Kamil Kozłowski 189704
Bartłomiej Paszkowski 180658

Rok akademicki 2014/15
środa, 08:30

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

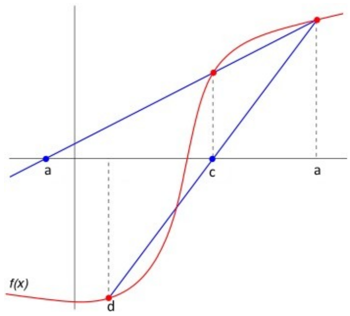
Zadanie 1– znajdowanie miejsc zerowych równań nieliniowych

Opis rozwiązania

Program zawiera dwa rozwiązania problemu przedstawionego w treści zadania. Wymagają one od użytkownika wybrania badanej funkcji, podania początku i końca badanego przedziału, oraz warunku stopu (liczba iteracji lub dokładność).

Pierwsze z nich oparte jest na **metodzie bisekcji**. Polega ona na powtarzającym się sprawdzaniu, czy w danym przedziale znajduje się miejsce zerowe (twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego: *Jeżeli funkcja ciągła f(x) ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania f(x) = 0*), oraz dzielenie tego przedziału na połowy i sprawdzanie w którym z nich znajduje się miejsce zerowe. Za punkt miejsca zerowego uznajemy środek najmniejszego przedziału powstałego przed osiągnięciem warunku stopu. Metodę zrealizowaliśmy za pomocą rekurencji.

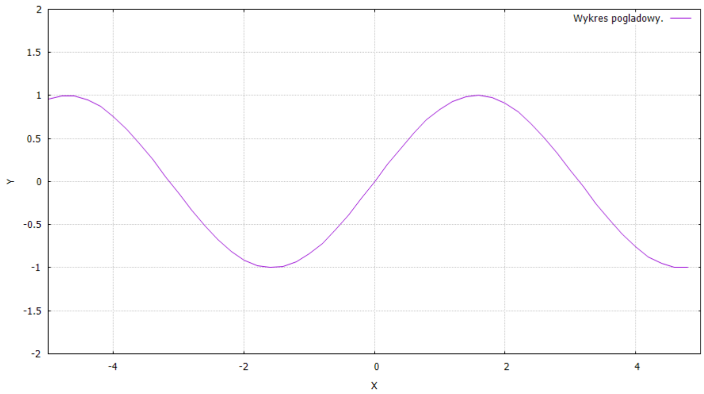
Druga metoda, **metoda siecznych**, również polega na zawężaniu przedziału w poszukiwaniu miejsca przecięcia osi OX, jednak sposób dzielenia przedziału na podprzedziały nieco się różni. W przedziale [a,b] tworzymy sieczną między punktem (a,0), a (b,f(b)). Znajdujemy miejsce przecięcia się siecznej z wykresem funkcji, [c,f(c)]. Tworzymy przedziały [a,c] i [c, b], prowadzimy sieczną przez punkty (c,0) i (b,(fb)) i powtarzamy operacje, z utworzonych wcześniej przedziałów wybierając ten, który spełnia twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego. Tę metodę również zaimplementowaliśmy rekurencyjnie.



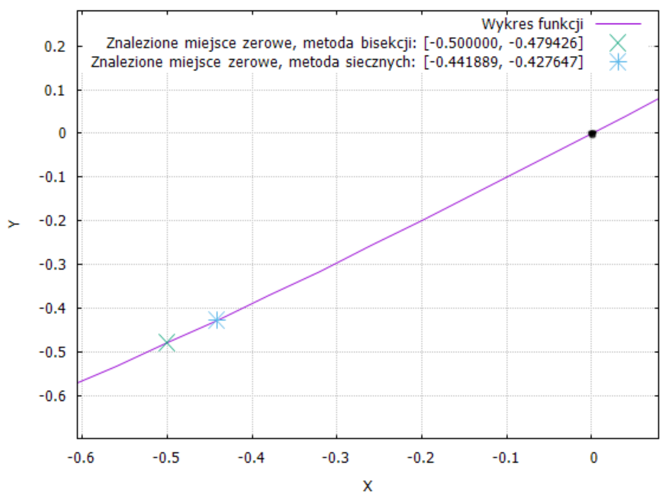
Stosowanie rekurencji w przypadku podanych metod jest uzasadnione, gdyż tempo przyrostu złożoności obliczeniowej jest tutaj logarytmiczne.

Wyniki

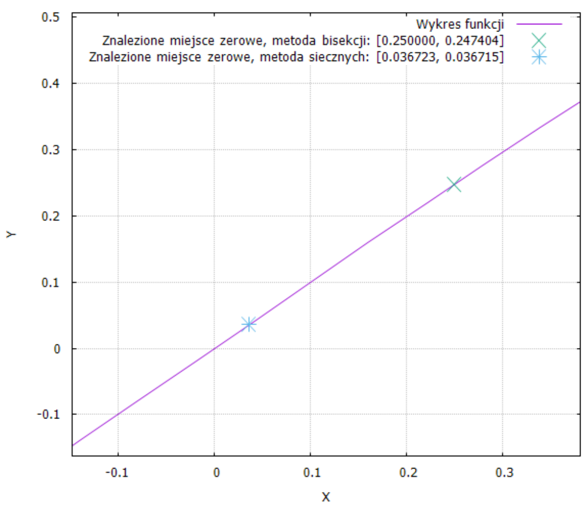
Zaczynamy od zbadania funkcji trygonometrycznej sin(x).



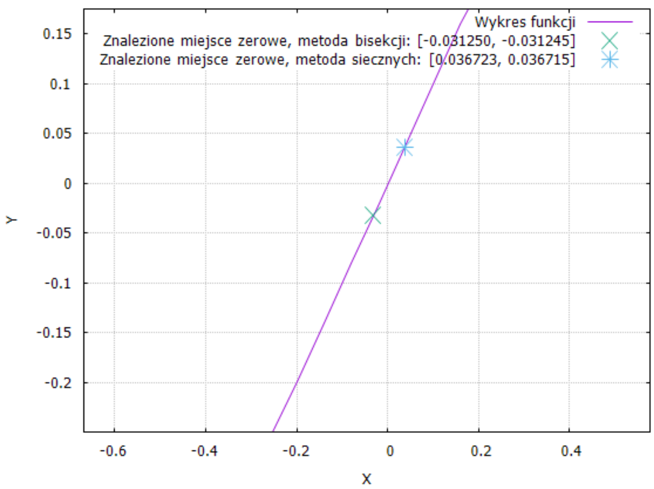
Wybieramy przedział, w którym występuje miejsce zerowe. W naszych rozważaniach użyjemy przedziału [-2,1], a poszukiwane przez nas miejsce zerowe to punkt [0,0].



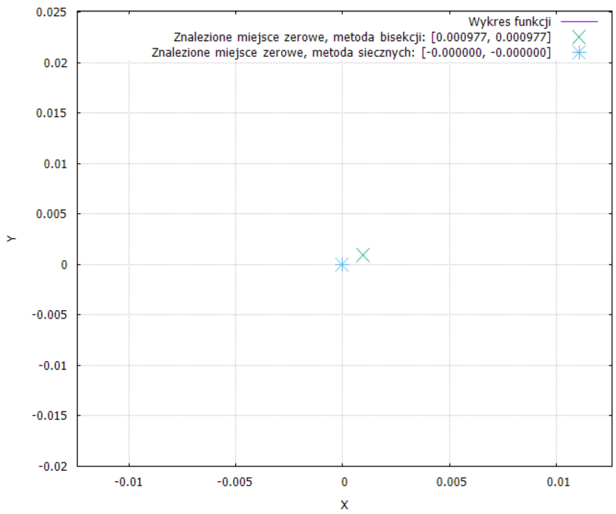
Warunek dokładnościowy: **epsilon = 0.5**.
Obie metody są równie nieskuteczne, gdyż zatrzymują się zaraz po osiągnięciu danego przybliżenia. Aczkolwiek, metoda siecznych „trafiła” trochę bliżej celu.



Warunek iteracyjny. **Limit iteracji = 3.**
Ten wykres potwierdza nasze przypuszczenia wyniesione z analizy warunku dokładnościowego (epsilon = 0.0001). Metoda siecznych znacznie szybciej zbliża się do miejsca zerowego, niż metoda bisekcji.

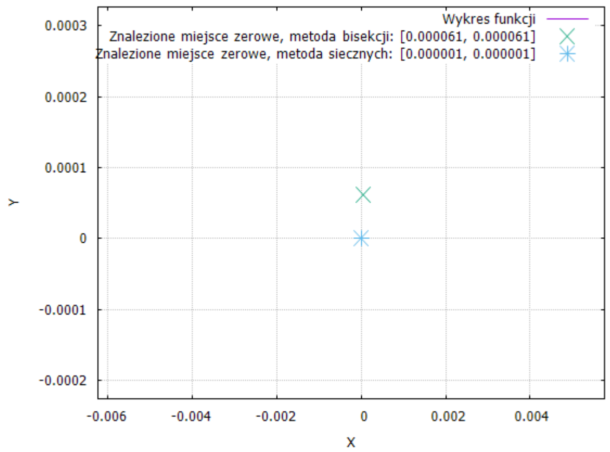


Epsilon = 0.05



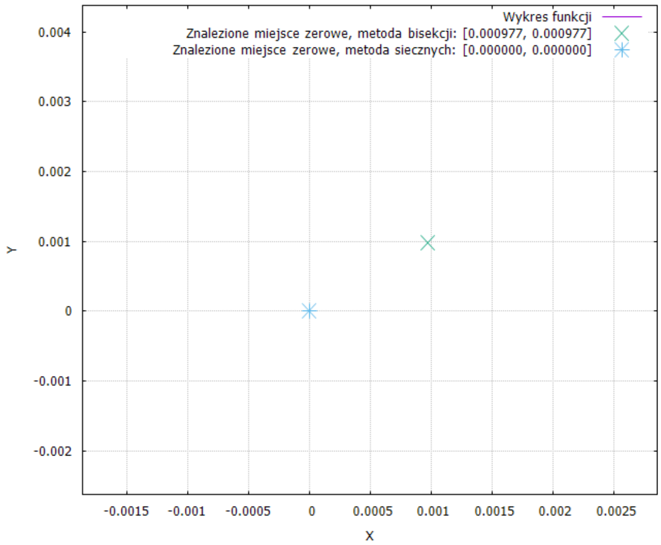
6 iteracji.

W zaledwie sześciu krokach metoda siecznych odnalazła bardzo dokładne położenie miejsca zerowego. Współrzędne znalezionego punktu wynoszą (-7.83518e-12, -7.83518e-12). Dokładność metody bisekcji sięga rzędu tysięcznych.



Epsilon = 0.0001

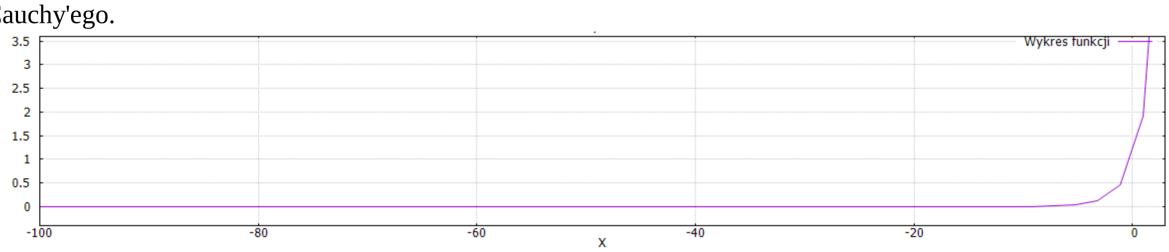
Wyraźnie widać, że metoda siecznych jest znacznie bliższa prawidłowemu punktowi [0,0]. Oznacza to, że w ostatnim kroku przed osiągnięciem warunku końcowego metoda siecznych dokonała znacznie większego skoku w kierunku prawidłowego punktu, niż metoda bisekcji. Pozwala to przypuszczać, że metoda siecznych szybciej wyszukuje miejsce zerowe funkcji.



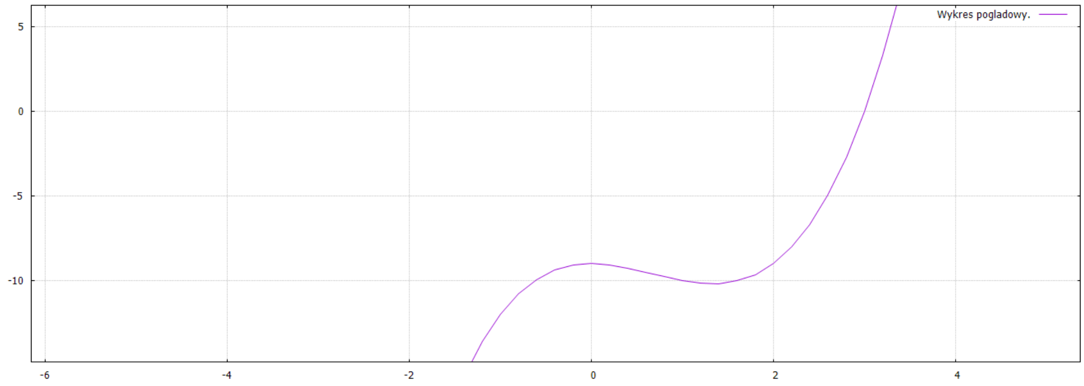
12 iteracji.

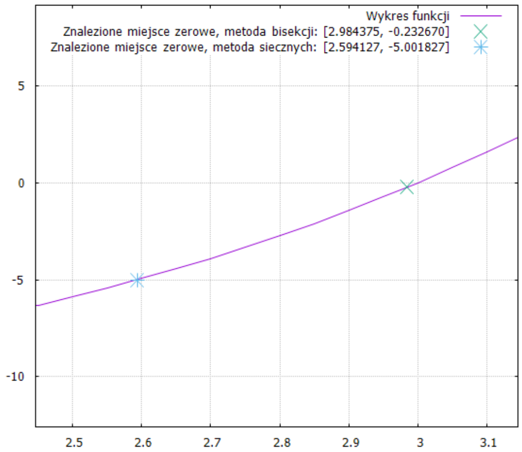
Przy takiej liczbie kroków dokładność metody bisekcji nie zmieniła się. Punkt znaleziony przez metodę siecznych ma współrzędne (1.62313e-105, 1.62313e-105), więc dokładność tej metody jest 10^{102} raza większa.

Poniżej znajduje się wykres funkcji $f(x) = 2^x$. Żadna z metod w żadnym przypadku nie uzna, że znalazła na nim miejsce zerowe, pomimo że poniżej zera może on przyjmować bardzo niskie wartości. W żadnym przedziale nie spełnia on bowiem twierdzenia Bolzana-Cauchy'ego.



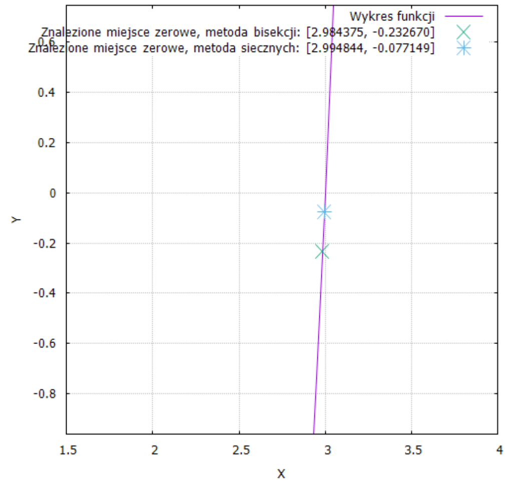
Poniżej znajduje się wykres funkcji $f(x) = x^3 – 2x^2 - 9$. Poszukamy miejsca zerowego w przedziale [1.5,4], z wykorzystaniem warunku iteracyjnego sprawdzając, która metoda potrzebuje mniej kroków, by zbliżyć się do miejsca zerowego (3,0).





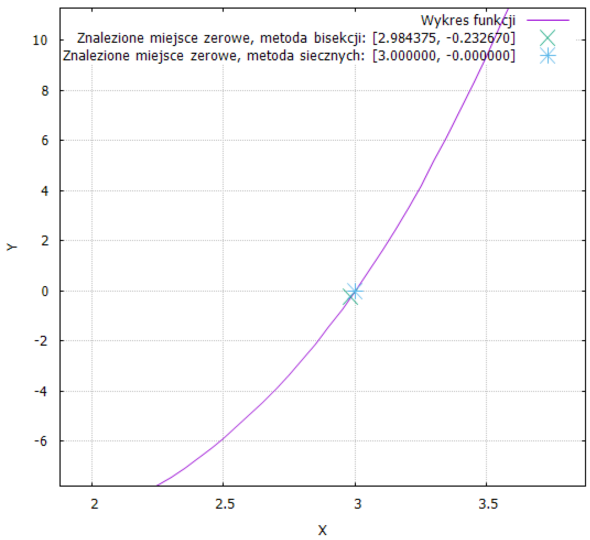
3 iteracje.

Co ciekawe, metoda siecznych wcale nie jest najlepsza przy niewielkiej liczbie iteracji oraz funkcjach o szybko rosnących wykresach.



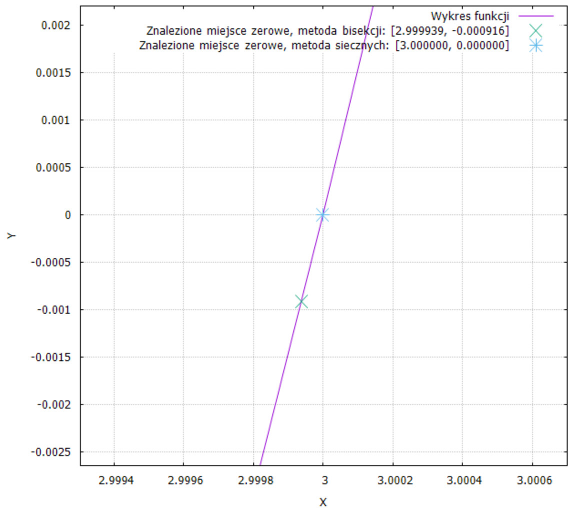
6 iteracji

Wynik metody siecznych znacznie zbliżył się się do prawidłowego, natomiast wynik metody niemal się nie zmienił.



9 iteracji

Metoda siecznych dotarła do punktu (3, -2.34819e-10), podczas gdy metoda siecznych nie dokonała żadnego postępu.



18 iteracji

Wnioski

- Metoda bisekcji działa równie sprawnie dla wszystkich funkcji, pozwalając na przybliżenie wyniku w kilku zaledwie krokach. Osiągnięcie dobrej dokładności wymaga jednak wielu iteracji.
- Metoda siecznych, przy niewielkiej liczbie iteracji może się okazać bardzo nieoptymalna, jednak po pięciu-sześciu krokach znacznie szybciej zawęża obszar poszukiwania, niż metoda bisekcji. Jest przez to w stanie osiągnąć znacznie wyższą dokładność niż metoda bisekcji. Niestety w każdym kroku wykonywane są znacznie bardziej skomplikowane obliczenia.
- Obie metody wymagają wydzielenia przedziału tak, by znajdowało się w nim dokładnie jedno miejsce zerowe. W innych przypadkach są zawodne. Pa przykład przy parzystych liczbach pierwiastków nie jest spełnione twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego.