Chapter 19 电荷与电场

一、基本步骤：

Continuous charge distribution

The electric field can be calculated by integral

① Divide it into infinitesimal charges dQ

② Contribution from dQ: $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\hat{r}$

③ Consider all the components $dE_x,\ dE_y,\ dE_z$

列分量式子

④ Finish the integration:

$$E_x = \int dE_x,\ E_y = \int dE_y,\ E_z = \int dE_z$$

1.建立坐标系

2.写出场强的微分，写出dQ
- 点电荷微元
- 圆圈电荷微元
- 无限（有限）长直线微元
- （无限大平面微元）

3.写出场强分量式子 Ex Ey Ez

4.将三个分量积分

5.场强是矢量，有方向，不要忘记写方向

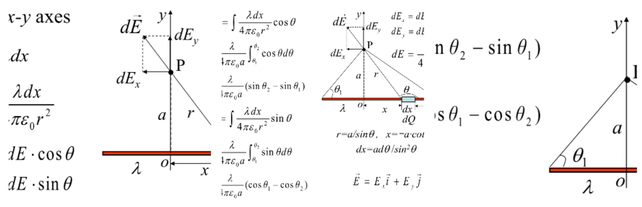
二、求场强过程中可能用到的方法

- 对称性（轴对称，旋转对称）
- 割补法
- 化多重积分为一重积分—本质上是运用一重积分计算的结果

三、典型形状的积分与推导（背）

题型1：运用积分解决连续电场分布的场强问题（复习的时候手动积分）

1.有限长直线



过程当中运用的技巧：化长度为角度进行积分

由有限长直线引申出的结论：无限长直线

1) If it is very long or infinite, $\theta_1=0,\ \theta_2=\pi$

$E_x = 0,\quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$ → useful result

2.无限大平面推导

基本方法：运用无限长直线在垂直方向进行一重积分

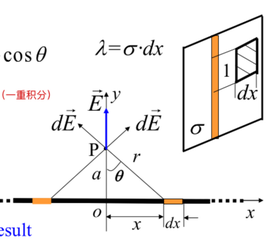
$$E = E_y = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma\,dx}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta$$

将微元设置为无限长的直线，从垂直方向积分（一重积分）

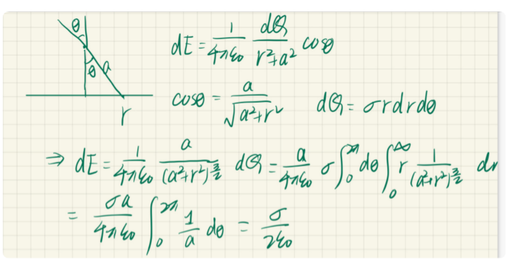
$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ → useful result

$\lambda=\sigma\cdot dx$

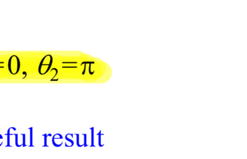


另外方法：二重积分（最好采用极坐标）



3.圆圈微元推导（旋转对称性）

Solution: $dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



$$E = E_x = \int_{Ring}\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{Q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

注意：

半圆产生的场强和无限长直线相等

**注意，半球不是等价的，最下方红字是错误的

Discussion:

1) x=0 or x>>R, E=? $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

2) At what position along the axis, $E=E_{max}$? $\frac{dE}{dx}=0$

3) If there is a small gap in the circle, E_o = ? 割补

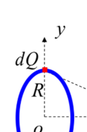
4) If there is only a semi-circle, E_o = ? $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$

再延伸，如果是一个半球，那么和无限长的平面也是等价的哦

4.圆盘推导

方法1:运用圈状微元

Solution: $dQ = \sigma 2\pi r dr$



圆圈状微元

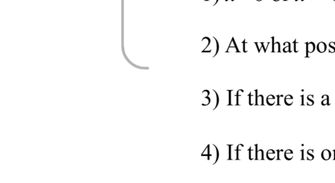
$$dE = \frac{x dQ}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \int_o^R \frac{\sigma\cdot x\cdot 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

方法2:二重积分（极坐标）

5.无限大平行板电容器

When $R\to\infty$: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ infinite plane



Parallel-plate capacitor

题型二：多电荷系统平衡问题（简单看）

Electric equilibrium

平衡位置问题从两个维度考虑
1.位置维度（某个位置合场强为0）
2.电荷维度（对另一电荷列方程，合力为0）
本质上，就是对两个位置合场强为0

Example1: Two charges, $-Q$ and $-3Q$, are a distance l apart. How can we place a third charge nearby to reach an equilibrium?

Solution: Position?

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{x^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3Q}{(l-x)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}l = 0.366l$$

How much is the Charge?

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3Q}{l^2} = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}Q = 0.402Q$$

题型三：电偶极矩问题

1.电偶极矩p=Ql，方向由负电荷指向正电荷

2.力矩=p×E