多项式全家桶

Xedokal

CUHK(SZ)

2021 年 11 月 29 日

系数表示法

$f(x)$ 可以表示成 $\sum\limits_{i=0}^{n} f_i x^i$ 这一形式，其中 n 被称作 $f(x)$ 的度数，f_i 可被表示成为 $[x^i]f(x)$，称为 x 的 i 次方项的系数。

点值表示法

一个度数为 n 的多项式可以用 n 个点值 $(x_0, f(x_0)), (x_2, f(x_2))...(x_n, f(x_n))$ 表示，（在之后会学到的）拉格朗日插值法告诉我们可以通过点值变换得到系数表示法

多项式加减法

$$f(x) \pm g(x) = (\sum_{i=0}^{n} f_i x^i) \pm (\sum_{i=0}^{m} g_i x^i) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} ([i \le n] f_i \pm [i \le m] g_i) x^i$$

时间复杂度 $O(\max(n, m))$

多项式乘法

$$h(x) = f(x) * g(x) = (\sum_{i=0}^{n} f_i x^i) * (\sum_{i=0}^{m} g_i x^i)$$

$$h_i = \sum_{j=0}^{i} [j \leq n] f_j * [(i-j) \leq m] g_{i-j}$$

我们发现$h(x)$度数为$n+m$,直接计算复杂度为$O(nm)$

利用点值的形式优化

考虑到有等式 $h(x_0) = f(x_0) * g(x_0)$，这告诉我们如果得到了 f, g 的点值表示，即 $(x_0, f(x_0))...(x_{n+m}, f(x_{n+m}))$ 和 $(x_0, g(x_0))...(x_{n+m}, g(x_{n+m}))$ 我们可以在 $O(n+m)$ 的时间里计算出 $(x_0, h(x_0))...(x_{n+m}, h_{n+m})$ 得到 $h(x)$ 的点值表示法，再还原其系数表示法。

为此，选择性质优良的 x_i 是非常重要的

单位根

考虑方程 $x^n=1$，这个方程在复数域意义下存在 n 个解，对应的几何意义是复平面中单位圆 n 等分线与其交点，因此这 n 个点可以表示为 $\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, k=0,1...n-1$

不妨记 $\omega_n=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，那么 n 个解分别为 $\omega_n^0,\omega_n^1...\omega_n^{n-1}$

现有 $(\omega_n^i)^j=\omega_n^{ij}$ 且当 n 为偶数时存在如下引理:

$$\text{折半引理:}\omega_n^{2k}=\omega_{\frac{n}{2}}^k$$

$$\text{消去引理:}\omega_n^k=-\omega_n^{k+\frac{n}{2}}$$

系数-点值

现在考虑让 $\omega_n^0 ... \omega_n^{n-1}$ 来作为选取的 $x_0, x_1 ... x_{n-1}$
仍然假设 n 为偶数:

$$
\begin{aligned}
f(\omega_n^k) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{ki} f_i \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2ki} f_{2i} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2ki+1} f_{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{ki} f_{2i} + \omega_n \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{ki} f_{2i+1} \\
f(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{ki} f_{2i} - \omega_n \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{ki} f_{2i+1}
\end{aligned}
$$

这样一来，相当于重排 f_i 的位置，缩小了一半的问题规模，显然只会进行 $O(\log n)$ 次重排，单次的变换复杂度为 $O(n)$ 级别，总复杂度 $O(n \log n)$

点值-系数

系数-点值的转换可以写成线性变换的形式。

即现在要求对一个特殊的单位根矩阵求逆，这里直接给出结果并进行验证。

发现只需要对 ω_n 求逆之后再做一次上述变换，再对所有点值除以 n 就得到了系数表示法。

这样一来可以在 $O((n+m)\log(n+m))$ 的时间复杂度内解决多项式乘法。

一般实现的时候会配合小范围暴力，效果挺好。

多项式求导/积分

$$f'(x) = (\sum_{i=0}^{n} f_i x^i)' = \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1}(i+1)x^i$$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int (\sum_{i=0}^{n} f_i x^i)\ \mathrm{d}x = C + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{i-1}}{i} x^i$$

一般情况下取 $C = 0$

牛顿迭代

假设现在已知多项式 $f(x)$ 和函数 g, 要求满足 $f(x) \equiv g(h(x)) \mod x^n$ 的 $h(x)$
对于这种问题可以先等价于求函数 $H(x) = g(h(x)) - f(x)$ 在模 x^n 意义下的零点，然后考虑倍增。

假设我们已知 $g(h_0(x)) - f(x) \equiv 0 \mod x^{\frac{n}{2}}$，现在在模 x^n 意义下将 $H(h)$ 在 $h = h_0$ 处泰勒展开:

$$H(h - h_0) = \sum_{i \geq 0} H^{(i)}(h_0) * \frac{(h - h_0)^i}{i!}$$

由于在模 x^n 意义下求 h，那么可以预见 $h - h_0$ 的前 $\frac{n}{2}$ 均为 0，
这样实际上有 $H(h - h_0) \equiv H(h_0) + H'(h_0)(h - h_0) \equiv 0 \mod x^n$
那么 $h = h_0 - \frac{H(h_0)}{H'(h_0)}$
这样倍增的复杂度一般是 $O(n \log n)$ 级别。

多项式求逆

注意到 $H(h)=\frac{1}{h}-f$，那么带入刚刚推导的公式就有
$h=2h_0-h_0^2f$

直接倍增就好了

多项式 exp

注意到 $H(h) = \ln h - f$，那么带入刚刚推导的公式就有
$h = h_0(1 - \ln h_0 + f)$

直接倍增就... 等等，多项式 $\ln$???

多项式 ln

假设有 $g = \ln f$，两边对 x 求导有 $g' = \frac{f'}{f}$, 也就是

$$g = \int (\frac{f'}{f})\,\mathrm{d}x$$

多项式求导 + 求逆 + 积分

多项式除法/取余

假设已知 $A(x), B(x)$，度数分别为 n, m，现在求满足 $A(x) = B(x) * C(x) + D(x)$ 的 C, D，其中 C 的度数为 $n - m$，D 的度数可视作 $m - 1$

定义度数为 k 的多项式 $F(x)$ 的翻转为 $F_{rev}(x) = F(\frac{1}{x})x^k$

现有:

$$
\begin{aligned}
A(\frac{1}{x}) =& B(\frac{1}{x})C(\frac{1}{x}) + D(\frac{1}{x}) \\
x^n A(\frac{1}{x}) =& x^m B(\frac{1}{x})x^{n-m}C(\frac{1}{x}) + x^{m-1}D(\frac{1}{x}) * x^{n-m+1} \\
A_{rev}(x) \equiv& B_{rev}(x)C_{rev}(x) \mod x^{n-m+1}
\end{aligned}
$$

多项式求逆处理即可

多项式多点求值

模型: 快速计算 $f(x_1), f(x_2)...f(x_n)$

性质: 对于多项式 $f(x)$,$f(x_0) = f(x) \mod (x - x_0)$

稍加推广就有:

$$\begin{aligned} f(x_1) =& f(x) \mod (x - x_1) \\ =& (f(x) \mod (x - x_2)(x - x_1)) \mod (x - x_1) \end{aligned}$$

这启示我们对 $[1, n]$ 建立分治树，区间 $[l, r]$ 维护乘积 $\prod_{i=l}^{r}(x - x_i)$，

那么 $f(x)$ 从根依次取模到叶子即为点值，且每取模一次度数减半，总复杂度 $O(n \log^2 n)$

多项式快速插值

模型: 已知 $(x_1, y_1)...(x_n, y_n)$，要求构造满足 $f(x_i) = y_i$ 的多项式 $f(x)$

注意到 $f(x) \equiv y_i \mod (x - x_i)$ 是同余方程组，我们直接按照中国剩余定理构造出多项式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \prod_{j \neq i}(x - x_j)$$

该公式即著名的**拉格朗日插值公式**

为了快速计算 $f(x)$，需要得到 $w_i = \frac{y_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$，对于分母，考虑构造 $T(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$，那么分母即为 $T'(x_i)$，做一次多点求值算出 w_i 后简单合并就算出了 $f(x)$，总时间复杂度 $O(n \log^2 n)$