1 Ex1

5.8

Una macchia parte da ferma muovendosi con accelerazione di 4 m/s^2 per 4 s. Nei successivi 10 s essa si muove di moto uniforme. Quando frena, la maccina decelera al ritmo di 8 m/s^2 fino a quando si ferma. (a) Rappresentare graficamente la velocita in funzione del tempo. (b) Dimostrare che l'area racchiusa dalla curva e dall'asse dei tempi misua lo spazio totale percorso.

Sol5.8

Dato:

$$x(t=0s) = 0\,m, \qquad v(t=0s) = 0\,m/s$$

$$\begin{cases} a_I &= 4 \quad 0 \le t < t_{acc} \\ a_{II} &= 0 \quad t_{acc} \le t < t_{fr} \\ a_{III} &= -8 \quad t_{fr} \le t < t_{stop} \end{cases}$$

$$t_{acc} = 3\,s \qquad t_{fr} = 14\,s$$

Troviamo t_{stop} e $v(t)$:

I

$$v_I(t) = a_I t + b_I, \qquad v_I(0) = b_I = 0$$

$$\Rightarrow v_I(t) = a_I \cdot t = 4\frac{m}{s^2} \cdot t$$

II

$$v_{II}(t) = a_{II} t + b_{II}, \qquad v_{II}(t_{acc}) = v_I(t_{acc})$$

$$\Rightarrow b_{II} = v_I(t_{acc}) = a_I t_{acc}$$

$$\Rightarrow v_{II}(t) = a_I t_{acc} = 16\frac{m}{s}$$

III

$$v_{III}(t) = a_{III} \cdot t + b_{III}, \qquad v_{III}(t_{fr}) = v_{II}(t_{fr})$$

$$\Rightarrow a_{III} \cdot t_{fr} + b_{III} = a_I t_{acc}, \qquad b_{III} = a_I t_{acc} - a_{III} t_{fr}$$

$$\Rightarrow v_{III}(t) = a_{III}(t - t_{fr}) + a_I t_{acc} = -8\frac{m}{s^2}(t - 14\,s) + 4\frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$\Rightarrow v_{III}(t_{stop}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{stop} = \frac{a_{III} t_{fr} - a_I t_{acc}}{a_{III}} = 16\,s$$

Troviamo $x(t)$:

I

$$x_I(t) = \frac{1}{2}a_I t^2 + b_I t + c_I, \qquad x_I(0) = 0 \Rightarrow c_I = 0$$

$$\Rightarrow x_I(t) = \frac{a_I t^2}{2} = 2\frac{m}{s^2}\, t^2$$

II

$$x_{II}(t) = \frac{1}{2}a_{II} t^2 + b_{II} t + c_{II}, \qquad x_{II}(t_{acc}) = x_I(t_{acc})$$

$$\Rightarrow x_{II}(t) = \frac{a_I t_{acc}^2}{2} + b_{II}(t - t_{acc}) = 16\frac{m}{s}(t - 4\,s) + 32\,m$$

III

$$x_{III}(t) = \frac{1}{2}a_{III} t^2 + b_{III} t + c_{III}, \qquad x_{III}(t_{fr}) = x_{II}(t_{fr})$$

$$b_{II}(t_{fr} - t_{acc}) + \frac{a_I t_{acc}^2}{2} = \frac{a_{III} t_{fr}^2}{2} + b_{III} t_{fr} + c_{III}$$

$$\Rightarrow c_{III} = \frac{a_{III} t_{fr}^2}{2} - \frac{a_I t_{acc}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{III}(t) = \frac{a_{III}(t - t_{fr})^2}{2} + a_I t_{acc} t - \frac{a_I t_{acc}^2}{2}$$

$$x_{III}(t) = -4\frac{m}{s^2}(t - 14\,s)^2 + 16\frac{m}{s}\, t - 32\,m$$

2 Ex2

5.47

Un proiettile viene sparato con velocitá di 600 m/s a un andolo di 60 con l'orrizontale. Calcolare (a) la gittata, (b) la massima quota, (c) la velocitá e la quota dopo 30 s, (d) la velocitá e il tempo impiegato quando il proiettile é a 10km di altezza.

Sol5.47

Dato:

$$\begin{cases} a_x = 0 & a_y = -g = -9.8\frac{m}{s^2} \\ v_0 = 600\frac{m}{s} & \alpha = \pi/3 \\ x(0) = 0 & y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_x t^2}{2} + b_x t + c_x \\ y(t) = \frac{a_y t^2}{2} + b_y t + c_y \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = a_x t + b_x \\ v_y(t) = a_y t + b_y \end{cases}$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = c_x = 0 \\ y(0) = c_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(0) = b_x = v_0 \cos\alpha = 300\frac{m}{s} \\ v_y(0) = b_y = v_0 \sin\alpha \simeq 520\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha \\ y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

(a) Troviamo la gittata L:

$$\begin{cases} x(t_L) = L \\ y(t_L) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 t_L \cos\alpha = L \\ v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad t_L = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \simeq 106\, s$$

$$L = v_0 t_L \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \simeq \frac{600^2 \frac{m^2}{s^2}}{9.8\frac{m}{s^2}} \sin\frac{2\pi}{3} \simeq 31.8\, km$$

(b) Troviamo la massima quota h:

$$v_y(t_{max}) = 0, \qquad -gt_{max} + v_0 \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Oseervate: $t_L = 2 \cdot t_{max}$

$$h = y(t_{max}) = v_0 t_{max} \sin\alpha - \frac{g t_{max}^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \simeq 13.8 km$$

(c) Velocita e la quota dopo $t_c = 30\,s$:

$$\begin{cases} v_x(t_c) = v_0 \cos\alpha = 300\frac{m}{s} \\ v_y(t_c) = v_0 \sin\alpha - g t_c \simeq 226\frac{m}{s} \end{cases} \quad , \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \simeq 376\frac{m}{s}$$

$$y(t_c) = v_0 t_c \sin\alpha - \frac{g t_c^2}{2} \simeq 11.2 km$$

(d) La velocitá e il tempo impiegato quando il proiettile é a $H = 10$ km di altezza

$$y(t_H) = v_0 t_H \sin\alpha - \frac{g t_H^2}{2} = H, \quad \Rightarrow \quad t_H^2 - \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \cdot t_H + \frac{2H}{g} = 0$$

$$\sqrt{\mathcal{D}} = \sqrt{\frac{4 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} - 4\frac{H^2}{g^2}} = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - H^2}$$

$$t_{H1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - H^2}}{g} \simeq 53\,m \;\pm\; 27.5\,m$$

3 Homeworks

5.18

Un sasso é lanciato verticalmente verso l'alto con velocita di 20 m/s. Quando la sua velocitá sará di 6 m/s e a quale quota?

5.24

Due corpi sono lanciati verticalmente verso l'alto con la stessa velocitá iniziale di 98 m/s ma a distanza di 4s. quanto tempo dopo il lancio del primo essi si incontrano?