Logiske udsagn

Kristoffer Klokker

2021

Contents

1 Logiske udsagn

Proposition - is a declarative sentence, either true or false.
Senitial variables - variables presenting propositions, most used letters: p, q, r, s
True propositions are denoted T and false are denoted F
Atomic propositions - the most simple version of a proposition

2 Logiske operatore - 1/9/2021

Tegn — navn — betydning
$\neg$ — negation — Invers
$\wedge$ — conjuction— Og
$\vee$ — disjunction— Eller
$\rightarrow$ — conditional — Implementere
$\iff$ — biimplimentation — To ens udtryk
$\oplus$ Exclusive or / XOR — sand ved én sand
Præcedens hieraki: $\neg \wedge \vee \rightarrow \iff$
$\oplus$ har ikke en specifik plads og derfor skal altid have parentes.

2.1 Logiske tabeller

Logiske tabeller kan bruges, til at overskueligegøre logiske udtryk.
De kan også være til gavn for at ækvivalenser.

P	$\neg P$
S	F
F	S

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
S	S	S	S
S	F	F	S
F	S	F	S
F	F	F	F

2.2 Implimentation

$P \to Q$
P hypotense/antagelse
Q konklusion
eks. $x > 0 \to 2x \geq x$
$x = 1 \to ss$
$x = 0 \to fs$
$x = -1 \to ff$
I alle tre tilfælde er implikationen sand.

P	Q	$P \to Q$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

For the proposition $p \to q$ are the following:
converse: $q \to p$
Contrapositive: $\neg q \to \neg p$
Inverse: $\neg p \to \neg q$
example:
The home team wins whenever it is raining.
p = if it is raining
q = then then home team wins
converse: If the home team wins, then it is raining
contrapositive: If the home team does not win, then it is not raining.
inverse: If it is not raining, then the home team does not win.

eksempler på implikation.
b: Du har købt en billet
t: Du kan tage toget
$b \to t$
$\neg t \to \neg b$
Som det kan ses i tabellen ses det at

$$P \to Q \equiv \neg P \to \neg Q$$

Altså implikationen er ækvivalent til den negeriske implikation.

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
S	S	S	F	F	S
S	F	F	S	F	F
F	S	S	F	S	S
F	F	S	S	S	S

2.3 Bi implikation

$p \iff q$
p og q har samme sandhedsværdi
Bliver kaldt hviss/iff

P	Q	$P \iff Q$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	S

$P \iff Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

2.4 Exclusive or / XOR

$P \oplus Q$
P og Q har forskellgie sandhedsværider

P	Q	$P \oplus Q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

2.5 Ydeligere ækvivalenser

Compound proposition - a collection of logic operators
Tautology - an always true compound $p \vee \neg p$
Contradiction - an always false compound $p \wedge \neg p$
Contingency - neither a tautology or contradiction
$P \oplus Q \equiv \neg(P \iff Q)$

2.5.1 De Morgan's law

$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$
$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$

P	Q	$P \lor Q$	$\neg(P \lor Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \land \neg Q$
S	S	S	F	F	F	F
S	F	S	F	F	S	F
F	S	S	F	S	F	F
F	F	F	S	S	S	S

2.5.2 Distributive law (mulitply into a parenthese)

$P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$

P	Q	R	$Q \land R$	P $\lor(Q \land R)$	$P \lor Q$	$P \lor R$	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	F	S	S	S	S
S	F	S	F	S	S	S	S
S	F	F	F	S	S	S	S
F	S	S	S	S	S	S	S
F	S	F	F	F	S	F	F
F	F	S	F	F	F	S	F
F	F	F	F	F	F	F	F

2.5.3 Conditionaldisjunction equivalence

$P \to Q \equiv \neg P \lor Q$

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \lor Q$
S	S	S	F	S
S	F	F	F	F
F	S	S	S	S
F	F	S	S	S

2.5.4 Further equivalences

TABLE 7 Logical Equivalences Involving Conditional Statements.
$p \to q \equiv \neg p \lor q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \lor q \equiv \neg p \to q$
$p \land q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$
$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$
$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$
$(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$
$(p \to r) \lor (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$

TABLE 8 Logical Equivalences Involving Biconditional Statements.
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Figure 1: Equivalences of conditional and biconditional statements

2.5.5 Applying equivalences

By applying equvalences it is possible to show $\neg(P \lor (\neg P \land Q)) \equiv \neg P \land \neg Q$

$$
\begin{aligned}
\neg(P \lor (\neg P \land Q)) &\equiv \neg P \land \neg(\neg P \land Q) && \text{second De Morgan law} \\
&\equiv \neg p \land \neg(\neg P) \lor \neg Q && \text{first De Morgan Law} \\
&\equiv \neg P \land (P \land \neg Q) && \text{double negation law} \\
&\equiv (\neg P \land P) \lor (\neg P \lor \neg Q) && \text{second distributive law} \\
&\equiv F \lor (\neg P \lor \neg Q) \\
&\equiv \neg P \land \neg Q
\end{aligned}
$$

$\neg(P \to Q) \equiv \neg(\neg P \lor Q)$

$$
\begin{aligned}
\neg(P \to Q) &\equiv \neg(\neg P \lor Q) && P \to Q \equiv\equiv \neg P \lor Q \\
&\equiv \neg(\neg P) \land \neg Q) && \text{ifølge De Morgan} \\
&\equiv P \land \neg Q && \neg(\neg P) \equiv P
\end{aligned}
$$

2.6 Logic gates

The following is translations of logic operators to gates

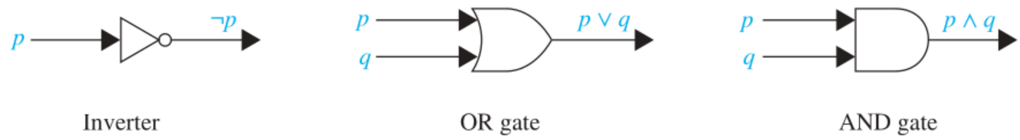


Figure 2: Gates and logical operations

2.7 Tal grupperinger

$\mathbb{Z}$ heltal ...,-2,-1,0,1,2,3,...
$\mathbb{Z}^{+}$ Positive heltal 1,2,3,...
$\mathbb{Z}^{-}$ Negative heltal -1,-2,-3,...
$\mathbb{N}$ Naturlige tal 0,1,2,3,4,... - 0 er ikke altid inkluderet
$\mathbb{Q}$ Rationale tal $\frac{m}{n}|m \in \mathbb{Z}, n \in Z^{+}$ $\mathbb{R}$ Reelle tal

2.8 Kvantorer

Åbent udsagn - ukendt variable
Har altid den højeste procedens og tages altid først.
$P(x) : 2x > x$
Ukendt variable - fri variabel
Herfra fungere det som funktion
$p(-2) : 2 \cdot (-2) > -2$ - F
$\forall$ alkvartor/universel quantifier - for alle
eks.
$\forall x \in \mathbb{Z}^{+} : 2x > x$ - S
Alle positive heltal vil være sandt.
Ydelgiere notations eksempel:
$\forall x \in Z : (x \leq 5 \rightarrow 2x > x + 4)$
$\exists$ Eksistenskvantor/Existenstial quantifier
Påkræver kun at der eksistere et x i intervallet som opfylder udsagnet.
$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 10 : Q(x)$
$\exists x \in \mathbb{Z} : (x \leq 10 \wedge Q(x)$
$\exists!$ Eksistere kun 1 variable værdi som passer, mere gør den falsk
$\neg \forall x \in s : P(x) \equiv \exists x \in S : \neg P(x)$

$\neg\forall x \in \mathbb{Z} : 2x > x \iff \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \leq x$
$\nexists \equiv \neg\exists$

2.8.1 De Morgans love for kvantorer

$\neg\forall x : P(x) \equiv \neg\exists x : \neg P(x)$
$\neg\exists! x : P(x) \equiv \forall x : P(x) \lor \exists x, y : (x \neq y \land P(x) \land P(y))$

Eksempel:

$$\begin{aligned} \neg\forall x \in \mathbb{Z} &: (x < 4 \lor x > 4) & & \\ \exists x \in \mathbb{Z} &: \neg(x < 4 \lor x > 4) & & \neg\forall \equiv \exists \\ &: (\neg(x < 4) \land \neg(x > 4)) & & \neg(P \lor Q) \equiv (P \land Q) \\ &: (x \geq 4 \land x \leq 4) & & \text{negering af operator} \\ &: x = 4 & & \text{Simplificering af udtrykket} \end{aligned}$$

2.8.2 Indlejrede kvantorer

Eksempel:
$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$ — Sandt $(x = -y)$
For alle x findes 1 y som vil resultere i additionen giver 0
Rækkefølgen er vigtig for forskellige kvantorer, ved ens kvantorer er rækkefølgen ikke vigtig.
$\forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} \equiv \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}$
I samme univers kan det også forkortes.
$\forall x, y \in \mathbb{Z}$

Eksempel på én negering af indlejrede kvantorer

$$\begin{aligned} \neg\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y \\ \forall x \in \mathbb{Z} : \neg\forall y \in \mathbb{Z} : x > y \\ \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : \neg(x > y) \\ \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \geq y \end{aligned}$$

3 Bevismetoder

Beviser typer

- Direkte bevis - Klassisk udledningsbevis

- Kontra positionsbevis - Bevise det mod satte
- mod stidsbevise - Starte med den mod satte antagelse og finde en mod strid

3.1 Direkte bevis

Eksemple på direkte bevis

$$\text{lige tal} = \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k \tag{1}$$
$$\text{ulige tal} = \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k + 1 \tag{2}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k + 1 \tag{3}$$
$$: n^2 = 4k^2 + 1 + 4k \tag{4}$$
$$: n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \tag{5}$$

$$n^2 = \text{ulige} \tag{6}$$

Det kan konkluderes ud fra (5) at det i parentesen kan beskrive alt i domænet $\mathbb{Z}$ og dermed fåes definitionen på ulige tal. Dermed bliver det her bevist n ulige $\rightarrow n^2$ ulige.

3.2 Kontrapositionsbevis

Eksempel som efterfølger sidste bevis For at kunen bevise at n^2 ulige $\iff$ n ulige skal følgende også kunne sigesn^2 ulige $\rightarrow n$ ulige

$$\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k \tag{1}$$
$$: n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 \tag{2}$$
$$n^2 = \text{lige} \tag{3}$$

Der tages her udgangspunkt i de lige tal n hvorfra det kan omskrives til, at n^2 er lige
Med dette udgangspunkt vil det betyde det kun kan passe at n^2 ulige $\iff$ n ulige

3.3 mod stidsbevis

Eksempel
For enhver retvinklet trekant gælder $c < a + b$

Bevis: Antag til mod stad, at der ekstistere en trekant med $\geq a+b$

$$
\begin{aligned}
c &\geq a+b \\
c^2 &\geq (a+b)^2 \\
c^2 &\geq a^2+b^2+2ab
\end{aligned}
$$

Det kan her ses at mod striden er forkert da den er i mod strid med Pythagoras sætning.

3.4 Ikke konstruktiv eksistensbevis

Eksempel
For en funktion $f(x)=x^4-x^2-1$ vides det at når x er 0 er y -1 og ved x er 2 er y 11 og da den er kontinuer vil der være et nul punkt imellem.

3.5 Induktions bevis

Bevis $P(n)$ for alle $n \geq m$
Basis: bevis $P(m)$
Induktionsskridt: Bevis at $P(k) \rightarrow P(k+1)$ for alle $k \geq m$
Induktionsantagelse: $P(k)$

3.6 Stærkt induktion

Basis: Bevis $P(m), P(m+1), ..., P(m+l), l \geq 0$
Induktionsskridt: Bevis $P(m) \wedge P(m+1) \wedge ... \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$, for alle $k \geq m+l$
Eks.
Bevis $f_n > \phi^{n-2}, n \geq 3$

$$
\begin{aligned}
\phi^2 &= (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
\phi \approx 1.618 \phi^2 &= 1 + \phi \text{Basis} \\
f_3 &= 2 \\
\phi^{3-2} &= \phi < f_3 \\
f_4 &= 3 \\
\phi^{4-2} &= 1 + \phi < f_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Induktionsantagelse} \\
f_{k-1} > \phi^{k-3} \text{og} f_k > \phi^{k-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Induktionsskridt} k \geq 4 \\
f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\
&> \phi^{k-2} + \phi^{k-3} \\
&= \phi^{k-5}(\phi + 1) \\
&= \phi^{k-3} \cdot \phi^2 \\
&= \phi^{k-1}
\end{aligned}
$$

3.7 Strukturel induktion

Induktion basseret på rekursion.

3.7.1 Eksempel

Bevis for at $S_n = S_{n-1} \cup \{x + y | x, y \in S_{n-1}\}, n \geq 2$ hvor mængden er kaldet S er lig med mængden $A = \{3n | n \in \mathbb{Z}^+\}$
Bevis med simpel induktion at $A \subseteq S$:

$$
\text{Basis:} 3 \cdot 1 \in S_1 \ \subseteq S \text{Ind. ant:} \quad 3k \in s, \text{for et} \ \ k \geq 1
$$

Ind. skridt: For $k \geq 1$ gælder

$$
\begin{aligned}
&3(k+1) = 3k + 3 && \text{begge i S} \\
&3(k+1) \in S && \text{Ifølge rek. skridt}
\end{aligned}
$$

Dermed er alle multiple i S dermed skal det blot vises at $S \subseteq A$ med strukturel induktion.

$$
\begin{aligned}
\text{Basis:} & S_1 \subseteq A \\
\text{Ind. ant: } & S_k \subseteq A \\
\text{Ind. skridt: For } & S_k \subseteq A \rightarrow S_{k+1} \subseteq A : \\
& S \in S_{k+1} - S_k \\
& S = x + y, x, y \in S_k && \text{ifølge rek. skridt} \\
& S = 3a + 3b, a, b \in \mathbb{Z}^+ && \text{ifølge ind. ant.} \\
S = 3(a+b), a+b \in \mathbb{Z}^+ \\
S \in A
\end{aligned}
$$

4 Mængder

En mængde/set er en uordnet samling af forskellige objekter kaldet elementer

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 1, 1, 2, 3\} \\
2 &\in A - True \\
B &= \{1, \{2, 4\}, a\} \\
\{2, 4\} &\in B - True \\
\\
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, ...\} \\
\mathbb{Z} &= \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}
\end{aligned}
$$

4.1 Mængde-bygger-notation

$$
\begin{aligned}
L &= \{0, 2, 4, 6, ...\} \\
&= \{2n | n \in \mathbb{N}\} \\
&= \{n | \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} | n/2 \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

$|$ = "hvorom der gælder"
$\emptyset = \{\}$

4.2 Kardinalitet

Kardinaliteten er mængden af unikke elementer i en liste
$|\{2, 2, 4, 6, 4\}| = 3$
Delmængde $A \subset B$ $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$
$\subseteq$ bruges hvis mængderne også må være lig hinanden. En ægte delmængde er en delmængde som ikke er lig med.
$\subset \iff A \subseteq B \land A \neq B$

$$\begin{aligned} \emptyset &\subseteq A \\ \forall x \in \emptyset &: x \in A \\ \forall x \in U &: x \in \emptyset \to x \in A \end{aligned}$$

4.3 Potensmængde

Potensmængden er alle mængder som er delmængder eller lig med mængden.

$$\begin{aligned} C &= \{1, 2\} \\ P(C) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \end{aligned}$$

Potenslængden på mængden med i elementer vil være 2^i

4.4 Karteisisk produkt

To mængders kartesiske produkt er en mængde bestående af 2 elementer fra hver mængde. Længden på 2 elementer kaldes også 2-tupler
Ikke kommunativ $(A \times B \neq B \times A)$

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \\ A \times B &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\} \\ |A \times B| &= |A| \cdot |B| \end{aligned}$$

Kardinaliteten af et kartesisk produkt er kardinaliteten af de to mængder multipliceret sammen.

4.5 Intervaller

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} && (1) \\
]a, b[/(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} && (2) \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} && (3) \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} && (4)
\end{aligned}$$

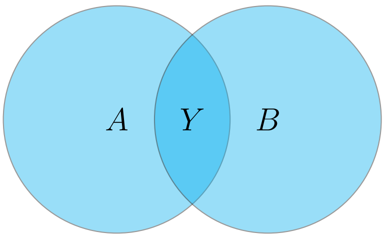
1. Lukket mængde
2. Åben mængde
3. Halvåben mængde
4. Halvåben mængde

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} \\
B &= \{2, 3, 4\} \\
U &= \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

4.6 Foreningsmængde

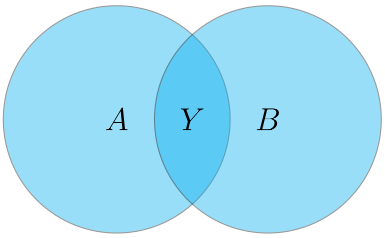
$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B =$ Det hele blå felt



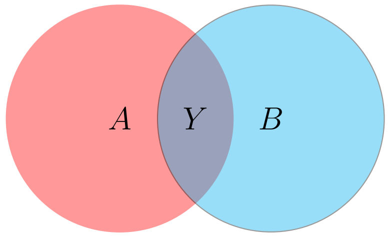
4.7 Fællesmængde

$A \cap B = \{x | x \; inA \wedge x \in B\}$
$A \cap B = \{2, 3\}$
$A \cap B =$ Y



4.8 Fraregnet

$A \setminus B \equiv A - B$
$A \setminus B = \{x | x \in A \vee \notin B\}$
$A \setminus B = \{1\}$
$A \setminus B =$ Kun helt røde



4.9 Komplementet

$\overline{A} = u - A$

4.10 Disjunkte

To mængder er disjunkte hvis

$$\begin{aligned} A \cup B = \emptyset \\ \neg\exists x : x \in \wedge x \in B \\ A \subseteq \bar{B} \\ B \\ A = B \end{aligned}$$

4.11 Mængde love

For at overbevise sig selv om love kan venn diagramer bruges som sandhedtabeller kunne bruges tidligere.

TABLE 1 Set Identities.	
Identity	***Name***
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws

4.11.1 De Morgans love

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = u - (A \cap B)$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

4.12 Ydeligere notation

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

Alfabet - mulige tegn i en mængde eks. $\Sigma = \{0, 1\}$ for bit strings
Yderligere gælder det Σ^* ligesom i regulære udtryk er en samling af tegn i alfabettet, hvor der er 0 eller flere tegn.

5 Funktion

En funktion er en translation af elementer fra en definitionsmængde, hvor hvert element i A har en tilsvarende element i B.
Defintionsmængde $Dm(f)$
Værdimængde

$$\begin{aligned} Vm(f) &= y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y \\ &= f(x) | x \in A \\ &= f(A) \end{aligned}$$

5.1 Injektive funktioner

$\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$
Alle x værdier vil have sin egen y værdi.

5.2 Surjektiv

$\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y$
Der findes en x i definitionsmængden så alle værdimængder / y værdier bliver ramt.

5.3 Bijektiv

Funktionen er både injektiv og surjektiv
Alle punkter i y bliver ramt én gang. 1 til 1 korrestance

5.4 Invers funktion

Isolering af x.
Ved afbilledring vil akserne byttes rundt
Ikke det samme som f^{-1} som er bare $\frac{1}{f(x)}$
Hvis et punkt i funktionen f^{-1} ikke er defineret er funktionen ikke defineret
Ved afbilledring vil akserne byttes rundt

5.5 Operationer på funktioner

Her vil blot de funtkioerne indsættes med parentes rundt om og udregnes.

5.6 Sammensat funktion

Bruger 1 funktion som værdi til funktionen.
$(g \cdot f)(x) = g(f(x))$

5.7 Monotoniforhold

Strengt voksende, påkræver det at hvis x er større end tidligere skal y være større.
Voksende kan næste x værdi og være lig med y.
Monoton - voksende eller aftagende.

5.8 Tællelige mængder

Mængden $\mathbb{Z}$ er en tællelig mængde og beskrives ved $\aleph_0$.
Ikke tællelige mængder kaldes overtællige mængder.
Kardinaliteten kan her bruges så hvis $\mathbb{Z}$ kan mappes til en ny mængde er den tællelig.
Tællig uendelig er blot tællelig men mere specifikt
En tællelig maende krydset med en taellelig maengde giver en taellig maengde
Mængden $Q = \frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}$ er en tællelig mængde.
Da der blot mappes en sammenhæng hvor alle $\mathbb{Z}$ kan mappes på tæller og nævner, således alle rationelle tal kan opstå og dermed er $\aleph_0$.

5.9 Overtællelige mængder

Realle tal $\mathbb{R}$ er en overtællelig mængde og kan vises via argumentet. At selv ved delmængden mellem 0 og 1 vil et nyt decimal altid kunne findes ved at age diagonalen af allerede nævnte realle tal.

6 Relationer

Relationer bruges til at finde elementer som opfylder en relation i mængder. Der er to typer af relationer kvartær og binære relationer. Binær er når der er en direkte relation, hvor kvartær har interne relationer.
Eks.

$$
\begin{aligned}
R_{inv} &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ | b = \frac{1}{a}\} \\
&= \{(1,1),(2,\frac{1}{2}),(3,\frac{1}{3}),...\} \\
(2,\frac{1}{2}) &\in R_{inv} \\
(\frac{1}{2},2) &\notin R_{inv} \\
5R_{inv}\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

En relation på mængden A er en relation fra A til A, dvs $(a,b) \in A \times A|...$

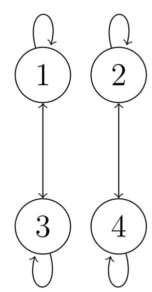
6.1 Matriar

Her bruges en matrix med række og collonner som repræsentere de forskellige elementer hvor 0 er falsk og 1 er sandt.

$$
\begin{aligned}
A = \{1,2,3\} - R_< &= \{(a,b) \in A \times A | a < b\} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\} \\
&\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

6.2 Orienterede grafer

Her bruges en graf, hvor relationer er repræsenteret som en kant og hvert element er en knude.
$A = \{1,2,3,4\} - R_p$
$= \{(a,b)|a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$
$= \{(1,1),(1,3),(2,2),...\}$



6.3 Egenskaber

6.3.1 Refleksiv

Mængden R relation på A er kun refleksiv hvis

$$(a, a) \in R$$

, for alle $a \in A$
$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ på $\{1, 2, 3\}$ er sand
$\{(1, 1), (2, 2)\}$ på $\{1, 2, 3\}$ er falsk
Følgende diagonal skal være sand hele vejen for refleksiv i en matrise. Et diagram påkræver alle knuder har en lykke til sig selv.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.3.2 Symmetrisk

Mængden R relation på A er kun symmetrisk hvis

$$(a, b) \in R \to (b, a) \in R$$

, for alle $a, b \in A$
$\{(1, 3), (3, 1)\}$ og $=$ sand
$>$ falsk
På et diagram skal alle kanter vende begge retninger. På en matrise kan det genkendes ved at der skal være en spejling på diagonalen således:

$$\begin{bmatrix} \diagdown & 0 & 0 \\ 0 & \diagdown & 0 \\ 0 & 0 & \diagdown \end{bmatrix}$$

6.3.3 Anti-symmetrisk

Mængden R relation på A er kun anti-symmetrisk hvis

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \to b = a$$

, for alle $a, b \in A$
$<$ & $=$ sand

$\neq$ falsk
På en matrise må der ikke være en spejling på aksen.

$$\begin{bmatrix} \diagdown & 0 & 0 \\ 0 & \diagdown & 0 \\ 0 & 0 & \diagdown \end{bmatrix}$$

6.3.4 Transitiv

Mængden R relation på A ertransitiv hvis

$$(a, b) \in R \land (b, c) \in R \to (a, c) \in R$$

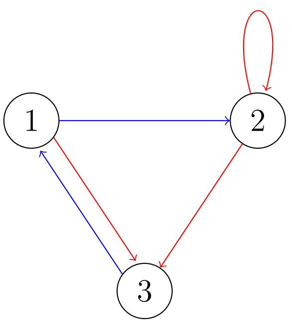
, for alle $a, b, c \in A$
$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ og $<$ sand
$\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$ og $\neq$ falsk
På et diagram er det nemt at se om der mangler direkte kanter efter to kanter.

6.4 Kombination af relationer

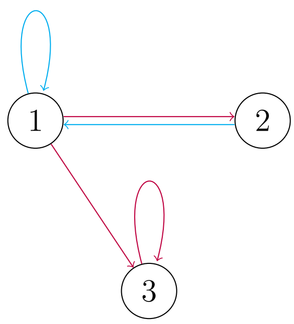
Mængde operationer kan udføres på relationer.
Herudover kan sammensættes osm funktioner.

$$\begin{aligned} R: &\ \text{relation fra } A \text{ til } B \\ S: &\ \text{relation fra } B \text{ til } C \\ S \circ R = &\ \{(a, c) | \exists b : (a, b) \in R \land (b, c) \in S\} \end{aligned}$$

$R = \{(1,2),(3,1)\}$
$S = \{(1,3),(2,2),(2,3)\}$



$S \circ R = \{(1,1),(2,1)\}$
$R \circ S = \{(1,2),(1,3),(3,3)\}$



Sammensat kan findes ved at følge den første relations kanter efterfulgt af den andens relations kanter.

6.5 Lukninger

Lukninger bruges til at gøre relationer for en given egenskab.
Følgende former for lukning vil eksemplerne tage udgangspunkt i

$$R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3, (3, 1), (3, 3)\}$$

Lukninger er de originale par og de nye lukningspar.

6.6 Refleksive lukninger

Eksempelvis. Den refleksive lukning af R er $r(R) = R \cup \{(a, a)|a \in A\}$
$r(R) = R \cup \{(1, 1), (4, 4)\}$
Eksempel på en uendelig tællelig mængde:
$R_< = \{(a, b)|a < b\}$
$r(R_<) = R \cup \{(a, b)|a = b\}$

6.7 Symmetriske lukninger

R er en relation på A gælder det at den symmetriske lukning er:
$s(R) = R \cup \{(a, b) \in A \times A|(b, a) \in R\}$
$S(R_<) = R_< \cup R_> = R_{\neq}$
$(s(R) = R \cup \{(3, 2)\}$

6.8 Transivativ lukning

Den transative lukning vil indeholde kan defineres ved
$t(R) = R^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$ Hvis A er endelig
her tages fællesmængden af relationen og relationen sammensat med sig selv og relationen sammensmat med sig selv 3 gange osv.
$t(R) = R \cup \{(2, 1)\}$
For R^2 hentydes til nye par og for R^* hentydes til den alle samlet par.

7 Ækvivalensrelationer

En ækvivalensrelation er reflekstiv, symmetrisk og transitiv.
Eks. parietet, = og den tomme relation er en ækvivalens
a og b som tilhøre en ækvivalens relation er ækvivalente
Ækvivalensklassen for a er $[a]_R = \{b|(a.b) \in R\}$ D.V.S alle elementer som

er relateret til a for R som er en ækvivalens relation på A
En relation ækvivalensklasser vil altid være dækket af hele relationen også kaldet **partitionær**.

7.1 Partitionær

For den ækvivalente relation da gælder:

- aRb
- $[a]_R = [b]_R$
- $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

D.V.S to relateret elementer, må være i samme ækvivalens klasse og de to klassers overlap ikke må være tomt.
Det vil her bevises at (1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) dermed alle 3 udtryk er ækvivalente.

7.1.1 $aRb \rightarrow [a]_R = [b]_R$

Et mod stridsbevis kan her opstilles.
Et punkt som er relateret til a og ikke er relateret til b er ikke mulig, da R ikke længere vil være transitativ.

7.1.2 $[a]_R = [b]_R \rightarrow [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Den eneste måde hvorpå at overlappet kan være tomt påkræver at $[a]_R = \emptyset$
Dette kan dog ikke lade sig gøre, da a er en del af sættet og pr. definition er ækvivalensklassen reflektiv og dermed er elementet (a, a) altid i $[a]_R$.

7.1.3 $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \rightarrow aRb$

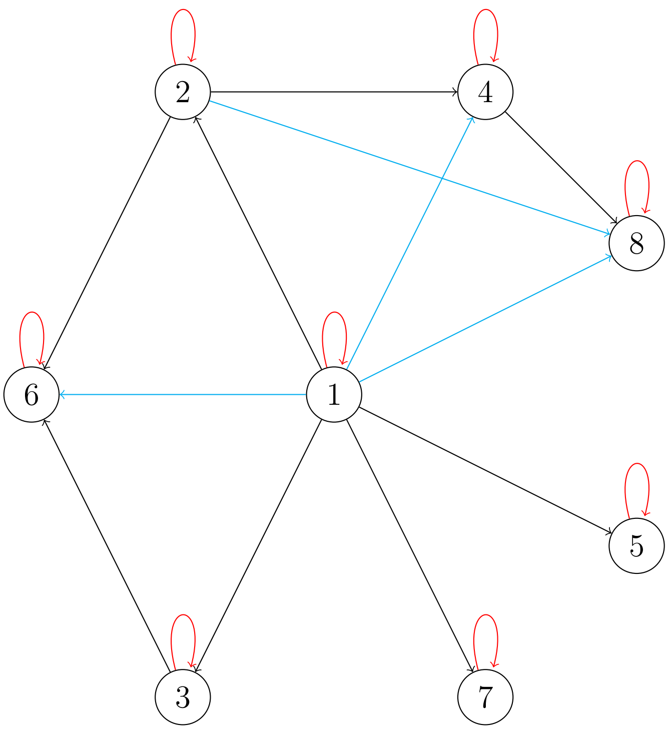
Efter at overlappet ikke er tomt, vil det betyde der et et punkt c som er relativ til a og b. Dermed da ækvivalensklassen er transitativ vil det medføre at a er relateret til b

7.2 Ækvivlanesklasserne dækker hele A

Dette ville påkræve at to ækvivalensklasser ikke overlapper hinanden.
For ækvivalens klassen vides det at $\forall a \in A : a \in [a]$
Dermed vides det at klassen ikke er tom og da for to klasse som er ens $[a] \cap [b] \neq \emptyset$
Det kan så vendes rundt (negeres) at hvis deres overlap er tomt $[a] \cap [b] = \emptyset$ vil det medføre $\neg([a] = [b])$ altså $[a] \neq [b]$.
Dermed kan to ækvivalensklasser ikke overlappe.

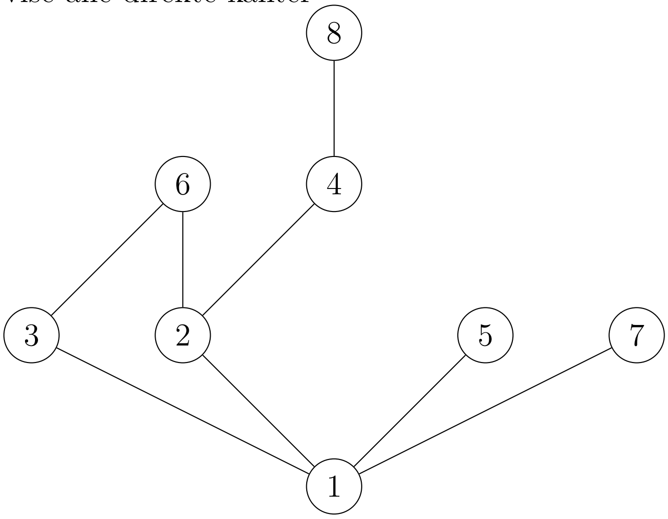
8 Partiel ordning

Relfleksive, transitive og antisymetrisk.
Partielt ordnet mænde (A, R) hvor R er en mængde på A som er en partiel ordning.
Eks. $=$ og $\geq$
$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, |)$ hvor $|$ er går op i.



8.1 Hassediagrammer

Med underforståelsen at det er en partiel ordning er det ikke nødvendigt at vise alle direkte kanter



Maskimale elementer er elementer som ikke har nogle elementer relateret over sig. $\nexists b \in A : b < a$
Minimlae elmenter er elementer som ikke har nogle andre lementer som går op i det.$\forall b \in A : a < b$
Er det kun 1 element som er maksimal eller minimal er det den største ($\forall v \in A : b < a$) eller mindste ($\nexists b \in A : a < b$).

8.2 Total ordning

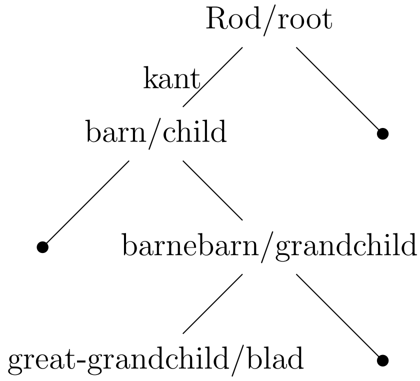
Den partielle ordning for R er hvor aRb eller bRa er gædende. Her vil a og b være sammenlignelige.
Dvs. at en total ordning er refleksiv, transitiv, antisymmetrisk og den givende releation er gældende for enten aRb eller bRa
Dermed en total ordning på et sæt , hvor ingen relation er angivet tages der blot udgangspunkt i transitiv, antisymmetrisk, refleksiv og at for ethvert element a og b skal a,b eller b,a optræde.
Er alle par $a, b \in A$ er sammenlignelige med releationen R er det en total ordning. Eks.
$R = \{(a, b)|a \leq b\}$ på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ er en total ordning

8.3 Leksikografisk ordning

En måde hvorpå en sortering kan foregå.
$(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$
Først tjekkes om $a_1 < b_1$ i det tilfæde står det i leksikofrafisk ordning
Hvis $a_1 = b_1$ så er den leksikografisk hvis $a_2 < b_2$

8.4 Binært træ

Et binært træ er et træ hvorledes hvert udkom opdeles i to muligheder. Et fuldt binært træ skal altid have to muligheder.



De sorte punkter er kaldet knuder.
For et binært træ er højden definered rekursivt således:

$$h(\circ) = 0,\ h\left(\begin{array}{c} \cdot \\ / \ \backslash \\ T_1 \quad T_2 \end{array}\right) = max\{h(T_1), h(T_2)\}$$

8.4.1 Bevis for højde på binært træ

n antal knuder, h højden og T træ

$$\begin{aligned}
\text{Basis: } & S_1 = \{\circ\} = 2^{h+1} - 1 = 1 = n \\
\text{Ind. ant: } & n(T) = 2^{h(T)+1} - 1, && \text{for alle } T \in S_{k-1}\ (k \geq 2) \\
\text{Ind. skridt: } & T \in S_k - S_{k-1}, && \text{hvor } k \geq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n(T) &= 1 + n(T_1) + n(T_2) \\
&\leq 1 + (2^{h(T_1)+1} - 1) + (2^{h(T_2)+1} - 1) && \text{da induktions ant.} \\
&= 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_2)+1} - 1 \\
&\leq 2^{h(T)} + 2^{h(T)} - 1 && \text{da } h(T_1) \leq h(T) \geq h(T_2) \\
&= 2^{h(T)+1} - 1
\end{aligned}$$

9 Tal teori

9.1 Delelighed

Heltals devision kaldes $a\ div\ b$, ved negativ div rundes ned, da rest altid skal være mellem 0 og divisor.
For $a|b$ er udsagnet korrekt hvis $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$
For dette kan det obseveres at

- $a|b \wedge a|c \rightarrow a|(b+c)$
- $a|b \rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : a|k_1 \cdot b + a \cdot k_2$
- $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$
- $a|b \wedge a|c \rightarrow \forall m, n \in \mathbb{Z} : a|(mb + nc)$
- $a|bc \wedge gcd(a, b) = 1 \rightarrow a|c$
- $a|b = a| - b$
- $a|b \vee a|c \rightarrow a|bc$

9.1.1 Bevis $a|b \wedge a|c \iff a|(b+c)$

$$\begin{aligned} a|b \wedge a|c & \\ b = k \cdot a \wedge c = l \cdot a, & \qquad k, l \in \mathbb{Z} \\ b + c = k \cdot a + l \cdot a = (k+l)a, & \qquad k + l \in \mathbb{Z} \\ a|(b+c) & \end{aligned}$$

Division kan udføres hvis $a|bc \wedge gcd(a,b) = 1 \rightarrow a|c$

9.1.2 Bevis for division i af delelighed

$$\begin{aligned} a|bc \wedge gcd(a,b) = 1 & \\ \exists s, t \in \mathbb{Z} & : sa + tb = gcd(a,b) \\ & : sa + tb = 1 \\ & : sac + tbc = c \\ & : sac = c - tbc \end{aligned}$$

Dermed da b er delelig med a vil det betyde for at venstre side kan være et multiplum af a skal c være delelig med a.

9.2 Kongruence

To kongruente tal skrives som $a \equiv b(\ mod \ m)$ dvs. $m|(a-b)$

- $a \equiv b(mod\, m) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = b + mk$
- $a \equiv b(mod\, m) \rightarrow a \equiv b + mk(mod\, m)$
- $a \equiv b(mod\, m) \rightarrow ka \equiv kb + km(mod\, m)$
- $a \equiv a(mod\, m)$
- $a \equiv b(mod\, m) \iff b \equiv a(mod\, m)$
- $a \equiv b(mod\, m) \wedge b \equiv c(mod\, m) \rightarrow a \equiv c(mod\, m)$
- $a \equiv b(mod\, m) \wedge c \equiv d(mod\, m) \rightarrow a + c \equiv b + d(mod\, m)$
- $a \equiv b(mod\, m) \wedge c \equiv d(mod\, m) \rightarrow ac \equiv bd(mod\, m)$
- $a \equiv b(mod\, m) \rightarrow a^k \equiv b^k(mod\, m)$
- $a \equiv b(mod\, m) \rightarrow gcd(a,m) = gcd(b,m)$

9.2.1 $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km \iff a \equiv b(\ mod\ m)$

$$\begin{aligned} m|(a-b) \\ a-b = km, k \in \mathbb{Z} \\ a = b + km \end{aligned}$$

Den muligmængde af $a\ mod\ m$ vil være $\mathbb{Z}_m = 0, 1, 2, ...m-1$
Dermed kan der udføres addition og multiplikation på begge sider af $\equiv$ hvis den er sand, herudover kan der mod'en ligges til og fra på en side.
Her gælder det også at hvis $c \equiv d$ vil $a + c \equiv b + d$ og $a \cdot c \equiv b \cdot d$
Ved $(a + b)\ mod\ m$ eller $(a \cdot b)\ mod\ m$ kan modolo udføres ind i parentesen hvorefter operationen kan foregå.

9.2.2 Bevis for modolo ind i parentes

$$\begin{aligned} a &\equiv a\ mod\ m(\ mod\ m) \\ b &\equiv b\ mod\ m(\ mod\ m) \\ a + b &\equiv (a\ mod\ m) + (b\ mod\ m)(\ mod\ m) \\ (a + b)\ mod\ m &= ((a\ mod\ m) + (b\ mod\ m))\ mod\ m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &\equiv (a\ mod\ m)(b\ mod\ m)(\ mod\ m) \\ ab\ mod\ m &= ((a\ mod\ m)(b\ mod\ m))\ mod\ m \end{aligned}$$

Division kan foregå ved $ac \equiv ab(modm) \to a \equiv b$ hvis $gcd(c, m) = 1$

9.2.3 Bevis for division ved kongruencer

$$\begin{aligned} &ac \equiv bc(\ mod\ m) \\ &m|(bc - ac) \\ &m|(b - a)c \\ &m|(b - a) && \text{Da gcd(c,m)=1} \\ &a \equiv b(mod\ m) \end{aligned}$$

9.3 Linære kongruenser

Ligninger som indebære kongruenser fremfor ligheder. $ax \equiv b(mod\ m)$
Eks. $4x \equiv 5(mod\ 11)$, her er en løsning $x = 4$

Det ses at løsningerne vil have differensen m. En ligning har altid en løsning hvis $gcd(a, m) = 1$, og nogle gange hvis ikke det er opfyldt.
For isolering af x kan den inverse til a modulo m bliver multipliceret på begge sider.
Den inverse er fundet ved $a \cdot \bar{a}\ (mod\ m) = 1$. Eks. $3 \cdot x)\ (mod\ 11)$ Vil $x = 4$
Dermed vil det kun være en multiplikativ invers hvis $gcd(a, m) = 1$, dog kan der stadig vaere muligheder.
Euklids algoritmen kan her bruges til at finde multiplikative invers.

9.4 Primtal

$p \in \mathbb{Z}^+ - 1$ hvis $\forall a|p \mid a \in \mathbb{Z} = 1, p$ er p et primtal. Ellers er det sammensat.
Et hvert tal $n \geq 2$ har en måde hvor det er produktet af primtal, kaldet primtals faktore

9.4.1 greatest common divider

def. $gcd(a, b) = max\{d|d|a \wedge d|b\}$
Det kan også ses at gcd af et tal er produktet af de primtals faktore de har tilfældes
Hvis $gcd(a, b) = 1$ er a og b indbyrdes primiske (relatively prime).

9.4.2 Least common multiplum

def. $lcm(a, b) = min\{m|a|m \wedge b|m\}$
Kan også findes ved at tage primfaktorne og multiplicere sammen. Ved ens primfaktore tages mængden med højst ekspnent.
Dermed $lcm(a, b) = \frac{a \cdot b}{gcd(a,b)}$

9.5 Euklids Algoritme

For $a = bq + r \rightarrow gcd(a, b) = gcd(b, r)$
Eksempel på brug:

$$\begin{aligned} gcd(287, 91) \\ 287 = 91 \cdot 3 + 14 \\ 91 = 14 \cdot 6 + 7 \\ 14 = 7 \cdot 2 \end{aligned}$$

Dermed er $gcd(287, 91) = 7$ da det er den sidste rest før 0.

9.5.1 Bevis

For dette skal følgende bevises $d|a \wedge d|b \iff d|b \wedge d|r$ for $a = bq + r$
Først højre medføre venstre:

$$d|b \wedge d|r \tag{1}$$
$$d|(bq + r) \tag{2}$$
$$d|a \tag{3}$$

(1) medføre (2) da det er blot et helt tal multipleceret med b som er deleligt med d og r er også deleligt. Dermed fåes def. på a
Venstre medføre højre

$$d|a \wedge d|b \tag{4}$$
$$d|(a - bq) \tag{5}$$
$$d|r \tag{6}$$

(4) medføre (5) med samme argument som før, som er den samme def på den isoleret r.

9.6 gcd(a,b) på linearkombination

Tages der udgangspunkt i eksemplet fra tidligere:

$$\begin{aligned} gcd(35, 78) \\ 78 = 35 \cdot 2 + 8 \\ 35 = 8 \cdot 4 + 3 \\ 8 = 3 \cdot 2 + 2 \\ 3 = 2 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

Isolering af konstatnerne

$$\begin{aligned} 1 = 3 - 2 \cdot 1 \\ 2 = 8 - 3 \cdot 2 \\ 3 = 35 - 8 \cdot 4 \\ 8 = 78 - 35 \cdot 2 \end{aligned}$$

Indsæt konstanterne i udtrykket

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\
1 &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot (8 - 3 \cdot 2) \\
1 &= 1 \cdot 3 - (8 - 3 \cdot 2) \\
1 &= 1 \cdot 3 - 8 + 3 \cdot 2 \\
1 &= 3 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \\
1 &= -1 \cdot 8 + 3 \cdot 3 \\
1 &= -1 \cdot 8 + 3 \cdot (35 - 8 \cdot 4) \\
1 &= -1 \cdot 8 + 3 \cdot 35 - 8 \cdot 12 \\
1 &= -13 \cdot 8 + 3 \cdot 35 \\
1 &= 3 \cdot 35 - 13 \cdot 8 \\
1 &= 3 \cdot 35 - 13 \cdot (78 - 35 \cdot 2) \\
1 &= 3 \cdot 35 - 78 \cdot 13 + 35 \cdot 26 \\
1 &= 29 \cdot 35 - 78 \cdot 13
\end{aligned}$$

9.7 Kinessisk Restklasse

For $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$
Hvor $m_1, m_2, ...m_n \in \mathbb{Z}^+$ som er parvis indbyrdisk primiske
Vil

$$\begin{aligned}
x &\equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\
x &\equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\
&\vdots \\
x &\equiv a_n \ (mod\ m_n)
\end{aligned}$$

Har en unik løsning modulo m som $m = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$

9.7.1 Eksempel

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 3 \ (mod\ 5) \\
x &\equiv 1 \ (mod\ 7) \\
x &\equiv 6 \ (mod\ 8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 1 \\
a_3 &= 6 \\
M_1 &= 7 \cdot 8 = 56 \\
M_2 &= 5 \cdot 8 = 40 \\
M_3 &= 7 \cdot 5 = 35 \\
M &= 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280
\end{aligned}
$$

Herfra findes den multiplative invers i udtrykket $M_k y_k \equiv 1 \ (mod\ m_k)$

$$
\begin{aligned}
56y_1 &\equiv 1 \ (mod\ 5) \\
y_1 &\equiv 1 \ (mod\ 5) \\
40y_2 &\equiv 1 \ (mod\ 7) \\
5y_2 &\equiv 1 \ (mod\ 7) \\
y_2 &\equiv 3 \ (mod\ 7) \\
35y_3 &\equiv 1 \ (mod\ 8) \\
3y_3 &\equiv 1 \ (mod\ 8) \\
y_3 &\equiv 3 \ (mod\ 8)
\end{aligned}
$$

Dermed vil

$$
\begin{aligned}
b_1 &= M_1 \cdot y_1 = 56 \cdot 1 = 56 \\
b_2 &= M_2 \cdot y_2 = 40 \cdot 3 = 120 \\
b_3 &= M_3 \cdot y_3 = 35 \cdot 3 = 105
\end{aligned}
$$

Dermed er x

$$x = \sum_{k=1}^{n} M_k y_k a_k$$
$$x = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k$$
$$x = 56 \cdot 3 + 120 \cdot 1 + 105 \cdot 6$$
$$x = 168 + 120 + 630$$
$$x = 918$$
$$x \equiv 918\ (mod\ M)$$
$$x \equiv 918\ (mod\ 280)$$
$$x \equiv 78\ (mod\ 280)$$

9.7.2 Bevis

For at bevise at der findes én løsning skal det vises at $x = \sum_{k=1}^{n} = b_k a_k$ der findes en række af b_k som opfylder at $b_k \equiv \begin{cases} 1\ (mod\ m_k) \\ 0\ (mod\ m_i) \end{cases}$

Dette vil nemlig betyde at ved summationen, at når $b_k a_k$ vil kun havde betydning for den k'ene ækvivalens, da den giver 1 og ved de andre ingen ting da de giver 0.

Det vides herudover at ved $M_k = \frac{m}{m_k}$ vil

$M_k \equiv\ (mod\ m_i)$ hvor $i \neq k$, da M_k vil altid være m_i multiplceret med konstanter.

Dermed kan der multiplceres endnu en konstant på nemlig $M_k y_k \equiv 0\ (mod\ m_i$, $i \neq k$. Således vides det at der findes en $b_k = M_k y_k$ som opfylder $b_k \equiv 0\ (mod\ m_i)$

I tilfældet med m_k skal der eksistere en y_k som vil medføre at $M_k y_k \equiv 1\ (mod\ m_k)$.

Det vil der da alle mod fra ligningerne skal være indbyrdes primisike og dermed vil $gcd(M_K, m_k) = 1$

Dermed vil der findes en multiplikativ invers. Dette er også hvorfor der kan findes en løsnign i nogle tilfælde selv alle mod ikke er inbyrdes primiske.

Dermed da y_k kan være en multiplikativ invers til M_k modulo m_k vil det kunne gælde at $M_K y_k \equiv\ (mod\ m_k)$

Således vides det at $b_k = M_k y_k$ også er en løsning således $b_k \equiv 1\ (mod\ m_k)$

9.8 Fermats lille sætning

$a, p \in \mathbb{Z}$ og p er primtal gælder det at:

- $P \nmid a \rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \ (mod \ p)$
- $a^P \equiv a \ (mod \ p)$

9.8.1 Eksempel

7^{222}mod 11
11 er primtal og $11 \nmid 7$
Dermed vil $7^{11-1} \equiv 1$
Det kan bruges til $7^{222} = 7^{22 \cdot 10+2} = (7^1 0)^{22} \cdot 7^2$
Dermed $7^{222} \ mod \ 11 = 1^2 2 \cdot 7^2 \ mod \ 11 = 49; mod \ 11 = 5$

10 Matricer

For matricen $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$ har den 3 søjler og 2 rækker og dermed er en 2×3 matrice.
Matrice index er i, j eller blot ij hvor i er række nummer og j er søjle nummer.

10.1 Addition

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8 & 4+6 & 8+4 \\ 4+6 & 8+8 & 6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 12 \\ 10 & 16 & 15 \end{bmatrix}$
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

10.2 Multiplikation

For multiplikation kan lade sig gøre skal antallet af rækker på den første matrice være lig med antallet af søjler på den anden matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = A \cdot D = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & +2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Generelt for to matrixer f og g vil produktet h være $h_{ij} = \sum_{l=1}^{m} f_{il} g_{lj}$ Her har h samme mængder rækker som f og søjler som g. Multiplikation er ikke kommutativt og kan ikke byttes rundt på
Det er dog associativt så rækkefølgen på $f \cdot g \cdot h$ er ligegyldig.

10.3 Neutrale matrice

En matrice hvor alt indhold er 0

10.4 Identitets matricen

En kvadratisk matrice hvis størrelse er angivet i subtrekst ved I_n og har 1 på diagonalen fra øverst højre hjørne til nederst venstre hjørne.
$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Ved multiplikation af en identitetsmatrice forbliver den første matrice ens.

10.5 Transponering

Ombytning af søjler og rækker

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$m_{ij}^T = m_{j,i}$ Dermed ved kvadratiske matricer vil det bare spejles på diagonalen.

10.6 Symmetriske matricer

Symmetriske matricer er hvor $m = m^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

10.7 Binær matricer

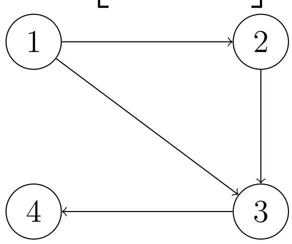
Har kun 0 og 1 som indhold og operationer som $\vee$ og $\wedge$ på sammevis som addition.

10.8 Boolsk produkt

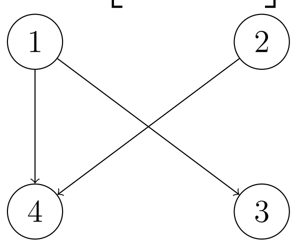
$M_1 \odot M_2$ beregned ligesom multiplikation af matricer hvor addition udskiftes med $\vee$ og multiplikation udskiftes med $\wedge$

Ved en matrice multipliceres med sig selv vil det i grafen ses at kanter med l;ngde 2 vil blive tilbage. Dette kommer af at det kan ses under beregningen af kun hvis der er en kant som går ind og ud af en knude vil det i beregningen kunne give en ny kant. Ligesådan tjekkes der ved flere højere potenser for veje i tilsvarende længde.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



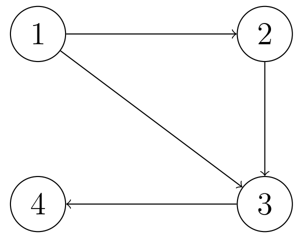
$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



10.9 Matricers grafiske repræsentation

Her er en kant repræsentærbar ved den går fra række nummer til søjle nummer.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



11 Grafer

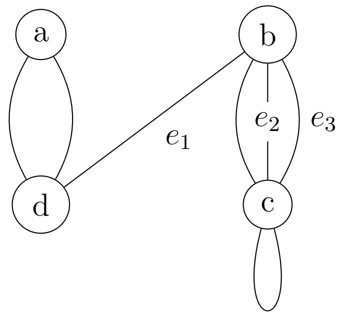
Simple grafer best[r af en mængde af knuder og kanter. Den har ingen kredse/loop og flere kanter mellem 2 knuder
Orienterede grafer har en angivet kant vej.
Ikke orienterede grafer st[r ud ved at et kant par kan stå i vilkårlig rækkefølge.
Multigrafer er hvor der er parralelle kanter, dvs flere kanter i samme retning mellem to kanter.
Dette kan både lade sig gøre på orienterede og ikke orientede grafer.
Grader - antallet af kanter som ramme en knude
Samlet antal grader er lig med den dobbelte mængde af kanter.

11.1 Terminologi

Del grafer kan undermængder af grafer som kan indeholde nogle af knuderne og kanter. Delgraf induceret er en mængde af knuder og alle kanter imellem demi

11.1.1 Ikke orientede grafer

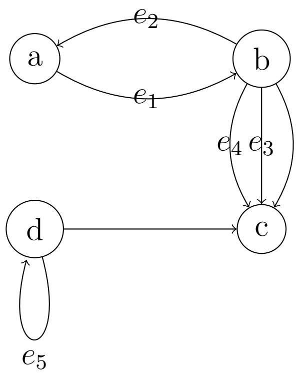
- e_1 forbinder d og d
- e_1 er incident til b og d
- e_1 har endepunkterne b og d



- b og d er naboer
- b og d er adjacente
- e_1 og e_2 er adjaente
- e_2 og e_3 er parallelle
- $N(b) = \{c, d\}$ er b's nabomængde
- $N(\{b, d\}) = N(b) \cup N(d)$

11.1.2 Orientede grafer

- e_1 og e_2 er antiparallelle
- e_1 har startknude a og slutknude b
- e_1 er incident fra a og incident til b
- d er b[de start og slutknude for e_5
- $deg^{-}(a) = 1$ (indgrad)
- $deg^{+}(a) = 1$ (udgrad)
- Underliggende ikke orienterede graf er grafen uden retning

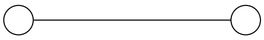


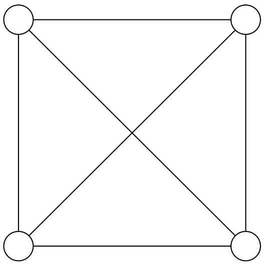
11.2 Matching

Matching er en mængde af ikek adjacente kanter.
Maksimal matching er mængden af kanter således der ikke er andre muligheder.
Maksimum matching er mængden af kanter således der er flest uden andre muligheder.

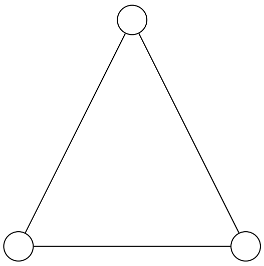
11.3 Grafklasser

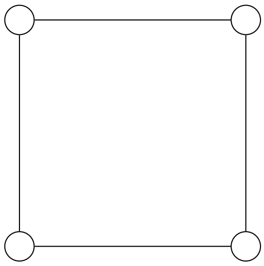
11.3.1 Komplette grafer

En graf hvor alle kanter er naboer.
$k_1 =$ 
$k_2 =$ 

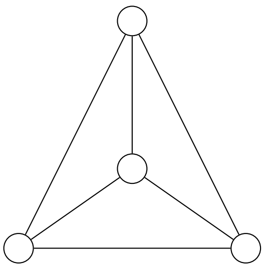
$k_4 =$ 

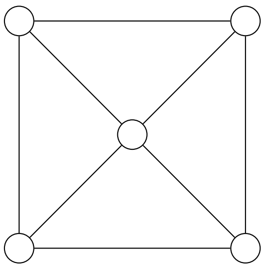
11.3.2 kredse

$k_3 =$ 

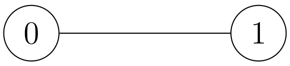
$k_4 =$ 

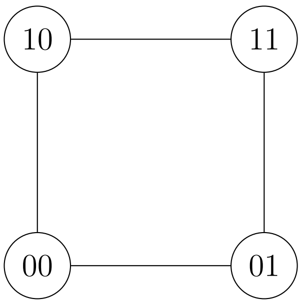
11.3.3 Hjul

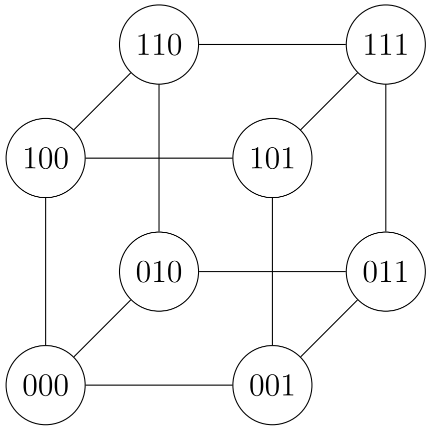
$w_3 =$ 

$w_4 =$ 

11.3.4 Hypercubes

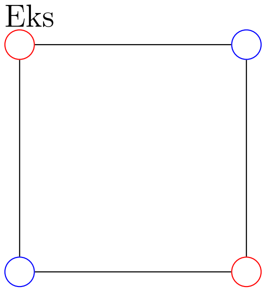
$Q_2 =$ 

$Q_2 =$ 

$Q_3 =$ 

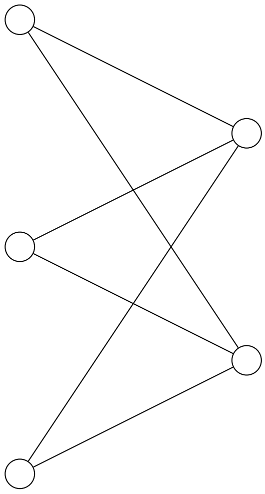
11.3.5 Todelte grafer

Todelte grafer er hvor grafen kan deles op således at 1 gruppering ikke har interne knuder men kun kanter til en anden gruppering. Dermed hvis grafen indeholder en ulige kreds kan den ikke todeles.
Eks



11.3.6 Komplette todelte grafer

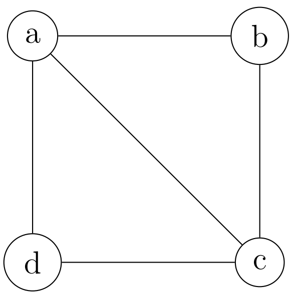
Grafer som er basseret på todelte grafer som gøresså komplett som muligt. Her vil grafen $K_{m,n}$ havde $m + n$ knuder og $m \cdot n$ kanter.

$K_{3,2} =$ 

11.4 Repræsenation af grafer

11.4.1 Adjacenslister

En listem ed nabo til alle punkter. Ved orienterede grafer er det punkter som den givende knude går til. Kan også repræsenteres som matricer, hvor ikke orienterede vil være symmetriske.



- a: b,c,d
- b: a,c
- c: a,b,d
- d: a,c

11.5 Isomorfi

Beskriver om to grafer er ens. Tjekkes ved bijektion, hvor man mapper knuder på knuder på den anden graf således de får ens naboer på begge grafer.

11.6 Graf stier og kredse

Sti - en sekvens af knuder med en kant orienteret i korrekt retning, angivet i rækkefølge af knuder og længden er mængden af kanter

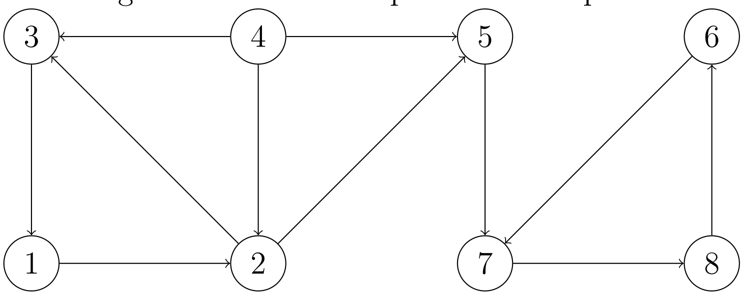
En ikke simpel sti passere en knuder flere gange. (kan være hvis en kant blvier brugt flere gange)
Kredse - stier som starter og slutter i samme knude

11.7 Graf sammenhænge

En graf er sammenhængende hvis der er en sti mellem ethvert par af knuder
Sammenhængskomponenter er mængden af maksimal sammenhængende delgrafer. DVS mængden af steder hvor grafen adskiller delgraferne.
Ved orienteret grafer så er der to typer af sammenhænge

- Svagt sammenhængende - Bruger underliggende graf
- Stærk sammenhængende - Her skal stien tage højde for orienterende

For en stærk sammenhængende graf skal punkter i et komponent være sammenhængende til alle andre punkter i komponentet.



Det kan eksempelvis ses her hvordan 1,2,3,4 danner en stærk smh.komp. 5 gør også og 6,7,8 gør.
Dermed er der 3 stærk smh. komp.

11.8 Træer

Ikke orienteret sammenhængende, acyklisk (ingen kreds) graf.
For ethvert træ eksistere der kun én sti mellem to punkter

11.8.1 Bevis G er et træ $\iff \forall u, v \in V : \exists!$ sti mellem u og v

Pr. Def er et træ sammenhængende, dermed er der en sti mellem alle punkter
Pr. Def er et træ acyklisk, som medføre at der kun kan være 1 sti, da hvis der skal være to stier påkræver det en kreds. Ligesådan bevis i den anden retning
Hvis der altid er en sti og der ikke er mere end 1 sti er den sammenhængende

og acyklisk
Dette er def. på et træ.

11.8.2 Et træ med n knuder har altid $n-1$ kanter

Induktionsbevis
Basis $n = 1$ roden har ingen kanter
Ind.ant $n = k \geq 1$
Ind. skridt: Ved tilføjelsen af en knude på en rod eller anden knude vil det give 1 kant

12 Følger

Sequence/Følge en ordnet mængde. Eks. fibonacci-tallene
Notation:

$$a_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1$$

For dette vil $\{a_n\}$ betyde hele følgen.

12.1 Geometrisk følge

Følger som går ud fra formen $a_n = cr^n$, $n \in \mathbb{N}$
Her er c begyndelsesled og r er fælles faktor
Eks for den rekursive def. $a_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}$ vil den være $a_n = 1 \cdot \frac{1}{2}^n$

12.2 Aritmestisk følge

$a_n = b + nd$ b begyndelsesled og d fælles forksel.
eks. $1, 3, 5, 7$ vil $b = 1$ og $d = 2$

12.3 Mandelbrot-fraktalen

def: $x_0 = 0$, $x_n = x_{n-1}^2 + c$ hvor c er et kompleks tal
Hvis følgen er begrænset er c en del af mandelbrot mængden.
Hvis $|x_n| > 2$ vil den ikke v;re begr;nset og kaldes Escape condition og desto hurtigere det opnåes vil det illustreres ved at være lysere.

12.3.1 i tilhøre Mandelbrot mængden

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0 \\
&x_1 = 0^2 + i = i \\
&x_2 = i^2 + i = -1 + i && i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1 \\
&x_3 = (-1+i)^2 + i = 1 - 1 - 2i + i = -i \\
&x_4 = (-i)^2 + i = -1 + i \\
&x_5 = x_3
\end{aligned}
$$

Dermed er mængden begrænset og en del af mandelbrot mængden. Det vil blive vist ved det komplekse tal er y komponenten dermed er dette (0,1) koordinatet. Dermed er kooridnatet sort

13 Rækker

Rækker er sum af et (uendeligt) antal led.

13.1 Eksempel $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

$$
\begin{aligned}
&n = 0: && 1 = 2 - 1 \\
&n = 1: && 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \\
&n = 2: && 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} \\
&n = 3: && 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8} \\
&n = n: && \sum_{i=0}^{n} (\frac{1}{2})^n = 2 - (\frac{1}{2})^n \\
&n = \infty: && \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 2
\end{aligned}
$$

13.2 Summation af rækker

$\sum\limits_{k=0}^{n} ar^k (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$
$\sum\limits_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

13.3 Geometriske række

$\sum\limits_{i=0}^{n} ar^i$ Det ses her at hvis man sætter $(r-1)$ får man:

$$
\begin{aligned}
(r-1)\sum_{i=o}^{n} r^i &= (r-1)(r^0 + r^1 + ...r^n) \\
&= r^{=}r^2 + ... + r^{n+1} - (r^0 + r^1 + ...r^n) \\
&= r^{n+1} - r^0 \\
\sum_{i=0}^{n} r^i &= \frac{r^{n+1}-1}{r-1}
\end{aligned}
$$

Her blev begyndelsesledet undladt da det blot kan sættes på efterfølgende. For $r = i$ vil det blot gælde at $\sum\limits_{i=0}^{n} r^i = n + 1$

13.4 Artmetisk række

$\sum_{i=0}^{n}(b+id)$
Genrealt kan det findes at:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(b+id) &= \sum_{i=0}^{n} b + \sum_{i=0}^{n} id \\ &= \sum_{i=0}^{n} b + d\sum_{i=0}^{n} i \\ &= (n+1)b + d \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Den sidste omskrivning kommer ved at hvis man udleder udtrykket ses det at der dannes parvis led bortset fra det sidste og det første som er lig med $\frac{n(n+1)}{2}$

13.4.1 Eksempel $1+3+5+..+2k-1$

$\sum_{i=0}^{k-1} 1+2i = k+(k-1)k = k^2$

13.5 Rækker i loops

Det kan også bruges til at finde antal gennemgang i for loops:
eks.

```
for i=1 to 20
          for j=1 to i
                    ...
```

Dette vil køre $\frac{20(20+1)}{2} = 210$ gange
Ved summer som starter højere kan det omskrives
$\sum_{i=11}^{20} i = \sum_{i=1}^{20} i - \sum_{i=1}^{10} i$
For 3 nested loops:

```
for i=1 to 20
          for j=1 to i
                    for k=1 to j
```

Vil den køre

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{i} j &= \sum_{i=1}^{20}\frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{20}(i^2+i)) \\ &= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{i=1}^{20} i) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{20\cdot 21\cdot(2\cdot 20+1)}{6} + \frac{20(20+1)}{2}) \\ &= 1540\end{aligned}$$

Ved i^2 kunne en tabel fra s.176 i bogen bruges.

13.6 Notation

$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i \leq i \leq n} i = \sum_{i \in A} i$, hvor $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$

13.7 Uendelige rækker

For den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, vil $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_i$ være den n'te partielle sum.
hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} s_n = s$ siges det at rækken konvergere mod s
Dvs. at hvis en partiel række af en uendelig række konvergere, vil den uendelige række konvergere.
Ligesådan må kan også gerne starte på et vilkårligt punkt for at undersøge om rækken konvergere

Hvis en ultimativ positiv følge er begrænset ovenfra vil den altid konvergere, da den aldrig vil blive negativ og blot nå det begrænset punkt og konvergere.
Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ da gælder:

- $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + b$
- $a_n \leq b_n \to A \leq B$, for alle $n \geq 1$

Dermed er den harmoniske serie divergerende, da integralet bliver uendeligt.

14 Følger og konvergens

14.1 Notation

Hvis $a_n \geq L$ for $n \in \mathbb{N}^+$ siges:

- $\{a_n\}$ er begrænset nedera fra L
- L er en nedre grænse for $\{a_n\}$

Hvis $a_n \leq M$ for $n \in \mathbb{N}^+$, siges:

- $\{a_n\}$ er begrænset ovenfra af M
- M er en øvre grænse for $\{a_n\}$

Når n er 1,2,3,4,...
Hvis $\{a_n\}$ er begrænset både ovenfra og nedenfra er den bægrenset.

Hvis alle elementer er større eller lig med 0 er den positiv
Hvis den er mindre eller lig med 0 er den negativ.
Hvis alle elementer $a_{n+1} \geq a_n$ er den voksende
Hvis alle elementer $a_{n+1} \leq a_n$ er den aftagende
Hvis ikke den vokser eller aftager er den monoton
Hvis alle elementer $a_n a_{n=1} < 0$ er den alternerende, dvs skiftende mellem positiv og negativ
En følge kan være ultimativ egenskab som betyder at den efter et punkt n, vil have den givende egenskab såsom ultimativ positiv eller ultimativ begrænset.

14.2 Konvergens

Hvis en række går mod en given værdi når rækken bliver uendelig.
$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \epsilon$
Dvs. for alle værdier ϵ som er større end 0, vil der eksistere et punkt i rækken hvor alle efterfølgende punkter vil være mindre end alle ϵ værder. Grænseværdien L bliver her bare brugt hvis et tal konvergere til 1, vil $L = 1$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ Eks. $\{\frac{n-1}{n}\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ...$ vil konvergere mod 1

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere vil det sige at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Det kan ses da $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$ som medføre ud fra sætningen $\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$
Kan bruges ved eks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ hvor brøkken er a_n hvor grænseværdien er $\frac{1}{2}$ og dermed divigere det originale udtryk mod uendeligt

Hvis en række konvergere, vil man kunne undlade start og slut af en række.

14.3 Konvergen kriterier

14.3.1 Sammenlignings-kriteriet

Hvis $0 \geq a_n \geq K \cdot b_n$ ultimativt, vil det gælde at:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (konv.) $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (konv.)
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (div.) $\to \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ (div.)

Det kan nemlig ses at det første udtryk, egentlig blot er definiationen på konvergens, og det andet udtryk er egentlig det første udtryk negeret.
Eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n+1}$ kan sammenlignes med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, hvor det andet udtryk er større eller lig med når der multipliceres med en konstant her 4
Her vides det at det andet udtryk konvergere, og dermed vil det første udtryk konvergere.
Ligesådan vil $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ divergere, da $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergere og er mindre.

14.3.2 Grænse-sammenlignings-kriteriet

Bygger på grænseværdien og tjekker om en konstant eksistere.
Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ da gælder:

- $(L < \infty$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv.$) \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.
- $(L > 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty) \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Bevis bygger på omskrivning af sammenlignings-kriteriet, hvor L er en isolering af k

Eks. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+1}{5n^3+4n^2}$ sammenlignes med harmoniske række $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Dermed bliver $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2-3n+1}{5n^3+4n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{5n^3+4n^2} = \frac{2}{5} = L$
Således vil eksemplet divigere, da sammenligningen divigere og $L > 0$

14.3.3 Kvotient-kriteriet

Hvis en ultimativ række, hvor $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ vil det gælde at:

- $0 \geq \rho < 1 \rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere
- $\rho > 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$
- $\rho = 1$ ingen information

14.3.4 Konvergens kritiere for ultimative positive rækker

Hvis $a_n = f(n)$ hvor f er positiv, kontinuert og aftagende, vil integralet af funktionen enten divigere eller konvergere og ligesådan vil $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dividere eller konverger ens med funktionen.
Dette kan bevises ved at lave en nedre grænse for integralet som er summen af a_n fra n+1 og øvre grænse af summen a_n fra n

14.3.5 Harmoniske rækker / divigerns & konvergens test

Den harmoniske serie er beskrevet som $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
Det kan her ses at divergens test viser $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ dermed kan det ikke siges om den konvergere eller divigere. Hvis det gav over 0 ville det vides at den divergere.
Det kan dog ses ved en integral test at integralet konvergere og såldes må serien også konvergere eller ligesådan ved divigering

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to\infty} \ln x|_1^a$$
$$\lim_{a\to\infty} \ln a - \ln 1 = \infty - 0 = \infty$$

14.4 Divergens

Divergering er hvis en række ikke divigere.
En række kan mere specifikt divigere mod ∞ eller $-\infty$ Eks. $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, ...$ vil blot divigere

14.5 p-rækker

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$
Hvis $P \leq 1$ divergere mod ∞
Hvis $P > 1$ konvergere.

14.5.1 bevis

$P \leq 1$

$$n^P \leq n \tag{1}$$
$$\frac{1}{n^P} \geq \frac{1}{n} \tag{2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} = \infty \tag{3}$$

(3) da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ og da $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^P}$
$P > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} \tag{4}$$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^P} dx = \int_1^{\infty} x^{-P} dx \tag{5}$$
$$= [\frac{x^{-P+1}}{1-P}]_1^{\infty} \tag{6}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^{1-P}}{1-P} + \frac{1}{1-P} \tag{7}$$
$$= 0 + \frac{1}{1-P} \tag{8}$$

Da det vides at integralet for $\frac{1}{1-P}$ vil konvergere vil P-rækken også konvergere.

14.6 Regneregler for grænseværdi

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

Eks.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}$$
$$\frac{\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}$$
$$\frac{2 - 0 - 0}{5 + 0 + 0}$$
$$\frac{2}{5}$$

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, hvis $|x| < 1$

14.6.1 Bevis

$$\forall\epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |x^n| < \epsilon \tag{1}$$
$$|x^n| < \epsilon \tag{2}$$
$$|x|^n < \epsilon \tag{3}$$
$$n \ln|x| < \ln\epsilon \tag{4}$$
$$n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|x|} \tag{5}$$
$$N = \rfloor\frac{\ln\epsilon}{\ln|x|}\lfloor + 1 \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

Det sidste del af udtrykket kan omskrives og det ses at ved det sidste $\ln|x|$ bliver divideret vender relationstegnet, da det er negativt.
Det kan ud fra dette beskrives at N kan være den givende værdi og det dermed eksistere således at den altid vil konvergere mod 0.
Hvis x er 0 gælder beviset ikke men er ikke nødvendigt da det allerede er 0 fra starten
Dette giver også god mening at brøkker mindre end 1 vil efter nok gange multiplciering går mod 0. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, for alle $x \in \mathbb{R}$

14.6.2 Bevis

Da $n!$ er hurtigere voksende end x^n vil det altid gå mod 0.
Selv hvis $x = \infty$ vil den stadig bliver mindre da $\infty!$ er større og dermed vil den gå mod 0.