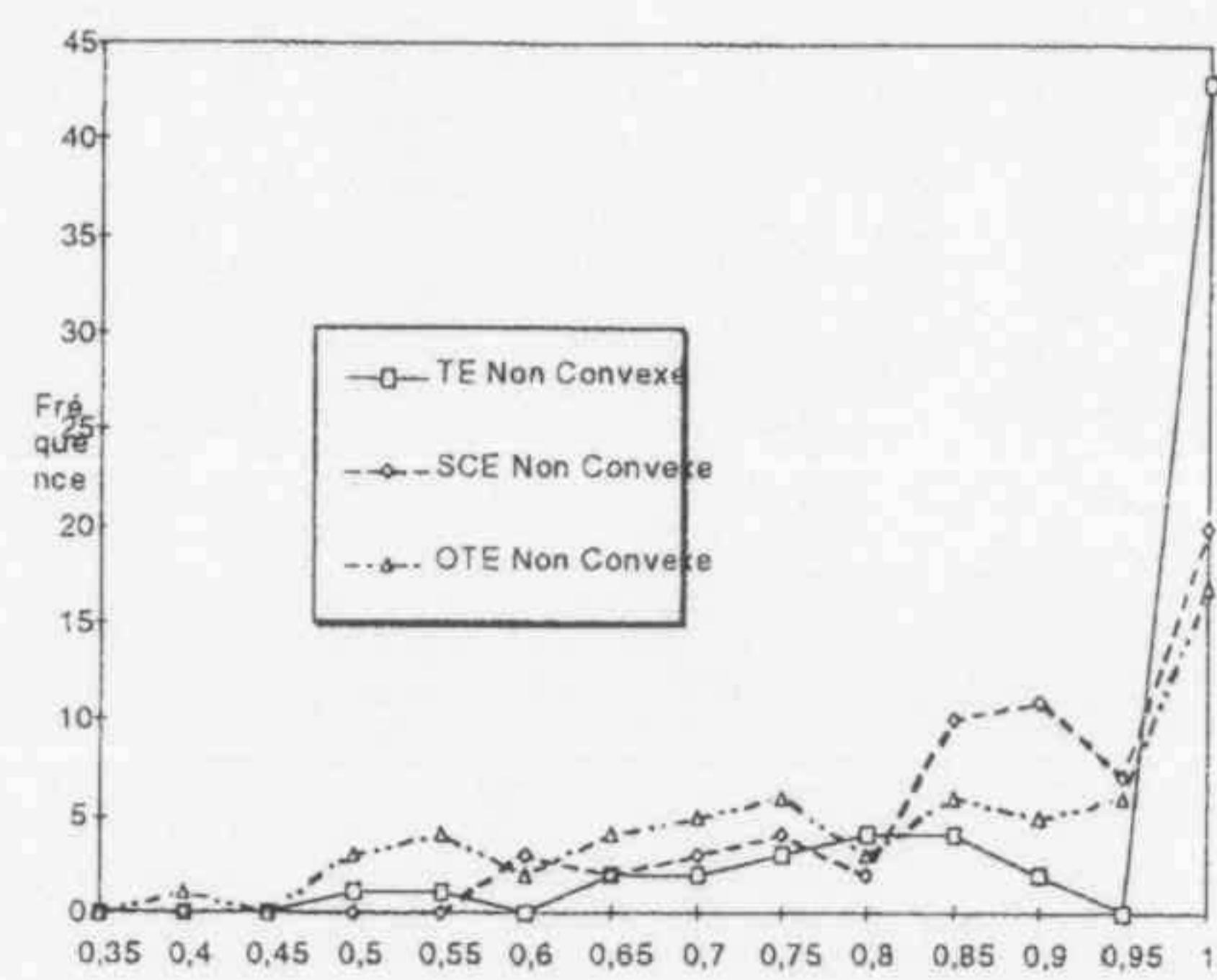


Figure 4.6b. Distribution de fréquence des décompositions OTE convexe

De simples tests statistiques indiquent que les distributions des décompositions convexe et non convexe sont significativement différentes. Plus spécifiquement, l'utilisation d'un t-test par paires pour la moyenne de l'échantillon révèle que l'efficacité technique (TE), technique globale (OTE), et d'échelle (SCE) ont des distributions différentes. Il faut également mentionner que la composante d'échelle des deux décompositions ne peut pas être ordonnée.

La dernière ligne du tableau 4.2 indique le nombre d'observations efficaces pour chaque composante. Le nombre d'unités techniquement efficaces double presque ou même triple pour le cas non convexe. En termes relatifs, environ 63 % des observations sont techniquement efficaces pour FDH. Le nombre d'observations efficaces pour les composantes technique et d'échelle est aussi doublé si on compare ces deux décompositions. Ce nombre est seulement de 11 % des observations pour la décomposition convexe. Enfin, pour 14 observations, l'hypothèse de convexité ne change pas l'évaluation de l'efficacité technique globale.

Comme déjà mentionné, l'impact de la convexité peut s'évaluer de deux autres manières : soit en comparant les technologies NIRS convexe et non convexe ; soit encore en comparant les technologies NDRS convexe et non convexe. Ceci nous donne des informations complémentaires sur l'impact précis de l'hypothèse de la convexité. Il est important de dire que les comparaisons entre les technologies FDH et DEA de type VRS, courantes dans la littérature, ne sont pas adaptées pour capturer l'impact de la convexité. En effet, ces résultats combinent les différences liées aux rendements d'échelle et la convexité.

Les résultats présentés au tableau 4.3 dupliquent afin de faciliter la lecture, les résultats CRE du tableau 4.2. En moyenne, entre 12 % et 16 % de l'inefficacité mesurée est attribuable uniquement à l'hypothèse de la convexité. Manifestement, l'impact de la convexité est lié d'une certaine manière aux hypothèses liées aux rendements d'échelle.

	NDRS	CRS	NIRS
Moyennes*	0,8386	0,8672	0,8764
Ecart-type	0,1219	0,1192	0,1137
Minimum	0,5772	0,5744	0,5684
Maximum	1,0000	1,0000	1,0000
# Obs. eff.	13	14	14

* Moyennes géométriques

Tableau 4.3. Effet de l'hypothèse de la convexité : une analyse détaillée

Pour étudier les effets sur le classement des observations individuelles, le calcul des corrélations entre les composantes de chaque décomposition a été effectué. Ces corrélations sont indiquées au tableau 4.4. Pour les composantes de l'efficacité technique globale, le classement est très similaire. Cependant, il y a des divergences pour la composante technique et de manière plus nette pour la composante d'échelle. Ceci implique que les technologies convexes et non convexes peuvent conduire à des classements différents des organisations.

	TE	SCE	OTE
Corrélations	0,7172	0,3988	0,8285

Tableau 4.4. Corrélations entre les composantes des décompositions de type convexe et non convexe

Ensuite, il est important de vérifier s'il y a des différences substantielles dans la détermination des rendements d'échelle pour les observations individuelles. Le tableau 4.5 résume les résultats par décomposition et le tableau 4.6 présente les résultats entre les décompositions.

Technologies	IRS	CRS	DRS
FDH	31	15	16
DEA	35	7	20

Tableau 4.5. Rendements d'échelle par technologies

Au départ du tableau 4.5, il est clair que DEA projette la grande majorité des observations sur la partie à rendements croissants de la technologie, tandis que la distribution des observations sur les trois catégories est plus équilibrée pour le cas FDH. Cependant, il est évident que les organisations évaluées sont de trop petites tailles.

Non Convexe	Convexe		
	IRS	CRS	DRS
IRS	26	0	5
CRS	5	7	3
DRS	4	0	12

Tableau 4.6. Rendements d'échelle entre technologies

En comparant les résultats entre les décompositions proposées au tableau 4.6. On observe sur la diagonale principale les accords entre FDH et DEA tandis que les éléments en dehors de cette diagonale révèlent les différences entre les classifications. Ces différences sont significatives car, par exemple, 4 observations passent de la classification DRS pour une technologie non convexe à une classification IRS pour les technologies convexes, tandis que 5 observations se retrouvent dans la situation inverse.

4.5. Conclusions et perspectives futures

Au départ d'un modèle de production non convexe (FDH), nous proposons plusieurs modèles de production alternatifs. En particulier, nous faisons de nouvelles hypothèses concernant les rendements d'échelle de ces modèles. Ces modèles rendent possible une décomposition de l'efficacité technique similaire à celle proposée pour les modèles DEA. Les relations formelles entre les composantes technique et d'échelle des décompositions convexe et non convexe ont été analysées. La partie empirique de ce papier utilise un échantillon de la collecte des taxes locales anglaises pour explorer en détail les similitudes et les différences entre les deux décompositions. La conclusion essentielle de cette analyse est que l'identification des sources d'inefficacité varie fortement selon les hypothèses concernant les rendements d'échelle.

Deux extensions méthodologiques devraient faire l'objet de futures recherches.

Premièrement, l'application de cette décomposition à la mesure de la productivité. Si l'on dispose de données en panel, il est évident qu'il est possible d'intégrer cette nouvelle décomposition dans l'analyse dynamique des changements

de productivité. Par analogie avec la décomposition de la composante de l'efficacité technique de l'indice de productivité Malmquist (voir [FÄR 94]), cette nouvelle décomposition s'avère également pertinente pour les indices de productivité basés sur FDH et proposés par [TUL 95].

Deuxièmement, la présence de variables d'écart et l'usage possible pour la décomposition de la mesure non radiale ont été négligés dans la littérature. Cette mesure non radiale est particulièrement utile en présence de variables d'écart, ce qui est implicite avec la technologie FDH [DEB 96], car elle respecte la définition d'efficacité technique de [KOO 51].

Appendice : Preuve de la proposition :

Les premières contraintes m des dimensions output peuvent être réécrites comme :

$$\begin{aligned}\delta^l &\geq \frac{y_{km}^o}{\sum_{k=1}^K y_{km} z_k}, \quad m = 1, \dots, M. \\ &\geq \max_{m=1, \dots, M} \left(\frac{y_{km}^o}{y_{km}} \right) = \min_{m=1, \dots, M} \left(\frac{y_{km}}{y_{km}^o} \right).\end{aligned}$$

Ceci peut se réécrire sous la forme d'égalités, comme explicité ci-dessous.

La deuxième série de n contraintes en input est :

$$\begin{aligned}\lambda &\geq \frac{\sum_{k=1}^K x_{kn} z_k}{x_{kn}^o} \delta^l, \quad n = 1, \dots, N \\ &\geq \max_{n=1, \dots, N} \left(\frac{x_{kn}}{x_{kn}^o} \right) \delta^l.\end{aligned}$$

Cette expression peut se réécrire à nouveau comme une égalité, car à l'optimum au moins une de ces contraintes est liante.

Le premier ensemble de contraintes détermine la valeur limite du paramètre d'échelle. Si cette valeur critique se trouve entre les bornes inférieures et supérieures liées aux hypothèses de rendements d'échelle posées alors cette observation mise à l'échelle est membre de l'ensemble des observations supérieures mises à l'échelle, sinon cette observation n'en sera pas membre :

$$\begin{aligned}\text{Si } \delta^l \in \Gamma(s), \text{ alors } (x_k, y_k) \in B(x^o, y^o | s); \\ \text{sinon } (x_k, y_k) \notin B(x^o, y^o | s).\end{aligned}$$

De manière claire, le premier ensemble de contraintes détermine le paramètre d'échelle qui doit être substitué dans le deuxième ensemble de contraintes.

La minimisation sur toutes les observations dans l'ensemble supérieur mis à l'échelle correspond à la fonction objectif initiale et respecte les contraintes en entier sur z_i (la troisième et la quatrième contrainte dans le programme proposé ci-dessus). Dès lors, $DF_i(x, y)$ est calculé comme :

$$\begin{aligned}\lambda = DF_i(x^o, y^o) &= \min_{(x_k, y_k) \in B(x^o, y^o | s)} \max_{n=1, \dots, N} \left(\frac{x_{kn}}{x_{kn}^o} \left(\min_{m=1, \dots, M} \left(\frac{y_{km}}{y_{km}^o} \right) \right) \right) \\ &= \min_{(x_k, y_k) \in B(x^o, y^o | s)} \max_{n=1, \dots, N} \left(\frac{\delta^l x_{kn}}{x_{kn}^o} \right).\end{aligned}$$

Le premier ensemble de contraintes qui détermine le paramètre d'échelle peut être réécrit comme une égalité afin de garantir l'optimalité de la solution de la fonction objectif. Toutes les autres solutions seraient plus élevées et donc non optimales.

Remerciement

Nous remercions B. Dervaux, H. Leleu et H. Tulkens pour leurs commentaires. Nous assumons l'entièvre responsabilité des erreurs éventuelles de ce manuscrit.

- Belges de Langue Française*, Centre Interuniversitaire de Formation Permanente (CIFOP), Charleroi.
- [VAN 93] Vanden Eeckaut P., Tulkens H. et Jamar M-A., 1993, "A study of Cost Efficiency and Returns to Scale for 235 Municipalities in Belgium", chapter 12 (pp. 300-334) in Fried H., Lovell C.K. et S. Schmidt (eds), *The Measurement of Productive Efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press.
- [VAN 97] Vanden Eeckaut P., 1997, Free Disposal Hull and Measurement of Efficiency : Theory, Applications and Software, Thèse de doctorat en Sciences économiques, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences Economiques, Sociales et Politiques, Nouvelle série n° 299, CIACO, Louvain-la-Neuve.

Bibliographie du chapitre 4

- [BAN 84] Banker R., Charnes A., Cooper W., « Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis », *Management Science*, 30(9), pp. 1078-1092, 1984.
- [BAN 96] Banker R., Chang H., Cooper W., « Equivalence and Implementation of Alternative Methods for Determining Returns to Scale in Data Envelopment Analysis », *European Journal of Operational Research*, 89(3), pp. 473-481, 1996.
- [BOG 96] Bogetoft P., « DEA on Relaxed Convexity Assumptions », *Management Science*, 42(3), pp. 457-465, 1996.
- [DEB 96] De Borger B., Kerstens K., « Radial and Nonradial Measures of Technical Efficiency : An Empirical Illustration for Belgian Local Governments using an FDH Reference Technology », *Journal of Productivity Analysis*, 7(1), pp. 41-62, 1996.
- [DEB 98] De Borger B., Ferrier G., Kerstens K., « The Choice of a Technical Efficiency Measure on the Free Disposal Hull Reference Technology : A Comparison using US Banking Data », *European Journal of Operational Research*, 105(3), pp. 427-446, 1998.
- [DEP 83] Deprins D., Simar L., « On Farrell Measures of Technical Efficiency », *Recherches Économiques de Louvain*, 49(2), pp. 123-137, 1983.
- [DEP 84] Deprins D., Simar L., Tulkens H., « Measuring Labor-Efficiency in Post Offices », in Marchand M., Pestieau P., Tulkens H. (eds) *The Performance of Public Enterprises : Concepts and Measurement*, Amsterdam, Elsevier, pp. 243-267, 1984.
- [DYS 88] Dyson R., Thanassoulis E., « Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis », *Journal of the Operational Research Society*, 39(6), pp. 563-576, 1988.
- [FAR 57] Farrell M., « The Measurement of Productive Efficiency », *Journal of the Royal Statistical Society Series A : General*, 120(3), pp. 253-281, 1957.
- [FÄR 78] Färe R., Lovell C.A.K., « Measuring the Technical Efficiency of Production », *Journal of Economic Theory*, 19(1), pp. 150-162, 1978.
- [FÄR 83] Färe R., Grosskopf S., Lovell C.A.K., « The Structure of Technical Efficiency », *Scandinavian Journal of Economics*, 85(2), pp. 181-190, 1983.
- [FÄR 85a] Färe R., Grosskopf S., « A Nonparametric Cost Approach to Scale Efficiency », *Scandinavian Journal of Economics*, 87(4), pp. 594-604, 1985.
- [FÄR 85b] Färe R., Grosskopf S., Lovell C.A.K., *The Measurement of Efficiency of Production*, Boston, Kluwer, 1985.
- [FÄR 94] Färe R., Grosskopf S., Lovell C.A.K., *Production Frontiers*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1994.

- [FOR 79] Forsund F., Hjalmarsson L., « Generalised Farrell Measures of Efficiency : An Application to Milk Processing in Swedish Dairy Plants », *Economic Journal*, 89(354), pp. 294-315, 1979.
- [KER 99] Kerstens, K., Vanden Eeckaut P., « Estimating Returns to Scale Using Nonparametric Deterministic Technologies : A New Method Based on Goodness-of-Fit », *European Journal of Operational Research*, 113 (1), pp. 206-214, 1999.
- [KOO 51] Koopmans T., « Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities », in Koopmans T. (ed) *Activity Analysis of Production and Allocation*, New Haven, Yale Univ. Press, pp. 33-97, 1951.
- [LOV 93] Lovell C.A.K., « Production Frontiers and Productive Efficiency », in Fried H., Lovell C.A.K., Schmidt S. (eds) *The Measurement of Productive Efficiency : Techniques and Applications*, Oxford, Oxford Univ. Press, pp. 3-67, 1993.
- [LOV 95] Lovell C.A.K., « Measuring the Macroeconomic Performance of the Taiwanese Economy », *International Journal of Production Economics*, 39(1), pp. 165-178, 1995.
- [THA 87] Thanassoulis E., Dyson R., Foster M., « Relative Efficiency Assessments Using Data Envelopment Analysis : An Application to Data on Rates Departments », *Journal of the Operational Research Society*, 38(5), pp. 379-411, 1987.
- [TUL 93] Tulkens H., « On FDH Efficiency Analysis : Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit », *Journal of Productivity Analysis*, 4(1-2), pp. 183-210, 1993.
- [TUL 95] Tulkens H., Vanden Eeckaut P., « Non-parametric Efficiency, Progress and Regress Measures for Panel Data : Methodological Aspects », *European Journal of Operational Research*, 80(3), pp. 474-499, 1995.

Bibliographie du chapitre 5

- [ALI 90] Ali A.I., Lerme C.S., « Data Envelopment Analysis Models: A Framework », *Working Paper*, School of Management, University of Massachusetts at Amherst.
- [ALI 93] Ali I. et Seiford, L.M., « The mathematical programming approach to efficiency analysis », in *The measurement of productive efficiency: Techniques and Applications*, Fried, H.O., Lovell, C.A.K. and Schmidt, S.S. Editors, Oxford University Press, New York, 1993.
- [ALY 90] Aly H.Y., Grabowski R., Pasurka C., Rangan N., « Technical, Scale, and Allocative Efficiencies in U.S. Banking: An Empirical Investigation », in *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 72, 1990, pp. 211-218.
- [AVO 94] Avouyi-Dovi S., Boutillier M., « Production et Productivité dans les Banques : L'Exemple des Banques Allemandes et Françaises », Caisse des Dépôts et Consignations, 1994/03F, 1994.
- [AVO 97] Avouyi-Dovi S., Boutillier M., « Une Introduction à l'Etude de la Rentabilité des Etablissements de Crédit en France », *Revue d'Economie Financière*, 1997.
- [BAD 94] Badillo P.-Y., « Les productivités des opérateurs de télécommunications », Communication à la XLème Conférence Internationale, Applied Econometrics Association, Osaka, Japon, 24 et 25 mars 1994.
- [BAD 96a] Badillo P.-Y., Geffroy B., Verlynde T., « Productivité et Positionnement Stratégique des Opérateurs de Télécommunications », *Bulletin de l'IREST*, n° 74, mars 1996, pp. 3-10