Símbolos de Christoffel:

Sejam $X(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular e E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de X.

Denominamos os Γ_{ij}^{k} abaixo de símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^{2} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$

Símbolos de Christoffel (Demonstração).

Seja $X(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular. Como para cada $(u,v) \in \mathcal{U}$ os vetores X_u, X_v e N são linearmente independentes, então temos que X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}, N_u e N_v podem ser expressos como combinação linear de X_u, X_v e N.

Isto é,

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + a_{11} N,$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^{1} X_u + \Gamma_{12}^{2} X_v + a_{12} N, \qquad (1)$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^{1} X_u + \Gamma_{22}^{2} X_v + a_{22} N,$$

$$N_u = b_{11} X_u + b_{12} X_v,$$

$$N_v = b_{21} X_u + b_{22} X_v,$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^{k}, a_{ij}, b_{ij} devem ser determinados.

Para determinar a_{ij} basta aplicar o produto interno com o vetor N nas três primeiras relações acima. Ou seja,

$$\langle X_{uu}, N\rangle = e = \langle \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + a_{11}N, N\rangle = a_{11},$$

$$\langle X_{uv}, N\rangle = f = \langle \Gamma_{12}^{1} X_u + \Gamma_{12}^{2} X_v + a_{12}N, N\rangle = a_{12},$$

$$\langle X_{vv}, N\rangle = g = \langle \Gamma_{22}^{1} X_u + \Gamma_{22}^{2} X_v + a_{22}N, N\rangle = a_{22}.$$

Portanto, $a_{11} = e$, $a_{12} = f$ e $a_{22} = g$.

Os outros coeficientes são determinados considerando o produto interno de cada uma das relações em (1) com X_u e X_v. Ou seja,

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \langle \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + eN, X_u\rangle$$

$$= \Gamma_{11}^{1} E + \Gamma_{11}^{2} F,$$

$$\langle X_{uu}, X_v\rangle = \langle \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + eN, X_v\rangle$$

$$= \Gamma_{11}^{1} F + \Gamma_{11}^{2} G,$$

$$\langle X_{uv}, X_u\rangle = \langle \Gamma_{12}^{1} X_u + \Gamma_{12}^{2} X_v + fN, X_u\rangle$$

$$= \Gamma_{12}^{1} E + \Gamma_{12}^{2} F,$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, X_v \rangle$$

$$= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G,$$

$$\langle X_{vv}, X_u \rangle = \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, X_u \rangle$$

$$= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \qquad (2)$$

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, X_v \rangle$$

$$= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G,$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental.

Como $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$ então

$$E_u = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle \Rightarrow \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_u,$$

$$E_v = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle \Rightarrow \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_v,$$

$$G_u = 2\langle X_{uv}, X_v \rangle \Rightarrow \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} \cdot G_u,$$

$$G_v = 2\langle X_{vv}, X_v \rangle \Rightarrow \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} \cdot G_v,$$

$$F_u = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{2} E_v$$

$$\Rightarrow \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \qquad (3)$$

$$F_v = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle = \langle X_u, X_{vv} \rangle + \frac{1}{2} G_u$$

$$\Rightarrow \langle X_u, X_{vv} \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u,$$

Substituindo as igualdades (3) em (2):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} E_u = \Gamma_{11}^{1} E + \Gamma_{11}^{2} F, \\ F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{11}^{1} F + \Gamma_{11}^{2} G, \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{12}^{1} E + \Gamma_{12}^{2} F, \\ \frac{1}{2} G_u = \Gamma_{12}^{1} F + \Gamma_{12}^{2} G, \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} F_v - \frac{1}{2} G_u = \Gamma_{22}^{1} E + \Gamma_{22}^{2} F, \\ \frac{1}{2} G_v = \Gamma_{22}^{1} F + \Gamma_{22}^{2} G \end{cases} \qquad (6)$$

Resolvendo os sistemas de equações (4), (5) e (6), obtém-se os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$

Por fim,

$$\langle N_u, X_u \rangle = \langle b_{11} X_u + b_{12} X_v, X_u \rangle$$

$$= b_{11} E + b_{12} F,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle b_{11} X_u + b_{12} X_v, X_v \rangle$$

$$= b_{11} F + b_{12} G, \qquad (7)$$

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle b_{21} X_u + b_{22} X_v, X_u \rangle$$

$$= b_{21} E + b_{22} F,$$

$$\langle N_v, X_v \rangle = \langle b_{21} X_u + b_{22} X_v, X_v \rangle$$

$$= b_{21} F + b_{22} G.$$

Como $\langle X_u, N \rangle = 0$ e $\langle X_v, N \rangle = 0$, então derivando essas igualdades em relação a u e v, obtém-se:

$$\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, N_u \rangle = 0 \Rightarrow \langle X_u, N_u \rangle = -\langle X_{uu}, N \rangle$$

$$\langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0 \Rightarrow \langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_{uv}, N \rangle,$$

$$\langle X_{uv}, N\rangle + \langle X_v, N_u\rangle = 0 \Rightarrow \langle X_v, N_u\rangle = -\langle X_{uv}, N\rangle,$$

$$\langle X_{vv}, N\rangle + \langle X_v, N_v\rangle = 0 \Rightarrow \langle X_v, N_v\rangle = -\langle X_{vv}, N\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle X_u, N_u\rangle &= -e, \\ \langle X_u, N_v\rangle &= -f, \\ \langle X_v, N_u\rangle &= -f, \\ \langle X_v, N_v\rangle &= -g. \end{aligned} \qquad (8)$$

Substituindo as igualdades (8) em (7)

$$\begin{cases} -e = b_{11}E + b_{12}F \\ -f = b_{11}F + b_{12}G \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} -f = b_{21}E + b_{22}F \\ -g = b_{21}F + b_{22}G \end{cases} \qquad (10)$$

Resolvendo os sistemas (9) e (10):

$$b_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \qquad b_{12} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$

$$b_{21} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \qquad b_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \quad \blacksquare$$