1 Esempio Parabola

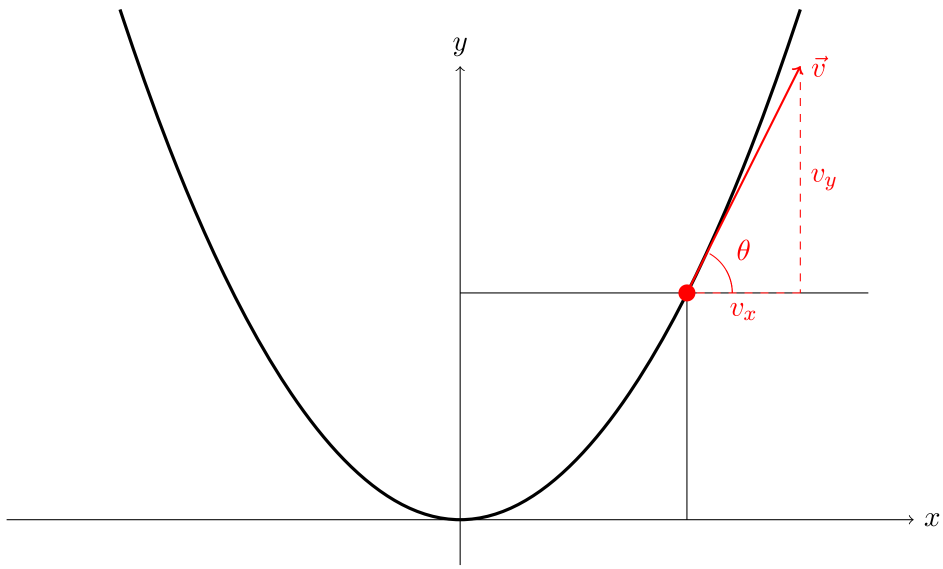
Un'automobile percorre una curva mantenedo costante il modula della velocita v. La traiettoria della curva é descritta dall'equazione:

$$y = \frac{x^2}{2b}$$

Si calcoli inoltre il raggio di curvatura e l'accelerazione dell'automobile ad ogni punto della curva.

Soluzione

Step I. Troviamo $v_x(x)$ e $v_y(x)$



$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{b}$$

$$\begin{cases} v_x(x) = v\cos\theta = v\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}} = \frac{b\cdot v}{\sqrt{x^2+b^2}} \\ \\ v_y(x) = v\sin\theta = v\sqrt{\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}} = \frac{x\cdot v}{\sqrt{x^2+b^2}} \end{cases}$$

Step II. Troviamo $a_x(x)$, $a_y(x)$ e $|\vec{a}|(x)$

Componenta x:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx}v_x$$

$$a_x = -\frac{bvx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}v_x = -x\left(\frac{bv}{b^2+x^2}\right)^2$$

Componenta y (attenzione – la derivata anche d/dx):

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv_y}{dx}v_x$$

$$a_y = \frac{b^2 v}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}v_x = b\left(\frac{bv}{b^2+x^2}\right)^2$$

Finalmente – il modulo dell'accelerazione:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{b^2 v^2}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Step III. Il raggio della curvatura

La velocita v é costante, quindi l'accelerazione $\vec{a}$ é sempre normale:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = v_x a_x + v_y a_y = 0$$

Usando espressione per l'acclelerazione centripeta $a = v^2/R$, troviamo R:

$$R = \frac{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2}$$

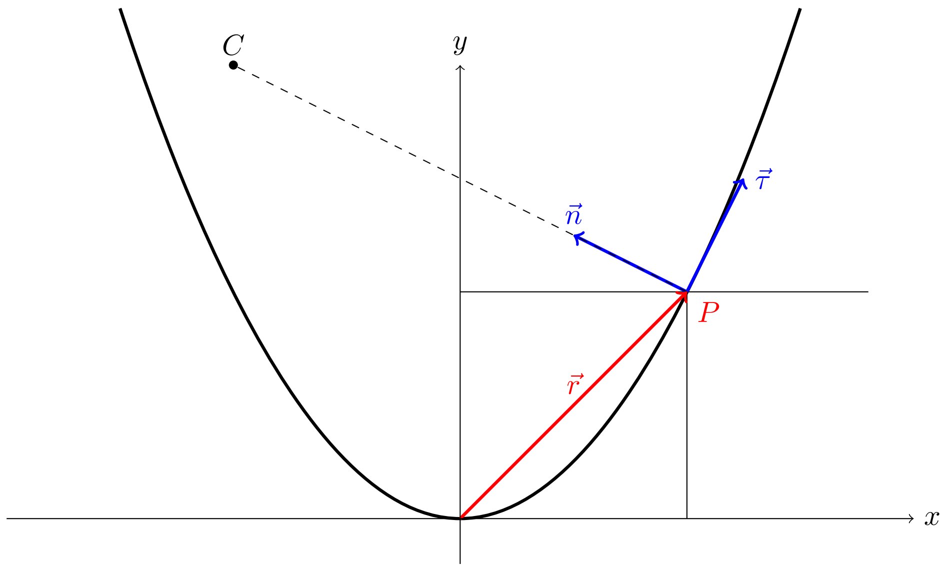
La formula generale per il raggio della curva (se abbiamo $y(x)$):

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Step IV. Centro del cerchio osculatore

Per ogni punto P sulla curva. Il centro C é a distanza R dal P in direzione del versore normale $\hat{n}$:

$$\vec{r}_C = \vec{r} + R \cdot \hat{n}$$



Il versore $\hat{n}$ e l'accelerazione $\vec{a}$ hanno la stessa direzione, ma $|\hat{n}| = 1$. Quindi:

$$\begin{cases} n_x = a_x/a = -\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} \\ \\ n_y = a_y/a = \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\begin{cases} x_C(x) = x + n_x \cdot R = x - \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} \cdot R = -x^3/b^2 \\ \\ y_C(x) = y + n_y \cdot R = \frac{x^2}{2b} + \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} \cdot R = b + \frac{3x^2}{2b} \end{cases}$$

Evoluta: luogo geometrico dei centri di curvatura di una curva