

Uma Introdução à Geometria Diferencial

José de Ribamar Viana Coimbra

UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por José de Ribamar Viana Coimbra e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de abril de 2008.



Prof. Dr. Edson Agustini
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Edson Agustini
- 2 Mercio Botelho Faria
- 3 Sueli Irene Rodrigues Costa

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Coimbra, José de Ribamar Viana

C665u Uma introdução à geometria diferencial/José de Ribamar Viana
Coimbra – Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Edson Agustini

Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Curvatura. 3. Curvas. 4. Superfícies
(Matemática) I. Agustini, Edson. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: An introduction to differential geometry

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential geometry. 2. Curves. 3. Surfaces
(Mathematical) 4. Curvature.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Mestre em Matemática


Banca examinadora: Prof. Dr. Edson Agustini (Faculdade de Matemática - UFU)
Prof. Dr. Mércio Botelho Faria (Depto. de Matemática - UFV)
Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC - Unicamp)

Data da defesa: 14/04/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de abril de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). EDSON AGUSTINI



Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



Prof. (a). Dr (a). MÉRCIO BOTELHO FARIA

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus filhos Clara e Mateus.

Agradecimentos

Agradeço:

À Deus.

Ao Prof. Dr Edson Agustini, que além de professor e orientador, é um amigo.

Aos alunos de iniciação científica Thiago Rodrigues da Silva e Laís Bássame Rodrigues da Universidade Federal de Uberlândia por concederem - ou auxiliarem em - várias das figuras desse trabalho.

Uma Introdução à Geometria Diferencial

Autor: JOSÉ DE RIBAMAR VIANA COIMBRA
Orientador: Prof. Dr. EDSON AGUSTINI

Resumo

A presente dissertação é um texto de *Geometria Diferencial* baseado nos principais textos editados em língua portuguesa sobre o assunto. A principal intenção ao redigir a dissertação foi compilar um material que possa ser utilizado em cursos introdutórios de Geometria Diferencial tanto em nível de licenciatura quanto de bacharelado. Para tornar o texto mais acessível, notas históricas sobre o desenvolvimento da Geometria Diferencial e seus principais personagens foram introduzidas logo no primeiro capítulo. Para facilitar o entendimento e o estudo do assunto, procurou-se inserir muitos exemplos e ilustrar fartamente o texto com figuras.

O trabalho está dividido em quatro partes:

- (i) Notas históricas;
- (ii) Estudo de curvas regulares no plano;
- (iii) Estudo de curvas regulares no espaço;
- (iv) Estudo de superfícies regulares.

A segunda e terceira partes estão finalizadas com as demonstrações dos *Teoremas Fundamentais das Curvas no Plano e no Espaço*, respectivamente, enquanto que a quarta parte está finalizada com o *Teorema de Gauss-Bonnet*.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Curvatura; Curvas; Superfícies.

An Introduction to Differential Geometry

Author: JOSÉ DE RIBAMAR VIANA COIMBRA

Adviser: Prof. Dr. EDSON AGUSTINI

Abstract

This dissertation is a text of *Differential Geometry* based on the most important texts edited in Portuguese about this subject. Our aim in this work were to compile a material that can be used as introduction to Differential Geometry in undergraduate courses. In order to turn the text more accessible, historical notes about the beautiful development of Differential Geometry and its great persons were introduced in the first chapter. Besides, in order to help the reader with the study of this subject, we put many examples and figures to illustrate the theory.

The work is divided in four parts:

- (i) Historical Notes;
- (ii) Study of regular curves in the plane;
- (iii) Study of regular curves in the space;
- (iv) Study of regular surfaces.

The second and third parts are finished with the proofs of the *Fundamental Theorem of Plane and Spatial Curves*, respectively, and the fourth part is finished with the *Egregium Theorem* and *Gauss-Bonnet Theorem*.

Key-words: Differential Geometry; Curvature; Curves; Surfaces.

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução	1
1 Um Pouco de História da Geometria	3
2 Curvas no Plano	11
2.1 Curvas Parametrizadas	11
2.2 Reparametrização de Curvas	19
2.3 Curvatura e Equações de Frenet	27
2.4 Estudo do Sinal de Curvatura: Convexidade Local	34
2.5 Raio de Curvatura e Círculo Osculador	36
2.6 O Teorema Fundamental das Curvas no Plano	41
2.7 Determinando Curvas Regulares de Curvatura k	42
3 Curvas no Espaço	47
3.1 Curvas Parametrizadas	47
3.2 Reparametrização de Curvas	48
3.3 Curvatura, Torção e Equações de Frenet	51
3.4 Curvas Regulares Planas e Torção	59
3.5 Hélices	61
3.6 Representação Canônica das Curvas Regulares do Espaço	63
3.7 Significado Geométrico do Sinal da Torção	63
3.8 Teorema Fundamental das Curvas Espaciais	66
4 Superfícies	73
4.1 Superfícies Parametrizadas	73
4.2 Mudança de Parâmetros	80
4.3 Primeira Forma Quadrática	83
4.4 Aplicação Normal de Gauss	89
4.5 Segunda Forma Quadrática	93
4.6 Curvatura Gaussiana e Curvatura Média	103
4.7 Classificação de Pontos em Superfícies	104
4.8 Geodésicas	107
4.9 Três Importantes Teoremas da Geometria Diferencial	113
Referências Bibliográficas	119
Índice Remissivo	121

Introdução

A presente dissertação é um texto introdutório de Geometria Diferencial acessível a alunos de licenciatura e bacharelado em Matemática. As aplicações das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra Linear ao estudo das superfícies e das curvas no plano e no espaço, apresentadas neste trabalho, são seguidas de uma grande quantidade de exemplos ilustrados que, esperamos, possa ajudar na compreensão dos conceitos e resultados desenvolvidos.

Iniciamos o trabalho com um capítulo sobre a história da Geometria com ênfase na Geometria Diferencial. Nessas notas históricas, começamos nossa explanação desde os primórdios da Geometria até a época de Hilbert, comentando brevemente a contribuição dos principais estudiosos da área para o desenvolvimento da Geometria Diferencial.

Na parte de curvas parametrizadas, nossa intenção foi compilar um material que, a partir dos conceitos de curvatura e torção, permitisse caracterizar, a menos de movimento rígido no plano ou espaço, as várias classes de curvas bem como obter propriedades gerais dessas classes de curvas. Enfatizamos o fato de que, ao permitir que a curvatura de curvas no plano possa ser negativa, é possível fazer um interessante estudo de convexidade local de tais curvas.

Na parte de superfícies parametrizadas, utilizamos as formas quadráticas associadas a uma superfície regular para estudar suas propriedades. A primeira forma quadrática está relacionada à métrica da superfície e trata de seus aspectos geométricos intrínsecos, como, por exemplo, comprimento de curvas, ângulos, áreas e curvatura (esta última devido ao extraordinário Teorema Egregium de Gauss, uma vez que a curvatura é definida utilizando-se a segunda forma quadrática). Em especial, a Teoria de Contato de Ordem 2 por meio de parabolóides osculadores constitui um interessante tópico apresentado neste trabalho. A segunda forma quadrática está relacionada aos aspectos extrínsecos da superfície que permitem entender a maneira como ela se encontra mergulhada no espaço ambiente \mathbb{R}^3 .

O trabalho está dividido do seguinte modo:

Capítulo 1: Notas históricas sobre o desenvolvimento da Geometria Diferencial.

Capítulo 2: Estudo de curvas parametrizadas regulares no plano.

Capítulo 3: Estudo de curvas parametrizadas regulares no plano.

Capítulo 4: Estudo de superfícies regulares.

Referências Bibliográficas.

José de Ribamar Viana Coimbra
Caxias - MA, Março de 2008

Capítulo 1

Um Pouco de História da Geometria

Neste capítulo, contribuimos com a redação de algumas páginas da belíssima história da Geometria, desde seus primórdios até a época do grande matemático e lógico alemão David Hilbert. Dado os objetivos do presente trabalho, optamos por dar maior ênfase aos estudiosos que desenvolveram a Geometria Diferencial e que emprestaram seus nomes aos muitos teoremas que fundamentam essa área da Matemática. Nossa fonte de referências foi bastante ampla, passando por [2], [4], [19] e diversos fragmentos de notas históricas encontradas em alguns textos de Geometria Diferencial. As fotos apresentadas nesse capítulo são de domínio público e foram todas obtidas no *site* de História da Matemática da *University of Saint Andrews* (referência [19]).

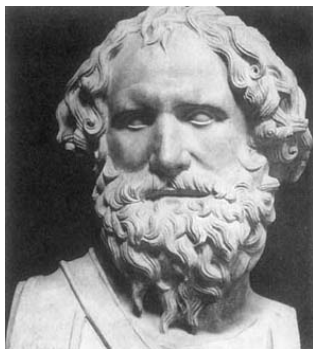
A palavra *geometria* origina-se do idioma grego e significa *medir a terra*, indicando que sua origem, como área de estudos, foi motivada pela necessidade de demarcação de terras, possivelmente para agricultura. Não existe consenso entre os historiadores antigos no que se refere a um marco inicial da geometria como área de estudos, entretanto, é inegável que boa parte de suas raízes encontram-se no antigo Egito e na Babilônia. Formas primitivas de geometria são encontradas também entre os hindus e chineses, embora, nesses povos, a geometria parece ter sido apresentada apenas como um conjunto de regras empíricas.

A geometria tal qual a conhecemos hoje, como uma teoria lógico-dedutiva, teve origem e desenvolvimento na antiga Grécia, notadamente nos textos de Euclides de Alexandria. Euclides foi o matemático grego responsável pela compilação de praticamente toda a matemática desenvolvida até sua época em uma monumental obra de 13 volumes chamada de “Os Elementos”. Seu mérito não se restringe apenas à compilação, mas também à introdução do método lógico-dedutivo no desenvolvimento de uma teoria, isto é, do método axiomático, tão conhecido na atual matemática. Na obra de Euclides temos dez axiomas, sendo cinco “noções comuns”, que Euclides acreditava serem verdades aceitas sem contestações em qualquer ciência, e cinco “postulados” que pretendiam ser proposições específicas da geometria e que também deveriam ser aceitas sem contestações. A partir desses axiomas, Euclides deduziu 465 proposições, dentre as quais figuram também resultados de geometria espacial e teoria dos números (do ponto de vista geométrico). Os livros didáticos de geometria, confeccionados ao longo do tempo, possuem, até hoje, “Os Elementos” de Euclides como base. Trata-se da segunda obra mais editada no mundo, perdendo apenas para a Bíblia.

Sabe-se que Euclides nasceu por volta do ano 325 a.C. e morreu por volta de 265 a.C. Sabe-se também que ele viveu boa parte de sua vida na cidade de Alexandria, no Egito, onde trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria.



EUCLIDES



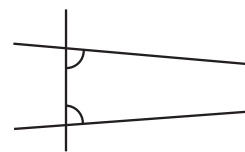
ARQUIMEDES



APOLONIO

No que se refere à *geometria diferencial*, que atualmente significa o estudo da geometria com o auxílio do cálculo diferencial e integral, postula-se que esta tenha começado com o estudo de curvas notáveis, que são abundantemente encontradas nas obras de Euclides, Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga, tidos como os três maiores matemáticos da antigüidade. Entretanto, sua roupagem atual e seus principais teoremas, como o *Teorema Egregium*, tiveram seu início com Carl Gauss em seu trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curva*, de 1828, e coincide com uma época em que o famoso “Problema das Paralelas”, que consistia em tentar provar que o Quinto Postulado de Euclides era independente dos demais, estava para ser resolvido. Tal postulado foi enunciado por Euclides, de modo não muito auto-evidente, do seguinte modo:

“Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.”



A tentativa de resolução do “Problema da Paralelas” levou à descoberta das geometrias não-euclidianas nesta mesma época por Gauss, Nikolai Lobachewsky e Janos Bolyai.



LOBACHEWSKY



BOLYAI

Outro personagem importante no desenvolvimento da geometria diferencial foi Bernhard Riemann que em 1854 escreveu e apresentou o trabalho *As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria* para admissão como docente na Universidade de Göttingen. Este trabalho é considerado o marco zero da criação da atual *geometria riemanniana* e nele a noção de “espaço” é tomada como sendo resultado da “colagem” de abertos do \mathbb{R}^n sendo que a cada ponto é associada uma forma quadrática que hoje chamamos de *métrica*. A partir da métrica, Riemann definiu as geodésicas como sendo as curvas que localmente minimizam distâncias entre pontos e, também, a noção de curvatura seccional. A noção de curvatura gaussiana surgiu no trabalho de Gauss.



GAUSS



RIEMANN

Vale ressaltar que Gauss havia demonstrado que a curvatura (gaussiana) de uma superfície do \mathbb{R}^3 depende apenas de sua métrica e não da forma como a superfície está mergulhada no \mathbb{R}^3 . Nessa demonstração Gauss obteve uma expressão explícita para a curvatura em termos dos coeficientes da métrica (isto é, coeficientes da Primeira Forma Quadrática) e de suas derivadas. Este resultado, conhecido como Teorema Egregium, abriu as portas para o estudo de superfícies abstratas (como os modelos euclidianos para geometrias não euclidianas) e sua geometria intrínseca e, além disso, Riemann fez uso explícito desse teorema para estabelecer seu conceito de curvatura seccional. No entanto, Riemann não apresentou expressão para o cálculo dessa curvatura, embora tenha descrito como ela poderia ser calculada geometricamente. Esse trabalho coube a Elwin Christoffel e Rudolf Lipschitz que, em 1869, introduziram os atualmente chamados *símbolos de Christoffel*.



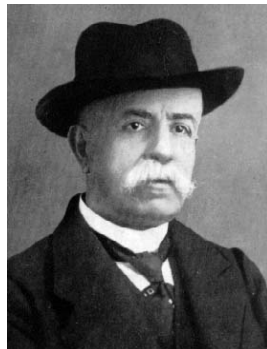
CHRISTOFFEL



LIPSCHITZ



BELTRAMI



RICCI-CURBASTRO



LEVI-CIVITA

Trabalhos posteriores como os de Eugênio Beltrami, sobre a pseudo-esfera, Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita sobre a criação da noção de derivação covariante e da noção de transporte paralelo,

Pierre Bonnet sobre as propriedades de geodésicas, incluindo o conceito de curvatura geodésica (Teorema de Gauss-Bonnet; Gauss publicou um caso especial desse teorema) e David Hilbert sobre os fundamentos da geometria (*Grundlagen der Geometrie*, de 1900) deram a roupagem que encontramos atualmente na geometria diferencial e geometria riemanniana.



BONNET



HILBERT

UMA LINHA DO TEMPO RELACIONADA À GEOMETRIA DIFERENCIAL

Buscando uma melhor contextualização histórica da geometria diferencial, faremos uma breve linha de tempo com os seus principais personagens, destacando as contribuições mais pertinentes.

Euclides de Alexandria (325 a.C.-265 a.C.), **Arquimedes de Siracusa** (287 a.C.-212 a.C.) e **Apolônio de Perga** (262 a.C.-190 a.C.)

Conforme descrito acima, as idéias primárias da atual geometria diferencial possuem raízes nas obras desses três grandes matemáticos do antigo império grego de Alexandre, o grande. A obra de Euclides é o ponto de partida do método axiomático dedutivo na geometria, enquanto que nas obras de Arquimedes e de Apolônio há o estudo de propriedades de uma gama enorme de curvas que permeiam os atuais cursos de geometria diferencial.

Pierre Fermat (1601-1665) e **René Descartes** (1596-1650)

Ambos franceses, criaram o método das coordenadas ou a geometria analítica, que é o “método que atribui a cada ponto do espaço tridimensional uma terna ordenada de coordenadas (x, y, z) em relação aos três eixos ortogonais, permitindo relacionar a geometria com a álgebra”.



FERMAT



DESCARTES

Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1649-1727)

Leibniz era alemão e Newton inglês. Eles descobriram, independentemente, algoritmos do cálculo infinitesimal, que possibilitam o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais.



LEIBNIZ



NEWTON

Christian Huygens (1629-1695), Alexis Clairaut (1713-1765) e Gaspard Monge (1746-1818)

Huygens era holandês e publicou um trabalho sobre curvas planas, originando os conceitos de involuta e evoluta de uma curva. Clairaut era francês e, ao estudar as curvas no espaço tridimensional, limitou-se às propriedades de primeira ordem, primando-se pelas derivadas primeiras e fazendo um interessante estudo sobre retas tangentes. Monge era francês e discutiu conceitos de curvatura e torção de uma curva espacial: “a torção em um ponto de uma curva mergulhada no espaço é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de estar contida em um plano numa vizinhança daquele ponto; as curvas espaciais que estão contidas em um plano, ditas curvas planas, são caracterizados por terem torção nula”.



HUYGENS



CLAIRAUT



MONGE

Leonhard Euler (1707-1783), Louis Cauchy (1789-1857) e Jean Meusnier (1754-1793)

Euler nasceu na Basileia, Suíça. Ele se empenhou em escrever sobre o problema da determinação de quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente, sem distorcer-se, sobre um plano, como é o caso do cilindro e do cone, o que requer que a superfície seja “folheada” por retas, isto é, sejam superfícies regradas. Cauchy era francês e publicou “*Leçons sur l'application du calcul infinitesimal à la géométrie*” que introduziu novos métodos aos estudos da geometria, além de sistematizar e esclarecer diversos cálculos já utilizados por seus antecessores; por outro lado ele faz um refinamento nos trabalhos de Monge sobre a curvatura e a torção de uma curva espacial chegando às formulas, conhecidas atualmente como de *Frenet-Serret*, que “expressam o comportamento local da curva em função da curvatura e da torção em

relação a um sistema de coordenadas móvel”. Já o francês Meusnier publicou, em 1776, um teorema sobre curvaturas normais que afirma que “todas as curvas de uma superfície que têm, em um ponto, a mesma reta tangente, têm, nesse ponto a mesma curvatura normal”. Meusnier também trabalhou em algumas propriedades de superfícies que chamamos atualmente de “mínimas”, como os helicóides.



EULER



CAUCHY

Carl Gauss (1777-1855) e Bernhard Riemann (1826-1860)

Conforme descrito acima, os alemães Gauss e Riemann podem ser considerados os criadores da moderna geometria diferencial e sua generalização: a geometria riemanniana. Os trabalhos fundamentais foram: *Disquisitiones generales circa superficies curva*, de 1828, de Gauss e *As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria*, de 1854, de Riemann.

Eugênio Beltrami (1835-1900), Félix Klein (1849-1925) e Henry Poincaré (1854-1912)

O italiano Beltrami, tendo por base as idéias de Riemann, publica uma análise de espaços n -dimensionais de curvatura constante. Uma criação importante de Beltrami foi o primeiro modelo parcial de geometria não euclidiana, o modelo da pseudo-esfera para a Geometria Hiperbólica, que possui curvatura gaussiana constante negativa e utiliza a métrica euclidiana induzida do espaço \mathbb{R}^3 . O alemão Klein, que em 1872 tornou-se professor na Universidade de Erlanger, proferiu, nessa ocasião, uma conferência que mais tarde ficou conhecida como *Programa Erlanger*. Nessa conferência ele declarou que cada tipo de geometria consistia do estudo dos invariantes de um particular grupo de transformações, por exemplo, na geometria euclidiana, o grupo de transformações seria o grupo dos movimentos rígidos do plano (isometrias). Esse programa influenciou de modo muito contundente o desenvolvimento da geometria no século XX. Além disso, vários modelos para geometrias não euclidianas foram introduzidos por Klein, bem como pelo francês Poincaré. Esses modelos, de curvatura gaussiana constante, fazem uso de superfícies abstratas, sendo que a métrica utilizada difere da euclidiana.



KLEIN



POINCARÉ

Pierre Bonnet (1819-1892), **Elwin Christoffel** (1829-1900) e **Rudolf Lipschitz** (1832-1903)

O francês Bonnet publicou um trabalho, em 1848, sobre propriedades de geodésicas em superfícies e introduziu o conceito de curvatura geodésica. Um dos principais teoremas da geometria diferencial, o Teorema de Gauss-Bonnet, é de sua autoria. Já os alemães Christoffel e Lipschitz publicaram, em 1869, um trabalho no qual podemos encontrar expressões analíticas para o cálculo de curvatura seccional.

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e **Tulio Levi-Civita** (1873-1941)

Os italianos Ricci-Curbastro e seu aluno Levi-Civita publicaram trabalhos que originaram o conceito de derivação covariante e da noção de transporte paralelo, muito utilizados nos atuais cursos de geometria diferencial no estudo de geodésicas.

Ernst Minding (1806-1885), **Jean Frenet** (1819-1900) e **Joseph Serret** (1819-1885)

O polonês Minding publicou, em 1839, um importante teorema presente nos cursos de geometria diferencial, que é uma espécie de recíproca do Teorema Egregium de Gauss, com o acréscimo da hipótese da curvatura gaussiana constante. Seu teorema afirma que duas superfícies de mesma curvatura gaussiana constante são localmente isométricas. Os franceses Frenet e Serret estudaram curvas no espaço e publicaram, independente, as fórmulas que hoje são conhecidas como “Fórmulas de Frenet-Serret”. Frenet publicou seis fórmulas, em 1847, por ocasião da confecção de sua tese de doutoramento. Serret publicou nove fórmulas no total.



MINDING



SERRET

Benjamin Olinde Rodrigues (1794-1851) e **Joseph Liouville** (1809-1882)

Olinde Rodrigues era francês, de família judia proveniente da península ibérica, e aluno de Gaspard Monge. Sua principal contribuição em geometria diferencial reside em uma equação diferencial que relaciona curvatura normal e linhas de curvatura. No campo da geometria diferencial as contribuições do francês Liouville recaíram sobre o estudo de curvatura geodésica de curvas sobre superfícies regulares e, também, sobre transformações conformes sobre espaços que afirma que tais transformações são inversões ou homotetias (similitudes) ou compostas destas.



OLINDE RODRIGUES



LIOUVILLE

Hermann Minkowski (1864-1909) e Jacques Hadamard (1865-1963)

O lituano Minkowski criou e desenvolveu a chamada *geometria dos números*, por meio de obra homônima publicada em 1896, na qual usa métodos geométricos para resolver problemas em teoria dos números e física-matemática. Seus estudos sobre a *aritmética das formas quadráticas* fundamentou alguns resultados interessantes na geometria global de superfícies, conhecida como *Fórmulas Integrais de Minkowsky*, nas quais relaciona área de superfícies completas e compactas com integrais envolvendo curvaturas médias e gaussianas. O francês Hadamard provou dois importantes teoremas globais em geometria diferencial envolvendo difeomorfismos entre superfícies regulares completas.



MINKOWSKI



HADAMARD

David Hilbert (1862-1943)

Além da organização lógica da geometria, citada acima, o alemão Hilbert forneceu uma demonstração do *Teorema da Rigidez da Esfera*, provado pela primeira vez por H. Liebmann, além de provar a impossibilidade de um modelo bidimensional completo mergulhado no \mathbb{R}^3 , com métrica euclidiana, para a geometria hiperbólica.

Capítulo 2

Curvas no Plano

Neste capítulo, introduzimos as principais definições e resultados acerca de curvas parametrizadas no plano. As principais referências para esse assunto são [1], [3] e [18], nas quais nos baseamos. Nossas principais contribuições neste capítulo reside no estudo da *forma local das curvas regulares* (na Seção 2.2), no estudo da relação do *sinal de curvatura e a convexidade local de curvas regulares* (Seção 2.4) e na *determinação de curvas regulares planas a partir da curvatura* (Seção 2.7) sendo que esse último estudo é baseado na demonstração do Teorema Fundamental das Curvas no Plano (Seção 2.6) e na interpretação geométrica da curvatura dada no final da Seção 2.3.

2.1 Curvas Parametrizadas

Uma *curva parametrizada no plano* é uma aplicação

$$\begin{aligned} \alpha:]a, b[\subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} x:]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} & \text{e} & & y:]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) & & & t &\longmapsto y(t) \end{aligned}$$

suas *funções componentes* ou *funções coordenadas*.

Dizemos que

- (i) α é **de classe** C^0 quando x e y forem contínuas. Neste caso, também dizemos que α é contínua.
- (ii) α é **diferenciável de classe** C^k , $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, quando x e y forem diferenciáveis de classe C^k , ou seja, x e y possuem derivadas de ordem k e estas forem contínuas.
- (iii) α é **diferenciável de classe** C^∞ ou **suave** quando x e y forem diferenciáveis de classe C^∞ , ou seja, x e y possuem derivadas de qualquer ordem.

O **traço** de α é a imagem da aplicação α :

$$\text{Traço}(\alpha) = \text{Im}(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in]a, b[\subset \mathbb{R}\}.$$

O **gráfico** de α é o conjunto

$$\text{Gráfico}(\alpha) = \{(t, \alpha(t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in]a, b[\subset \mathbb{R}\}$$

que, obviamente, é diferente do traço de α .

Exemplo 2.1 A aplicação

$$\begin{aligned} \alpha:]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada, cujo traço é um **círculo** menos um ponto.

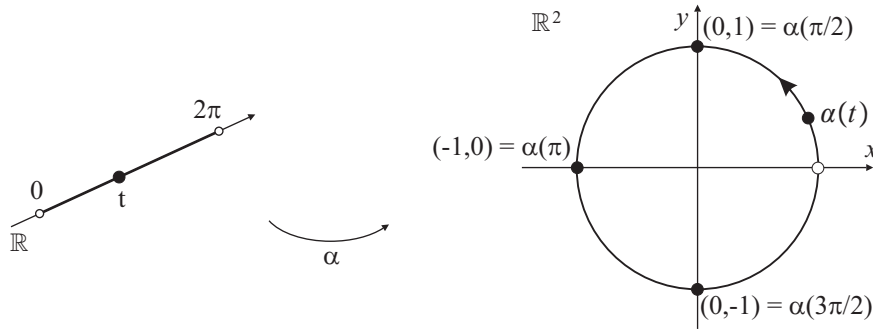


FIGURA 1: Círculo menos um ponto como curva parametrizada.

As funções componentes

$$\begin{array}{ccc} x:]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} y:]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t) \end{array}$$

são de classe C^∞ . Logo, α é suave.

Exemplo 2.2 A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \alpha: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{cases} (t, \frac{1}{t}), & \text{se } t \neq 0 \\ (0, 0), & \text{se } t = 0 \end{cases} \end{array}$$

é uma curva parametrizada cujo traço é uma **hipérbole** mais um ponto.

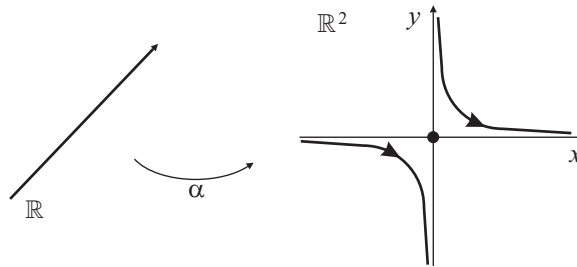


FIGURA 2: Hipérbole mais um ponto: curva parametrizada descontínua.

As funções componentes

$$\begin{array}{ccc} x: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} t & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} y: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases} \end{array}$$

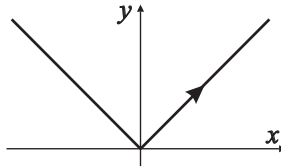
equivalem a

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} x: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \end{array} \text{ que é contínua} \\ \\ \begin{array}{ccc} y: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases} \end{array} \text{ que é descontínua} \end{array} \right.$$

Logo, α é descontínua.

Exemplo 2.3 Consideremos a curva parametrizada

$$\begin{array}{ccc} \alpha: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, |t|) \end{array}$$

FIGURA 3: Curva parametrizada de classe C^0 .

Temos que

$$\begin{aligned} x: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ é de classe } C^\infty. \\ t &\longmapsto t \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} y: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ não é de classe } C^1. \\ t &\longmapsto |t| \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} y: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto |t| = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t}{t} = -1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = y'(0).$$

Logo, y não é derivável em $t = 0$, ou seja, y não é de classe C^1 (mas é de classe C^0).
Conclusão: α é de classe C^0 mas não é de classe C^1 , pois não tem derivada em $t = 0$.

Exemplo 2.4 Consideremos

$$\begin{aligned} \beta: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{se } t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & \text{se } t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Temos $\text{Traço}(\beta) = \text{Traço}(\alpha)$ (α do Exemplo 2.3) e

$$\begin{aligned} x: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{e} & \quad y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0 \end{cases} & & \quad t \longmapsto t^2 \end{aligned}$$

A função y é de classe C^∞ e x é derivável em $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x(t)-x(0)}{t-0} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{x(t)-x(0)}{t-0} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} -t = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t)-x(0)}{t-0} = x'(0) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x': \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{é contínua.} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 2t & \text{se } t \geq 0 \\ -2t & \text{se } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, x é de classe C^1 e, portanto, β é de classe C^1 .

Observemos que x não é de classe C^2 pois

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x'(t) - x'(0)}{t - 0} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{x'(t) - x'(0)}{t - 0} = -2.$$

Conclusão: olhar o traço da curva parametrizada não permite tirar conclusões quanto a sua classe de diferenciabilidade.

Exemplo 2.5 (Generalização do Exemplo 2.4) A curva parametrizada

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t^m, t^m) & \text{se } t \geq 0 \\ (-t^m, t^m) & \text{se } t < 0 \end{cases} ; m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

é tal que $\text{Traço}(\gamma) = \text{Traço}(\alpha)$ (α do Exemplo 2.3) e γ é de classe C^{m-1} .

Observação: Se estivéssemos trabalhando com traços que fossem gráficos de funções $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é, $\alpha(t) = (t, f(t))$, teríamos que a presença de uma “quina” implicaria em não diferenciabilidade.

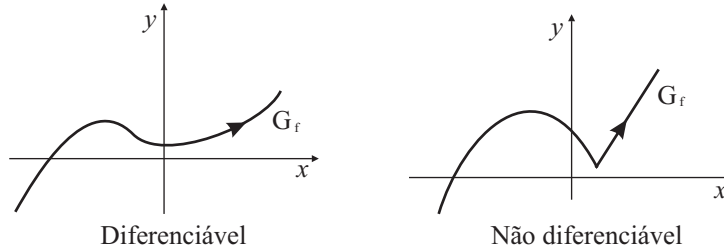


FIGURA 4: Em gráficos de funções a presença de uma “quina” implica em não diferenciabilidade.

De fato, $\alpha'(t) = (1, f'(t))$ e a existência de uma “quina” em um ponto significaria a existência de derivadas laterais de f diferentes neste ponto, o que implicaria na não diferenciabilidade de f e, portanto, de α .

CURVAS PARAMETRIZADAS DEFINIDAS EM INTERVALOS FECHADOS

Uma curva parametrizada no plano pode ser definida em um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e, neste caso, $\alpha: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada de classe C^k , $k \geq 1$, se existir $\delta > 0$ e $\beta:]a - \delta, b + \delta[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , $k \geq 1$, tal que $\beta|_{[a, b]} = \alpha$.

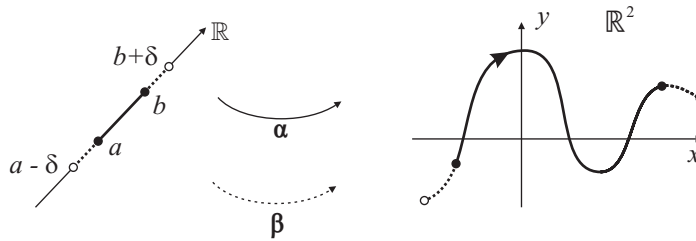


FIGURA 5: Curva parametrizada definida em intervalo fechado.

Exemplo 2.6 O círculo

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

é de classe C^∞ , pois $\exists \delta = \pi$ tal que

$$\begin{aligned} \beta:]-\pi, 3\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

é de classe C^∞ e $\beta|_{[0, 2\pi]} = \alpha$.

CURVAS REGULARES

Seja $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada de classe C^k , $k \geq 1$. Do Cálculo Diferencial temos que

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

é um **vetor tangente** a α em $t = t_0$ e, caso $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, a **reta tangente** a α em $t = t_0$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ e tem a direção do vetor $\alpha'(t_0)$, cuja equação vetorial é dada por

$$T_{t_0}(\lambda) = \alpha(t_0) + \lambda \alpha'(t_0); \lambda \in \mathbb{R}.$$

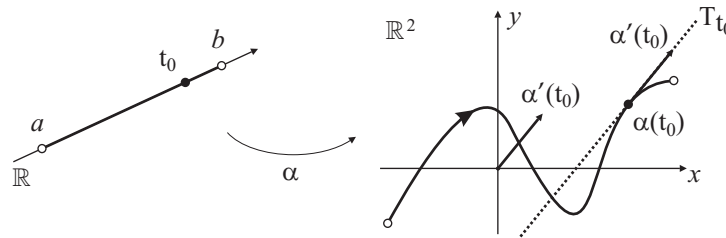


FIGURA 6: Vetor tangente e reta tangente a uma curva parametrizada em um ponto.

A curva parametrizada α é dita **curva regular de classe C^k** , $k \geq 1$, quando

(i) α é diferenciável de classe C^k .

(ii) $\alpha'(t) \neq (0, 0)$, $\forall t \in]a, b[$.

A condição (ii) implica na existência de reta tangente em todos os pontos do traço de α .

Exemplo 2.7 Consideremos o círculo menos um ponto

$$\begin{aligned} \alpha :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}.$$

Temos que α é de classe C^∞ e $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in]0, 2\pi[$. Logo, α é regular.

Exemplo 2.8 Consideremos

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{se } t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & \text{se } t < 0 \end{cases} \end{aligned}.$$

Vimos (Exemplo 2.4) que β é de classe C^1 e não é de classe C^2 , mas $\beta'(0) = (0, 0)$. Logo, β não é regular.

Exemplo 2.9 Consideremos a **espiral logarítmica**

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto e^t (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}.$$

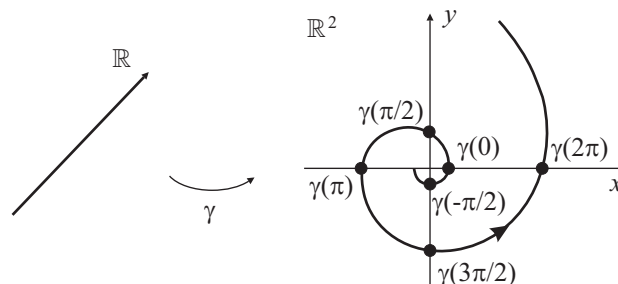


FIGURA 7: Espiral logarítmica.

Temos que

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos(t) \\ y(t) = e^t \sin(t) \end{cases}$$

são de classe C^∞ . Além disso, $\gamma'(t) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t))$. Assim

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0) = (0, 0) &\iff \begin{cases} e^{t_0} \cos(t_0) - e^{t_0} \sin(t_0) = 0 \\ e^{t_0} \sin(t_0) + e^{t_0} \cos(t_0) = 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} \cos(t_0) - \sin(t_0) = 0 \\ \sin(t_0) + \cos(t_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(t_0) = \sin(t_0) \\ \cos(t_0) = -\sin(t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja, $\sin(t_0) = \cos(t_0) = 0$, que é uma contradição. Por conseguinte, $\gamma'(t) \neq (0, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo, γ é regular.

Exemplo 2.10 Consideremos a *tratriz*

$$\begin{aligned} \alpha:]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(\frac{t}{2}))) \end{aligned}$$

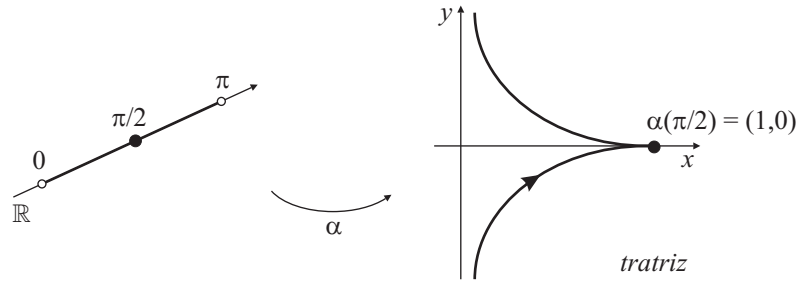


FIGURA 8: Tratriz.

Observemos que $t \in]0, \pi[$ é equivalente a $\frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Como $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\tan(\frac{t}{2})$, $\ln(\tan(\frac{t}{2}))$ estão definidas para $t \in]0, \pi[$ e são C^∞ , da Análise sabemos que composta de funções C^∞ é C^∞ . Logo, α é de classe C^∞ .

$$\text{Além disso, } \alpha'(t) = \left(\cos(t), -\sin(t) + \frac{1}{\tan(\frac{t}{2})} \left(\sec^2(\frac{t}{2}) \right) \frac{1}{2} \right) = \left(\cos(t), -\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)} \right).$$

Assim

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0) = (0, 0) &\iff \begin{cases} \cos(t_0) = 0 \\ -\sin(t_0) + \frac{1}{\sin(t_0)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(t_0) = 0 \\ \sin^2(t_0) = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos(t_0) = 0 \\ 1 - \cos^2(t_0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(t_0) = 0 \\ \cos^2(t_0) = 0 \end{cases} \iff t_0 = \frac{\pi}{2}; \quad (t \in]0, \pi[). \end{aligned}$$

Logo, $\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$, ou seja, α não é regular.

Observemos que excluindo-se $t = \frac{\pi}{2}$, α seria regular.

Observação: Uma curva ser regular implica que seu traço tem reta tangente em todos os pontos e, portanto, não possui “quinas”. No entanto, uma curva parametrizada cujo traço não possui “quinas” pode não ser regular. Mais ainda, duas curvas parametrizadas podem ter mesmo traço e uma ser regular e a outra não. Exemplo:

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^3, t^3) \end{aligned}$$

não é regular e

$$\begin{aligned} \beta: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t) \end{aligned}$$

é regular.

CURVAS REGULARES POR PARTES E CURVAS SIMPLES

Uma curva parametrizada no plano pode ser **regular por partes**, ou seja, $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular de classe C^k , $k \geq 1$, exceto para uma quantidade finita de valores de t nos quais $\alpha'(t)$ não existe ou $\alpha'(t) = (0, 0)$.

Quando uma curva parametrizada α é contínua, os pontos t tais que $\alpha'(t)$ não existe ou $\alpha'(t) = (0, 0)$ são chamados de **singularidades** de α . Se t for singularidade de α para qualquer reparametrização (Seção 2.2) de α , dizemos que t é uma **singularidade essencial** de α .

As singularidades essenciais de α formam “quinas” no traço de α .

Dizemos que uma curva parametrizada α é **simples** quando $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ for injetiva, isto é, se $t_0 \neq t_1$, então $\alpha(t_0) \neq \alpha(t_1)$. Se α não for simples, dizemos que α tem auto-intersecção.

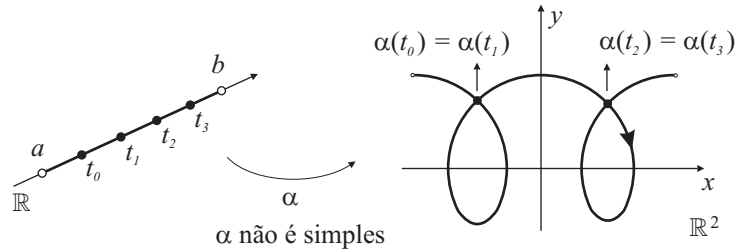


FIGURA 9: Curva não simples.

Exemplo 2.11 Um exemplo importante de curva regular por partes é a **ciclóide**, que pode ser construída mecanicamente considerando um círculo de raio a rolando sobre o eixo dos x sem deslizamento. Um ponto desse círculo descreve a ciclóide.

A Figura 10 representa a construção de uma ciclóide a partir de um círculo de raio 1.

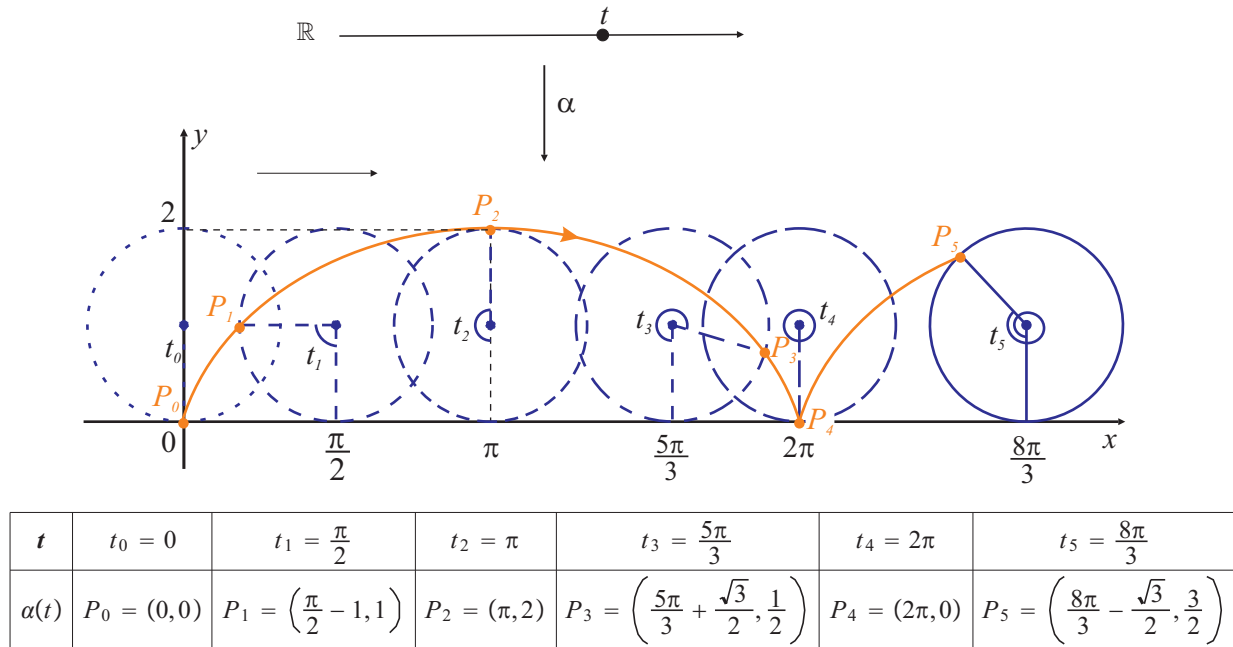


FIGURA 10: Ciclóide: uma curva regular por partes.

A parametrização sugerida pela construção descrita é

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

e α é regular por partes.

De fato, temos que α é de classe C^∞ pois $x(t) = t - \sin(t)$ e $y(t) = 1 - \cos(t)$ são de classe C^∞ . Além disso,

$$\alpha'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t)) = (0, 0) \iff \begin{cases} 1 - \cos(t) = 0 \\ \sin(t) = 0 \end{cases} \iff t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $\alpha'(2k\pi) = (0, 0)$, para $k \in \mathbb{Z}$, que são as singularidades de α e $\alpha'(t) \neq (0, 0)$, para $t \neq 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.12 Consideremos a curva parametrizada de classe C^∞ dada por

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto ((2 \cos(t) - 1) \cos(t), (2 \cos(t) - 1) \sin(t)) \end{aligned}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= ((-2 \sin(t)) \cos(t) + (2 \cos(t) - 1)(-\sin(t)), (-2 \sin(t)) \sin(t) + (2 \cos(t) - 1) \cos(t)) \\ &= (-2 \sin(2t) + \sin(t), 2 \cos(2t) - \cos(t)) \\ &= (0, 0) \iff \begin{cases} \sin(t) = 2 \sin(2t) \\ \cos(t) = 2 \cos(2t) \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim, se existisse t tal que $\alpha'(t) = (0, 0)$, então teríamos $1 = 4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t))$, ou seja, $1 = 4$, uma contradição. Logo, $\alpha'(t) \neq (0, 0), \forall t \in \mathbb{R}$, e, portanto, α é regular de classe C^∞ .

A curva α não é simples, pois possui auto-intersecção. De fato,

$$\alpha(t_0) = \alpha(t_1) \iff \begin{cases} (2 \cos(t_0) - 1) \cos(t_0) = (2 \cos(t_1) - 1) \cos(t_1) \\ (2 \cos(t_0) - 1) \sin(t_0) = (2 \cos(t_1) - 1) \sin(t_1) \end{cases}.$$

Assim, se todos os membros das equações acima fossem diferentes de zero teríamos $\tan(t_0) = \tan(t_1)$, ou seja, $t_0 = t_1 + k\pi$, ($t_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$). Em $[0, 2\pi]$ teríamos $t_0 = t_1 - \pi$ ou $t_0 = t_1 + \pi$.

Substituindo na 1ª equação:

$$\begin{aligned} (2 \cos(t_1 + \pi) - 1) \cos(t_1 + \pi) &= (2 \cos(t_1) + 1) \cos(t_1) \implies \\ (-2 \cos(t_1) - 1)(-\cos(t_1)) &= 2 \cos^2(t_1) - \cos(t_1) \implies \\ 2 \cos^2(t_1) + \cos(t_1) &= 2 \cos^2(t_1) - \cos(t_1) \implies \\ 2 \cos(t_1) &= 0 \implies \\ t_1 &= \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

que não serve nesse caso.

Logo, devemos procurar t_0 e t_1 que anulam algum fator do sistema acima:

$$\begin{aligned} 2 \cos(t_0) - 1 = 0 &\implies \cos(t_0) = \frac{1}{2} \implies t_0 = \frac{\pi}{3} \text{ ou } t_0 = \frac{5\pi}{3} \\ 2 \cos(t_1) - 1 = 0 &\implies t_1 = \frac{\pi}{3} \text{ ou } t_1 = \frac{5\pi}{3} \\ \cos(t_0) = 0 &\implies t_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t_0 = \frac{3\pi}{2} \\ \cos(t_1) = 0 &\implies t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t_1 = \frac{3\pi}{2} \\ \sin(t_0) = 0 &\implies t_0 = 0 \text{ ou } t_0 = \pi \\ \sin(t_1) = 0 &\implies t_1 = 0 \text{ ou } t_1 = \pi \end{aligned}$$

Testando as soluções-candidatas, encontramos $t_0 = \frac{\pi}{3}$ e $t_1 = \frac{5\pi}{3}$ como solução, ou seja, $\alpha(\frac{\pi}{3}) = \alpha(\frac{5\pi}{3}) = (0, 0)$ é o único ponto de auto-intersecção da curva α .

O traço de α é um *cardióide* (Figura 11).

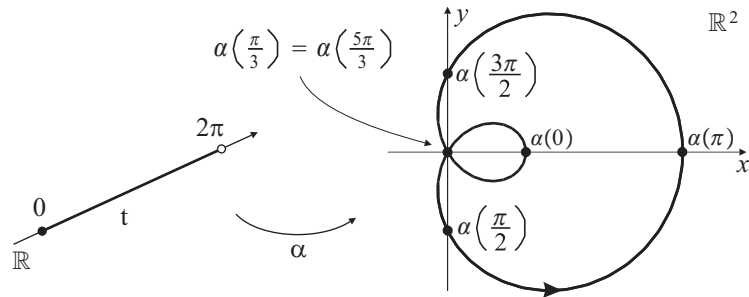


FIGURA 11: Cardióide: uma curva não simples.

2.2 Reparametrização de Curvas

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, sendo I um intervalo de \mathbb{R} .

O **comprimento de arco** da curva α entre os pontos t_0 e t_1 em I é dado por

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt.$$

Observação: do Cálculo Diferencial e Integral sabemos que a integral acima é obtida quando tomamos o traço de α como limite de uma sequência de comprimentos de linhas poligonais P_n que “tendem” ao traço de α . Neste caso, uma poligonal P_n possui vértices $\alpha(c_0), \dots, \alpha(c_n)$, sendo $t_0 = c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1} < c_n = t_1$ uma partição de $[t_0, t_1]$ e, à medida que a quantidade de vértices de P_n aumenta, a norma da partição tende a zero.

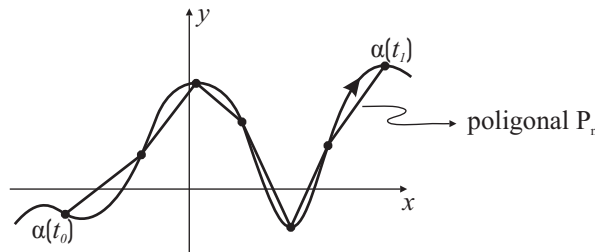


FIGURA 12: Comprimento de curva aproximado por poligonal.

Exemplo 2.13 Seja o círculo

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } r > 0. \\ t &\longmapsto (a + r \cos(t), b + r \sin(t)) \end{aligned}$$

O comprimento de α é

$$l = \int_0^{2\pi} |\alpha'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |(-r \sin(t), r \cos(t))| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Exemplo 2.14 Seja a espiral logarítmica

$$\begin{aligned} \alpha :]-\infty, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}^2. \\ t &\longmapsto e^t (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |\alpha'(t)| dt \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |(e^t (\cos(t) - \sin(t)), e^t (\sin(t) + \cos(t)))| dt \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \sqrt{e^{2t} (\cos(t) - \sin(t))^2 + e^{2t} (\sin(t) + \cos(t))^2} dt \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^t \sqrt{2} dt \\
 &= \sqrt{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) \\
 &= \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Observemos que $\alpha(0) = (1, 0)$.

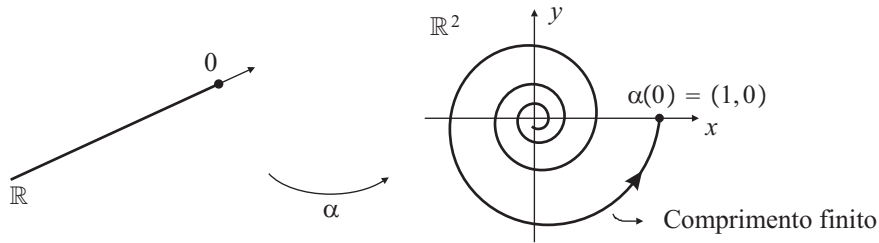


FIGURA 13: Domínio da parametrização com comprimento infinito e comprimento do traço finito.

CURVA REGULAR PARAMETRIZADA PELO COMPRIMENTO DE ARCO

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, e $t_0 \in I$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. A função

$$\begin{aligned}
 S : [t_0, +\infty[\cap I &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 t &\longmapsto \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du
 \end{aligned}$$

é chamada **função comprimento de arco** da curva α a partir do ponto t_0 .

Dizemos que a curva regular α de classe C^k , $k \geq 1$, está **parametrizada pelo comprimento de arco** quando $|\alpha'(t)| = 1$, $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$. Neste caso, $S(t) = t - t_0$.

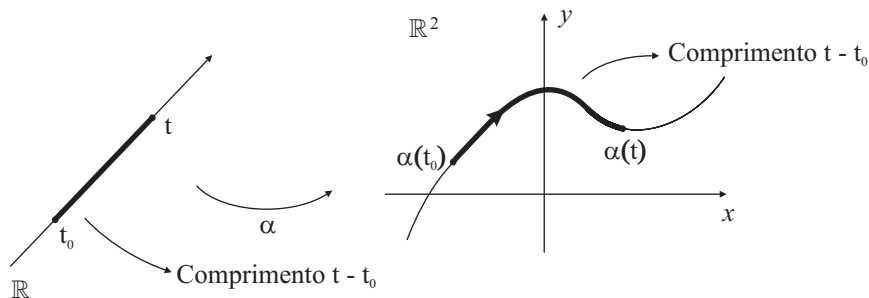


FIGURA 14: Curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Quando tomarmos $r = 1$ no Exemplo 2.13, $\alpha(t) = (a + r \cos(t), b + r \sin(t))$ temos α parametrizada pelo comprimento de arco, pois $|\alpha'(t)| = 1$.

No Exemplo 2.14, $\alpha(t) = e^t(\cos(t), \sin(t))$ não está parametrizada pelo comprimento de arco, pois $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}e^t$, que é diferente de 1 quando $t \neq \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

MUDANÇA DE PARÂMETROS E REPARAMETRIZAÇÃO

Sejam $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, e $]c, d[\subset \mathbb{R}$. Uma **mudança de parâmetros** para α é uma aplicação $\psi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ bijetiva de classe C^k tal que $\psi'(s) \neq 0$, $\forall s \in]c, d[$. A composta $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamada **reparametrização** de classe C^k de α .

Exemplo 2.15 O círculo

$$\begin{aligned} \alpha :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

é regular de classe C^∞ e

$$\begin{aligned} \psi :]0, \pi[&\longrightarrow]0, 2\pi[\\ s &\longmapsto 2s \end{aligned}$$

é bijetiva de classe C^∞ e $\psi'(s) = 2 \neq 0$, $\forall s \in]0, \pi[$.

Portanto, ψ é uma mudança de parâmetros de classe C^∞ para α e

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi :]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto (\cos(2s), \sin(2s)) \end{aligned}$$

é uma reparametrização de classe C^∞ de α .

Exemplo 2.16 Sejam as curvas regulares (semi-retas) de classe C^∞ dadas por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{e} & \quad \beta :]-3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, 3t) & s &\longmapsto (s+3, 3s+9) \end{aligned}$$

A curva β é uma reparametrização de α .

De fato, queremos mostrar que existe $\psi :]-3, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ bijetiva, de classe C^∞ e $\psi'(s) \neq 0$, $\forall s \in]-3, +\infty[$, tal que $\beta = \alpha \circ \psi$. Mas

$$\beta(s) = \alpha \circ \psi(s) \iff (s+3, 3s+9) = (\psi(s), 3\psi(s)) \iff \begin{cases} \psi(s) = s+3 \\ 3\psi(s) = 3s+9 \end{cases} \iff \psi(s) = s+3.$$

Temos $\psi :]-3, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ bijetiva, de classe C^∞ e $\psi'(s) = 1 \neq 0$, $\forall s \in]-3, +\infty[$, ou seja, ψ é uma mudança de parâmetros para α e, portanto, β é uma reparametrização de α .

Proposição 2.1 Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, e seja $\psi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ uma mudança de parâmetros de classe C^k para α . Então, $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ é reparametrização regular de classe C^k .

Demonstração.

A classe C^k de $\tilde{\alpha}$ segue do fato de que composta de aplicações de classe C^k é de classe C^k . Quanto a regularidade temos $\tilde{\alpha}'(s) = (\alpha \circ \psi)'(s) = \alpha'(\psi(s))\psi'(s)$. Mas $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in]a, b[$ e $\psi'(s) \neq 0$, $\forall s \in]c, d[$. Logo, $\tilde{\alpha}'(s) \neq 0$, $\forall s \in]c, d[$, ou seja, $\tilde{\alpha}$ é regular. \square

Observação: Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ uma mudança de parâmetros para α . Então, $\text{Traço}(\alpha) = \text{Traço}(\tilde{\alpha})$.
De fato: seja $\alpha(t) \in \text{Traço}(\alpha)$. Logo, $t \in]a, b[$. Como ψ é bijeção, $\exists s \in]c, d[$ tal que

$$\psi(t) = s \implies \alpha(\psi(s)) = \alpha(t) \implies \tilde{\alpha}(s) = \alpha(t).$$

Como $\tilde{\alpha}(s) \in \text{Traço}(\tilde{\alpha})$, temos $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s) \in \text{Traço}(\tilde{\alpha})$.

Conclusão: $\text{Traço}(\alpha) \subset \text{Traço}(\tilde{\alpha})$.

Analogamente, $\text{Traço}(\tilde{\alpha}) \subset \text{Traço}(\alpha)$.

Assim, $\text{Traço}(\tilde{\alpha}) = \text{Traço}(\alpha)$.

FORMA LOCAL DAS CURVAS REGULARES

Seja $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$. Seja

$$\begin{aligned} \alpha :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, F(t)) \end{aligned}$$

uma curva parametrizada. Como F é de classe C^k , temos que α é de classe C^k e $\alpha'(t) = (1, F'(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in]a, b[$, ou seja, α é regular.

Temos $\text{Traço}(\alpha) = \text{Im}(\alpha) = \{\alpha(t) : t \in]a, b[\} = \{(t, F(t)) : t \in]a, b[\} = \text{Gráfico}(F)$.

Proposição 2.2 (*Forma Local das Curvas Regulares*) *Sejam $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, e $t_0 \in]a, b[$. Então, existem $\delta > 0$ e $\psi :]c, d[\rightarrow]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, uma mudança de parâmetros de classe C^k para $\alpha|_{]t_0 - \delta, t_0 + \delta[}$ tal que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ satisfaz*

$$\tilde{\alpha}(s) = (s, F(s)), \forall s \in]c, d[$$

ou

$$\tilde{\alpha}(s) = (F(s), s), \forall s \in]c, d[,$$

sendo $F :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k .

Demonstração.

Como α é regular e $t_0 \in]a, b[$, temos $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$. Suponhamos que $x'(t_0) \neq 0$. Como α é de classe C^k , temos que as funções componentes são de classe C^k . Logo, pelo Teorema da Função Inversa, a função componente x é inversível em uma vizinhança de t_0 , ou seja, $\exists \delta > 0$ tal que $\bar{x} = x|_{]t_0 - \delta, t_0 + \delta[}$ é inversível.

Seja

$$\bar{x}^{-1} : x(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[) \rightarrow]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$$

a inversa de \bar{x} .

Também pelo Teorema da Função Inversa temos que \bar{x}^{-1} é de classe C^k .

Tomemos $]c, d[= x(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[)$ e $\psi = \bar{x}^{-1}$. Logo, $\psi :]c, d[\rightarrow]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ é bijetiva, de classe C^k e $\psi'(s) \neq 0$, $\forall s \in]c, d[$. Assim, ψ é uma mudança de parâmetros para $\alpha|_{]t_0 - \delta, t_0 + \delta[}$.

Seja $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$. Temos

$$\tilde{\alpha}(s) = (\alpha \circ \psi)(s) = (x(\psi(s)), y(\psi(s))) = ((x \circ \psi)(s), (y \circ \psi)(s)) = (s, y \circ \psi(s)), \forall s \in]c, d[.$$

Seja $F = y \circ \psi$. Logo, F é de classe C^k , pois y e ψ são de classe C^k . Assim,

$$\tilde{\alpha}(s) = (s, F(s)), \forall s \in]c, d[.$$

Se tivéssemos imposto $y'(t_0) \neq 0$ teríamos $\tilde{\alpha}(s) = (F(s), s)$, $\forall s \in]c, d[$. □

Observação: A forma local das curvas regulares também pode ser usada para justificar o fato do traço de uma curva regular não possuir “quinas” (localmente a curva é gráfico de função diferenciável).

ORIENTAÇÃO DE UMA CURVA

Seja $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada. A **orientação** da curva α é o sentido de percurso do traço da curva quando t varia de a até b .

Se α é curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, então o vetor tangente $\alpha'(t)$ indica a orientação da curva pois

$$\alpha'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)}{h}.$$

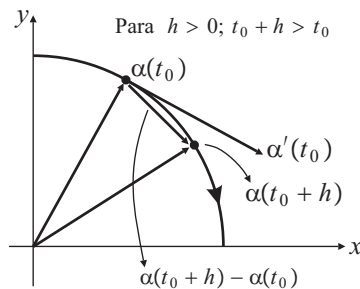


FIGURA 15: O vetor tangente indica a orientação de uma curva regular.

Seja $\psi :]c, d[\longrightarrow]a, b[$ uma mudança de parâmetros de classe C^k para α . Tomemos a reparametrização $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ de α . Assim, se $\psi'(s) > 0$, então α e $\tilde{\alpha}$ possuem a mesma orientação, pois $\tilde{\alpha}'(s) = \alpha'(\psi(s))\psi'(s)$. Se $\psi'(s) < 0$, então α e $\tilde{\alpha}$ possuem orientações opostas.

No primeiro caso, dizemos que a mudança de parâmetros ψ **preserva orientação** e no segundo caso, que ψ **inverte orientação**.

Nos Exemplos 2.15 e 2.16 temos mudanças de parâmetros que preservam orientação, pois em ambos os casos $\psi'(s) > 0$.

Exemplo 2.17 Consideremos a espiral logarítmica

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto e^t (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

que é uma curva regular de classe C^∞ . Consideremos a função

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \ln(s) \end{aligned}$$

que é uma mudança de parâmetros de classe C^∞ para α pois ψ é bijetiva, de classe C^∞ e $\psi'(s) = \ln'(s) = \frac{1}{s} \neq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}_+$. Logo, pela Proposição 2.1,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto s (\cos(\ln(s)), \sin(\ln(s))) \end{aligned}$$

é uma reparametrização regular de classe C^∞ de α . Além disso, como $\psi'(s) > 0$ para $s \in \mathbb{R}_+$, temos que α e $\tilde{\alpha}$ possuem a mesma orientação.

Exemplo 2.18 Sejam os círculos

$$\begin{aligned} \alpha :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{e} & \beta :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) & s &\longmapsto (\cos(s), -\sin(s)) \end{aligned}.$$

As curvas regulares de classe C^∞ α e β possuem o mesmo traço.

De fato, consideremos

$$\begin{aligned}\psi :]0, 2\pi[&\longrightarrow]0, 2\pi[\\ s &\longmapsto -s + 2\pi\end{aligned}$$

Temos que ψ é bijetiva, de classe C^∞ e $\psi'(s) = -1 \neq 0, \forall s \in]0, 2\pi[$. Mas

$$\alpha \circ \psi(s) = (\cos(-s + 2\pi), \sin(-s + 2\pi)) = (\cos(-s), \sin(-s)) = (\cos(s), -\sin(s)) = \beta(s).$$

Logo, β é uma reparametrização de α e, portanto, α e β possuem mesmo traço. Além disso, como $\psi'(s) < 0$, temos que α e β possuem orientações opostas.

REPARAMETRIZAÇÃO PELO COMPRIMENTO DE ARCO

Proposição 2.3 *Seja $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ regular de classe C^k , $k \geq 1$. Então, existe uma mudança de parâmetros $\psi :]c, d[\longrightarrow]a, b[$ de classe C^k para α que preserva orientação tal que a reparametrização $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ satisfaz*

$$(i) |\tilde{\alpha}'(s)| = 1, \forall s \in]c, d[;$$

$$(ii) \int_{s_0}^{s_1} |\tilde{\alpha}'(u)| du = s_1 - s_0, \forall s_0, s_1 \in]c, d[, s_0 \leq s_1.$$

Demonstração.

Seja $t_0 \in]a, b[$. Consideremos a função

$$\begin{aligned}S :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du\end{aligned}$$

Temos $S'(t) = |\alpha'(t)|$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Como α é regular de classe C^k , $k \geq 1$, temos $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in]a, b[$. Logo, S é de classe C^k e $S'(t) > 0, \forall t \in]a, b[$, ou seja, S é contínua e crescente em $]a, b[$. Logo, sua imagem é um intervalo aberto: $S(]a, b[) =]c, d[$ e, portanto, $S :]a, b[\longrightarrow]c, d[$ é bijetiva, de classe C^k e $S'(t) > 0, \forall t \in]a, b[$. Assim, $\exists S^{-1} :]c, d[\longrightarrow]a, b[$.

O Teorema da Função Inversa garante que S^{-1} é de classe C^k . Além disso, temos $(S^{-1})'(s) = \frac{1}{S'(S^{-1}(s))} > 0, \forall s \in]c, d[$. Logo, $\psi = S^{-1}$ é uma mudança de parâmetros de classe C^k para α que preserva orientação.

Para $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ temos:

$$\begin{aligned}|\tilde{\alpha}'(s)| &= |(\alpha \circ \psi)'(s)| \\ &= |\alpha'(\psi(s)) \psi'(s)| \\ &= |\alpha'(\psi(s))| \cdot |\psi'(s)| \\ &= |\alpha'(\psi(s))| \frac{1}{|S'(\psi(s))|} \\ &= |\alpha'(\psi(s))| \frac{1}{|\alpha'(\psi(s))|} \\ &= 1, \forall s \in]c, d[.\end{aligned}$$

e

$$\int_{s_0}^{s_1} |\tilde{\alpha}'(u)| du = \int_{s_0}^{s_1} 1 du = s_1 - s_0, \forall s_0, s_1 \in]c, d[, s_0 \leq s_1,$$

como queríamos. □

A composta $\tilde{\alpha}$ da Proposição 2.3 é chamada de *reparametrização de α pelo comprimento de arco*.

Exemplo 2.19 Reparametrizemos o círculo

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad r > 0, r \neq 1, \\ t &\longmapsto (a + r \cos(t), b + r \sin(t)) \end{aligned}$$

pelo comprimento de arco preservando sua orientação.

Primeiramente, observemos que α pode ser estendida diferenciavelmente.

Consideremos $[0, 2\pi] \subset]0 - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon[, \varepsilon > 0$.

Temos $\alpha'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$. Logo, $|\alpha'(t)| = r \neq 1$, ou seja, α não está parametrizada pelo comprimento de arco.

Seja $t_0 \in [0, 2\pi]$. Logo,

$$S(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du = \int_{t_0}^t r du = r(t - t_0) \text{ e } S([0, 2\pi]) = [-rt_0, r(2\pi - t_0)] = J.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S: [0, 2\pi] &\longrightarrow J \\ t &\longmapsto r(t - t_0) \end{aligned} \implies \psi = S^{-1}: J \longrightarrow [0, 2\pi] .$$

$$s \longmapsto t$$

Logo,

$$\psi(s) = t \iff s = S(t) = r(t - t_0) \implies t = \frac{s}{r} + t_0 \implies \psi(s) = \frac{s}{r} + t_0.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \psi: [-rt_0, r(2\pi - t_0)] &\longrightarrow [0, 2\pi] \\ s &\longmapsto \frac{s}{r} + t_0 \end{aligned}$$

é uma mudança de parâmetros para α que preserva orientação (pois $\psi'(s) = \frac{1}{r} > 0$) e $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}: [-rt_0, r(2\pi - t_0)] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto (a + r \cos(\frac{s}{r} + t_0), b + r \sin(\frac{s}{r} + t_0)) \end{aligned}$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Exemplo 2.20 Reparametrizemos a espiral logarítmica

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto e^t (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

pelo comprimento de arco preservando sua orientação.

Temos $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}e^t \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ e

$$S(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du = \int_{t_0}^t \sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}(e^t - e^{t_0}).$$

Logo, $\text{Im}(S) =]-\sqrt{2}e^{t_0}, +\infty[$ e

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R} &\longrightarrow]-\sqrt{2}e^{t_0}, +\infty[\\ t &\longmapsto \sqrt{2}(e^t - e^{t_0}) \end{aligned}$$

Seja

$$\psi = S^{-1}:]-\sqrt{2}e^{t_0}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} .$$

$$s \longmapsto t$$

Logo,

$$\psi(s) = t \implies s = S(t) = \sqrt{2}(e^t - e^{t_0}) \implies t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \psi :]-\sqrt{2}e^{t_0}, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right) \end{aligned}$$

é uma mudança de parâmetros para α que preserva orientação (pois $\psi'(s) = \frac{1}{s+\sqrt{2}e^{t_0}} > 0$ para $s \in]-\sqrt{2}e^{t_0}, +\infty[$). Seja $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$. Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} :]-\sqrt{2}e^{t_0}, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right) \left(\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right)\right), \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Exemplo 2.21 Reparametrizemos o arco de ciclóide

$$\begin{aligned} \alpha :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

pelo comprimento de arco preservando sua orientação.

Temos $|\alpha'(t)| = |(1 - \cos(t), \sin(t))| = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(t)} = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, visto que

$$\begin{cases} 1 = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\ \cos u = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases} \implies 1 - \cos(u) = 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right),$$

ou seja, α não está parametrizada pelo comprimento de arco. Seja $t_0 \in]0, 2\pi[$. Temos

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(u)} du \\ &= \int_{t_0}^t 2\sin\left(\frac{u}{2}\right) du \\ &= 2\left(-2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\Big|_{t_0}^t \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Assim, $S(]0, 2\pi[) =]4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - 1\right), 4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) + 1\right)[$. Seja

$$\begin{aligned} \psi = S^{-1} :]4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - 1\right), 4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) + 1\right)[&\longrightarrow]0, 2\pi[\\ s &\longmapsto t \end{aligned}$$

Logo,

$$\psi(s) = t \implies s = S(t) = 4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \implies t = 2\arccos\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - \frac{s}{4}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \psi :]4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - 1\right), 4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) + 1\right)[&\longrightarrow]0, 2\pi[\\ s &\longmapsto 2\arccos\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - \frac{s}{4}\right) \end{aligned}$$

é uma mudança de parâmetros para α que preserva orientação (pois $\psi'(s) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - \frac{s}{4}\right)^2}} > 0$ para $s \in]4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) - 1\right), 4\left(\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) + 1\right)[$).

Finalmente, $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi :]4(\cos(\frac{t_0}{2}) - 1), 4(\cos(\frac{t_0}{2}) + 1)[\rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\tilde{\alpha}(s) = (2 \arccos(\cos(\frac{t_0}{2}) - \frac{s}{4}) - \sin(2 \arccos(\cos(\frac{t_0}{2}) - \frac{s}{4})), 1 - \cos(2 \arccos(\cos(\frac{t_0}{2}) - \frac{s}{4})))$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

2.3 Curvatura e Equações de Frenet

Seja

$$\begin{aligned} \alpha :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(s) \end{aligned}$$

uma curva regular de classe C^k , $k \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco.

Seja

$$\boxed{T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))}$$

o vetor tangente à curva α em s . Como $|\alpha'(s)| = 1$, temos $|T(s)| = 1$.

Consideremos

$$\boxed{N(s) = (-y'(s), x'(s))},$$

isto é, $N(s)$ é $T(s)$ girado de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário. Logo $N(s)$ e $T(s)$ são vetores ortogonais:

$$\langle T(s), N(s) \rangle = -x'(s)y'(s) + x'(s)y'(s) = 0.$$

Temos também $|N(s)| = 1$ para $s \in]a, b[$. Logo, $\{T(s), N(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 .

Vamos considerar $T(s)$ e $N(s)$ “com origem” em $\alpha(s)$, conforme Figura 16.

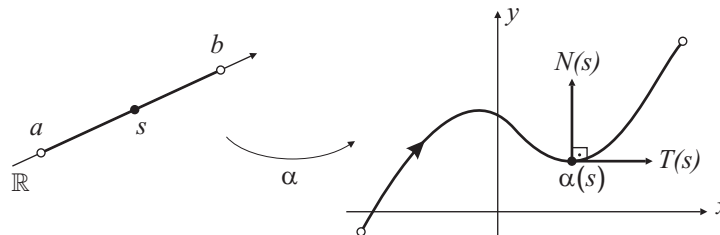


FIGURA 16: Referencial de Frenet-Serret.

$\{T(s), N(s)\}_{\alpha(s)}$ é chamado **referencial móvel**, da curva α em s , ou **Referencial de Frenet-Serret**, da curva α em s .

Exemplo 2.22 A curva

$$\begin{aligned} \alpha :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto (\cos(s), \sin(s)) \end{aligned}$$

é parametrizada pelo comprimento de arco.

Temos: $T(s) = \alpha'(s) = (-\sin(s), \cos(s))$ e $N(s) = (-\cos(s), -\sin(s))$. A Figura 17 ilustra o Referencial de Frenet-Serret em alguns pontos de α .

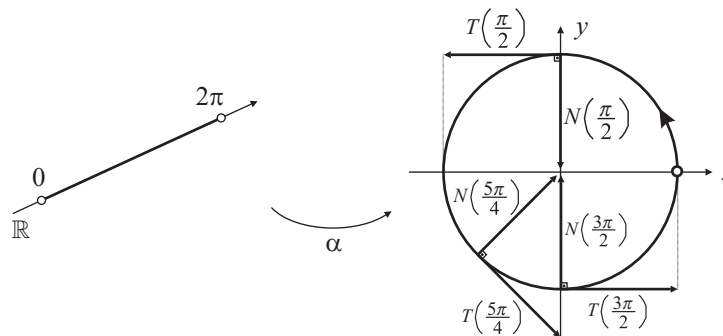


FIGURA 17: Referencial de Frenet-Serret em alguns pontos da circunferência de raio 1.

CURVATURA DE UMA CURVA REGULAR DE CLASSE C^k , $k \geq 3$, PARAMETRIZADA PELO COMPRIMENTO DE ARCO

Seja

$$\begin{aligned}\alpha:]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(s)\end{aligned}$$

de classe C^k , $k \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco.

Os vetores $T(s) = \alpha'(s)$ e $T'(s) = \alpha''(s)$ são ortogonais. De fato, de $|T(s)| = 1$ temos

$$\begin{aligned}|T(s)|^2 &= 1 \Rightarrow \\ \langle T(s), T(s) \rangle &= 1 \Rightarrow \\ \langle T(s), T(s) \rangle' &= 1' \Rightarrow \\ \langle T'(s), T(s) \rangle + \langle T(s), T'(s) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ 2 \langle T'(s), T(s) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \langle T'(s), T(s) \rangle &= 0\end{aligned}$$

Baseados nesses resultados e, lembrando que $\{T(s), N(s)\}$ é base ortonormal de \mathbb{R}^2 , temos¹

$$T'(s) = \langle T'(s), T(s) \rangle T(s) + \langle T'(s), N(s) \rangle N(s) \implies T'(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle N(s).$$

O número

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

é chamado **curvatura** de α em s e a equação

$$T'(s) = k(s) N(s)$$

é chamada **1ª Equação de Frenet** de α .

Observemos que $T'(s)$ e $N(s)$ são paralelos e que $|T'(s)| = |k(s)|$ pois $|N(s)| = 1$, ou seja,

$$|k(s)| = |\alpha''(s)|.$$

Como $\frac{\langle T'(s), N(s) \rangle}{|T'(s)||N(s)|} = \cos(\theta)$, sendo θ a medida do ângulo entre $T'(s)$ e $N(s)$ (que é 0 ou π), concluímos que $k(s) > 0$ quando $T'(s)$ e $N(s)$ possuem mesmo sentido e $k(s) < 0$ caso contrário.

Geometricamente, a curvatura $k(s)$ indica a taxa de variação instantânea da direção do vetor tangente no ponto $\alpha(s)$, ou então, a velocidade com que o vetor tangente muda de direção. De fato, dados $s, s+h \in]a, b[$ temos

$$\alpha''(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha'(s+h) - \alpha'(s)}{h}.$$

De modo análogo ao que foi feito a partir de $|T(s)| = 1$, o fato de $|N(s)| = 1$ implica que $N(s)$ e $N'(s)$ são ortogonais. Assim,

$$\begin{aligned}N'(s) &= \langle N'(s), T(s) \rangle T(s) + \langle N'(s), N(s) \rangle N(s) \implies \\ N'(s) &= \langle N'(s), T(s) \rangle T(s).\end{aligned}$$

¹Para desenvolvimento de $T'(s)$ lembramos que se $\{g_1, g_2\}$ é base ortonormal do \mathbb{R}^2 , então qualquer vetor v do \mathbb{R}^2 pode ser escrito como $v = \langle v, g_1 \rangle g_1 + \langle v, g_2 \rangle g_2$.

De fato: $v = a_1 g_1 + a_2 g_2$. Logo, $\langle v, g_1 \rangle = a_1$ e $\langle v, g_2 \rangle = a_2$ e o resultado segue.

Mas

$$\begin{aligned}
 \langle N'(s), T(s) \rangle &= \langle (-y''(s), x''(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle \\
 &= -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s) \\
 &= \langle (x''(s), y''(s)), (y'(s), -x'(s)) \rangle \\
 &= \langle T'(s), -N(s) \rangle \\
 &= -\langle T'(s), N(s) \rangle \\
 &= -k(s).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{N'(s) = -k(s) T(s)}$$

que é chamada 2ª *Equação de Frenet* de α .

Exemplo 2.23 Seja

$$\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

$s \in \mathbb{R}$ e r constante positiva.

Temos

$$\alpha'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \implies |\alpha'(s)| = 1,$$

ou seja, α está parametrizada pelo comprimento de arco.

A curvatura é dada por

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) - \frac{1}{r} \left(\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \frac{1}{r},$$

ou seja, a curvatura da circunferência α de raio r acima é constante e igual a $\frac{1}{r}$.

Observemos que se houvéssemos tomado a parametrização $\alpha(s) = \left(r \sin\left(\frac{s}{r}\right), r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$ (que muda a orientação da curva), a curvatura mudaria de sinal.

Exemplo 2.24 Seja

$$\alpha(s) = (a + bs, c + ds),$$

$s \in \mathbb{R}$, b e d constantes tais que $b^2 + d^2 = 1$.

Temos

$$\alpha'(s) = (b, d) \implies |(b, d)| = \sqrt{b^2 + d^2} = 1,$$

ou seja, α está parametrizada pelo comprimento de arco.

A curvatura é dada por

$$k(s) = \langle (0, 0), (-d, b) \rangle = 0,$$

ou seja, a curvatura da reta α acima é nula.

CURVATURA DE UMA CURVA REGULAR DE CLASSE C^k , $k \geq 3$, COM PARAMETRIZAÇÃO QUALQUER

Seja

$$\begin{aligned}
 \alpha:]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 t &\longmapsto (x(t), y(t))
 \end{aligned}$$

uma curva regular de classe C^k , $k \geq 3$.

A Proposição 2.3 garante que existe

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}:]c, d[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(\psi(s)) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))\end{aligned},$$

reparametrização de α pelo comprimento de arco, sendo

$$\begin{aligned}\psi:]c, d[&\longrightarrow]a, b[\\ s &\longmapsto S^{-1}(s)\end{aligned}$$

mudança de parâmetros que preserva orientação com

$$\begin{aligned}S:]a, b[&\longrightarrow]c, d[\\ t &\longmapsto \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du\end{aligned}$$

a função comprimento de arco de α a partir de t_0 .

Além disso,

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(S(t)) = \tilde{\alpha}(s).$$

Como a orientação da curva regular α e a orientação da curva parametrizada pelo comprimento de arco $\tilde{\alpha}$ é mesma, os vetores tangente $T(t) = (x'(t), y'(t)) = \alpha'(t)$ e $\tilde{T}(s) = (\tilde{x}'(s), \tilde{y}'(s)) = \tilde{\alpha}'(s)$ possuem mesma direção e sentido e, como $\tilde{T}(s)$ tem comprimento 1,

$$\tilde{T}(s) = \frac{T(t)}{|T(t)|}.$$

O mesmo ocorre com $N(t) = (-y'(t), x'(t))$ e $\tilde{N}(s) = (-\tilde{y}'(s), \tilde{x}'(s))$, que são girados de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário de $T(t)$ e $\tilde{T}(s)$, respectivamente. Logo,

$$\tilde{N}(s) = \frac{N(t)}{|N(t)|}.$$

Queremos expressar o conceito de curvatura em uma parametrização qualquer. Para tanto, iremos definir a curvatura $k(t)$ em $\alpha(t)$ como sendo a curvatura $\tilde{k}(s)$ em $\tilde{\alpha}(s)$ com $s = S(t)$, ou seja, $k(t) = \tilde{k}(s)$.

Observação: se tomarmos uma reparametrização β de α que mude sua orientação, então o sinal da curvatura muda (veremos isso mais adiante quando estudarmos o sinal da curvatura). Neste caso, para mudar a orientação de α basta considerar $\beta(r) = \alpha(b + a - r)$, $r \in]a, b[$.

Vamos colocar $\tilde{k}(s)$ em função de t .

Temos:

$$\begin{aligned}T(t) &= \alpha'(t) = (\tilde{\alpha} \circ S)'(t) = \tilde{\alpha}'(S(t)) S'(t) \implies \\ T'(t) &= (\tilde{\alpha}''(S(t)) S'(t)) S'(t) + \tilde{\alpha}'(S(t)) S''(t) = \tilde{T}'(s) S'(t)^2 + \tilde{T}(s) S''(t).\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{T}'(s) = \frac{T'(t) - \tilde{T}(s) S''(t)}{S'(t)^2} = \frac{T'(t) - \tilde{T}(s) S''(t)}{|T(t)|^2},$$

pois $S'(t) = |\alpha'(t)| = |T(t)| = |N(t)|$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}(s) &= \langle \tilde{T}'(s), \tilde{N}(s) \rangle \\
 &= \left\langle \frac{T'(t) - \tilde{T}(s) S''(t)}{|T(t)|^2}, \tilde{N}(s) \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{T'(t)}{|T(t)|^2}, \tilde{N}(s) \right\rangle - \left\langle \frac{\tilde{T}(s) S''(t)}{|T(t)|^2}, \tilde{N}(s) \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{T'(t)}{|T(t)|^2}, \frac{N(t)}{|N(t)|} \right\rangle - \frac{S''(t)}{|T(t)|^2} \langle \tilde{T}(s), \tilde{N}(s) \rangle \\
 &= \left\langle \frac{T'(t)}{|T(t)|^2}, \frac{N(t)}{|T(t)|} \right\rangle - \frac{S''(t)}{|T(t)|^2} \cdot 0 \\
 &= \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{|T(t)|^3}.
 \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{k}(s) = \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{|T(t)|^3}$ e, como $k(t) = \tilde{k}(s)$, temos

$$k(t) = \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{|T(t)|^3}$$

que é a expressão para a curvatura de uma curva regular α dada por uma parametrização qualquer de classe C^k , $k \geq 3$.

Observemos que se α já estivesse parametrizada pelo comprimento de arco teríamos $|T(t)| = 1$ e recaímos na expressão que já havíamos obtido.

UM RESUMO

Seja $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular de classe C^k , $k \geq 3$.

Se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ estiver parametrizada pelo comprimento de arco, então

$\begin{cases} T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) \\ T(s) = 1 \end{cases}$	(vetor tangente)
$\begin{cases} N(s) = (-y'(s), x'(s)) \\ N(s) = 1 \end{cases}$	(vetor normal)
$\{T(s), N(s)\}_{\alpha(s)}$	(Referencial de Frenet-Serret)
$\begin{cases} k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle \\ k(s) = \alpha''(s) \end{cases}$	(curvatura)
$T'(s) = k(s) N(s)$	(1ª Equação de Frenet)
$N'(s) = -k(s) T(s)$	(2ª Equação de Frenet)

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ estiver com parametrização qualquer, então

$T(t) = \alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$	(vetor tangente)
$N(t) = (-y'(t), x'(t))$	(vetor normal)
$k(t) = \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{ T(t) ^3}$	(curvatura)

Exemplo 2.25 Consideremos a espiral logarítmica $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}
 T(t) &= \alpha'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t))), \\
 T'(t) &= \alpha''(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)) + e^t(-\sin(t) - \cos(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)) + e^t(\cos(t) - \sin(t))) \\
 &= (-2e^t \sin(t), 2e^t \cos(t)), \\
 N(t) &= (-y'(t), x'(t)) = (-e^t(\sin(t) + \cos(t)), e^t(\cos(t) - \sin(t))), \\
 |T(t)| &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t)) + e^{2t}(\sin^2(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t))} \\
 &= e^t \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \frac{\langle (-2e^t \sin(t), 2e^t \cos(t)), (-e^t(\sin(t) + \cos(t)), e^t(\cos(t) - \sin(t))) \rangle}{(e^t \sqrt{2})^3} \\
 &= \frac{2e^{2t}(\sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)) + 2e^{2t}(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t))}{e^{3t} 2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2e^{2t}}{e^{3t} 2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{e^t \sqrt{2}} > 0,
 \end{aligned}$$

Observemos que k é uma função decrescente e $\begin{cases} (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (k(t) \rightarrow +\infty) \\ (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (k(t) \rightarrow 0) \end{cases}$. Portanto, não existem pontos onde a curvatura é máxima ou mínima.

Exemplo 2.26 Consideremos a parábola $y = x^2 + 2x + 1$. Façamos $x = t$ e $y = t^2 + 2t + 1$. Assim, $\alpha(t) = (t, t^2 + 2t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$, é de classe C^∞ e $\alpha'(t) = (1, 2t + 2) \neq (0, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, α é regular. Temos

$$\begin{cases} T(t) = \alpha'(t) = (1, 2t + 2) \\ T'(t) = \alpha''(t) = (0, 2) \\ N(t) = (-y'(t), x'(t)) = (-2t - 2, 1) \end{cases}.$$

Logo,

$$k(t) = \frac{\langle (0, 2), (-2t - 2, 1) \rangle}{\left(\sqrt{1^2 + (2t + 2)^2}\right)^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{4t^2 + 8t + 5}\right)^3}.$$

Observemos que $k(t) > 0$.

Determinando pontos de máximo ou mínimo:

$$k'(t) = \frac{-3(8 + 8t)}{(4t^2 + 8t + 5)^{\frac{5}{2}}} = 0 \iff t = -1.$$

Como $k(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, temos que $t = -1$ é ponto de curvatura máxima e $k(-1) = 2$ é a curvatura máxima, pois

$$\begin{aligned} (t+1)^2 \geq 0 &\implies t^2 + 2t + 1 \geq 0 \implies \\ 4t^2 + 8t + 4 \geq 0 &\implies 4t^2 + 8t + 5 \geq 1 \implies \\ \left(4t^2 + 8t + 5\right)^{\frac{3}{2}} \geq 1^{\frac{3}{2}} &\implies \frac{1}{\left(\sqrt{4t^2 + 8t + 5}\right)^3} \leq 1 \implies \\ \frac{2}{\left(\sqrt{4t^2 + 8t + 5}\right)^3} &\leq 2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 < k(t) \leq 2.$$

Não há pontos de curvatura mínima.

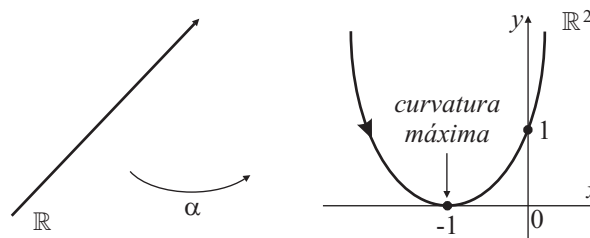


FIGURA 18: A parábola $\alpha(t) = (t, t^2 + 2t + 1)$ possui um ponto de curvatura máxima.

UMA OUTRA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA CURVATURA

Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e $\theta :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\theta(s) = \text{“ângulo entre o vetor } \alpha'(s) \text{ e o vetor } w = (\cos(\lambda), \sin(\lambda))\text{”}$, ou seja, $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda))$. (Figura 19)

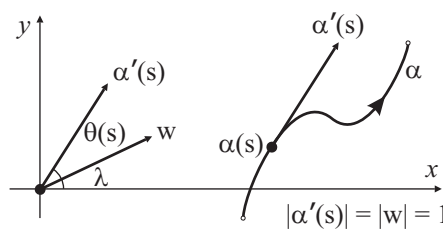


FIGURA 19: A curvatura de α pode ser vista como taxa de variação do ângulo θ .

Afirmamos que curvatura de α mede a variação da função $\theta(s)$, isto é,

$$k(s) = \theta'(s). \quad (2.1)$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)) \implies \\ \alpha''(s) &= (-\sin(\theta(s) + \lambda) \theta'(s), \cos(\theta(s) + \lambda) \theta'(s)) = T'(s) \end{aligned}$$

e

$$N(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)).$$

Logo,

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle (-\sin(\theta(s) + \lambda)\theta'(s), \cos(\theta(s) + \lambda)\theta'(s)), (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) \rangle \Rightarrow$$

$$k(s) = \theta'(s) \left(\sin^2(\theta(s) + \lambda) + \cos^2(\theta(s) + \lambda) \right) \Rightarrow$$

$$k(s) = \theta'(s).$$

Observemos que

$$\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)) \Rightarrow \alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \lambda) dt + x_0, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \lambda) dt + y_0 \right)$$

para algum $s_0 \in]a, b[$ e $\lambda, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

2.4 Estudo do Sinal de Curvatura: Convexidade Local

Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 3$.

Seja $t_0 \in]a, b[$. Consideremos a reta tangente a α em t_0 , que denotaremos por G_{t_0} .

A reta G_{t_0} divide o plano em dois semiplanos fechados cuja intersecção é G_{t_0} .

Dizemos que α é **convexa** em t_0 se $\exists \delta > 0$ tal que $\alpha([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ está contido em um dos dois semiplanos fechados determinados pela reta tangente G_{t_0} .

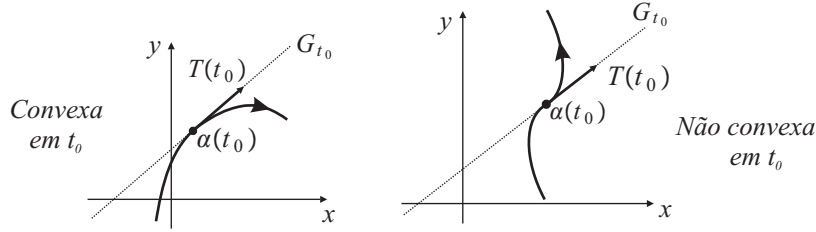


FIGURA 20: Curvas convexa e não convexa em t_0 .

Vamos considerar a equação da reta tangente a α em t_0 como

$$G_{t_0}(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)T(t_0) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0).$$

Supondo $k(t_0) \neq 0$, temos também $\alpha''(t_0) \neq 0$ pois

$$k(t_0) = \frac{\langle T'(t_0), N(t_0) \rangle}{|T(t_0)|^3} = \frac{\langle \alpha''(t_0), N(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)|^3} \Rightarrow$$

$$\langle \alpha''(t_0), N(t_0) \rangle = k(t_0) |\alpha'(t_0)|^3 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\alpha''(t_0) \neq 0, \text{ pois } N(t_0) \neq 0.$$

Expandindo α em Série de Taylor em torno de $t = t_0$ temos

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\alpha''(t_0) + R(t),$$

sendo R uma função vetorial tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(t)}{(t - t_0)^2} = 0.$$

Logo,

$$\alpha(t) = G_{t_0}(t) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\alpha''(t_0) + R(t) \Rightarrow \alpha(t) - G_{t_0}(t) = \frac{(t - t_0)^2}{2}\alpha''(t_0) + R(t),$$

ou seja, $\alpha(t) - G_{t_0}(t)$ é um vetor que aponta para o mesmo semiplano (determinado por G_{t_0}) que aponta $\alpha''(t_0)$, para valores de t próximos de t_0 . Este semiplano contém $\alpha(t)$, quando restrita a uma vizinhança adequada próxima de t_0 .

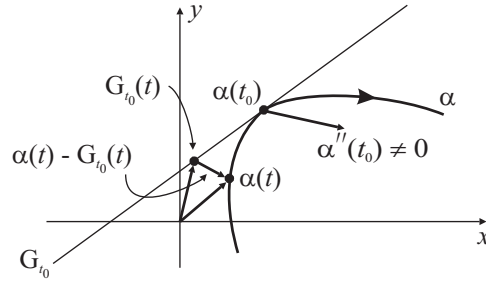


FIGURA 21: O vetor $\alpha''(t_0)$ determina o lado da convexidade da curva em t_0 .

Observação: Pelo desenvolvimento acima, se $k(t_0) \neq 0$, então $\alpha''(t_0)$ não é nulo e $\alpha(t)$ está no semiplano (determinado por G_{t_0}) apontado por $\alpha''(t_0)$, ou seja, localmente a curva α está voltada para o lado em que aponta o vetor $\alpha''(t_0)$. Por conseguinte, o sentido do vetor $\alpha''(t_0) = T'(t_0)$ não muda se trocarmos a orientação da curva α . Por outro lado, o sentido do vetor normal $N(t_0)$ muda quando trocamos a orientação da curva α (pois a mudança do parâmetro t para u será tal que $\psi'(u_0) < 0$, $t_0 = \psi(u_0)$, e, portanto, inverte o sentido do vetor tangente $T(t_0)$). Desta forma, concluímos que a curvatura muda de sinal quando trocamos a orientação da curva.

Supondo $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, temos a validade de $\alpha''(s_0) = T'(s_0) = k(s_0)N(s_0)$ (1ª. Equação de Frenet) que, juntamente com o fato de $\alpha''(s_0)$ sempre apontar para o lado convexo da curva, permite-nos concluir a seguinte proposição.

Proposição 2.4 *Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s_0) \neq 0$.*

- (i) $k(s_0) > 0$ se, e somente se, a curva α é convexa em s_0 no sentido de $N(s_0)$;
- (ii) $k(s_0) < 0$ se, e somente se, a curva α é convexa em s_0 no sentido de $-N(s_0)$.

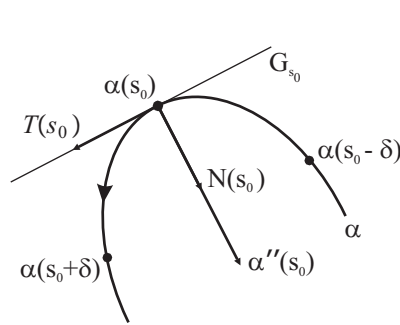


FIGURA 22:
 $k(s_0) > 0 \iff N(s_0)$ e $\alpha''(s_0)$
possuem mesmo sentido.

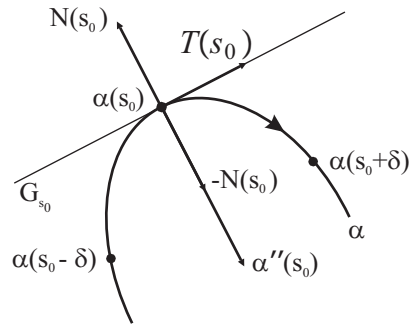


FIGURA 23:
 $k(s_0) < 0 \iff N(s_0)$ e $\alpha''(s_0)$
possuem sentidos opostos.

Notemos que este resultado também é válido quando α não está parametrizada pelo comprimento de arco, uma vez que, se $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(\psi(s)) = \alpha(t)$ é reparametrização de α pelo comprimento de arco, então a curvatura não muda (mesma orientação) e os vetores $\tilde{N}(s)$ e $N(t)$ possuem mesma direção e sentido em $t = \psi(s)$.

Exemplo 2.27 Estudemos a convexidade local da cossenóide

$$\alpha(t) = (t, \cos(t)), \quad t \in]0, 2\pi[.$$

Temos $\alpha'(t) = T(t) = (1, -\sin(t))$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + \sin^2(t)} \neq 1$, ou seja, α não está parametrizada pelo comprimento de arco.

Temos

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= T'(t) = (0, -\cos(t)) \\ N(t) &= (\sin(t), 1).\end{aligned}$$

Logo,

$$k(t) = \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{|T'(t)|^3} = \frac{-\cos(t)}{(\sqrt{1 + \sin^2(t)})^3}.$$

Portanto,

$$k(t) = 0 \iff \cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t = \frac{3\pi}{2}$$

$$k(t) > 0 \iff \cos(t) < 0 \iff \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$$

$$k(t) < 0 \iff \cos(t) > 0 \iff 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi.$$

Logo,

(a) para $t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ a curva é convexa no sentido de $N(t)$;

(b) para $t \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ a curva é convexa no sentido de $-N(t)$.

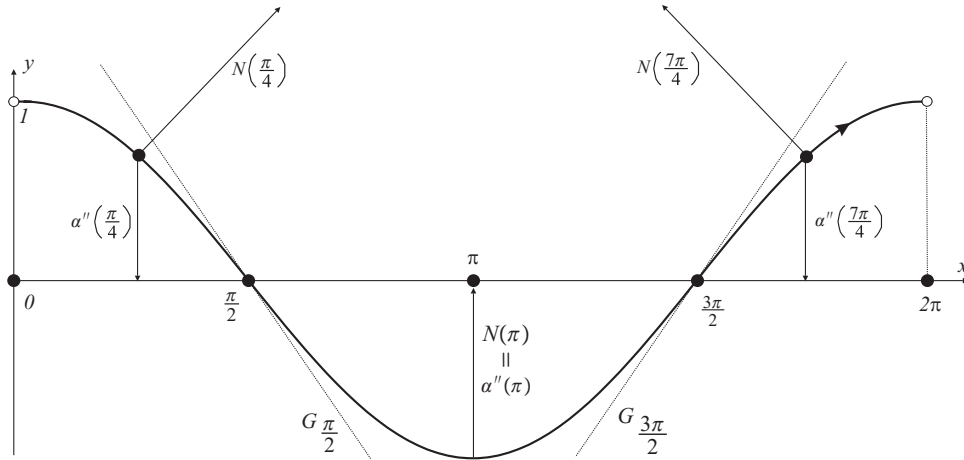


FIGURA 24: Estudo da convexidade da cossenoide.

Observemos que nos pontos $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha''(\frac{\pi}{2}) = \alpha''(\frac{3\pi}{2}) = 0$ (embora $N(\frac{\pi}{2}) = (1, 1)$ e $N(\frac{3\pi}{2}) = (-1, 1)$).

Nestes casos, em uma vizinhança de $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, a curva α possui pontos nos dois semiplanos determinados pelas tangentes, ou seja, α não é convexa nesses dois pontos.

2.5 Raio de Curvatura e Círculo Osculador

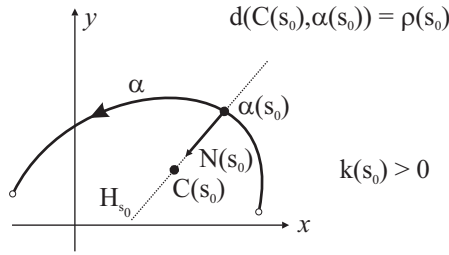
Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular de classe C^k , $k \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $k(s) \neq 0$, $\forall s \in]a, b[$. O número real positivo $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$ é chamado de **raio de curvatura** de α em s .

Consideremos a equação da reta normal a α em s_0 dada por

$$H_{s_0}(r) = \alpha(s_0) + rN(s_0).$$

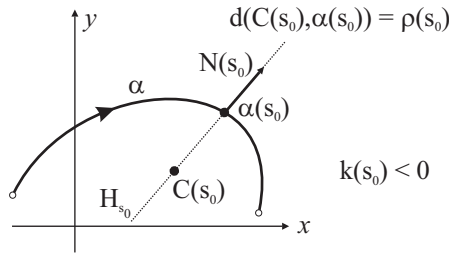
Suponhamos que $k(s_0) > 0$ e tomemos o ponto $C(s_0) = H_{s_0}(\rho(s_0))$ na reta H_{s_0} , ou seja,

$$C(s_0) = \alpha(s_0) + \rho(s_0)N(s_0) \implies C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0).$$

FIGURA 25: Centro de curvatura quando $k(s_0) > 0$.

Suponhamos que $k(s_0) < 0$ e tomemos o ponto $C(s_0) = H_{s_0}(-\rho(s_0))$ na reta H_{s_0} , ou seja,

$$C(s_0) = \alpha(s_0) - \rho(s_0) N(s_0) \implies C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0).$$

FIGURA 26: Centro de curvatura quando $k(s_0) < 0$.

O ponto $C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0)$ é chamado de **centro de curvatura** de α em s_0 .

O círculo tangente a α em s_0 de centro em $C(s_0)$ e raio $\rho(s_0)$ é chamado de **círculo osculador** à curva α em s_0 .

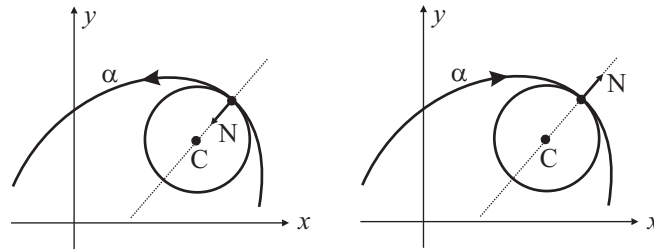


FIGURA 27: Círculos osculadores.

Observemos que

- (i) o círculo osculador está sempre na “região convexa” que a curva determina;
- (ii) quanto maior a curvatura (em módulo), menor o círculo osculador;

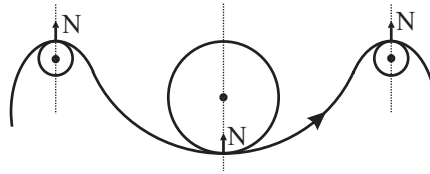


FIGURA 28: Quanto maior o raio do círculo osculador, menor a curvatura.

- (iii) o módulo da curvatura do círculo osculador coincide com o módulo da curvatura de α em s_0 .

Essa última afirmação segue do fato de que se tomarmos uma parametrização pelo comprimento de arco do círculo osculador tal que sua curvatura seja positiva (portanto, sua orientação deve estar no sentido

anti-horário), como por exemplo $\gamma(s) = C(s_0) + \rho(s_0) \left(\cos\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right), \sin\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right) \right)$, então

$$\begin{cases} \gamma'(s) = T_\gamma(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right), \cos\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right) \right) \\ N_\gamma(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right), -\sin\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right) \right) \\ \gamma''(s) = T'_\gamma(s) = \frac{1}{\rho(s_0)} \left(-\cos\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right), -\sin\left(\frac{s}{\rho(s_0)}\right) \right) \end{cases}$$

Logo, $k_\gamma(s) = \langle T'_\gamma(s), N_\gamma(s) \rangle = \frac{1}{\rho(s_0)} = |k(s_0)|$.

EVOLUTAS

A curva formada por todos os centros de curvatura da curva α é chamada de **evoluta** de α e é dada por

$$E(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s), \quad s \in]a, b[.$$

Devido ao fato do centro de curvatura estar univocamente determinado, independente da orientação da curva, temos que a evoluta de α é única.

Exemplo 2.28 A evoluta de uma curva regular pode não ser regular. Por exemplo, a evoluta de um círculo se degenera em um único ponto, a saber, o centro desse círculo.

De fato, consideremos a circunferência $\alpha(s) = (\cos(s), \sin(s))$, $s \in [0, 2\pi]$.

Temos α parametrizada pelo comprimento de arco e $E(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$.

Mas,

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle (-\cos(s), -\sin(s)), (-\cos(s), -\sin(s)) \rangle = 1.$$

Logo,

$$E(s) = (\cos(s), \sin(s)) + \frac{1}{1} (-\cos(s), -\sin(s)) = (0, 0),$$

ou seja, a evoluta de uma circunferência é um ponto (seu centro).

Proposição 2.5 Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) \neq 0$, $\forall s \in]a, b[$. Considere $E :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ a evoluta de α . Então,

(a) E é de classe C^{k-2} .

(b) Se $k'(s) \neq 0$, $\forall s \in]a, b[$, então E é regular.

(c) Na hipótese de (b), as retas tangentes a E são as retas normais a α .

Demonstração.

(a) Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (x(s), y(s)); \\ N(s) &= (-y'(s), x'(s)); \\ k(s) &= \langle \alpha''(s), N(s) \rangle \end{aligned}$$

são aplicações de classe C^k , C^{k-1} e C^{k-2} , respectivamente, pois $x(s)$ e $y(s)$ são de classe C^k . Logo,

$E(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$ é de classe C^{k-2} .

(b) Temos,

$$E'(s) = \alpha'(s) - \frac{k'(s)}{k(s)^2} N(s) + \frac{N'(s)}{k(s)} = T(s) - \frac{k'(s)}{k(s)^2} N(s) - \frac{k(s)}{k(s)} T(s) = \frac{-k'(s)}{k(s)^2} N(s).$$

Como $k'(s) \neq 0$, $\forall s \in]a, b[$, temos $E'(s) \neq (0, 0)$, ou seja, E é regular.

(c) A reta tangente a E em s é dada por

$$G_s(r) = E(s) + rE'(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s) - r \frac{k'(s)}{k(s)^2} N(s) = \alpha(s) + \left(\frac{1}{k(s)} - r \frac{k'(s)}{k(s)^2} \right) N(s),$$

que é reta normal a α em s . □

Observação: Seja $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}$ uma **curva regular fechada**, isto é, $\alpha(a) = \alpha(b)$, de classe C^k , $k \geq 3$. Um ponto $\alpha(s_0)$ da curva tal que $k'(s_0) = 0$ é chamado de **vértice** de α . O “Teorema dos Quatro Vértices” (ver [1], pág. 31) garante que α possui, no mínimo, quatro vértices. Como vimos na demonstração do item (b) da Proposição 2.5,

$$E'(s) = \frac{-k'(s)}{k(s)^2} N(s),$$

ou seja, se $k'(s_0) = 0$, então, para a parametrização adotada para α , não há vetor tangente a E em $s = s_0$. Sendo $k'(s)$ contínua, é possível mostrar que em $s = s_0$ a curva E possui uma singularidade essencial, ou seja, E possui uma “quina” em $s = s_0$.

Exemplo 2.29 Sejam $0 < b < a$ e consideremos a elipse parametrizada por

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi ab] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{ab}\right), b \sin\left(\frac{t}{ab}\right) \right). \end{aligned}$$

Temos

$$\alpha'(t) = T(t) = \left(-\frac{1}{b} \sin\left(\frac{t}{ab}\right), \frac{1}{a} \cos\left(\frac{t}{ab}\right) \right) \implies |T(t)| = \sqrt{\frac{1}{b^2} \sin^2\left(\frac{t}{ab}\right) + \frac{1}{a^2} \cos^2\left(\frac{t}{ab}\right)} \neq 1,$$

ou seja, α não está parametrizada pelo comprimento de arco. No entanto, a curvatura de α independe da parametrização. Logo,

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{|T(t)|^3} = \frac{1}{a^2 b^2} \left(\frac{1}{b^2} \sin^2\left(\frac{t}{ab}\right) + \frac{1}{a^2} \cos^2\left(\frac{t}{ab}\right) \right)^{-\frac{3}{2}} \implies \\ k'(t) &= \frac{3 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin\left(\frac{t}{ab}\right) \cos\left(\frac{t}{ab}\right)}{a^3 b^3 \left(\frac{1}{b^2} \sin^2\left(\frac{t}{ab}\right) + \frac{1}{a^2} \cos^2\left(\frac{t}{ab}\right) \right)^{\frac{5}{2}}} \implies \\ k'(t) = 0 &\iff \sin\left(\frac{t}{ab}\right) \cos\left(\frac{t}{ab}\right) = 0 \iff \sin\left(\frac{t}{ab}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{t}{ab}\right) = 0 \\ &\iff t = 0, \frac{\pi ab}{2}, \pi ab \text{ ou } \frac{3\pi ab}{2}. \end{aligned}$$

Isso significa que a elipse possui quatro vértices que são justamente os quatro pontos de intersecção da mesma com os eixos coordenados. Logo, a evoluta da elipse possui exatamente quatro singularidades essenciais que também irão ocorrer na intersecção da mesma com os eixos coordenados.

Para obtermos a equação da evoluta, é preciso que o vetor normal a α seja unitário (assim, o raio de curvatura será o raio do círculo osculador). Assim,

$$\begin{aligned} E(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \frac{N(t)}{|N(t)|} \\ &= \left(\left(a - a \sin^2 \left(\frac{t}{ab} \right) - \frac{b^2}{a} \cos^2 \left(\frac{t}{ab} \right) \right) \left(\cos \left(\frac{t}{ab} \right) \right), \right. \\ &\quad \left. \left(b - \frac{a^2}{b} \sin^2 \left(\frac{t}{ab} \right) - b \cos^2 \left(\frac{t}{ab} \right) \right) \left(\sin \left(\frac{t}{ab} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

A Figura 29 ilustra uma elipse com $a = 3$ e $b = 2$ e sua evoluta.

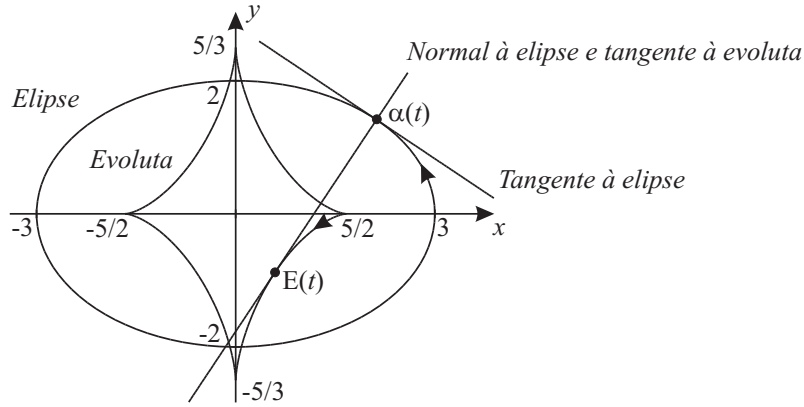


FIGURA 29: A elipse e sua evoluta.

Exemplo 2.30 Consideremos a espiral logarítmica $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$; $t \in \mathbb{R}$.

Vimos que a curvatura de α é $k(t) = (e^t \sqrt{2})^{-1}$ e independe de α estar parametrizada pelo comprimento de arco ou não. Para obtermos a equação da evoluta, é preciso que o vetor normal seja unitário (assim o raio de curvatura é o raio do círculo osculador). Assim:

$$N(t) = (-e^t (\sin(t) + \cos(t)), e^t (\cos(t) - \sin(t))) \Rightarrow |N(t)| = e^t \sqrt{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \frac{N(t)}{|N(t)|} = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)) + e^t \sqrt{2} \frac{(-e^t (\sin(t) + \cos(t)), e^t (\cos(t) - \sin(t)))}{e^t \sqrt{2}} \Rightarrow \\ E(t) &= (-e^t \sin(t), e^t \cos(t)), \end{aligned}$$

ou seja, a evoluta de uma espiral logarítmica é, também, uma espiral logarítmica.

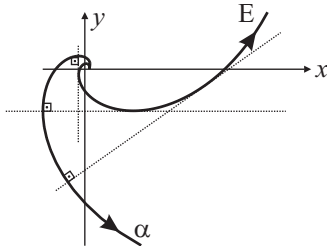


FIGURA 30: A evoluta de uma espiral logarítmica é outra espiral logarítmica.

2.6 O Teorema Fundamental das Curvas no Plano

Seja v um vetor do plano. A aplicação $T_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, y) + v$ é uma **translação pelo vetor** v .

A aplicação T_v é diferenciável de classe C^∞ ; $v = (v_1, v_2)$ e $T_v(x, y) = (x, y) + (v_1, v_2) = (x + v_1, y + v_2)$.

Seja $\theta \in \mathbb{R}$. A aplicação $L_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L_\theta(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$ é uma **rotação pelo ângulo** θ .

De fato, se $u = (x, y) = (|u| \cos(\varphi), |u| \sin(\varphi))$, então

$$\begin{aligned} L_\theta(u) &= (|L_\theta(u)| \cos(\varphi + \theta), |L_\theta(u)| \sin(\varphi + \theta)) \\ &= (|u| (\cos(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\varphi) \sin(\theta)), |u| (\sin(\varphi) \cos(\theta) + \cos(\varphi) \sin(\theta))) \\ &= (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Observações:

(1) L_θ é uma transformação linear e como $|L_\theta(u)| = |u|$, L_θ é uma isometria.

(2) Se $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base canônica de \mathbb{R}^2 , então $[L_\theta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ é chamada *matriz de rotação* e $[L_\theta]_{\mathcal{B}}[u] = [L_\theta(u)]$.

(3) L_θ é diferenciável de classe C^∞ .

(4) Como L_θ é linear, então $d(L_\theta)_P(w) = L_\theta(w)$, $\forall P \in \mathbb{R}^2, \forall w \in T_P \mathbb{R}^2$.

Proposição 2.6 *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Considere a curva $\beta(s) = T_v(L_\theta(\alpha(s)))$. Então:*

(a) β é curva regular parametrizada pelo comprimento de arco.

(b) A curvatura de β é igual a curvatura de α .

Demonstração.

(a) Temos

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= d(T_v \circ L_\theta)_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = d(L_\theta)_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = L_\theta(\alpha'(s)) \Rightarrow \\ |\beta'(s)| &= |L_\theta(\alpha'(s))| = |\alpha'(s)| = 1. \end{aligned}$$

Logo, β é regular e parametrizada pelo comprimento de arco.

(b) Sejam $\sigma, \omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha'(s) = (\cos(\omega(s)), \sin(\omega(s)))$ e $\beta'(s) = (\cos(\sigma(s)), \sin(\sigma(s)))$. Como $\beta'(s) = L_\theta(\alpha'(s))$ temos $\beta'(s) = (\cos(\omega(s) + \theta), \sin(\omega(s) + \theta))$, ou seja, $\sigma(s) = \omega(s) + \theta$, o que implica em $\sigma'(s) = \omega'(s)$. Pela Equação 2.1 temos $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$. \square

Teorema 2.1 *(Fundamental das Curvas no Plano)*

(i) *Seja $k :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$. Então, existe uma curva regular α de classe C^j , $j \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco tal que a função curvatura de α é k .*

(ii) *Se fixarmos $\alpha(s_0) = P$ e $\alpha'(s_0) = v$ unitário, então a curva α do item (i) é única.*

(iii) *Se α e β são curvas regulares com a mesma curvatura k , então α e β são congruentes.*

Demonstração.

(i) Vimos na Equação 2.1 que $k(s) = \theta'(s)$ sendo

$$\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)),$$

cujas soluções gerais são dadas por uma curva $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^j , $j \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco, definida por

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = \left(\int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \lambda) dt + x_0, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \lambda) dt + y_0 \right),$$

sendo $s_0 \in]a, b[$ e x_0, y_0, λ constantes reais.

(ii) Fixados $\alpha(s_0) = P = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v = (\cos(\theta(s_0) + \lambda), \sin(\theta(s_0) + \lambda))$, a solução da EDO do item (i) é única.

(iii) Sejam $\alpha, \beta :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares de mesma curvatura, ou seja, $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$. Logo, $\theta'_\alpha(s) = \theta'_\beta(s)$, sendo θ_α e θ_β conforme a demonstração do item (i). Deste modo, $\theta_\alpha(s) = \theta_\beta(s) + \lambda$. Assim, os vetores tangentes unitários de α são obtidos dos de β rotacionados por λ nos pontos correspondentes, ou seja $\alpha'(s) = L_\lambda(\beta'(s))$. Mas L_λ é linear, logo, $L_\lambda(\beta'(s)) = d(L_\lambda)_{\beta(s)}(\beta'(s)) = (L_\lambda \circ \beta)'(s)$. Assim, $\alpha'(s) = (L_\lambda \circ \beta)'(s)$ e, portanto, $\alpha(s) = (L_\lambda \circ \beta)(s) + v$ com $v \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $\alpha(s) = (T_v \circ R_\lambda \circ \beta)(s)$. Desta forma, α é obtida de β por meio de uma rotação composta com translação e, portanto, são curvas congruentes. \square

2.7 Determinando Curvas Regulares de Curvatura k

A demonstração do Teorema Fundamental das Curvas Planas fornece-nos um modo simples de determinar uma curva a partir de sua curvatura.

Seja $k :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^k , $k \geq 1$.

Para determinar uma curva seguimos os passos:

(1) Determinamos $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt$.

(2) Definimos

$$\begin{aligned} \alpha :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (x(s), y(s)) \end{aligned}$$

tal que

$$x(s) = \int_{s_0}^s \cos(\theta(t)) dt$$

e

$$y(s) = \int_{s_0}^s \sin(\theta(t)) dt.$$

Para determinar uma curva com $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = (u_0, v_0)$ fazemos

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \lambda) dt \text{ e } y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \lambda) dt$$

e, para determinar λ , fazemos $\alpha'(s_0) = (\cos(\theta(s_0) + \lambda), \sin(\theta(s_0) + \lambda)) = (u_0, v_0)$.

Exemplo 2.31 As curvas de curvatura constante são apenas retas (ou segmentos de retas) ou circunferências (ou arcos de circunferências).

De fato:

Queremos $k(s) = k$ (constante).

$$\text{Fazemos } \theta(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt = \int_{s_0}^s k dt = ks - ks_0.$$

Se $k \neq 0$, então

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^s \cos(kt - ks_0) dt = \frac{\sin(ks - ks_0)}{k} - \frac{\sin(0)}{k} = \frac{\sin(ks - ks_0)}{k}; \\ y(s) &= \int_{s_0}^s \sin(kt - ks_0) dt = \frac{-\cos(ks - ks_0)}{k} + \frac{\cos(0)}{k} = \frac{-\cos(ks - ks_0)}{k} + \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{k} \sin(ks - ks_0), \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \cos(ks - ks_0) \right),$$

ou seja, as curvas de curvatura constante não nula k são circunferências (ou arcos de circunferência) de raio $\frac{1}{|k|}$ (o sinal de k determina a orientação da curva).

Se $k = 0$, então $\theta(s) = 0$ e

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^s \cos(0) dt = s - s_0; \\ y(s) &= \int_{s_0}^s \sin(0) dt. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha(s) = (s - s_0, 0)$, ou seja, as curvas de curvatura constante nula são retas (ou segmentos de reta).

Exemplo 2.32 Determinação da curva α tal que $\alpha(1) = (1, 1)$; $\alpha'(1) = (0, 1)$ com curvatura $k(s) = \frac{1}{s}$; $s > 0$.

Façamos

$$\theta(s) = \int_1^s \frac{1}{t} dt = \ln(|s|).$$

Observação: $\alpha(1) = (1, 1) \implies s_0 = x_0 = y_0 = 1$.

Assim,

$$x(s) = 1 + \int_1^s \cos(\ln(|t|) + \lambda) dt \implies x'(s) = \cos(\ln(|s|) + \lambda).$$

Mas $\alpha'(1) = (0, 1) \implies x'(1) = 0$ e $y'(1) = 1$.

Assim,

$$x'(1) = 0 \implies \cos(\lambda) = 0 \implies \lambda = \frac{\pi}{2} + h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $h = 0$ temos $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} x(s) &= 1 + \int_1^s \cos\left(\ln(|t|) + \frac{\pi}{2}\right) dt \\ &= 1 - \int_1^s \sin(\ln(|t|)) dt \\ &= 1 - \left(t \sin(\ln(|t|)) \Big|_1^s - \int_1^s \cos(\ln(|t|)) dt \right) \\ &= 1 - s \sin(\ln(|s|)) + (t \cos(\ln(|t|))) \Big|_1^s - \int_1^s -\sin(\ln(|t|)) dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$1 - \int_1^s \sin(\ln(|t|)) dt = 1 - s \sin(\ln(|t|)) + (t \cos(\ln(|t|)))|_1^s - \int_1^s -\sin(\ln(|t|)) dt \implies$$

$$\int_1^s \sin(\ln(|t|)) dt = \frac{1}{2} + \frac{s}{2} (\sin(\ln(|s|)) - \cos(\ln(|s|))).$$

Portanto,

$$x(s) = \frac{1}{2} - \frac{s}{2} (\sin(\ln(|s|)) - \cos(\ln(|s|))).$$

Analogamente,

$$y(s) = 1 + \int_1^s \sin\left(\ln(|t|) + \frac{\pi}{2}\right) dt$$

satisfaz $y'(1) = 1$ e $y(s) = 1 + \int_1^s \cos(\ln(|t|)) dt$.

Integrando duas vezes por partes temos

$$y(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{2} (\sin(\ln(|s|)) + \cos(\ln(|s|))).$$

Mas

$$\begin{cases} \cos(\ln(|s|)) + \sin(\ln(|s|)) = \sqrt{2} \sin\left(\ln(|s|) + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin(\ln(|s|)) - \cos(\ln(|s|)) = -\sqrt{2} \cos\left(\ln(|s|) + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$$

Logo,

$$x(s) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} s \cos\left(\ln(|s|) + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$y(s) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} s \sin\left(\ln(|s|) + \frac{\pi}{4}\right).$$

Fazendo $u = \frac{\pi}{4} + \ln(|s|) \implies |s| = e^{u-\frac{\pi}{4}} \implies s = e^{u-\frac{\pi}{4}}$ (pois $s > 0$).

Tomemos a reparametrização $\beta(u) = \alpha \circ \psi(u)$; sendo $\psi(u) = e^{u-\frac{\pi}{4}}$. Logo,

$$\beta(u) = (x(\psi(u)), y(\psi(u))) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{u-\frac{\pi}{4}} \cdot \cos(u), \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{u-\frac{\pi}{4}} \cdot \sin(u) \right) \implies$$

$$\beta(u) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} (e^u \cos(u), e^u \sin(u)),$$

que é uma espiral logarítmica.

Observação: a curvatura de α dada por $k(s) = \frac{1}{s}$; $s > 0$ nos diz que a curvatura de β é dada por $\bar{k}(u) = \frac{1}{e^{u-\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^u}$ (visto que a curvatura não muda, a menos de sinal, com a reparametrização e além disso ψ é uma mudança de parâmetro que conserva orientação).

Exemplo 2.33 Determinação das curvas regulares do plano que tem curvatura $k(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$; $s > 0$.

Façamos

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}.$$

Temos $\alpha(s_0) = (0, 0) \implies x_0 = y_0 = 0$. Façamos $\lambda = 0$. Logo,

$$x(s) = \int_{s_0}^s \cos(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) dt$$

$$= \sqrt{t} \sin(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) \Big|_{s_0}^s - \int_{s_0}^s \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) dt =$$

$$= \sqrt{s} \sin(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}) + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}) - \frac{1}{2}.$$

Analogamente,

$$y(s) = \int_{s_0}^s \sin(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) dt = \sqrt{s_0} + \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}) - \sqrt{s} \cos(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}).$$

Fazendo $u = 2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0} \Rightarrow s = \left(\frac{u+2\sqrt{s_0}}{2}\right)^2$; $u > -2\sqrt{s_0}$ e, tomando a reparametrização $\beta(u) = \alpha \circ \psi(u)$; sendo $\psi(u) = \left(\frac{u+2\sqrt{s_0}}{2}\right)^2$ temos

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \left(\frac{u+2\sqrt{s_0}}{2} \sin(u) + \frac{1}{2} \cos(u) - \frac{1}{2}, \sqrt{s_0} + \frac{1}{2} \sin(u) - \frac{u+2\sqrt{s_0}}{2} \cos(u) \right) \Rightarrow \\ \beta(u) &= \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{s_0} \right) + \left(\frac{2\sqrt{s_0}}{2} \sin(u) + \frac{1}{2} \cos(u), \frac{1}{2} \sin(u) - \frac{2\sqrt{s_0}}{2} \cos(u) \right) + \frac{1}{2} (u \sin(u), -u \cos(u)). \end{aligned}$$

Para $s_0 = \frac{1}{4}$, temos uma Espiral de Arquimedes.

Conseqüentemente, as curvas regulares do plano com curvatura $k(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$; $s > 0$ são Espirais de Arquimedes.

Capítulo 3

Curvas no Espaço

Neste capítulo, introduzimos as principais definições e resultados acerca de curvas parametrizadas no espaço. Assim como no Capítulo 2 de curvas no plano, as principais referências para esse assunto são [1], [3] e [18], nas quais nos baseamos.

3.1 Curvas Parametrizadas

As definições abaixo são análogas às definições apresentadas para curvas no plano.

Uma *curva parametrizada no espaço* é uma aplicação

$$\begin{aligned} \alpha :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} ,$$

sendo:

$$\begin{aligned} x :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} & , & & y :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} & \text{ e } & & z :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) & & & t &\longmapsto y(t) & & & t &\longmapsto z(t) \end{aligned}$$

suas *funções componentes* ou *funções coordenadas*.

Dizemos que

- (i) α é *de classe* C^0 quando x , y e z forem contínuas. Neste caso, também dizemos que α é contínua.
- (ii) α é *diferenciável de classe* C^k , $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, quando x , y e z forem diferenciáveis de classe C^k , ou seja, x , y e z possuem derivadas de ordem k e estas forem contínuas.
- (iii) α é *diferenciável de classe* C^∞ ou *suave* quando x , y e z forem diferenciáveis de classe C^∞ , ou seja, x , y e z possuem derivadas de qualquer ordem.

O *traço* de α é a imagem da aplicação α :

$$\text{Traço}(\alpha) = \text{Im}(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in]a, b[\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Assim como no caso de curvas planas, é costume comum usar a palavra “curva” tanto para a aplicação α quanto para o traço de α .

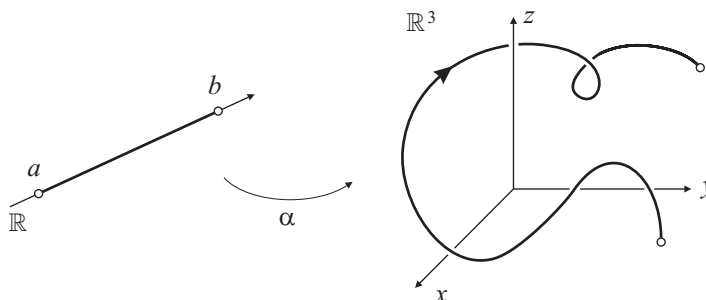


FIGURA 31: Curva parametrizada no espaço.

Uma curva parametrizada no espaço pode ser definida em um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e, neste caso, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada de classe C^k , $k \geq 1$, se existir $\delta > 0$ e $\beta :]a - \delta, b + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k , $k \geq 1$, tal que $\beta|_{[a, b]} = \alpha$.

Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada de classe C^k , $k \geq 1$. O vetor

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

é um **vetor tangente** a α em $t = t_0$ e, caso $\alpha'(t_0) \neq (0, 0, 0)$, a **reta tangente** a α em $t = t_0$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ e tem a direção do vetor $\alpha'(t_0)$, cuja equação vetorial é dada por

$$T_{t_0}(\lambda) = \alpha(t_0) + \lambda \alpha'(t_0); \lambda \in \mathbb{R}.$$

A curva parametrizada $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **curva regular de classe C^k** , $k \geq 1$, quando

(i) α é de classe C^k .

(ii) $\alpha'(t) \neq (0, 0, 0)$, $\forall t \in]a, b[$.

Assim como no plano, a condição (ii) implica na existência de reta tangente em todos os pontos do traço de α .

Uma curva parametrizada no espaço pode ser **regular por partes**, ou seja, $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular de classe C^k , $k \geq 1$, exceto para uma quantidade finita de valores de t nos quais $\alpha'(t)$ não existe ou $\alpha'(t) = (0, 0, 0)$.

Quando uma curva parametrizada α é contínua, os pontos t tais que $\alpha'(t)$ não existe ou $\alpha'(t) = (0, 0, 0)$ são chamados de **singularidades** de α . Se t for singularidade de α para qualquer reparametrização (Seção 3.2) de α , dizemos que t é uma **singularidade essencial** de α .

As singularidades essenciais de α formam “quinas” no traço de α .

Dizemos que uma curva parametrizada α é **simples** quando $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ for injetiva, isto é, se $t_0 \neq t_1$, então $\alpha(t_0) \neq \alpha(t_1)$. Se α não for simples, dizemos que α tem auto-intersecção.

3.2 Reparametrização de Curvas

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, sendo I um intervalo de \mathbb{R} .

O **comprimento de arco** da curva α entre os pontos t_0 e t_1 em I é dado por:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt.$$

A função

$$\begin{aligned} S : [t_0, +\infty[\cap I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du \end{aligned}$$

é chamada **função comprimento de arco** da curva α a partir do ponto t_0 .

Dizemos que a curva α está **parametrizada pelo comprimento de arco** quando $|\alpha'(t)| = 1$, $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$. Neste caso, $S(t) = t - t_0$.

Sejam $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, e $]c, d[\subset \mathbb{R}$. Uma **mudança de parâmetros** para α é uma aplicação $\psi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ bijetiva de classe C^k tal que $\psi'(s) \neq 0$, $\forall s \in]c, d[$. A composta $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada **reparametrização** de classe C^k de α . A proposição abaixo, cuja demonstração é análoga à proposição 2.1, diz que a reparametrização $\tilde{\alpha}$ é regular.

Proposição 3.1 Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 1$, e seja $\psi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ uma mudança de parâmetros de classe C^k para α . Então, $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ é reparametrização regular de classe C^k .

Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada. A **orientação** da curva α é o sentido de percurso do traço da curva quando t varia de a até b .

Seja $\psi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ uma mudança de parâmetros de classe C^k para α . Tomemos a reparametrização $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ de α . Assim, se $\psi'(s) > 0$, então α e $\tilde{\alpha}$ possuem a mesma orientação, pois $\tilde{\alpha}'(s) = \alpha'(\psi(s))\psi'(s)$. Se $\psi'(s) < 0$, então α e $\tilde{\alpha}$ possuem orientações opostas.

No primeiro caso, dizemos que a mudança de parâmetros ψ **preserva orientação** e no segundo caso, que ψ **inverte orientação**.

A proposição abaixo também possui demonstração à demonstração da Proposição 2.3.

Proposição 3.2 Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ regular de classe C^k , $k \geq 1$. Então, existe uma mudança de parâmetros $\psi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ de classe C^k para α que preserva orientação tal que a reparametrização $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \psi$ satisfaz

- (i) $|\tilde{\alpha}'(s)| = 1, \forall s \in]c, d[$;
- (ii) $\int_{s_0}^{s_1} |\tilde{\alpha}'(u)| du = s_1 - s_0, \forall s_0, s_1 \in]c, d[, s_0 \leq s_1$.

A composta $\tilde{\alpha}$ da Proposição 3.2 é chamada de **reparametrização de α pelo comprimento de arco**.

Exemplo 3.1 Considere a **hélice circular** $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

(i) α é regular.

De fato, $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = t$ são C^∞ e $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1) \neq (0, 0, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto, α é regular.

(ii) Esboço do traço de α :

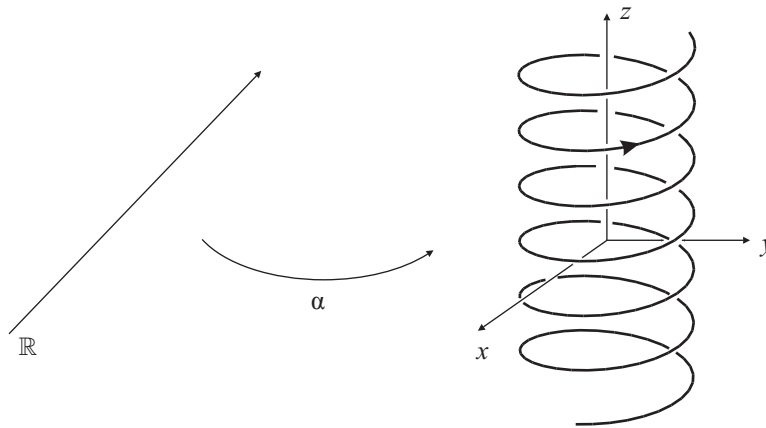


FIGURA 32: Espiral cilíndrica no espaço.

(iii) Reparametrização pelo comprimento de arco:

Temos

$$S(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du = \int_{t_0}^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t - \sqrt{2}t_0.$$

Seja

$$\begin{aligned} \psi = S^{-1} : & \quad \mathbb{R} \\ s & \quad \longmapsto \psi(s) = t \end{aligned}$$

Portanto,

$$S(\psi(s)) = s \implies S(t) = s \implies \sqrt{2}t - \sqrt{2}t_0 = s \implies t = \frac{s + \sqrt{2}t_0}{\sqrt{2}} \implies \psi(s) = \frac{s + \sqrt{2}t_0}{\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha \circ \psi = \left(\cos\left(\frac{s + \sqrt{2}t_0}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s + \sqrt{2}t_0}{\sqrt{2}}\right), \frac{s + \sqrt{2}t_0}{\sqrt{2}} \right)$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. ($|\tilde{\alpha}'(s)| = 1$)

Exemplo 3.2 Considere a *hélice cônica* $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) α é regular.

De fato, $x(t) = e^t \cos(t)$, $y(t) = e^t \sin(t)$ e $z(t) = e^t$ são funções C^∞ e

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t), e^t) \\ &= e^t (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1) \\ &\neq 0, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, α é regular.

(ii) Esboço do traço de α :

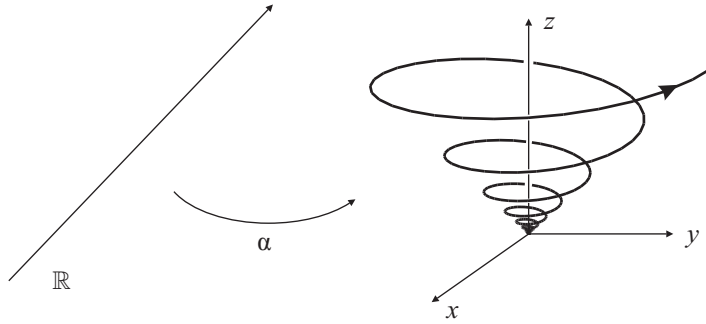


FIGURA 33: Espiral cônica no espaço.

(iii) Reparametrização pelo comprimento de arco:

Temos

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{e^{2u} (\cos^2(u) - 2 \cos(u) \sin(u) + \sin^2(u) + \sin^2(u) + 2 \sin(u) \cos(u) + \cos^2(u) + 1)} du \\ &= \int_{t_0}^t e^u \sqrt{3} du \\ &= \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}e^{t_0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{array}{ccc} S^{-1} = \psi : S(\mathbb{R}) =]-\sqrt{3}e^{t_0}, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \psi(s) = t \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S(\psi(s)) &= s \implies \\ S(t) &= s \implies \\ \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}e^{t_0} &= s \implies \\ t &= \ln\left(\frac{s + \sqrt{3}e^{t_0}}{\sqrt{3}}\right) \implies \\ \psi(s) &= \ln\left(\frac{s + \sqrt{3}e^{t_0}}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(s) &= \alpha \circ \psi(s) \\ &= \left(\frac{s + \sqrt{3}e^{t_0}}{\sqrt{3}} \cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{3}e^{t_0}}{\sqrt{3}} \right) \right), \frac{s + \sqrt{3}e^{t_0}}{\sqrt{3}} \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{3}e^{t_0}}{\sqrt{3}} \right) \right), \frac{s + \sqrt{3}e^{t_0}}{\sqrt{3}} \right), \quad t_0 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

está parametrizada por comprimento de arco. ($|\tilde{\alpha}'(s)| = 1$)

3.3 Curvatura, Torção e Equações de Frenet

Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, parametrizada pelo comprimento de arco. Logo, $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s \in]a, b[$. Seja

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = \alpha'(s)$$

e consideremos

$$\alpha''(s) = (x''(s), y''(s), z''(s)).$$

Temos

$$|\alpha'(s)| = 1 \implies \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \implies 2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \implies \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0,$$

ou seja, $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$.

Suponhamos que $\alpha''(s) \neq (0, 0, 0)$; $\forall s \in]a, b[$. Definimos

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$$

como sendo o **vetor normal principal** à α em s . Temos que $N(s)$ é normal à curva α em s , ou seja, $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$.

A **reta normal principal** à α em t é definida por

$$N_s(\lambda) = \alpha(s) + \lambda N(s), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seja

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Temos $B(s) \perp T(s)$, $B(s) \perp N(s)$ e $|B(s)| = 1$.

O vetor $B(s)$ é chamado de **vetor binormal** à α em s .

A base

$$\{T(s), N(s), B(s)\}_{\alpha(s)}$$

é uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 chamada de **Triedro de Frenet**, ou **Triedro Móvel** em $\alpha(s)$.

Observação: quando a curva regular α não está parametrizada pelo comprimento de arco, definimos os vetores T , B e N do seguinte modo:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \quad \text{e} \quad N(t) = B(t) \times T(t).$$

Suponha $\alpha''(s) \neq (0, 0, 0)$. Consideremos o Triedro de Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$ no ponto $\alpha(s)$.

- O **plano osculador** à curva α em s é o plano que passa por $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $B(s)$.
- O **plano retificante** à curva α em s é o plano que passa por $\alpha(s)$ e é normal a $N(s)$.
- O **plano normal** à curva α em s é o plano que passa por $\alpha(s)$ e é normal a $T(s)$.

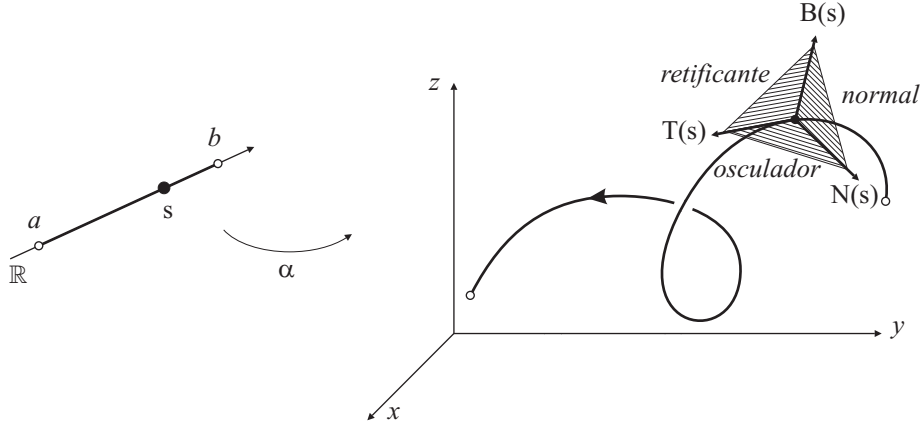


FIGURA 34: Planos osculador, normal e binormal.

Exemplo 3.3 Seja $\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, $s \in \mathbb{R}$.

Como $|\alpha'(s)| = 1$ temos α parametrizada pelo comprimento de arco.

Temos

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = T(s) \Rightarrow T(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right);$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = 2 \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right) \Rightarrow N(0) = (-1, 0, 0);$$

$$B(s) = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow B(0) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\alpha(0) = (1, 0, 0).$$

Logo, $\{T(0), N(0), B(0)\}$ é o Triedro de Frenet em $\alpha(0)$.

O Plano Normal em $t = 0$ é dado por

$$0x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 1(0) + 0\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y + z = 0.$$

O Plano Retificante em $t = 0$ é dado por

$$-1x + 0y + 0z = 1(-1) + 0(0) + 0(0) \Rightarrow x = 1.$$

O Plano Osculador em $t = 0$ é dado por

$$0x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 1(0) + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow -y + z = 0.$$

Dizemos que uma curva $\alpha:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ é **plana** se existe um plano que contém o traço de α .

Exemplo 3.4 Considere a curva $\alpha(t) = (t, t + t^2, 1 + t^2)$. Trata-se de uma curva plana.

De fato, consideremos 3 pontos da curva:

$$P = \alpha(0) = (0, 0, 1); \quad Q = \alpha(-1) = (-1, 0, 2) \quad e \quad R = \alpha(1) = (1, 2, 2).$$

A equação do plano que passa por P, Q e R é

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0, 0, 1) + \lambda[(-1, 0, 2) - (0, 0, 1)] + \mu[(1, 2, 2) - (0, 0, 1)] \Rightarrow \\ (x, y, z) &= (0, 0, 1) + \lambda(-1, 0, 1) + \mu(1, 2, 1) \end{aligned}$$

$(Q - P) \times (R - P)$ é normal ao plano que contém P, R e Q:

$$(Q - P) \times (R - P) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 = (-2, 2, -2).$$

Logo, a equação geral do plano que contém P, Q e R é

$$-2x + 2y - 2z + d = 0.$$

Como $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ pertence ao plano, temos

$$-2(0) + 2(0) - 2(1) + d = 0 \implies d = 2.$$

Logo,

$$-2x + 2y - 2z + 2 = 0 \implies x - y + z - 1 = 0.$$

Os pontos da curva são tais que $x = t$, $y = t + t^2$ e $z = 1 + t^2$. Substituindo:

$$t - (t + t^2) + (1 + t^2) - 1 = 0,$$

ou seja, todos os pontos da curva pertencem ao plano $x - y + z - 1 = 0$.

Observação:

Outra maneira de obter a equação do plano acima:

$\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ definem o plano osculador à curva em t e $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ é normal a esse plano. Se a curva α for plana, o plano que contém α será o plano osculador (veremos isso mais adiante). Mas $\alpha'(t) = (1, 1 + 2t, 2t)$ e $\alpha''(t) = (0, 2, 2)$. Logo,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 + 2t & 2t \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (2 + 4t)\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_2 - 4t\mathbf{e}_1 = (2, -2, 2).$$

Logo, a equação do plano osculador será $2x - 2y + 2z + d = 0$. Observemos ainda que $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ não depende de t , ou seja, a curva “não se torce”. Para achar d basta substituir as coordenadas de um ponto da curva α .

CURVATURA DE UMA CURVA REGULAR DE CLASSE C^k , $k \geq 4$, PARAMETRIZADA PELO COMPRIMENTO DE ARCO

A **curvatura** de uma curva regular $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k , $k \geq 4$, parametrizada pelo comprimento de arco é definida por

$$k(s) = |\alpha''(s)|.$$

Observações:

(i) Curvaturas de curvas regulares no plano podem ser negativas, dependendo da orientação da mesma. No espaço, consideramos apenas curvatura positiva, ou seja, $k(s) \geq 0$, $\forall s \in]a, b[$.

(ii) Uma curva regular no plano pode ser também vista como uma curva regular no espaço. Neste caso, as definições de curvatura coincidem. De fato, vimos na seção anterior que, quando uma curva regular plana está parametrizada pelo comprimento de arco, então $|k(s)| = |\alpha''(s)|$.

(iii) O vetor normal principal só é definido quando $k(t) \neq 0$.

(iv) $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \frac{T'(s)}{k(s)}$, isto é,

$$T'(s) = k(s) N(s)$$

que é a **1ª Equação de Frenet** de α .

(iv) Geometricamente, a curvatura mede a velocidade com que os vetores tangentes à curva mudam de direção (como no plano).

Exemplo 3.5 A curvatura de $\alpha(t) = \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, $t \in \mathbb{R}$ é $k(t) = |\alpha''(t)| = \frac{1}{2}$.

TORÇÃO DE UMA CURVA REGULAR DE CLASSE C^k , $k \geq 4$, PARAMETRIZADA PELO COMPRIMENTO DE ARCO

Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k , $k \geq 4$, parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha''(s) \neq (0, 0, 0)$. Do Cálculo Vetorial temos que se $\alpha, \beta :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ são curvas diferenciáveis, então

$$(\alpha(s) \times \beta(s))' = \alpha'(s) \times \beta(s) + \alpha(s) \times \beta'(s).$$

Consideremos o vetor binormal de α em t :

$$B(t) = T(s) \times N(s).$$

Temos

$$B'(t) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s).$$

Como $T'(s) = \alpha''(s)$ e $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$, temos $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$, ou seja, $N(s)$ e $T'(s)$ são linearmente dependentes e, portanto, $T'(s) \times N(s) = (0, 0, 0)$ ($\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente dependente). Assim,

$$B'(s) = T(s) \times N'(s) \implies B'(s) \perp T(s) \text{ e } B'(s) \perp N'(s).$$

Mas,

$$|B(s)| = 1 \implies \langle B(s), B(s) \rangle = 1 \implies 2 \langle B(s), B'(s) \rangle = 0 \implies B'(s) \perp B(s).$$

Desta forma, $B'(s) \perp N(s)$, ou seja, $\{B'(s), N(s)\}$ é linearmente dependente o que implica na existência de $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$B'(s) = \tau(s) N(s),$$

que é a chamada **3ª Equação de Frenet** de α .

O número real $\tau(s)$ é chamado de **torção** da curva α em s .

Como $\langle B'(s), N(s) \rangle = \langle \tau(s) N(s), N(s) \rangle = \tau(s) \langle N(s), N(s) \rangle = \tau(s)$, temos

$$\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle.$$

Interpretação Geométrica da Torção

O módulo da torção $\tau(s)$ mede a velocidade com que o vetor binormal muda de direção.

De fato, seja $v(h) = \frac{|B(s+h) - B(s)|}{h}$ a velocidade com que B muda de direção nos instantes s e $s+h$. Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} v(h) = |B'(s)| = |\tau(s) N(s)| = |\tau(s)| \cdot |N(s)| = |\tau(s)|.$$

**CURVATURA DE UMA CURVA REGULAR DE CLASSE C^k , $k \geq 4$, COM
PARAMETRIZAÇÃO QUALQUER**

Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular do espaço com $\alpha''(t) \neq (0, 0, 0)$, $\forall t \in]a, b[$. Seja β reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Temos

$$\alpha(t) = \beta(S(t)) \implies \alpha'(t) = \beta'(S(t)) S'(t) \implies \beta'(S(t)) = \frac{\alpha'(t)}{S'(t)} = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

Derivando $\alpha'(t)$ temos

$$\alpha''(t) = \beta''(S(t)) S'(t)^2 + \beta'(S(t)) S''(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= S'(t)^3 \beta'(S(t)) \times \beta''(S(t)) + S'(t) S''(t) \beta'(S(t)) \times \beta'(S(t)) \implies \\ \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t)|^3} &= \beta'(S(t)) \times \beta''(S(t)) \implies \\ \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} &= |\beta'(S(t))| \cdot |\beta''(S(t))| \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

sendo θ o ângulo entre $\beta'(S(t))$ e $\beta''(S(t))$.

Mas β é parametrizada pelo comprimento de arco. Logo,

$$|\beta'(S(t))| = 1 \implies \langle \beta'(S(t)), \beta''(S(t)) \rangle = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, $|\beta''(S(t))| = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$, ou seja, a curvatura de β em s está em função de t .

Assim, a curvatura de α em t é

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Observação: Se α for plana, as definições de curvatura dadas acima e na seção anterior coincidem a menos de sinal. De fato, na Seção 2.3: $|k(t)| = \frac{|\langle T'(t), N(t) \rangle|}{|T(t)|^3}$ sendo $T'(t) = \alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$ e $N(t) = (-y'(t), x'(t))$. Assim,

$$\begin{aligned} |k(t)| &= \frac{|\langle (x''(t), y''(t)), (-y'(t), x'(t)) \rangle|}{|\alpha'(t)|^3} \\ &= \frac{|-y'(t) x''(t) + x'(t) y''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \\ &= \frac{\left| \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{bmatrix} \right|}{|\alpha'(t)|^3} \\ &= \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}. \end{aligned}$$

TORÇÃO DE UMA CURVA REGULAR DE CLASSE C^k , $k \geq 4$, COM PARAMETRIZAÇÃO QUALQUER

Temos

$$\begin{aligned} S'(t) &= |\alpha'(t)| \implies \\ S'(t)^2 &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \implies \\ 2S'(t)S''(t) &= 2\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \implies \\ S''(t) &= \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|}. \end{aligned}$$

Vimos acima que $\alpha''(t) = \beta''(S(t))S'(t)^2 + \beta'(S(t))S''(t)$ e $\beta'(S(t)) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$. Logo,

$$\beta''(S(t)) = \frac{\alpha''(t) - \beta'(S(t))S''(t)}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}{|\alpha'(t)|^4}.$$

Pela 1ª Equação de Frenet de α :

$$\begin{aligned} N(S(t)) &= \frac{\beta''(S(t))}{k(S(t))} = \frac{|\alpha'(t)|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}{\frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} |\alpha'(t)|^4} \implies \\ N(S(t)) &= \frac{|\alpha'(t)|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}{|\alpha'(t)| \cdot |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{|\alpha'(t)| \cdot |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}. \end{aligned}$$

Mas,

$$B(S(t)) = \beta'(S(t)) \times \frac{\beta''(S(t))}{|\beta''(S(t))|} = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t)|^3} \frac{1}{\frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}} \implies$$

$$B(S(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \implies$$

$$B'(S(t))S'(t) = \frac{(\alpha''(t) \times \alpha''(t) + \alpha'(t) \times \alpha'''(t))|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| - (\alpha'(t) \times \alpha''(t))|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|'}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} \tau(S(t)) &= \langle B'(S(t)), N(S(t)) \rangle; \\ \alpha''(t) \times \alpha''(t) &= \vec{0}, \end{aligned}$$

e

$$\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle = 0$$

temos

$$\tau(S(t)) = \left\langle \frac{\alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{|\alpha'(t)| \cdot |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}, \frac{|\alpha'(t)| \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \right\rangle \implies \tau(S(t)) = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2},$$

ou seja, a torção de β em s está em função de t . Logo, a torção de α em t é

$$\boxed{\tau(t) = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}}.$$

Finalmente, observemos que $N(S(t)) = B(S(t)) \times \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$.

FÓRMULAS DE FRENET

Seja $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha''(s) \neq (0, 0, 0)$.

Vimos que $T'(s) = k(s) N(s)$ é a 1ª Equação de Frenet de α .

Vimos que $B'(s) = \tau(s) N(s)$ é a 3ª Equação de Frenet de α .

Falta uma expressão para $N'(s)$.

Mas $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é base ortonormal orientada positivamente em $\alpha(s)$. Logo, $N(s) = B(s) \times T(s)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s) \implies \\ N'(s) &= \tau(s) N(s) \times T(s) + B(s) \times k(s) N(s), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{N'(s) = -k(s) T(s) - \tau(s) B(s)},$$

que é a 2ª *Equação de Frenet* de α .

UM RESUMO

Seja $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, com $\alpha''(t) \neq (0, 0, 0)$. Definindo

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \\ B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \\ N(t) &= B(t) \times T(t) \end{aligned}$$

temos o seguinte resumo para curvas regulares do espaço.

- α parametrizada pelo comprimento de arco:

$T(s) = \alpha'(s)$	(vetor tangente)
$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{ \alpha''(s) }$	(vetor normal)
$B(s) = T(s) \times N(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{ \alpha''(s) }$	(vetor binormal)
$k(s) = \alpha''(s) $	(curvatura)
$\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle$	(torção)
$T'(s) = k(s) N(s)$	(1ª Equação de Frenet)
$N'(s) = -k(s) T(s) - \tau(s) B(s)$	(2ª Equação de Frenet)
$B'(s) = \tau(s) N(s)$	(3ª Equação de Frenet)

- α parametrizada com parâmetro qualquer:

$T(t) = \alpha'(t)$	(vetor tangente)
$N(t) = B(t) \times T(t)$	(vetor normal)
$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{ \alpha'(t) \times \alpha''(t) }$	(vetor binormal)
$k(t) = \frac{ \alpha'(t) \times \alpha''(t) }{ \alpha'(t) ^3}$	(curvatura)
$\tau(t) = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha'''(t) \rangle}{ \alpha'(t) \times \alpha''(t) ^2}$	(torção)

Exemplo 3.6 Calculemos a curvatura e a torção da curva $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Temos $\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$, $|\gamma'(t)| \neq 1$, ou seja, γ não está parametrizada pelo comprimento de arco.

Temos $\gamma''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \\
 &= \frac{\left| \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \right|}{\left(\sqrt{(e^t)^2 + (-e^{-t})^2 + \sqrt{2}^2} \right)^3} \\
 &= \frac{|(-\sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t, 2)|}{\left(\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} \right)^3} \\
 &= \frac{\sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4}}{\left(\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} \right)^3}.
 \end{aligned}$$

Observemos que $k(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Temos $\gamma'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)$. Logo,

$$\gamma'(t) \times \gamma'''(t) = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{bmatrix} = (\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 0).$$

Assim, a torção é dada por

$$\tau(t) = \frac{\langle (\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 0), (e^t, e^{-t}, 0) \rangle}{\left(\sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} \right)^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \frac{\sqrt{2}}{e^{-2t} + e^{2t} + 2}.$$

Observemos que $\tau(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Traço:

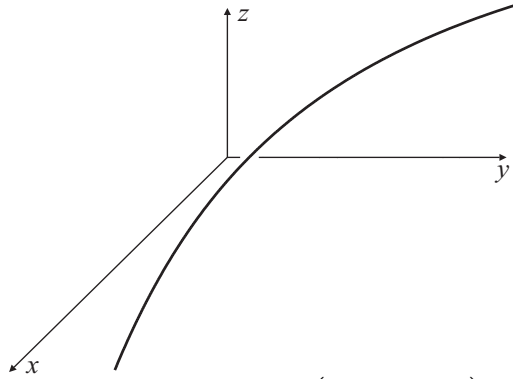


FIGURA 35: A curva $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Projeções:

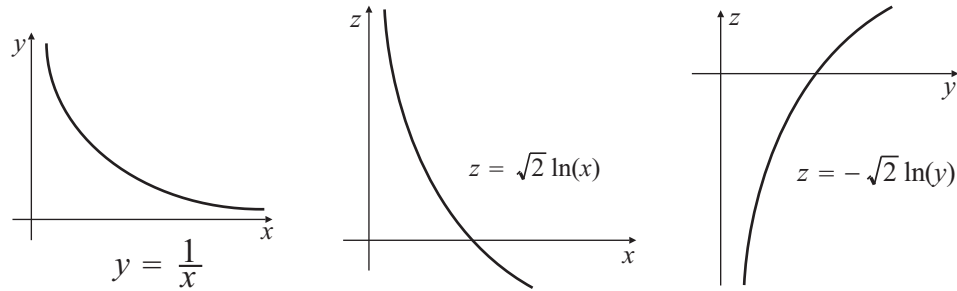


FIGURA 36: Projeção da curva $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$ nos planos xy , xz e yz .

3.4 Curvas Regulares Planas e Torção

Proposição 3.3 *Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, com curvatura não nula.*

- (i) *Se α é uma curva regular plana, então o vetor binormal $B(t)$ não depende do parâmetro t , isto é, $B(t)$ é constante e o plano osculador é o plano que contém a curva.*
- (ii) *α é uma curva plana se, e somente se, $\tau(t) = 0$ para qualquer t .*

Demonstração.

(i) Seja P o plano que contém α e seja \vec{v} um vetor unitário normal a P . Tomemos $\alpha(t_0) \in P$ e seja $X \neq \alpha(t_0)$ um ponto qualquer de P . A equação de P será $\langle X - \alpha(t_0), \vec{v} \rangle = 0$. Em particular, para $X = \alpha(t)$ temos

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{v} \rangle = 0.$$

Supondo α parametrizada pelo comprimento de arco e derivando a equação acima:

$$\langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle + \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{0} \rangle = 0 \implies \langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle = 0 \implies \langle T(t), \vec{v} \rangle = 0,$$

ou seja,

$$T(t) \perp \vec{v}. \quad (3.1)$$

Derivando $\langle T(t), \vec{v} \rangle = 0$ temos

$$\langle T'(t), \vec{v} \rangle + \langle T(t), \vec{0} \rangle = 0 \implies \langle T'(t), \vec{v} \rangle = 0.$$

Pela 1ª Equação de Frenet de α :

$$\langle k(t) N(t), \vec{v} \rangle = 0 \implies k(t) \langle N(t), \vec{v} \rangle = 0.$$

Mas $k(t) \neq 0$. Logo: $\langle N(t), \vec{v} \rangle = 0$, ou seja,

$$N(t) \perp \vec{v}. \quad (3.2)$$

Como $B(t) \perp T(t)$ e $B(t) \perp N(t)$, por 3.1 e 3.2 temos $B(t) // \vec{v}$.

Logo, existe $\lambda(t)$ tal que $B(t) = \lambda(t) \vec{v}$. Como $|B(t)| = |\vec{v}| = 1$, temos $|\lambda(t)| = 1$, o que implica $\lambda(t) = 1$ ou $\lambda(t) = -1$.

Conclusão: $B(t) = \vec{v}$ ou $B(t) = -\vec{v}$ (depende da orientação da curva), ou seja, $B(t)$ é constante.

Observemos que, como λ é contínua, não ocorre $B(t_0) = \vec{v}$ e $B(t_1) = -\vec{v}$ em uma mesma curva.

Finalmente, como $\langle X - \alpha(t_0), \vec{v} \rangle = 0$ é equação de P , $\langle X - \alpha(t_0), B(t) \rangle = 0$ é equação de P e, portanto, P é o plano osculador de α em t .

(ii) \implies Se α é uma curva plana, pelo item (i), $B(t) = \vec{v}$ é constante. Supondo α parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$\tau(t) = \langle B'(t), N(t) \rangle = \langle \vec{0}, N(t) \rangle = 0, \forall t.$$

\Leftarrow) Supondo α parametrizada pelo comprimento de arco, da 3ª Equação de Frenet temos: $|B'(t)| = |\tau(t)| \cdot |N(t)|$. Mas $\tau(t) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} |B'(t)| &= 0, \forall t \implies \\ B'(t) &= \vec{0} \implies \\ B(t) &= \vec{v} \text{ (constante)} \end{aligned}$$

A equação do plano osculador a α em t_0 é $\langle X - \alpha(t_0), B(t_0) \rangle = 0$, ou seja, $\langle X - \alpha(t_0), \vec{v} \rangle = 0$. Consideremos a função $F(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{v} \rangle$. Derivando temos

$$F'(t) = \langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle = \langle T(t), B(t) \rangle = 0 \implies F(t) = c, \text{ (constante)}$$

Mas $F(t_0) = \langle \alpha(t_0) - \alpha(t_0), \vec{v} \rangle = 0$. Logo, $c = 0$. Assim, $F(t) = 0, \forall t$. Daí, α está contida no plano osculador a α , ou seja, α é uma curva plana. \square

Exemplo 3.7 Seja $\alpha(t) = (t^3 + \sin(2t) + 2, t + 2t^3, t^3 + t - \sin(2t))$; $t > 0$. Verifiquemos que α é plana.

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (3t^2 + 2\cos(2t), 1 + 6t^2, 3t^2 + 1 - 2\cos(2t)) \\ \alpha''(t) &= (6t - 4\sin(2t), 12t, 6t + 4\sin(2t)); \alpha''(t) \neq \vec{0}, \forall t > 0 \\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3t^2 + 2\cos(2t) & 1 + 6t^2 & 3t^2 + 1 - 2\cos(2t) \\ 6t - 4\sin(2t) & 12t & 6t + 4\sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= (-6t + (4 + 24t^2)\sin(2t) + 24t\cos(2t), \\ &\quad 6t - (4 + 24t^2)\sin(2t) - 24t\cos(2t), \\ &\quad -6t + (4 + 24t^2)\sin(2t) + 24t\cos(2t)). \end{aligned}$$

Seja

$$f(t) = -6t + (4 + 24t^2)\sin(2t) + 24t\cos(2t).$$

Logo,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (f(t), -f(t), f(t))$$

e

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = f(t) \sqrt{3}.$$

Assim,

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}; \forall t > 0,$$

ou seja, $B(s) = B(t)$ é constante e, portanto, $B'(s) = 0$ o que significa, pela 3ª Equação de Frenet, $B'(s) = \tau(s)N(s)$, que $\tau(s) = 0$ e, portanto, pela Proposição 3.3, α é plana (está contida no plano osculador).

3.5 Hélices

Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 4$. Dizemos que α é uma **hélice** se existir um vetor unitário \vec{v} tal que o vetor tangente $\alpha'(t)$ à α em t faz um ângulo constante com \vec{v} para todo $t \in]a, b[$. Assim,

$$\theta = \angle(\alpha'(t), \vec{v}) \text{ é constante } \forall t.$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle}{|\alpha'(t)|} \text{ é constante } \forall t.$$

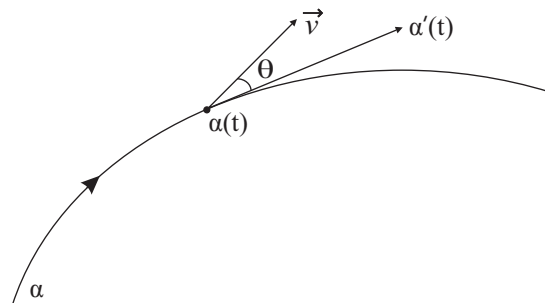


FIGURA 37: Em uma hélice existe um vetor fixo \vec{v} que forma ângulo constante com $\alpha'(t)$.

Exemplo 3.8 A curva regular $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma hélice.

De fato:

Sejam $\vec{v} = (a, b, c)$ unitário, $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$.

$$\text{Logo, } \cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle}{|\alpha'(t)|} = \frac{-a \sin(t) + b \cos(t) + c}{\sqrt{2}}. \text{ Fazendo } a = b = 0 \text{ e } c = 1 \text{ temos}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4},$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, α é uma hélice.

Proposição 3.4 Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, com curvatura k e torção τ não nulas. Então, α é uma hélice se, e somente se, $\frac{k}{\tau}$ é constante.

Demonstração.

\implies) Como α é uma hélice, $\exists \vec{v}$ tal que $|\vec{v}| = 1$ e $\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle}{|\alpha'(t)|}$ é constante, sendo θ o ângulo entre $\alpha'(t)$ e \vec{v} . Supondo α parametrizada por comprimento de arco, $\cos(\theta) = \langle T(t), \vec{v} \rangle$ é constante. Derivando:

$$0 = \langle T'(t), \vec{v} \rangle = \langle k(t)N(t), \vec{v} \rangle = k(t) \langle N(t), \vec{v} \rangle \implies N(t) \perp \vec{v},$$

pois $k(t) \neq 0$. Logo, \vec{v} é paralelo ao plano determinado por $T(t)$ e $B(t)$. Assim, $\vec{v} = \cos(\theta) T(t) + \sin(\theta) B(t)$, para algum $\theta \in [0, 2\pi[$.

Derivando,

$$\vec{0} = \cos(\theta) T'(t) + \sin(\theta) B'(t).$$

Pela 1ª Equação de Frenet,

$$\vec{0} = \cos(\theta) k(t) N(t) + \sin(\theta) \tau(t) N(t) = (\cos(\theta) k(t) + \sin(\theta) \tau(t)) N(t).$$

Mas, $N(t) \neq \vec{0}$. Logo,

$$\cos(\theta) k(t) + \sin(\theta) \tau(t) = 0 \implies \frac{k(t)}{\tau(t)} = -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta), \forall t,$$

ou seja $\frac{k(t)}{\tau(t)}$ é uma função constante igual a $-\tan(\theta)$.

\Leftarrow) Suponhamos que $\frac{k}{\tau}$ seja constante.

No item anterior vimos que $\theta = -\arctan\left(\frac{k}{\tau}\right)$, sendo θ o ângulo entre $T(t)$ e \vec{v} , ou seja, $\cos(\theta) = \langle T(t), \vec{v} \rangle$ é constante para todo t . Portanto, α é uma hélice. \square

Exemplo 3.9 A curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$, do Exemplo 3.6 (Figura 35) é uma hélice.

De fato, $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$, $\alpha''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$, $\alpha'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)$.

Logo, $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)$, $\alpha'(t) \times \alpha'''(t) = (\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 0)$.

Temos:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4}}{(\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + 0}{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$

Logo, $\frac{k(t)}{\tau(t)} = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, α é uma hélice.

Determinando \vec{v} : pela demonstração da proposição anterior, temos:

$$\tan(\theta) = -1 \implies \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Assim, $\frac{\langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle}{|\alpha'(t)|} = \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo $\vec{v} = (a, b, c)$, $|\vec{v}| = 1$. Logo:

$$\frac{\langle (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}t), (a, b, c) \rangle}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \dots \implies a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } c = 0,$$

ou seja,

$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Observemos que, diferentemente da hélice do Exemplo 3.8, aqui a curvatura e a torção variam.

3.6 Representação Canônica das Curvas Regulares do Espaço

Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, parametrizada pelo comprimento de arco e $s_0 \in]a, b[$.

Vamos supor $s_0 = 0$ e considerar o sistema de coordenadas $\{T(0), N(0), B(0)\}$ em $\alpha(0)$, sendo

$$\alpha(0) = (0, 0, 0); T(0) = (1, 0, 0); N(0) = (0, 1, 0); B(0) = (0, 0, 1).$$

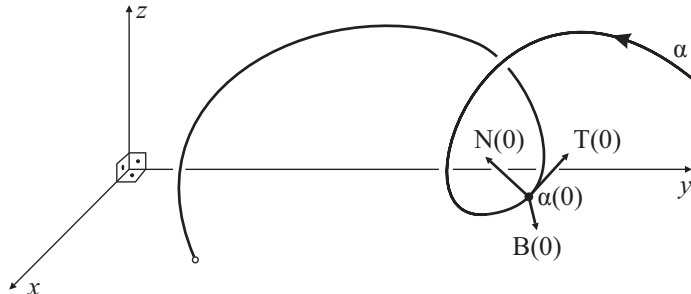


FIGURA 38: Encontrando coordenadas locais da curva α na base Triedro de Frenet.

Em torno de $s_0 = 0$ temos a expansão de Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{\alpha''(0)s^2}{2} + \frac{\alpha'''(0)s^3}{6} + R(s),$$

sendo $R(s) = (R_1(s), R_2(s), R_3(s))$ tal que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{s^3} = \vec{0}$.

Temos

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = T(s) &\implies \alpha'(0) = T(0) \\ \alpha''(s) = T'(s) = k(s)N(s) &\implies \alpha''(0) = k(0)N(0) \\ \alpha'''(s) = k'(s)N(s) + k(s)N'(s) &= k'(s)N(s) + k(s)[-k(s)T(s) - \tau(s)B(s)] \implies \\ \alpha'''(0) &= k'(0)N(0) - k^2(0)T(0) - k(0)\tau(0)B(0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha(s) = \left(s - \frac{k^2(0)}{6}s^3\right)T(0) + \left(\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3\right)N(0) + \left(\frac{-k(0)\tau(0)}{6}s^3\right)B(0) + R(s).$$

Considerando $\alpha(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s), \bar{z}(s))$ em relação ao sistema de coordenadas $\{T(0), N(0), B(0)\}$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1(s) \\ \bar{y}(s) &= \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + R_2(s) \\ \bar{z}(s) &= -\frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + R_3(s) \end{aligned}$$

com $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_i(s)}{s^3} = 0$; $i = 1, 2, 3$.

Esta reparametrização de α é chamada *reparametrização canônica* de α em torno de $s = 0$.

3.7 Significado Geométrico do Sinal da Torção

Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, com curvatura e torção não nulas e seja $s_0 \in]a, b[$.

(i) Existe uma vizinhança aberta de s_0 , $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$, tal que $\alpha(s)$ pertence ao semiespaço, determinado pelo plano retificante, que contém $N(s_0)$, $\forall s \in]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$.

De fato, supondo $s_0 = 0$ e o sistema de coordenadas $\{T(0), N(0), B(0)\}$ em $\alpha(0)$, devemos mostrar que $\bar{y}(s) > 0$ em uma vizinhança de $\alpha(0) = (0, 0, 0)$. Como

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{y}(s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{k(0)}{2} s^2 + \frac{k'(0)}{6} s^3 + R_2(s) \right) \frac{1}{s^2} = \frac{k(0)}{2} > 0.$$

(de fato: $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_2(s)}{s^3} = 0 \implies \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_2(s)}{s^2} = 0$, caso contrário, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_2(s)}{s^2} = k$, $k \neq 0$. Logo, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_2(s)}{s^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} = \pm\infty$, contradição).

Temos que para s suficientemente próximo de 0, $\bar{y}(s)$ é estritamente positivo, ou seja, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall s \in]0 - \delta, 0 + \delta[$, $\bar{y}(s) > 0$.

(ii) Se $\tau(s_0) < 0$, existe uma vizinhança $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$ de s_0 tal que:

Se $s < s_0$, $\alpha(s)$ está no semiespaço, determinado pelo plano osculador à curva α em s_0 , que contém $-B(0)$.

Se $s > s_0$, $\alpha(s)$ está no semiespaço, determinado pelo plano osculador à curva α em s_0 , que contém $B(0)$.

De fato:

Como em (i): $\bar{z} = -\frac{k(0)\tau(0)}{6} s^3 + R_3(s)$ e $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_3(s)}{s^3} = 0$. Em uma vizinhança de $s_0 = 0$, suficientemente próxima de 0, temos que o sinal de \bar{z} é determinado por $-\frac{k(0)\tau(0)}{6} s^3$. Neste caso, $-\frac{k(0)\tau(0)}{6} > 0$. Logo,

$$\begin{cases} s < 0 \implies s^3 < 0 \implies \bar{z} < 0 \\ s > 0 \implies s^3 > 0 \implies \bar{z} > 0 \end{cases}.$$

(iii) Se $\tau(s_0) > 0$, existe uma vizinhança $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$ de s_0 tal que:

Se $s < s_0$, $\alpha(s)$ está no semiespaço, determinado pelo plano osculador à curva α em s_0 , que contém $B(0)$.

Se $s > s_0$, $\alpha(s)$ está no semiespaço, determinado pelo plano osculador à curva α em s_0 , que contém $-B(0)$.

A demonstração é análoga ao caso anterior.

Numa vizinhança próxima de $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ temos:

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= s - \frac{k^2(0)}{6} s^3 + R_1(s); \\ \bar{y}(s) &= \frac{k(0)}{2} s^2 + \frac{k'(0)}{6} s^3 + R_2(s); \\ \bar{z}(s) &= -\frac{k(0) \cdot \tau(0)}{6} s^3 + R_3(s). \end{aligned}$$

Denotemos $k(0)$ por k_0 e $\tau(0)$ por τ_0 .

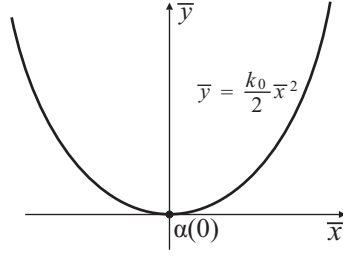
Consideremos a curva $S(s) = \left(s, \frac{k_0}{2} s^2, -\frac{k_0 \tau_0}{6} s^3 \right)$.

Bem próximo de $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ a curva $S(s)$ aproxima a curva $\alpha(s)$, ou seja, numa vizinhança bem próxima de $\alpha(0) = (0, 0, 0)$, $\alpha(s)$ pode ser identificada com $S(s)$.

A seguir, vamos projetar $\alpha(s)$ nos planos osculador, retificante e normal em uma vizinhança bem próxima de $(0, 0, 0)$. Para isso, vamos considerar $S(s)$ no lugar de $\alpha(s)$, isto é:

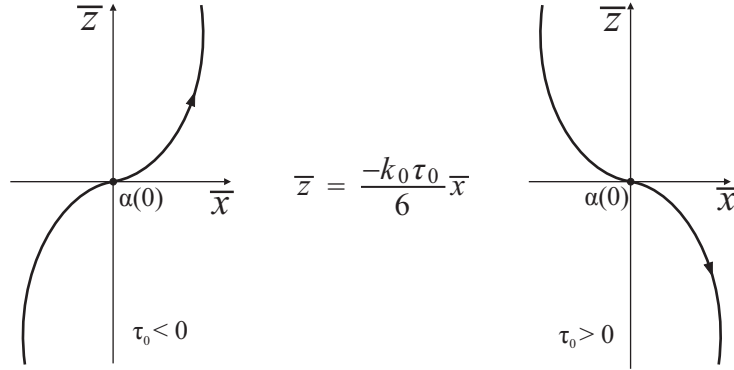
$$\bar{x}(s) = s; \bar{y}(s) = \frac{k_0}{2} s^2; \bar{z}(s) = -\frac{k_0 \tau_0}{6} s^3.$$

A projeção de S no plano osculador é $(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$. Temos $\bar{y}(s) = \frac{k_0}{2} (\bar{x}(s))^2$.

FIGURA 39: Projeção local de α no plano osculador.

Assim, a projeção de α no plano osculador próximo de $\alpha(0)$ é, aproximadamente, uma parábola.

A projeção de S no plano retificante é $(\bar{x}(s), \bar{z}(s))$. Temos $\bar{z}(s) = -\frac{k_0\tau_0}{6} (\bar{x}(s))^3$.

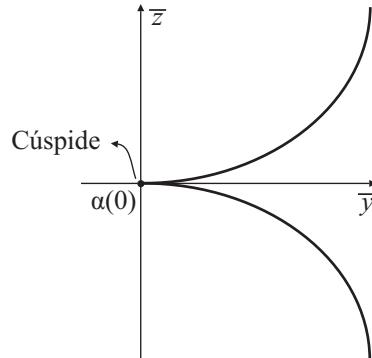
FIGURA 40: Projeção local de α no plano retificante.

Assim, a projeção de α no plano retificante próximo de $\alpha(0)$ é, aproximadamente, uma cúbica.

A projeção de S no plano normal é $(\bar{y}(s), \bar{z}(s))$. Temos:

$$(\bar{z}(s))^2 = \frac{k_0^2\tau_0^2}{36} s^6; (\bar{y}(s))^3 = \frac{k_0^3}{8} s^6 \implies$$

$$(\bar{z}(s))^2 = \frac{2\tau_0^2}{9k_0} (\bar{y}(s))^3 \implies \begin{cases} \bar{z} = \frac{|\tau_0|}{3} \sqrt{\frac{2}{k_0}} \bar{y}^{\frac{3}{2}}; & z \geq 0 \\ \bar{z} = -\frac{|\tau_0|}{3} \sqrt{\frac{2}{k_0}} \bar{y}^{\frac{3}{2}}; & z < 0 \end{cases}$$

FIGURA 41: Projeção local de α no plano normal.

3.8 Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Rotação no \mathbb{R}^3

Sejam $P = (x, y, z)$ um ponto no espaço e $\theta \in \mathbb{R}$. Então,

$$R(x, y, z) \equiv \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z)$$

é uma rotação de P em torno do eixo z de giro θ em \mathbb{R}^3 .

Translação no \mathbb{R}^3

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto no espaço. Então, $T(x, y, z) = (x, y, z) + (v_1, v_2, v_3)$ é uma translação pelo vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 .

Uma aplicação $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **isometria** em \mathbb{R}^3 quando $|F(P) - F(Q)| = |P - Q|$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3$, na norma que provém do produto interno usual em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 3.10 A rotação e a translação apresentadas acima são exemplos de isometrias.

(i) A translação

$$T(x, y, z) = (x, y, z) + (v_1, v_2, v_3)$$

pelo vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 é uma isometria. De fato, sejam $P, Q \in \mathbb{R}^3$ tal que $P = (x, y, z)$ e $Q = (a, b, c)$.

$$|T(P) - T(Q)| = |((x, y, z) + (v_1, v_2, v_3)) - ((a, b, c) + (v_1, v_2, v_3))| = |(x, y, z) - (a, b, c)| = |P - Q|.$$

(ii) A rotação de P em torno do eixo z de giro θ em \mathbb{R}^3 definida por

$$R(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z)$$

é uma isometria. De fato,

$$\begin{aligned} |R(P) - R(Q)| &= |(x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z) - (a \cos(\theta) - b \sin(\theta), a \sin(\theta) + b \cos(\theta), c)| \\ &= |((x - a) \cos(\theta) - (y - b) \sin(\theta), (x - a) \sin(\theta) + (y - b) \cos(\theta), z - c)| \\ &= |((x - a) \cos(\theta) - (y - b) \sin(\theta), (x - a) \sin(\theta) + (y - b) \cos(\theta), z - c)| \\ &= \sqrt{((x - a) \cos(\theta) - (y - b) \sin(\theta))^2 + ((x - a) \sin(\theta) + (y - b) \cos(\theta))^2 + (z - c)^2} \\ &= \sqrt{(x - a)^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + (y - b)^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + (z - c)^2} \\ &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} \\ &= |(x - a, y - b, z - c)| \\ &= |(x, y, z) - (a, b, c)| \\ &= |P - Q| \end{aligned}$$

Um operador linear $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **transformação ortogonal** em \mathbb{R}^3 quando $\langle H(P), H(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$; $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3$; sendo $\langle u, v \rangle$ o produto interno usual em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 3.11 A rotação de P em torno do eixo z de giro θ em \mathbb{R}^3 definida por

$$R(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z)$$

é um exemplo de transformação ortogonal. De fato, sejam $P, Q \in \mathbb{R}^3$ tal que $P = (x, y, z)$ e $Q = (a, b, c)$. Temos

$$\begin{aligned} \langle R(P), R(Q) \rangle &= \langle (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z), (a \cos(\theta) - b \sin(\theta), a \sin(\theta) + b \cos(\theta), c) \rangle \\ &= ax \cos^2(\theta) - xb \sin(\theta) \cos(\theta) - ay \sin(\theta) \cos(\theta) + yb \sin^2(\theta) \\ &\quad + xa \sin^2(\theta) + xb \sin(\theta) \cos(\theta) + ay \sin(\theta) \cos(\theta) + yb \cos^2(\theta) + cz \\ &= ax + by + cz \\ &= \langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

Na proposição abaixo temos algumas propriedades imediatas de isomerias.

Proposição 3.5 (a) Se F e G são isometrias em \mathbb{R}^3 , então $F \circ G$ é uma isometria em \mathbb{R}^3 .

(b) Se F e G são translações em \mathbb{R}^3 , então $F \circ G = G \circ F$ é uma translação em \mathbb{R}^3 .

(c) Se T é a translação em \mathbb{R}^3 pelo vetor v , então T é invertível e a inversa T^{-1} é a translação em \mathbb{R}^3 pelo vetor $-v$.

(d) Dados A e $B \in \mathbb{R}^3$, existe uma única translação T em \mathbb{R}^3 tal que $T(A) = B$.

Proposição 3.6 (i) Toda transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 é uma isometria.

(ii) Toda isometria F em \mathbb{R}^3 tal que $F(0) = 0$ é uma transformação ortogonal.

Demonstração.

(i) Seja H transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 . Logo,

$$|H(P) - H(Q)|^2 = |H(P - Q)|^2 = \langle H(P - Q), H(P - Q) \rangle = \langle P - Q, P - Q \rangle = |P - Q|^2,$$

ou seja, H é uma isometria.

(ii) Provemos que F preserva produto interno.

Como

$$|F(P)|^2 = |F(P) - 0|^2 = |F(P) - F(0)|^2 = |P - 0|^2 = |P|^2$$

pois F é uma isometria e $F(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle F(P), F(Q) \rangle &= \frac{1}{2} (|F(P)|^2 + |F(Q)|^2 - |F(P) - F(Q)|^2) \\ &= \frac{1}{2} (|P|^2 + |Q|^2 - |P - Q|^2) \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

Mostremos que F é linear, isto é, $F(aP + bQ) = aF(P) + bF(Q)$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\begin{aligned} |F(aP + bQ) - (aF(P) + bF(Q))|^2 &= \langle F(aP + bQ) - aF(P) - bF(Q), F(aP + bQ) - aF(P) - bF(Q) \rangle \\ &= \langle F(aP + bQ), F(aP + bQ) \rangle + a^2 \langle F(P), F(P) \rangle + b^2 \langle F(Q), F(Q) \rangle \\ &\quad - 2a \langle F(aP + bQ), F(P) \rangle - 2b \langle F(aP + bQ), F(Q) \rangle + 2ab \langle F(P), F(Q) \rangle \\ &= \langle aP + bQ, aP + bQ \rangle + a^2 \langle P, P \rangle + b^2 \langle Q, Q \rangle \\ &\quad - 2a \langle aP + bQ, P \rangle - 2b \langle aP + bQ, Q \rangle + 2ab \langle P, Q \rangle \\ &= a^2 \langle P, P \rangle + 2ab \langle P, Q \rangle + b^2 \langle Q, Q \rangle + a^2 \langle P, P \rangle + b^2 \langle Q, Q \rangle \\ &\quad - 2a^2 \langle P, P \rangle - 2ab \langle P, Q \rangle - 2ab \langle P, Q \rangle - 2b^2 \langle Q, Q \rangle + 2ab \langle P, Q \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $F(aP + bQ) - aF(P) - bF(Q) = 0$, ou seja, $F(aP + bQ) = aF(P) + bF(Q)$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$. \square

Proposição 3.7 *Toda isometria F em \mathbb{R}^3 pode ser escrita, de maneira única, como $F = T \circ H$, sendo T uma translação e H uma transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 .*

Demonstração.

Existência.

Sejam F isometria e T translação tal que $T(P) = P + F(0)$, $\forall P \in \mathbb{R}^3$. Definamos

$$H(P) = F(P) - F(0), \quad \forall P \in \mathbb{R}^3.$$

Assim,

$$H(0) = F(0) - F(0) = 0$$

e para quaisquer $P, Q \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} |H(P) - H(Q)| &= |F(P) - F(0) - (F(Q) - F(0))| \\ &= |F(P) - F(Q)| \\ &= |P - Q|, \end{aligned}$$

ou seja, H é isometria que fixa a origem. Pela Proposição 3.6, H é uma transformação ortogonal. Finalmente,

$$\begin{aligned} H(P) &= F(P) - F(0) \Rightarrow \\ F(P) &= H(P) + F(0) \Rightarrow \\ F(P) &= T(H(P)) \Rightarrow \\ F(P) &= T \circ H(P), \quad \forall P \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

como queríamos.

Unicidade.

Sejam T, \bar{T} translações e H, \bar{H} transformações ortogonais tais que $F = T \circ H = \bar{T} \circ \bar{H}$. Então, $F(0) = T(H(0)) = T(0) = \bar{T}(\bar{H}(0)) = \bar{T}(0)$.

Logo, $T = \bar{T}$ e, portanto, $H = T^{-1} \circ F = \bar{T}^{-1} \circ F = \bar{H}$. \square

Duas curvas α e β no espaço são **congruentes** se existe uma isometria F em \mathbb{R}^3 tal que $\alpha = F \circ \beta$, ou seja, α e β são a “mesma curva” a menos de um movimento rígido.

Proposição 3.8 *Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases ortonormais de \mathbb{R}^3 . Então, existe uma única isometria $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(P) = Q$ e $dF_P(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração.

Existência.

Seja $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicação linear tal que $H(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, isto é, se $v \in \mathbb{R}^3$, $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, então

$$H(v) = aH(v_1) + bH(v_2) + cH(v_3) = aw_1 + bw_2 + cw_3.$$

Como as bases $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ são ortonormais, segue-se que C preserva produto interno. Portanto, H é uma transformação ortogonal.

Seja T a translação por $Q - H(P)$. Então, a isometria $F = T \circ H$ satisfaz as condições exigidas. De fato,

$$F(P) = T \circ H(P) = H(P) + Q - H(P) = Q.$$

Como dois operadores lineares que fixam a mesma base são iguais, temos que

$$dF_P(v_i) = H(v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Unicidade.

Suponhamos que as isometrias $F = T \circ H = \bar{T} \circ \bar{H}$ satisfazem as condições da proposição, isto é,

$$F(P) = \bar{F}(P) = Q$$

e

$$dF_P(v_i) = d\bar{F}_P(v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Segue-se da última relação que $H(v_i) = \bar{H}(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$. Como H e \bar{H} são aplicações lineares temos $H = \bar{H}$. Portanto, $T \circ H(P) = \bar{T} \circ H(P) = Q$, isto é, T e \bar{T} são translações que levam $H(P)$ em Q . Então, pela Proposição 3.5, item (d), $T = \bar{T}$ e, portanto, $F = \bar{F}$. \square

A isometria $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **isometria que preserva orientação** quando, dadas as bases $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ de \mathbb{R}^3 , temos

$$\langle dF_P(v_1) \times dF_P(v_2), dF_P(v_3) \rangle = \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle,$$

para qualquer $P \in \mathbb{R}^3$.

Proposição 3.9 *Seja $\alpha \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) > 0$ para todo $s \in I$. Sejam F uma isometria de \mathbb{R}^3 e $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$. Então, $\bar{\alpha}$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\forall s \in I$, temos*

$$\begin{aligned} \bar{k}(s) &= k(s); \\ \bar{\tau}(s) &= \pm \tau(s); \\ \bar{T}(s) &= dF_{\alpha(s)}(T(s)); \\ \bar{N}(s) &= dF_{\alpha(s)}(N(s)); \\ \bar{B}(s) &= \pm dF_{\alpha(s)}(B(s)). \end{aligned}$$

sendo o sinal $+$ (resp. $-$) quando F preservar a orientação (resp. inverter a orientação).

Demonstração.

A curva é diferenciável, pois F e α são diferenciáveis, além disso, como $\bar{\alpha}'(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))$, temos $|\bar{\alpha}'(s)| = |dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))| = 1$, pois $dF_{\alpha(s)}$ é uma transformação ortogonal (logo, preserva norma). Assim, $\bar{\alpha}$ está parametrizada pelo comprimento de arco.

Assim, de $\bar{\alpha}'(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))$ concluímos

$$\bar{T}(s) = dF_{\alpha(s)}(T(s)).$$

Seja T uma translação e H uma transformação ortogonal tais que $F = T \circ H$. Então, como a diferencial de uma aplicação linear é a própria aplicação linear, temos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}'(s) &= dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = dH_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = H(\alpha'(s)) \Rightarrow \\ \bar{\alpha}''(s) &= dH_{\alpha'(s)}(\alpha''(s)) = H(\alpha''(s)) = dF_{\alpha(s)}(\alpha''(s)) \end{aligned}$$

Assim

$$\bar{k}(s) = |\bar{\alpha}''(s)| = |dF_{\alpha(s)}(\alpha''(s))| = |\alpha''(s)| = k(s).$$

e, pela 1ª. equação de Frenet,

$$\bar{N}(s) = \frac{\bar{\alpha}''(s)}{k(s)} = \frac{dF_{\alpha(s)}(\alpha''(s))}{k(s)} = dF_{\alpha(s)}\left(\frac{\alpha''(s)}{k(s)}\right) = dF_{\alpha(s)}(N(s)).$$

Como F preserva orientação,

$$\begin{aligned} \langle dF_{\alpha(s)}(T(s)) \times dF_{\alpha(s)}(N(s)), dF_{\alpha(s)}(B(s)) \rangle &= \langle T(s) \times N(s), B(s) \rangle \\ &= \langle dF_{\alpha(s)}(T(s) \times N(s)), dF_{\alpha(s)}(B(s)) \rangle \end{aligned}$$

de onde concluímos

$$dF_{\alpha(s)}(T(s) \times N(s)) = dF_{\alpha(s)}(T(s)) \times dF_{\alpha(s)}(N(s)).$$

Assim:

$$\bar{B}(s) = \bar{T}(s) \times \bar{N}(s) = dF_{\alpha(s)}(T(s)) \times dF_{\alpha(s)}(N(s)) = dF_{\alpha(s)}(T(s) \times N(s)) = dF_{\alpha(s)}(B(s)).$$

Analogamente, se F não preserva orientação, então

$$\bar{B}(s) = -dF_{\alpha(s)}(B(s)).$$

Quanto à torção,

$$\bar{\tau}(s) = \langle \bar{B}'(s), N(s) \rangle = \pm \langle dF_{\alpha(s)}(B'(s)), dF_{\alpha(s)}(N(s)) \rangle = \pm \langle B'(s), N(s) \rangle = \pm \tau(s).$$

□

Teorema 3.1 (*Fundamental das Curvas do Espaço*) Sejam $k :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $\tau :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^∞ . Então:

(i) Existe uma curva regular suave parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a curvatura de α é $|k|$ e a torção de α é τ .

(ii) Se fixarmos $\alpha(s_0) = P$; $\alpha'(s_0) = v_1$ e $\alpha''(s_0) = k(s_0)v_2$, sendo v_1, v_2 vetores unitários e ortogonais, então a curva α é única.

(iii) Se α e β são duas curvas que possuem a mesma curvatura e torção, então α é congruente a β .

Demonstração

(i) Existência. Para a existência de α temos que mostrar que existem os vetores $T(s)$, $N(s)$ e $B(s)$, dois a dois ortogonais que satisfazem as Equações de Frenet:

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s) N(s) \\ N'(s) &= -k(s) T(s) - \tau(s) B(s) \\ B'(s) &= \tau(s) N(s) \end{aligned}$$

Seja $T(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$, $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$, $B(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s))$ e, considerando o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (t'_1(s), t'_2(s), t'_3(s)) = k(s) (n_1(s), n_2(s), n_3(s)) \\ (n'_1(s), n'_2(s), n'_3(s)) = k(s) (t_1(s), t_2(s), t_3(s)) - \tau(s) (b_1(s), b_2(s), b_3(s)) \\ (b'_1(s), b'_2(s), b'_3(s)) = \tau(s) (n_1(s), n_2(s), n_3(s)) \end{cases} \\ \Updownarrow \\ \begin{bmatrix} t'_i(s) \\ n'_i(s) \\ b'_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(s) \\ n_i(s) \\ b_i(s) \end{bmatrix} \text{ para } i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Seja $s_0 \in I$. Considere a condição inicial

$$T(s_0) = (1, 0, 0)$$

$$N(s_0) = (0, 1, 0)$$

$$B(s_0) = (0, 0, 1)$$

e o Teorema da Existência e Unicidade de soluções de sistema de equações diferenciais. O sistema linear 3.3, composto por 9 equações e 9 incógnitas possui uma única solução $T(s)$, $N(s)$ e $B(s)$ diferenciáveis pois $k(s)$ e $\tau(s)$ são diferenciáveis por hipótese.

Agora, considere as funções $\langle T(s), T(s) \rangle$, $\langle N(s), N(s) \rangle$, $\langle B(s), B(s) \rangle$, $\langle T(s), N(s) \rangle$, $\langle T(s), B(s) \rangle$, $\langle N(s), B(s) \rangle$ e suas derivadas:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle T(s), T(s) \rangle = 2k(s) \langle T(s), N(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle N(s), N(s) \rangle = -2k(s) \langle T(s), N(s) \rangle - 2\tau(s) \langle N(s), B(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle T(s), N(s) \rangle = k(s) \langle N(s), N(s) \rangle - k(s) \langle T(s), T(s) \rangle - \tau(s) \langle T(s), B(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle T(s), B(s) \rangle = k(s) \langle N(s), B(s) \rangle + \tau(s) \langle T(s), N(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle N(s), B(s) \rangle = -k(s) \langle T(s), B(s) \rangle - \tau(s) \langle B(s), B(s) \rangle + \tau(s) \langle N(s), N(s) \rangle \end{cases} \quad (3.4)$$

Como

$$\langle T(s), T(s) \rangle = \langle N(s), N(s) \rangle = \langle B(s), B(s) \rangle = 1$$

e

$$\langle T(s), N(s) \rangle = \langle T(s), B(s) \rangle = \langle B(s), N(s) \rangle = 0$$

satisfazem 3.4, incluindo a condição inicial:

$$\langle T(s_0), T(s_0) \rangle = \langle N(s_0), N(s_0) \rangle = \langle B(s_0), B(s_0) \rangle = 1$$

e

$$\langle T(s_0), N(s_0) \rangle = \langle T(s_0), B(s_0) \rangle = \langle B(s_0), N(s_0) \rangle = 0.$$

Portanto, devido a unicidade da solução de 3.3, temos que $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é um referencial ortonormal para qualquer $s \in I$.

Considere a curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s T(\lambda) d\lambda \Leftrightarrow \alpha'(s) = T(s).$$

Assim, $|\alpha'(s)| = |T(s)| = 1$, $\forall s \in I$, isto é, α está parametrizada pelo comprimento de arco, e $\alpha''(s) = T'(s) = k(s)N(s)$.

Logo,

$$k_\alpha(s) = |\alpha''(s)| = |k(s)|$$

$$\text{e } N_\alpha(s) = \frac{\alpha''(s)}{|k_\alpha(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = N(s), \forall s \in I.$$

Além disso, chamando o vetor tangente à curva α em s de $T_\alpha(s)$, temos $T_\alpha(s) = \alpha'(s) = T(s)$. Assim, $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$.

Portanto,

$$\tau_\alpha(s) = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle = \tau(s) \langle N(s), N(s) \rangle = \tau(s), \forall s \in I.$$

(ii) Unicidade. Suponhamos que existam $\bar{\alpha}$ e $\overline{\bar{\alpha}}$ satisfazendo as mesmas condições da hipótese. Tomando o problema de valor inicial 3.3 com a condição inicial $T(s_0) = v_1$, $N(s_0) = v_2$ e $B(s_0) = v_1 \times v_2$. Vimos que a solução de 3.3 com as condições anteriores é única e $\bar{\alpha}'(s) = \overline{\bar{\alpha}}'(s) = T(s)$, ou seja, $\bar{\alpha}(s) = \overline{\bar{\alpha}}(s) + \int_{s_0}^s T(\lambda) d\lambda$

e $\overline{\overline{\alpha}}(s) = \overline{\overline{P}} + \int_{s_0}^s T(\lambda) d\lambda$, que implica em $\overline{\alpha}(s) - \overline{P} = \overline{\overline{\alpha}}(s) - \overline{\overline{P}}$. Mas, por hipótese, $\overline{\alpha}(s_0) = \overline{\overline{\alpha}}(s_0) = P$, ou seja, $\overline{P} = \overline{\overline{P}}$, o que implica que $\overline{\alpha}(s) = \overline{\overline{\alpha}}(s)$, $\forall s \in I$.

(iii) Seja $s_0 \in I$. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometria tal que

$$F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$$

e

$$\begin{aligned} dF_{\alpha(s_0)}(T_\alpha(s_0)) &= T_\beta(s_0) \\ dF_{\alpha(s_0)}(N_\alpha(s_0)) &= N_\beta(s_0) \\ dF_{\alpha(s_0)}(B_\alpha(s_0)) &= B_\beta(s_0) \end{aligned}$$

(a existência de F é garantida pela Proposição 3.8).

Seja a curva $\overline{\alpha} = F \circ \alpha$. Pela Proposição 3.9, $\overline{\alpha}$ também está parametrizada pelo comprimento de arco e, no ponto $s = s_0$:

$$\begin{cases} \overline{\alpha}(s_0) = F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0) \\ \overline{k}(s) = k_\alpha(s) = k_\beta(s) \\ \overline{\tau}(s) = \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s) \\ \overline{T}(s_0) = dF_{\alpha(s_0)}(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0) \\ \overline{N}(s_0) = dF_{\alpha(s_0)}(N_\alpha(s_0)) = N_\beta(s_0) \\ \overline{B}(s_0) = dF_{\alpha(s_0)}(B_\alpha(s_0)) = B_\beta(s_0) \end{cases} \quad (3.5)$$

Consideremos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f(s) &= |\overline{T}(s) - T_\beta(s)|^2 + |\overline{N}(s) - N_\beta(s)|^2 + |\overline{B}(s) - B_\beta(s)|^2 \\ &= \langle \overline{T}(s) - T_\beta(s), \overline{T}(s) - T_\beta(s) \rangle + \langle \overline{N}(s) - N_\beta(s), \overline{N}(s) - N_\beta(s) \rangle + \langle \overline{B}(s) - B_\beta(s), \overline{B}(s) - B_\beta(s) \rangle \end{aligned}$$

Derivando f temos

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2 \langle \overline{T}'(s) - T'_\beta(s), \overline{T}(s) - T_\beta(s) \rangle + 2 \langle \overline{N}'(s) - N'_\beta(s), \overline{N}(s) - N_\beta(s) \rangle + 2 \langle \overline{B}'(s) - B'_\beta(s), \overline{B}(s) - B_\beta(s) \rangle \\ &= 2k(s) \langle \overline{N}(s) - N_\beta(s), \overline{T}(s) - T_\beta(s) \rangle - 2k(s) \langle \overline{T}(s) - T_\beta(s), \overline{N}(s) - N_\beta(s) \rangle \\ &\quad - 2\tau(s) \langle \overline{B}(s) - B_\beta(s), \overline{N}(s) - N_\beta(s) \rangle + 2\tau(s) \langle \overline{N}(s) - N_\beta(s), \overline{B}(s) - B_\beta(s) \rangle \\ &= 2k(s) (\langle \overline{N}(s), -T_\beta(s) \rangle + \langle -N_\beta(s), \overline{T}(s) \rangle) - 2k(s) (\langle \overline{T}(s), -N_\beta(s) \rangle + \langle -T_\beta(s), \overline{N}(s) \rangle) \\ &\quad - 2\tau(s) (\langle -B_\beta(s), \overline{N}(s) \rangle + \langle \overline{B}(s), -N_\beta(s) \rangle) + 2\tau(s) (\langle \overline{N}(s), -B_\beta(s) \rangle + \langle -N_\beta(s), \overline{B}(s) \rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $f(s) = c$, $\forall s \in I$, o que permite concluir que $f(s) = 0$, $\forall s \in I$ pois $f(s_0) = 0$ por 3.5. Com isso, $\overline{T}(s) = T_\beta(s)$, $\forall s \in I$, o que significa $\overline{\alpha}'(s) = \beta'(s)$, ou seja, $\overline{\alpha}(s) = \beta(s) + v$. Novamente por 3.5, temos $\overline{\alpha}(s_0) = \beta(s_0)$, implicando $v = 0$.

Assim, concluímos que $\overline{\alpha}(s) = \beta(s)$, $\forall s \in I$, isto é, α e β são congruentes, como queríamos. \square

Capítulo 4

Superfícies

Neste capítulo, introduzimos as principais definições e resultados acerca de superfícies parametrizadas regulares. Assim como nos capítulos anteriores sobre curvas, baseamo-nos nas referências [1], [3] e [18]. Nossa principal contribuição neste capítulo reside no desenvolvimento da *Teoria de Contato de Ordem 2* para superfícies regulares, que é uma interessante interpretação geométrica de curvaturas principais (final da Seção 4.5). Nesse estudo, introduzimos os *parabolóides osculadores* a superfícies regulares e fazemos classificação de pontos por meio desses objetos. Além disso, o interessante exemplo de classificação de pontos do toro circular por meio de parabolóides osculadores é desenvolvida e ilustrada.

4.1 Superfícies Parametrizadas

Uma *superfície parametrizada diferenciável* é uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} S: U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

sendo U um subconjunto aberto e conexo do \mathbb{R}^2 .

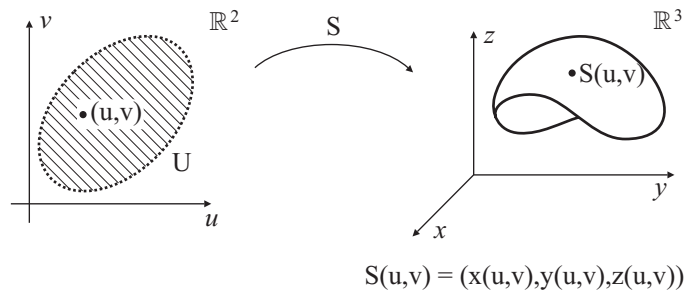


FIGURA 42: Superfície parametrizada.

Além disso, quando dS_P é injetiva para qualquer $P = (u, v) \in U$, dizemos que S é uma superfície parametrizada diferenciável regular ou, simplesmente, *superfície regular*.

Como $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, temos $x, y, z: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como *funções componentes* (ou *funções coordenadas*) de S .

Seja

$$\begin{aligned} S_u: U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto \left(\frac{\partial x}{\partial u}(P), \frac{\partial y}{\partial u}(P), \frac{\partial z}{\partial u}(P) \right) \end{aligned}$$

Indicamos $S_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$. Analogamente, $S_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$.

Proposição 4.1 *Seja S superfície parametrizada diferenciável. Então são equivalentes:*

- (i) dS_P é injetiva;
- (ii) Os vetores $S_u(P)$ e $S_v(P)$ são linearmente independentes;
- (iii) $S_u(P) \times S_v(P) \neq 0$;
- (iv) $JS(P)$ tem posto 2.

Demonstração.

Recordemos que $S_u(P) = dS_P(e_1)$ e $S_v(P) = dS_P(e_2)$.

(i) \implies (ii) Suponhamos que $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 S_u(P) + \alpha_2 S_v(P) = 0$. Seja $w = (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$. Logo,

$$dS_P(w) = dS_P(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 dS_P(e_1) + \alpha_2 dS_P(e_2) = \alpha_1 S_u(P) + \alpha_2 S_v(P) = 0.$$

Como dS_P é injetiva, temos

$$w = 0 \implies \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

ou seja, $S_u(P)$ e $S_v(P)$ são linearmente independentes.

(ii) \implies (i) Seja $w \in \ker(dS_P)$. Então,

$$\begin{aligned} dS_P(w) = 0 &\implies \\ \alpha_1 dS_P(e_1) + \alpha_2 dS_P(e_2) = 0 &\implies \\ \alpha_1 S_u(P) + \alpha_2 S_v(P) = 0 &\implies \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

(pois $S_u(P)$ e $S_v(P)$ são linearmente independentes)

Assim, $w = 0$. Logo, $\ker(dS_P) = \{0\}$, ou seja, dS_P é injetiva.

Quanto a (ii) \iff (iii) e (iii) \iff (iv) temos

$$\begin{aligned} S_u(P) \times S_v(P) &\equiv \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(P) & \frac{\partial y}{\partial u}(P) & \frac{\partial z}{\partial u}(P) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(P) & \frac{\partial y}{\partial v}(P) & \frac{\partial z}{\partial v}(P) \end{bmatrix} \\ &= \left(\underbrace{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(P) & \frac{\partial z}{\partial u}(P) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(P) & \frac{\partial z}{\partial v}(P) \end{bmatrix}}_{D_1}, \underbrace{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}(P) & \frac{\partial x}{\partial u}(P) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(P) & \frac{\partial x}{\partial v}(P) \end{bmatrix}}_{D_2}, \underbrace{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(P) & \frac{\partial y}{\partial u}(P) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(P) & \frac{\partial y}{\partial v}(P) \end{bmatrix}}_{D_3} \right) \\ &\text{e} \\ JS(P) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(P) & \frac{\partial x}{\partial v}(P) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(P) & \frac{\partial y}{\partial v}(P) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(P) & \frac{\partial z}{\partial v}(P) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} JS(P) \text{ tem posto } 2 &\iff D_i \neq 0 \text{ para algum } i = 1, 2, 3 \\ &\iff S_u(P) \times S_v(P) \neq 0 \\ &\iff S_u(P) \text{ e } S_v(P) \text{ são linearmente independentes.} \end{aligned}$$

Podemos ampliar nossa definição de superfície regular como segue.

Seja

$$\begin{aligned} S: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

uma aplicação diferenciável sendo \mathcal{U} aberto e conexo do \mathbb{R}^2 . Dizemos que S é uma *superfície parametrizada diferenciável regular* ou, simplesmente, *superfície regular*, quando qualquer uma das seguintes afirmações forem verdadeiras.

- (i) dS_P é injetiva para qualquer $P = (u, v) \in \mathcal{U}$;
- (ii) $JS(P)$ tem posto 2 para qualquer $P = (u, v) \in \mathcal{U}$;
- (iii) $S_u(P) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(P), \frac{\partial y}{\partial u}(P), \frac{\partial z}{\partial u}(P) \right)$ e $S_v(P) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(P), \frac{\partial y}{\partial v}(P), \frac{\partial z}{\partial v}(P) \right)$ são linearmente independentes para qualquer $P = (u, v) \in \mathcal{U}$;
- (iv) $S_u(P) \times S_v(P) \neq 0$, para qualquer $P = (u, v) \in \mathcal{U}$.

Exemplo 4.1 Seja o *parabolóide circular* parametrizado por

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, u^2 + v^2) . \end{aligned}$$

Se $u = 0$, então $S(0, v) = (0, v, v^2)$ é uma parábola.

Se $v = 0$, então $S(u, 0) = (u, 0, u^2)$ é uma parábola.

Se $u^2 + v^2 = k > 0$, temos circunferências de raio \sqrt{k} (intersecção de S com o plano $z = k$).

A superfície S é diferenciável e

$$S_u(u, v) = (1, 0, 2u);$$

$$S_v(u, v) = (0, 1, 2v).$$

Logo, $JS(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{bmatrix}$ tem posto 2, pois $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$.

Portanto, S é regular.

Exemplo 4.2 Seja $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e consideremos

$$\begin{aligned} S: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, f(u, v)) . \end{aligned}$$

O gráfico de f é dado por $\{(u, v, f(u, v)) \mid (u, v) \in \mathcal{U}\} = \text{Im } S$.

A superfície S é uma superfície regular, pois

$$JS(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(P) & \frac{\partial f}{\partial v}(P) \end{bmatrix}$$

e

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \implies JS(P) \text{ tem posto 2.}$$

Exemplo 4.3 Consideremos o *cone circular reto* parametrizado por

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}) . \end{aligned}$$

Neste caso, $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$; $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Logo, S é diferenciável em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Conseqüentemente, pelo Exemplo 4.2, S é regular em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e não regular em $(0, 0)$, ou seja, no vértice do cone.

Exemplo 4.4 Consideremos o *plano* parametrizado por

$$\begin{aligned} S: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (a_1 u + b_1 v + c_1, a_2 u + b_2 v + c_2, a_3 u + b_3 v + c_3) \end{aligned}$$

sendo $(a_1, a_2, a_3) \neq k(b_1, b_2, b_3)$.

Observemos que se $(a_1, a_2, a_3) = k(b_1, b_2, b_3)$ então, fazendo $t = ku + v$, podemos escrever $S(u, v) = S(t) = (b_1 t + c_1, b_2 t + c_2, b_3 t + c_3)$, ou seja, S se degeneraria em uma reta ou em um ponto.

A superfície S é diferenciável, $S_u(u, v) = (a_1, a_2, a_3)$ e $S_v(u, v) = (b_1, b_2, b_3)$. Logo, S_u e S_v são linearmente independentes. Assim, S é regular. Tomando os vetores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e o ponto $C = (c_1, c_2, c_3)$, temos a equação vetorial desse plano:

$$P = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + C; \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.5 Consideremos o *cilindro circular reto* de raio 1 parametrizado por

$$\begin{aligned} S: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos(u), \sin(u), v) \end{aligned}$$

S é diferenciável, $S_u(u, v) = (-\sin(u), \cos(u), 0)$ e $S_v(u, v) = (0, 0, 1)$.

$$S_u(u, v) \times S_v(u, v) \equiv \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv (\cos(u), \sin(u), 0) \neq (0, 0, 0).$$

Portanto, S é regular.

Exemplo 4.6 Consideremos a *esfera* de raio 1 parametrizada por

$$\begin{aligned} S: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u)) \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \text{Im } S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}; \\ S_u(u, v) &= (-\sin(u) \cos(v), -\sin(v) \sin(u), \cos(u)); \\ S_v(u, v) &= (-\sin(v) \cos(u), \cos(u) \cos(v), 0); \\ S_u(u, v) \times S_v(u, v) &= (-\cos^2(u) \cos(v), -\cos^2(u) \sin(v), -\cos(u) \sin(u)); \\ |S_u(u, v) \times S_v(u, v)|^2 &= \cos^4(u) \cos^2(v) + \cos^4(u) \sin^2(v) + \cos^2(u) \sin^2(u) \\ &= \cos^4(u) + \cos^2(u) \sin^2(v) \\ &= \cos^2(u). \end{aligned}$$

Assim, S é regular quando $\cos^2(u) \neq 0$. Mas

$$\cos^2(u) = 0 \iff \cos(u) = 0 \iff u = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se $v \in \mathbb{R}$ e $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, obtemos a esfera menos os pólos.

SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Superfícies regulares obtidas por revolução de curvas em torno de eixos são muito importantes em Geometria Diferencial. Além disso, elas possuem parametrizações bastante simples, conforme veremos abaixo.

Em torno do eixo z .

Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ com $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e $f(u) \neq 0, \forall u \in]a, b[$.

A matriz de rotação de α por um ângulo v em torno do eixo z é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obter a superfície descrita pela curva α em torno do eixo z fazemos

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(u) \cos(v) \\ f(u) \sin(v) \\ g(u) \end{bmatrix}$$

com v variando em \mathbb{R} , ou seja

$$\begin{aligned} S :]a, b[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u)) \end{aligned}$$

é chamada de **superfície de revolução** da curva α em torno do eixo z .

As curvas $S(u, v_0)$, com v_0 fixo e $u \in]a, b[$ são chamadas de **meridianos** da superfície de revolução S . As curvas $S(u_0, v)$, com u_0 fixo e $v \in \mathbb{R}$ são chamadas de **paralelos** da superfície de revolução S .

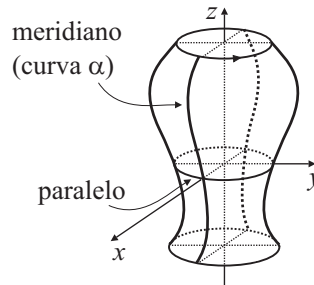


FIGURA 43: Meridianos e paralelos de superfície de revolução.

Observações:

(i) Fazendo v variar em um intervalo de \mathbb{R} de comprimento menor do que 2π , obtemos parte de uma superfície de revolução. Por exemplo, fazendo $v \in]0, 2\pi[$ obtemos a superfície S menos um meridiano (o que corresponderia a $v_0 = 0$ ou $v_0 = 2\pi$).

(ii) Se permitíssemos $f(u_0) = 0$ para algum $u_0 \in]a, b[$, teríamos que $\alpha(u_0) = (0, 0, g(u_0))$ seria um ponto do eixo z e $S(u_0, v) = (0, 0, g(u_0))$, $\forall v \in \mathbb{R}$, ou seja, teríamos um paralelo degenerado em um ponto do eixo z fazendo com que S não seja regular nesse ponto.

Exemplo 4.7 Seja $\alpha(u) = (1, 0, u)$, $u \in \mathbb{R}$, uma reta do plano xz perpendicular ao eixo x . Temos a superfície de revolução de α em torno de z dada por

$$S(u, v) = (\cos(v), \sin(v), u),$$

que é um cilindro circular reto de raio 1.

Exemplo 4.8 Seja $\alpha(u) = (a + r \cos(u), 0, r \sin(u))$, $0 < r < a$, uma circunferência de centro $(a, 0, 0)$ e raio r no plano xz . De fato, fazendo

$$\begin{cases} x = a + r \cos(u) \\ z = r \sin(u) \end{cases} \implies \begin{cases} (x - a)^2 = r^2 \cos^2(u) \\ z^2 = r^2 \sin^2(u) \end{cases} \implies (x - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Temos

$$f(u) = a + r \cos(u) = 0 \iff \cos(u) = -\frac{a}{r} < -1,$$

ou seja, $f(u) \neq 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Temos a superfície de revolução de α em torno de z dada por

$$S(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)),$$

que é um **toro circular** de raios a e r .

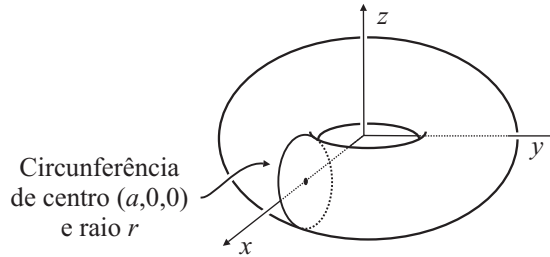


FIGURA 44: O toro circular.

Em torno do eixo x .

Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\alpha(u) = (g(u), f(u), 0)$ com $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e $f(u) \neq 0, \forall u \in]a, b[$.

A matriz de rotação de α por um ângulo v em torno do eixo x é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v) & -\sin(v) \\ 0 & \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}.$$

Para obter a superfície descrita pela curva α em torno do eixo x fazemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v) & -\sin(v) \\ 0 & \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(u) \\ f(u) \cos(v) \\ f(u) \sin(v) \end{bmatrix}$$

com v variando em \mathbb{R} , ou seja,

$$\begin{aligned} S :]a, b[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (g(u), f(u) \cos(v), f(u) \sin(v)) \end{aligned}$$

é chamada de *superfície de revolução* da curva α em torno do eixo x .

Meridianos e paralelos de S são definidos de modo análogo ao caso anterior.

Observações análogas ao caso anterior também são válidas.

Exemplo 4.9 Seja $\alpha(u) = (u, \cosh(u), 0)$, $u \in \mathbb{R}$, uma catenária no plano xy . Temos $g(u) = u$ e $f(u) = \cosh(u) \neq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Logo,

$$S(u, v) = (u, \cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v)), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

que é chamada de *catenóide*.

Em torno do eixo y .

Seja $\alpha :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\alpha(u) = (0, g(u), f(u))$ com $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e $f(u) \neq 0$, $\forall u \in]a, b[$.

A matriz de rotação de α por um ângulo v em torno do eixo y é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & 0 & -\sin(v) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v) & 0 & \cos(v) \end{bmatrix}.$$

Para obter a superfície descrita pela curva α em torno do eixo x fazemos

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & 0 & -\sin(v) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v) & 0 & \cos(v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ g(u) \\ f(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(u) \sin(v) \\ g(u) \\ f(u) \cos(v) \end{bmatrix}$$

com v variando em \mathbb{R} , ou seja:

$$\begin{aligned} S :]a, b[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (-f(u) \sin(v), g(u), f(u) \cos(v)) \end{aligned}$$

é chamada de *superfície de revolução* da curva α em torno do eixo y .

Meridianos e paralelos de S são definidos de modo análogo ao caso anterior.

Observações análogas ao caso anterior também são válidas.

CURVAS COORDENADAS

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $P = (u_0, v_0) \in U$. As curvas

$$\alpha_{u_0}(v) = S(u_0, v), \quad (u_0, v) \in U$$

e

$$\alpha_{v_0}(u) = S(u, v_0), \quad (u, v_0) \in U$$

são chamadas *curvas coordenadas* (ou *linhas coordenadas*) da superfície S passando por $S(P)$.

Observemos que meridianos e paralelos de superfícies de revolução são curvas coordenadas da superfície.

Exemplo 4.10 Seja $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, um cilindro circular reto.

Fazendo $P = (u_0, v_0)$ temos $\alpha_{u_0}(v) = S(u_0, v) = (\cos(u_0), \sin(u_0), v)$, uma reta, e $\alpha_{v_0}(u) = S(u, v_0) = (\cos(u), \sin(u), v_0)$, uma circunferência, como curvas coordenadas passando por $S(P)$.

Exemplo 4.11 Seja $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$, um parabolóide circular.

Fazendo $P = (u_0, v_0)$ temos $\alpha_{u_0}(v) = (u_0, v, u_0^2 + v^2)$, uma parábola paralela ao plano yz , e $\alpha_{v_0}(u) = (u, v_0, u^2 + v_0^2)$, uma parábola paralela ao plano xz , como curvas coordenadas passando por $S(P)$.

PLANO TANGENTE

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $P \in U$.

O **plano tangente** a S em $Q = S(P)$ é o plano, denotado por $T_Q S$, que é paralelo aos vetores $S_u(P)$ e $S_v(P)$, ou, equivalentemente, ortogonal ao vetor $S_u(P) \times S_v(P)$.

É comum representarmos o $T_Q S$ passando por $Q = S(P)$ e não pela origem do sistema de coordenadas, conforme figura abaixo.

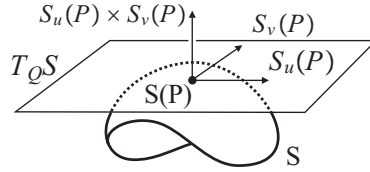


FIGURA 45: Plano tangente a uma superfície regular.

Exemplo 4.12 Seja $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$ um parabolóide circular. Temos $S_u(u, v) = (1, 0, 2u)$ e $S_v(u, v) = (0, 1, 2v)$. Em $P = (0, 0)$ temos $S_u(P) = (1, 0, 0)$ e $S_v(P) = (0, 1, 0)$, $S_u(P) \times S_v(P) = (0, 0, 1)$ e $Q = S(P) = (0, 0, 0)$. Logo,

$$T_Q S = \{\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \mu, 0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $T_Q S$ é o plano xy (de equação $z = 0$).

4.2 Mudança de Parâmetros

Sejam

$$S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

uma superfície regular e

$$h : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

aplicação diferenciável tal que

$$h(V) = U \quad \text{e} \quad |Jh(P)| = \det Jh(P) \neq 0, \quad \forall P \in V.$$

A aplicação $\tilde{S} = S \circ h : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável (composta de aplicações diferenciáveis). Mais que isso, \tilde{S} é uma superfície regular e $\text{Im } \tilde{S} = \text{Im } S$.

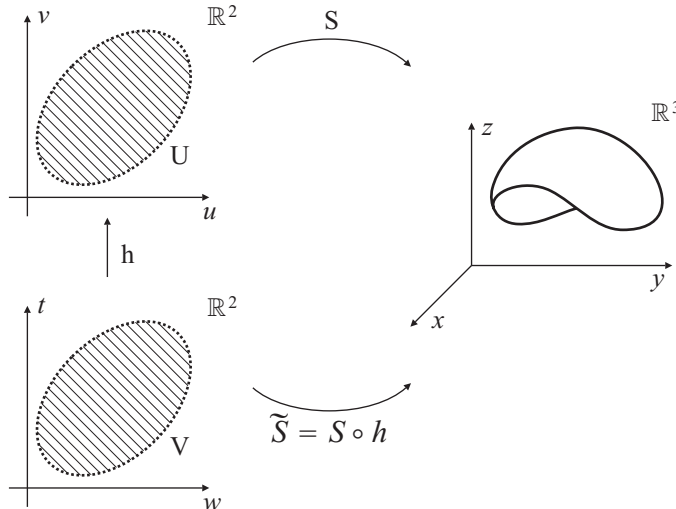


FIGURA 46: Mudança de parâmetros em superfícies regulares.

De fato, quanto à regularidade:

$\tilde{J}\tilde{S}(P) = J(S \circ h)(P) = JS(h(P))Jh(P)$. Como $JS(h(P))$ tem posto 2, pois S é regular e $Jh(P)$ tem posto 2 por hipótese, então $\tilde{J}\tilde{S}(P)$ tem posto 2. Logo, \tilde{S} é regular.

Quanto às imagens:

Seja $Q \in \text{Im } \tilde{S}$, então $\exists P \in U$ tal que $Q = S(P)$. Como $h(V) = U$, então $\exists R \in V$ tal que $h(R) = P$. Logo, $Q = S(h(R)) = \tilde{S}(R)$, ou seja, $Q \in \text{Im } \tilde{S}$. Assim, $\text{Im } S \subset \text{Im } \tilde{S}$.

Seja $Q \in \text{Im } \tilde{S}$, então $\exists R \in V$ tal que $\tilde{S}(R) = Q$. Mas $\tilde{S} = S \circ h$. Logo, $S \circ h(R) = S(h(R)) = Q$, ou seja, $Q \in \text{Im } S$. Assim, $\text{Im } \tilde{S} \subset \text{Im } S$.

Conclusão: $\text{Im } S = \text{Im } \tilde{S}$.

A aplicação h é chamada **mudança de parâmetros** para S .

Observemos que a aplicação h não precisa ser, necessariamente, injetiva.

Exemplo 4.13 Seja $h(w, t) = (e^w \cos(t), e^w \sin(t))$.

Temos

$$Jh(w, t) = \begin{bmatrix} e^w \cos(t) & -e^w \sin(t) \\ e^w \sin(t) & e^w \cos(t) \end{bmatrix} \implies |Jh(w, t)| = e^w \neq 0, \forall (w, t) \in \mathbb{R}^2.$$

No entanto, $h(w, 0) = h(w, 2\pi) = (e^w, 0)$, ou seja, h não é injetiva.

Exemplo 4.14 Sejam $S(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$; $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $\tilde{S}(w, t) = (w, t, w^2 - t^2)$; $(w, t) \in \mathbb{R}^2$ (um **parabolóide hiperbólico**). Mostremos que \tilde{S} é uma reparametrização de S .

Queremos determinar

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (w, t) &\longmapsto (h_1(w, t), h_2(w, t)) \end{aligned}$$

tal que $\tilde{S} = S \circ h$ e $|Jh(w, t)| \neq 0, \forall (w, t) \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{S}(w, t) &= S(h(w, t)) \implies \\ (w, t, w^2 - t^2) &= S(h_1(w, t), h_2(w, t)) \implies \\ (w, t, w^2 - t^2) &= (h_1(w, t) + h_2(w, t), h_1(w, t) - h_2(w, t), 4h_1(w, t)h_2(w, t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = w \\ h_1 - h_2 = t \\ 4h_1h_2 = w^2 - t^2 \end{cases} \implies h_1(w, t) = \frac{w+t}{2} \text{ e } h_2(w, t) = \frac{w-t}{2},$$

ou seja,

$$h(w, t) = \left(\frac{w+t}{2}, \frac{w-t}{2} \right).$$

Temos que h é diferenciável C^∞ , h é sobrejetiva e

$$|Jh(w, t)| = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0; \forall (w, t) \in \mathbb{R}^2.$$

FORMA LOCAL DAS SUPERFÍCIES REGULARES

Consideremos a esfera unitária com centro na origem dada por

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$

que é uma superfície regular. Temos:

$$\begin{cases} \text{se } z > 0, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \text{ ou seja, } z = f_1(x, y) \\ \text{se } z < 0, z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \text{ ou seja, } z = f_2(x, y) \end{cases}.$$

Isto significa que, sob certas condições podemos enxergar partes da superfície C como gráfico de funções reais de duas variáveis.

Este exemplo pode ser generalizado, ou seja, toda superfície regular pode ser vista localmente como gráfico de uma função real diferenciável de duas variáveis reais. Este é o conteúdo da proposição abaixo.

Proposição 4.2 *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $P = (u_0, v_0)$. Então, existem um conjunto aberto $V \subset U$, com $P \in V$ e uma mudança de parâmetros $h : W \longrightarrow V$ tal que a imagem de $\tilde{S} = S \circ h$ é o gráfico de uma aplicação diferenciável.*

Demonstração.

De acordo com as hipóteses da proposição acima podemos considerar o seguinte diagrama:

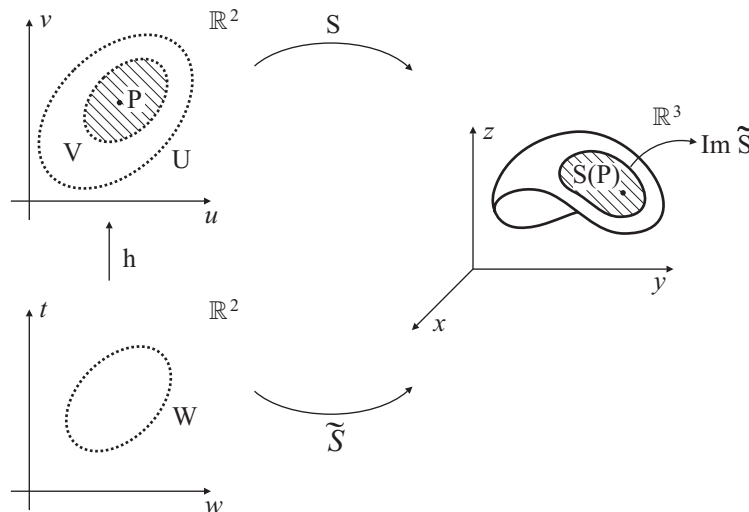


FIGURA 47: Localmente uma superfície regular é gráfico de função diferenciável.

Sendo $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ e S regular, então $JS(P)$ tem posto 2. Vamos supor

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(P) & \frac{\partial x}{\partial v}(P) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(P) & \frac{\partial y}{\partial v}(P) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Seja $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Logo, $|JF(P)| = D \neq 0$.

Pelo *Teorema da Aplicação Inversa* (aplicado a F), existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$; $V \subset U$; $P \in V$ tal que $F|_V : V \longrightarrow F(V) = W$ tem inversa $h = F^{-1}$ diferenciável:

$$h : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ (w, t) & \longmapsto & F^{-1}(w, t) \end{array}.$$

Seja $h(Q) = P$.

Temos que $Jh(Q)$ tem posto 2.

De fato, $F \circ h = F \circ F^{-1} = \text{Id}$, ou seja, $JF \circ h(Q) = J\text{Id}(Q) = \text{Id}$. Logo, $|JF \circ h(Q)| = |JF(P)| \cdot |Jh(Q)| = 1$.

Temos $|Jh(Q)| \neq 0$, ou seja, $Jh(Q)$ tem posto 2. Temos, portanto, que $\tilde{S} = S \circ h : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular.

Observemos que

$$\begin{aligned} F \circ h(w, t) &= \text{Id}(w, t) \implies \\ F(h(w, t)) &= (w, t) \implies \\ (x(h(w, t)), y(h(w, t))) &= (w, t) \implies \begin{cases} x \circ h(w, t) = w \\ y \circ h(w, t) = t \end{cases} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{S}(w, t) = S \circ h(w, t) = (x(h(w, t)), y(h(w, t)), z(h(w, t))) = (w, t, z \circ h(w, t)) ,$$

ou seja, a imagem de \tilde{S} é o gráfico da função diferenciável

$$\begin{aligned} z \circ h : \quad W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, t) &\longmapsto z \circ h(w, t) . \end{aligned}$$

□

4.3 Primeira Forma Quadrática

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $P \in U$ e $Q = S(P)$. A aplicação

$$\begin{aligned} I_Q : \quad T_Q S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle = |w|^2 \end{aligned}$$

é chamada de (ou *Primeira Forma Fundamental*) de S em Q .

Temos

$$w \in T_Q S \implies w = aS_u(P) + bS_v(P) .$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_Q(w) &= \langle aS_u(P) + bS_v(P), aS_u(P) + bS_v(P) \rangle \\ &= a^2 \langle S_u(P), S_u(P) \rangle + 2ab \langle S_u(P), S_v(P) \rangle + b^2 \langle S_v(P), S_v(P) \rangle \end{aligned}$$

Façamos

$$\begin{cases} E(P) = \langle S_u(P), S_u(P) \rangle \\ F(P) = \langle S_u(P), S_v(P) \rangle \\ G(P) = \langle S_v(P), S_v(P) \rangle \end{cases} ,$$

que são chamados de **coeficientes da Primeira Forma Quadrática**.

Logo,

$$I_Q(w) = a^2 E(P) + 2ab F(P) + b^2 G(P) .$$

Observemos que $E(P)$ e $G(P)$ são sempre positivos.

Exemplo 4.15 Consideremos $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sejam $P = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ e $Q = S(P)$.

Temos

$$\begin{aligned} S_u(u_0, v_0) &= (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0) ; \\ S_v(u_0, v_0) &= (0, 0, 1) . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_u(u_0, v_0) &= \langle S_{uu}(u_0, v_0), S_{uu}(u_0, v_0) \rangle = \cos^2(u_0) + \sin^2(u_0) + 0^2 = 1 \\ F_u(u_0, v_0) &= \langle S_{uu}(u_0, v_0), S_{vu}(u_0, v_0) \rangle = 0 + 0 + 0 = 0 \\ G_u(u_0, v_0) &= \langle S_{vu}(u_0, v_0), S_{vu}(u_0, v_0) \rangle = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1 \end{aligned}$$

Assim, se $w = aS_u(P) + bS_v(P) \in T_QS$, então

$$I_Q(w) = a^2 + b^2.$$

COMPRIMENTO DE CURVAS EM SUPERFÍCIES

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular sobre S . Como $\beta(t) \in S(U)$, então, para cada $t \in I$, existe $P = (u, v) = (u(t), v(t)) \in U$ tal que $\beta(t) = Q = S(P) = S(u(t), v(t))$. Definindo

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

temos a existência de α em U tal que $S \circ \alpha(t) = \beta(t)$, $\forall t \in I$.

Observemos que α é diferenciável pois S e β são diferenciáveis.

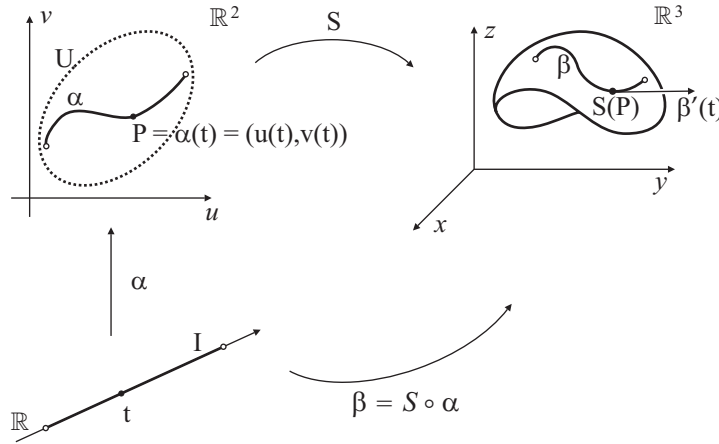


FIGURA 48: Curvas em superfícies regulares.

Temos

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= [S(\alpha(t))]' \\ &= [S(u(t), v(t))]' \\ &= u'(t) S_u((u(t), v(t))) + v'(t) S_v((u(t), v(t))) \\ &= u'(t) S_u(P) + v'(t) S_v(P). \end{aligned}$$

Observemos que, sendo $\beta'(t) = w = aS_u(P) + bS_v(P) \in T_QS$, temos $a = u'(t)$ e $b = v'(t)$, ou seja, as coordenadas de $\beta'(t)$ em T_QS na base $\{S_u(P), S_v(P)\}$ coincidem com as coordenadas de $\alpha'(t)$ em \mathbb{R}^2 na base canônica.

Seja l o comprimento de β entre os pontos $\beta(a)$ e $\beta(b)$, $a < b$ e $a, b \in I$. Logo,

$$l = \int_a^b |\beta'(t)| dt.$$

Temos

$$\begin{aligned}
 |\beta'(t)|^2 &= \langle u'(t) S_u(P) + v'(t) S_v(P), u'(t) S_u(P) + v'(t) S_v(P) \rangle \\
 &= (u'(t))^2 \langle S_u, S_u \rangle(P) + 2u'(t)v'(t) \langle S_u, S_v \rangle(P) + (v'(t))^2 \langle S_v, S_v \rangle(P) \\
 &= (u'(t))^2 E(P) + 2u'(t)v'(t) F(P) + (v'(t))^2 G(P) \\
 &= I_Q(\beta'(t))
 \end{aligned}$$

Logo,

$$l = \int_a^b \sqrt{I_Q(\beta'(t))} dt,$$

ou seja, o comprimento de β entre $\beta(a)$ e $\beta(b)$ só depende da primeira forma quadrática.

Exemplo 4.16 Seja $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ um cilindro circular reto. Calculemos o comprimento da curva $\beta = S(t, t)$, sendo $t \in [0, 2\pi]$, utilizando a Primeira Forma Quadrática.

Neste caso, a curva α tal que $\beta = S \circ \alpha$ é tal que $\alpha(t) = (u(t), v(t)) = (t, t)$ o que implica em $u'(t) = v'(t) = 1$.

Desta forma, $\beta'(t) = u'(t) S_u(P) + v'(t) S_v(P) = S_u(P) + S_v(P)$, sendo $P = \alpha(t)$.

Vimos no exemplo anterior que se $w = aS_u(P) + bS_v(P)$, então $I_Q(w) = a^2 + b^2$, sendo $Q = S(P)$. No nosso caso, $I_Q(\beta'(t)) = 1^2 + 1^2 = 2$.

Assim,

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Observemos que $\beta(t) = S(t, t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, ou seja, β é parte de uma hélice em S .

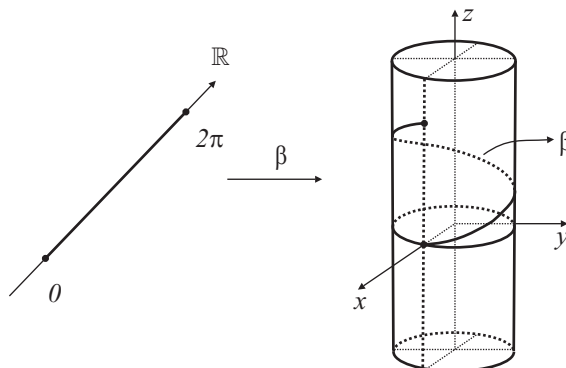


FIGURA 49: Calculando comprimento de curvas em superfícies regulares.

ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Considere V uma região do \mathbb{R}^2 tal que $V \subset U$, sendo V compacto, conexo, homeomorfo a um disco do \mathbb{R}^2 e $S|_{\overset{\circ}{V}}$ injetiva. ($\overset{\circ}{V}$ é o interior de V)

Do Cálculo Diferencial e Integral sabemos que a área de $S(V)$ é dada por

$$A(S(V)) = \iint_V |S_u(P) \times S_v(P)| du dv.$$

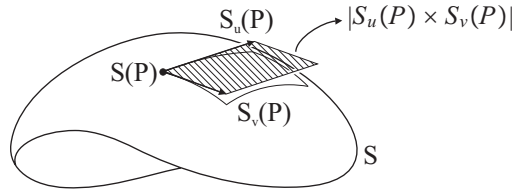


FIGURA 50: Interpretação geométrica da fórmula de área sobre superfície regular.

Dessa forma, sendo θ a medida do ângulo entre $S_u(P)$ e $S_v(P)$, temos

$$\begin{aligned} |S_u(P) \times S_v(P)|^2 &= (|S_u(P)| |S_v(P)| \sin(\theta))^2 \\ &= |S_u(P)|^2 |S_v(P)|^2 (1 - \cos^2(\theta))^2 \\ &= \langle S_u(P), S_u(P) \rangle \langle S_v(P), S_v(P) \rangle - \langle S_u(P), S_v(P) \rangle^2 \\ &= E(P) G(P) - F(P)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$A(S(V)) = \iint_V \sqrt{E(P) G(P) - F(P)^2} du dv.$$

Exemplo 4.17 Consideremos o cilindro circular reto parametrizado por $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Seja $V = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Vamos calcular a área de $S(V)$, que é um “anel de raio 1 e altura 1”, utilizando a Primeira Forma Quadrática.

Vimos que $E(P) = 1$, $F(P) = 0$ e $G(P) = 1$. Logo,

$$A(S(V)) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 \cdot 1 - 0^2} du dv = 2\pi.$$

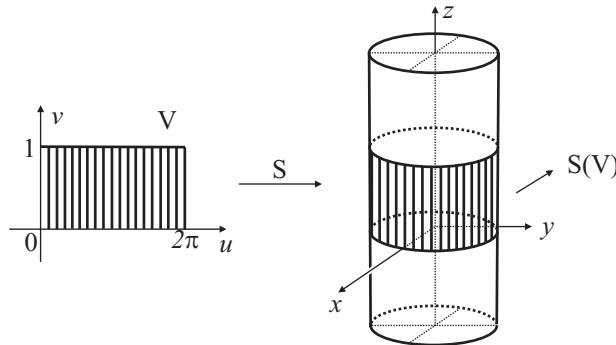


FIGURA 51: Calculando área de regiões sobre superfície regular.

SUPERFÍCIES ISOMÉTRICAS

Uma superfície $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **superfície simples** quando S é injetiva.

Observemos que se $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular, então $\exists V \subset U$ tal que $S|_V$ é injetiva.

Duas superfícies simples $S, \bar{S} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são ditas **superfícies isométricas** quando os coeficientes das Primeiras Formas Quadráticas de S e \bar{S} coincidem, isto é, $E(P) = \bar{E}(P)$, $F(P) = \bar{F}(P)$ e $G(P) = \bar{G}(P)$, $\forall P \in U$.

Exemplo 4.18 As superfícies

$$\begin{aligned} S :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & \bar{S} :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, 0) & (u, v) &\longmapsto (\cos(u), \sin(u), v) \end{aligned}$$

são superfícies isométricas pois $E(u, v) = \bar{E}(u, v) = 1$, $F(u, v) = \bar{F}(u, v) = 0$ e $G(u, v) = \bar{G}(u, v) = 1$, $\forall (u, v) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.

Observação: Se $S, \bar{S} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ são superfícies regulares simples, então existe uma bijeção $\phi : S(U) \longrightarrow \bar{S}(U)$.

De fato, $S : U \longrightarrow S(U)$ e $\bar{S} : U \longrightarrow \bar{S}(U)$ são bijetivas. Logo, a composta $\phi = \bar{S} \circ S^{-1} : S(U) \longrightarrow \bar{S}(U)$ é bijetiva.

DISTÂNCIA INTRÍNSECA E ISOMETRIAS

Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e sejam $Q_1, Q_2 \in S(U)$. Considere uma curva regular $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(a) = Q_1$ e $\gamma(b) = Q_2$. Seja $l(\gamma)$ o comprimento de γ .

Definimos a **distância intrínseca** entre Q_1 e Q_2 sobre S como sendo

$$d(Q_1, Q_2) = \inf \left\{ l(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3 \text{ é curva regular com } \gamma(a) = Q_1 \text{ e } \gamma(b) = Q_2 \right\}.$$

Sejam $S, \bar{S} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ superfícies regulares. Uma aplicação $\phi : S(U) \longrightarrow \bar{S}(U)$ é dita uma **isometria** entre S e \bar{S} quando preserva distâncias intrínsecas, ou seja, quando

$$d(Q_1, Q_2) = \bar{d}(\phi(Q_1), \phi(Q_2)), \quad \forall Q_1, Q_2 \in S(U),$$

sendo d a distância intrínseca em S e \bar{d} a distância intrínseca em \bar{S} .

Proposição 4.3 *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3$ e $\bar{S} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \bar{S}(U) \subset \mathbb{R}^3$ superfícies simples e isométricas. Se $\beta : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3$ é uma curva na superfície S , então o comprimento de β é igual ao comprimento de $\phi \circ \beta$ sendo $\phi = \bar{S} \circ S^{-1} : S(U) \longrightarrow \bar{S}(U)$.*

Demonstração.

Seja $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, tal que $\beta(t) = S \circ \alpha(t)$. Temos

$$\phi \circ \beta(t) = \bar{S} \circ S^{-1} \circ S \circ \alpha(t) = \bar{S} \circ \alpha(t).$$

Temos

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \int_a^b |\beta'(t)| dt = \int_a^b |u'(t) S_u(\alpha(t)) + v'(t) S_v(\alpha(t))| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 E(\alpha(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\alpha(t)) + v'(t)^2 G(\alpha(t))} dt \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} l(\phi \circ \beta) &= \int_a^b |(\phi \circ \beta)'(t)| dt = \int_a^b |u'(t) \bar{S}_u(\alpha(t)) + v'(t) \bar{S}_v(\alpha(t))| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 \bar{E}(\alpha(t)) + 2u'(t)v'(t)\bar{F}(\alpha(t)) + v'(t)^2 \bar{G}(\alpha(t))} dt \end{aligned}$$

Mas S e \bar{S} são isométricas, ou seja, $E(\alpha(t)) = \bar{E}(\alpha(t))$, $F(\alpha(t)) = \bar{F}(\alpha(t))$ e $G(\alpha(t)) = \bar{G}(\alpha(t))$. Logo, $l(\beta) = l(\phi \circ \beta)$. \square

Proposição 4.4 Se $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3$ e $\bar{S} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}(U) \subset \mathbb{R}^3$ são superfícies simples e isométricas, então $\phi = \bar{S} \circ S^{-1} : S(U) \rightarrow \bar{S}(U)$ é uma isometria entre S e \bar{S} .

Demonstração.

Sejam d distância intrínseca em $S(U)$ e \bar{d} distância intrínseca em $\bar{S}(U)$. Vamos mostrar que $d(Q_1, Q_2) = \bar{d}(\phi(Q_1), \phi(Q_2))$. Vimos na proposição anterior que

$$A = \{l(\beta) : \beta \text{ é curva em } S \text{ ligando } Q_1 \text{ a } Q_2\}$$

$$B = \{l(\phi \circ \beta) : \phi \circ \beta \text{ é uma curva em } \bar{S} \text{ ligando } \phi(Q_1) \text{ a } \phi(Q_2)\}.$$

são tais que $A = B$. Logo, $\inf A = \inf B$ e, portanto, $d(Q_1, Q_2) = \bar{d}(\phi(Q_1), \phi(Q_2))$. Como Q_1 e Q_2 são arbitrários, temos que ϕ é isometria. \square

Proposição 4.5 Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3$ e $\bar{S} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}(U) \subset \mathbb{R}^3$ superfícies simples. Se a aplicação $\phi : S(U) \rightarrow \bar{S}(U)$, tal que $\phi = \bar{S} \circ S^{-1}$, preserva comprimento de curvas, então as superfícies S e \bar{S} são isométricas.

Demonstração.

Seja $\alpha(t) = P + t\mathbf{v}$, sendo $P = (u_0, v_0) \in U$, $\mathbf{v} = (m, n)$ um vetor não nulo e $\alpha(t) \in U$ para $\forall t \in [0, b]$. Logo, $\alpha(t) = (u_0 + tm, v_0 + tn)$. Sejam $\beta = S \circ \alpha$ e $\bar{\beta} = \phi \circ \beta$.

As funções comprimento de arco para β e $\bar{\beta}$ são dadas por

$$S(t) = \int_0^t |\beta'(u)| du; \quad S(b) = l(\beta)$$

$$\bar{S}(t) = \int_0^t |\bar{\beta}'(u)| du; \quad \bar{S}(b) = l(\bar{\beta}).$$

Como, por hipótese, ϕ preserva comprimento de curvas, ou seja, $l(\beta) = l(\phi \circ \beta)$, temos $S(t) = \bar{S}(t)$, $\forall t \in [0, b]$. Logo,

$$S'(t) = \bar{S}'(t) \implies |\beta'(t)| = |\bar{\beta}'(t)|, \quad \forall t.$$

Mas $\alpha(0) = P = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = (m, n) = \mathbf{v}$. Além disso,

$$|\beta'(0)|^2 = I_{S(\alpha(0))}(\beta'(0))$$

e

$$|\bar{\beta}'(0)|^2 = \bar{I}_{S(\alpha(0))}(\bar{\beta}'(0)).$$

Assim,

$$I_{S(P)}(\beta'(0)) = \bar{I}_{S(P)}(\bar{\beta}'(0)) \implies$$

$$m^2 E(P) + 2mn F(P) + n^2 G(P) = m^2 \bar{E}(P) + 2mn \bar{F}(P) + n^2 \bar{G}(P).$$

Como (m, n) é um vetor qualquer tal que $m \neq 0$ ou $n \neq 0$, vamos supor que $m = 0$ e $n \neq 0$. Assim,

$$n^2 G(P) = n^2 \bar{G}(P) \implies G(P) = \bar{G}(P).$$

Se $n = 0$ e $m \neq 0$ temos

$$m^2 E(P) = m^2 \bar{E}(P) \implies E(P) = \bar{E}(P).$$

Se $n \neq 0$ e $m \neq 0$ temos

$$F(P) = \bar{F}(P).$$

Logo, S e \bar{S} são isométricas. \square

Exemplo 4.19 Vimos no Exemplo 4.18 que as superfícies

$$\begin{array}{ccc} S :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & S([0, 2\pi[\times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, 0) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \bar{S} :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \bar{S}([0, 2\pi[\times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v) \end{array}$$

são isométricas. Logo, a aplicação $\phi : S([0, 2\pi[\times \mathbb{R}) \longrightarrow \bar{S}([0, 2\pi[\times \mathbb{R})$ dada por

$$\phi(u, v, 0) = \bar{S} \circ S^{-1}(u, v, 0) = \bar{S}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

é uma isometria entre $S([0, 2\pi[\times \mathbb{R})$ (parte do plano) e $\bar{S}([0, 2\pi[\times \mathbb{R})$ (parte do cilindro).

4.4 Aplicação Normal de Gauss

Estamos interessados em realizar um estudo do quão rápido uma superfície regular $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ afasta-se do seu plano tangente em um ponto $Q = S(P)$. Isto equivale a estudar a “*velocidade*” com que a direção de um vetor normal é unitário a S em Q varia em uma vizinhança de Q contida em S .

Este estudo remete-nos a uma aplicação de S na esfera unitária bidimensional \mathbb{S}^2 que surge de maneira natural: a **Aplicação Normal de Gauss** de S definida por

$$\begin{array}{ccc} N : S(U) \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ Q = S(P) & \longmapsto & \frac{S_u(P) \times S_v(P)}{|S_u(P) \times S_v(P)|} \end{array}$$

Pelo fato de estarmos trabalhando com um campo diferenciável de vetores temos, como consequência imediata, que N é diferenciável. Logo, podemos tomar a diferencial de N em Q , $dN_Q : T_Q S \rightarrow T_{N(Q)} \mathbb{S}^2$, sendo $T_{N(Q)} \mathbb{S}^2$ o plano tangente a \mathbb{S}^2 em $N(Q)$, ou seja, ortogonal a $S_u(P) \times S_v(P)$. Portanto, ambos os planos são paralelos. Desta forma, podemos fazer a identificação $T_Q S \equiv T_{N(Q)} \mathbb{S}^2$ e considerar $dN_Q : T_Q S \rightarrow T_Q S$.

Vamos explorar alguns aspectos geométricos de dN_Q e, para isso, tomemos uma curva regular $\beta : I =]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \longrightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(0) = Q$. Logo, $N(\beta(t))$, $t \in I$, é uma curva em \mathbb{S}^2 . O vetor tangente a β em Q é $\beta'(0) \in T_Q S$. Logo, $dN_Q(\beta'(0))$ pode ser pensada como a taxa de variação dos vetores normais a S restritos à curva β em uma vizinhança de Q .

Como β é uma curva arbitrária passando por Q , temos que dN_Q mede a taxa de variação dos vetores normais a S em uma vizinhança de Q , ou seja, o quão rápido S se afasta de $T_Q S$ em uma vizinhança de Q .

PRELIMINARES DA APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS

Dizemos que um operador linear $L : V \rightarrow V$, sendo V espaço vetorial munido de produto interno, é um **operador linear auto-adjunto** quando $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle$, $\forall v, w \in V$.

Com respeito à Aplicação Normal de Gauss N temos a seguinte proposição.

Proposição 4.6 *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $N : S(U) \longrightarrow \mathbb{S}^2$ Aplicação Normal de Gauss de S e $Q \in S(U)$. Então, a diferencial de N em Q , $dN_Q : T_Q S \longrightarrow T_Q S$, é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração.

A diferencial dN_Q é linear, logo, basta tomarmos uma base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ de $T_Q S$ e mostrarmos que $\langle dN_Q(e_1), e_2 \rangle = \langle e_1, dN_Q(e_2) \rangle$.

Seja $Q = S(P)$. Como os vetores $S_u(P)$ e $S_v(P)$ formam uma base para $T_Q S$, basta mostrar que $\langle dN_Q(S_u(P)), S_v(P) \rangle = \langle S_u(P), dN_Q(S_v(P)) \rangle$.

Sejam $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S(U)$ curva regular tal que $\beta(0) = Q$ e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ tal que $\beta(t) = S(\alpha(t))$, sendo $\alpha(t) = (u(t), v(t))$. Logo, $\alpha(0) = (u(0), v(0)) = P$.

Desta maneira,

$$\begin{aligned}\beta(t) &= S(u(t), v(t)) \Rightarrow \\ \beta'(t) &= S_u(u(t), v(t)) u'(t) + S_v(u(t), v(t)) v'(t) \Rightarrow \\ \beta'(0) &= S_u(u(0), v(0)) u'(0) + S_v(u(0), v(0)) v'(0) \Rightarrow \\ \beta'(0) &= S_u(P) u'(0) + S_v(P) v'(0),\end{aligned}$$

ou seja, $\beta'(0) = (u'(0), v'(0))$ na base $\{S_u(P), S_v(P)\}$ de $T_Q S$.

Seja a Aplicação Normal de Gauss

$$\begin{aligned}N : S(U) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ S(u, v) &\longmapsto N(S(u, v)) = \tilde{N}(u, v) \ .\end{aligned}$$

Fazendo N restrita a β temos

$$\begin{aligned}N(\beta(t)) &= \tilde{N}(u(t), v(t)) \Rightarrow \\ N'(\beta(t)) &= \tilde{N}'(u(t), v(t)) \Rightarrow \\ dN_{\beta(t)}(\beta'(t)) &= \tilde{N}_u(u(t), v(t)) u'(t) + \tilde{N}_v(u(t), v(t)) v'(t) \Rightarrow \\ dN_{\beta(0)}(\beta'(0)) &= \tilde{N}_u(u(0), v(0)) u'(0) + \tilde{N}_v(u(0), v(0)) v'(0) \Rightarrow \\ dN_Q(S_u(P) u'(0) + S_v(P) v'(0)) &= \tilde{N}_u(P) u'(0) + \tilde{N}_v(P) v'(0) \Rightarrow \\ dN_Q(S_u(P)) u'(0) + dN_Q(S_v(P)) v'(0) &= \tilde{N}_u(P) u'(0) + \tilde{N}_v(P) v'(0) \Rightarrow \\ \left(dN_Q(S_u(P)) - \tilde{N}_u(P) \right) u'(0) &= \left(\tilde{N}_v(P) - dN_Q(S_v(P)) \right) v'(0) .\end{aligned}$$

Notemos que, como a curva β regular passando por Q é arbitrária e $u'(0)$ e $v'(0)$ são as coordenadas do vetor velocidade $\beta'(0)$ na base $\{S_u(P), S_v(P)\}$ de $T_Q S$ (que não depende de β), então a única maneira da última equação acima ficar satisfeita é quando os vetores $dN_Q(S_u(P)) - \tilde{N}_u(P)$ e $\tilde{N}_v(P) - dN_Q(S_v(P))$ (que não dependem de β) forem nulos. Logo,

$$\begin{cases} dN_Q(S_u(P)) = \tilde{N}_u(P) \\ dN_Q(S_v(P)) = \tilde{N}_v(P) \end{cases} .$$

Desta forma, para mostrar que dN_Q é auto-adjunta, basta mostrar que $\langle \tilde{N}_u(P), S_v(P) \rangle = \langle S_u(P), \tilde{N}_v(P) \rangle$.

Temos que $\langle \tilde{N}(P), S_u(P) \rangle = 0$ e $\langle \tilde{N}(P), S_v(P) \rangle = 0$ (pois ambos são ortogonais em Q). Derivando em relação a v e a u , respectivamente, temos

$$\begin{cases} \langle \tilde{N}_v(P), S_u(P) \rangle + \langle \tilde{N}(P), S_{uv}(P) \rangle = 0 \\ \langle \tilde{N}_u(P), S_v(P) \rangle + \langle \tilde{N}(P), S_{vu}(P) \rangle = 0 \end{cases} .$$

Como $S_{uv} = S_{vu}$, pois S é diferenciável, temos

$$\langle \tilde{N}_u(P), S_v(P) \rangle = \langle \tilde{N}_v(P), S_u(P) \rangle = \langle S_u(P), \tilde{N}_v(P) \rangle ,$$

como queríamos. □

Antes de avançarmos mais nas propriedades da Aplicação Normal de Gauss, é conveniente ter em vista alguns resultados de álgebra linear.

O fato de dN_Q ser um operador linear auto-adjunto permite-nos associar a dN_Q a forma bilinear

$$\begin{aligned} B: T_Q S \times T_Q S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, z) &\longmapsto \langle dN_Q(w), z \rangle . \end{aligned}$$

Podemos checar facilmente que $B(w, z) = B(z, w)$ e, assim, concluímos que B é uma forma bilinear simétrica.

Podemos também associar a B a forma quadrática

$$\begin{aligned} Q: T_Q S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto B(w, w) = \langle dN_Q(w), w \rangle . \end{aligned}$$

De posse destes resultados, temos os seguintes lema e proposições.

Lema 4.1 *Se*

$$\begin{aligned} T: S^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

possui um ponto crítico de máximo em $(1, 0)$, então $b = 0$.

Demonstração.

Em uma vizinhança V de $(1, 0)$ em S^1 podemos expressar x em função de y , ou seja, $x = x(y)$. Assim, se derivarmos $T(x(y), y)$ em relação a y em V , temos

$$T'(y) = 2a \cdot x(y) \cdot x'(y) + 2b \cdot x(y) + 2by \cdot x'(y) + 2cy. \quad (4.1)$$

Como em V , $x(y) = \sqrt{1 - y^2}$, temos

$$x'(y) = -\frac{y}{x(y)}. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1) temos

$$T'(y) = -2ay + 2b \cdot x(y) - 2b \frac{y^2}{x(y)} + 2cy.$$

No ponto $(1, 0)$, temos

$$T'(0) = 2b.$$

Mas pela hipótese, temos que $(1, 0)$ é ponto de máximo de T . Logo,

$$T'(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0,$$

como queríamos. □

Proposição 4.7 *Dada a diferencial da Aplicação Normal de Gauss: $dN_Q: T_Q S \longrightarrow T_Q S$ (e, conseqüentemente, a forma bilinear simétrica B e a forma quadrática Q associada a dN_Q), então existe $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, base de $T_Q S$ composta por vetores unitários e ortogonais tal que se $w \in T_Q S$, $w = xe_1 + ye_2$, então $Q(w) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$, para algum $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Além disso, λ_1 e λ_2 são valores máximo e mínimo de Q em $S^1 \subset T_Q S$.*

Demonstração.

Devido ao fato de \mathbf{Q} ser contínua e $\mathbb{S}^1 \subset T_Q S$ ser compacto, temos que \mathbf{Q} possui máximo e mínimo em \mathbb{S}^1 . Sejam λ_1 um valor máximo de \mathbf{Q} em \mathbb{S}^1 e \mathbf{e}_1 um ponto de máximo de \mathbf{Q} em \mathbb{S}^1 . Logo, $\mathbf{Q}(\mathbf{e}_1) = \lambda_1$. Seja \mathbf{e}_2 um vetor unitário ortogonal a \mathbf{e}_1 e seja $\mathbf{Q}(\mathbf{e}_2) = \lambda_2$. Mostremos que $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ satisfaz ao enunciado.

Seja $w \in T_Q S$, $w = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(w) &= B(w, w) \\ &= B(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\ &= x^2 B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + 2xy B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + y^2 B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Como \mathbf{e}_1 é escrito com coordenadas $(1, 0)$ na base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e é ponto de máximo de \mathbf{Q} em \mathbb{S}^1 , temos, pelo lema anterior, que $B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(w) &= Q(\mathbf{e}_1)x^2 + Q(\mathbf{e}_2)y^2 \\ &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.\end{aligned}$$

Resta mostrar que λ_2 é valor mínimo de \mathbf{Q} em \mathbb{S}^1 . Mas $\lambda_1 \geq \lambda_2$, assim, para qualquer $w = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \in T_Q S$ temos

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(w) &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \\ &\geq \lambda_2 x^2 + \lambda_2 y^2 \\ &= \lambda_2 (x^2 + y^2) \\ &= \lambda_2 \text{ (pois } x^2 + y^2 = 1),\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Proposição 4.8 *Seja $dN_Q : T_Q S \longrightarrow T_Q S$ a diferencial da Aplicação Normal de Gauss. Então, existe uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $T_Q S$ constituída de vetores unitários ortogonais tais que $dN_Q(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1$ e $dN_Q(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2$, sendo $\lambda_1 \geq \lambda_2$ valores máximo e mínimo da forma quadrática \mathbf{Q} associada a dN_Q em $\mathbb{S}^1 \subset T_Q S$.*

Demonstração.

Observação: \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são autovetores e λ_1 e λ_2 são autovalores de dN_Q .

Com base na proposição anterior, existe $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, base de $T_Q S$ constituída de vetores unitários ortogonais tais que

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \\ \mathbf{Q}(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \end{cases},$$

sendo $\lambda_1 \leq \lambda_2$ valores máximo e mínimo de \mathbf{Q} em \mathbb{S}^1 .

Precisamos, portanto, mostrar que $dN_Q(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1$ e $dN_Q(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2$.

Ainda pela proposição anterior temos

$$\langle dN_Q(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle = B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0,$$

o que implica $dN_Q(\mathbf{e}_1) = 0$ ou $dN_Q(\mathbf{e}_1)$ é paralelo a \mathbf{e}_1 , ou seja,

$$dN_Q(\mathbf{e}_1) = \beta \mathbf{e}_1$$

e, neste caso, $\lambda_1 = B(e_1, e_1) = \langle dN_Q(e_1), e_1 \rangle = \langle \beta e_1, e_1 \rangle = \beta$, o que resulta

$$dN_Q(e_1) = \lambda_1 e_1.$$

No caso $dN_Q(e_1) = 0$, basta fazer $\lambda_1 = 0$.

Para concluir que $dN_Q(e_2) = \lambda_2 e_2$, basta observar que $B(e_2, e_1) = B(e_1, e_2)$ e aplicar o mesmo raciocínio acima.

Notemos também que a matriz de dN_Q em relação à base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ é diagonal, com os valores λ_1 e λ_2 na diagonal. \square

4.5 Segunda Forma Quadrática

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular, $Q = S(P)$ e $N : S(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$ Aplicação Normal de Gauss de S .

O fato de $dN_Q : T_Q S \rightarrow T_Q S$ ser auto-adjunto, podemos associar a dN_Q a forma quadrática

$$\begin{aligned} \Pi_Q : T_Q S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto -\langle dN_Q(w), w \rangle \end{aligned}$$

(aqui estamos tomando $\Pi_Q = -Q$ pois veremos que isto será conveniente e, além disso, não altera o desenvolvimento da teoria que fizemos até então).

Π_Q é chamada de **Segunda Forma Quadrática** ou *Segunda Forma Fundamental* de S em Q .

Sejam $w = aS_u(P) + bS_v(P) \in T_Q S$ e

$$\begin{aligned} \beta :]-\varepsilon, \varepsilon[&\longrightarrow S(U) \\ t &\longmapsto \beta(t) = S(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

uma curva regular parametrizada em S tal que $\beta(0) = Q$ e $\beta'(0) = w$. Assim,

$$\begin{aligned} w = \beta'(0) &\Rightarrow \\ aS_u(P) + bS_v(P) &= u'(0)S_u(P) + v'(0)S_v(P), \end{aligned}$$

ou seja, $a = u'(0)$ e $b = v'(0)$. Assim, fazendo

$$N(S(u, v)) = \tilde{N}(u, v)$$

temos

$$dN_Q(\beta'(0)) = \tilde{N}'(u(0), v(0)) = u'(0)\tilde{N}_u(P) + v'(0)\tilde{N}_v(P).$$

Uma expressão para $\Pi_Q(\beta'(0))$ é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_Q(\beta'(0)) &= -\langle dN_Q(\beta'(0)), \beta'(0) \rangle \\ &= -\langle u'(0)\tilde{N}_u(P) + v'(0)\tilde{N}_v(P), u'(0)S_u(P) + v'(0)S_v(P) \rangle \\ &= u'(0)^2 e(P) + 2u'(0)v'(0)f(P) + v'(0)^2 g(P), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{cases} e(P) = -\langle \tilde{N}_u(P), S_u(P) \rangle = \langle \tilde{N}(P), S_{uu}(P) \rangle \\ f(P) = -\langle \tilde{N}_v(P), S_u(P) \rangle = \langle \tilde{N}(P), S_{uv}(P) \rangle \\ g(P) = -\langle \tilde{N}_v(P), S_v(P) \rangle = \langle \tilde{N}(P), S_{vv}(P) \rangle \end{cases} \quad (4.3)$$

os chamados **coeficientes da Segunda Forma Quadrática** de S em Q .

Finalmente, se $w = aS_u(P) + bS_v(P) \in T_Q S$, então

$$\Pi_Q(w) = a^2 e(P) + 2abf(P) + b^2 g(P).$$

Exemplo 4.20 Seja $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$; $(u, v) \in \mathbb{R}$.

Seja $P = (u_0, v_0)$ qualquer e consideremos o plano tangente $T_Q S$, sendo $Q = S(P)$.

Temos

$$S_u(P) = (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0);$$

$$S_v(P) = (0, 0, 1);$$

$$S_u(P) \times S_v(P) = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin(u_0) & \cos(u_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\cos(u_0), \sin(u_0), 0);$$

$$S_{uu}(P) = (-\cos(u_0), -\sin(u_0), 0);$$

$$S_{uv}(P) = (0, 0, 0);$$

$$S_{vv}(P) = (0, 0, 0);$$

$$e(P) = \langle S_{uu}(P), \tilde{N}(P) \rangle = \left\langle (-\cos(u_0), -\sin(u_0), 0), \frac{(\cos(u_0), \sin(u_0), 0)}{\sqrt{\cos^2(u_0) + \sin^2(u_0) + 0^2}} \right\rangle$$

$$= -\cos^2(u_0) - \sin^2(u_0) + 0^2 = -1;$$

$$f(P) = \langle S_{uv}(P), \tilde{N}(P) \rangle = 0;$$

$$g(P) = \langle S_{vv}(P), \tilde{N}(P) \rangle = 0.$$

Assim, se $w = aS_u(P) + bS_v(P) \in T_Q S$, temos $\Pi_Q(w) = -a^2$.

UMA EXPRESSÃO PARA dN_Q

Aproveitando a notação da subseção acima, temos que $\tilde{N}_u(P)$ e $\tilde{N}_v(P)$ são vetores de $T_Q S$ e, como $S_u(P)$ e $S_v(P)$ formam uma base para $T_Q S$, temos a existência de reais a_{ij} tais que

$$\begin{cases} \tilde{N}_u(P) = a_{11}S_u(P) + a_{21}S_v(P) \\ \tilde{N}_v(P) = a_{21}S_u(P) + a_{22}S_v(P) \end{cases} \quad (4.4)$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} dN_Q(\beta'(0)) &= u'(0)(a_{11}S_u(P) + a_{21}S_v(P)) + v'(0)(a_{21}S_u(P) + a_{22}S_v(P)) \\ &= (a_{11}u'(0) + a_{12}v'(0))S_u(P) + (a_{21}u'(0) + a_{22}v'(0))S_v(P). \end{aligned}$$

Logo,

$$[dN_Q] \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$$

na base $\mathcal{B} = \{S_u(P), S_v(P)\}$.

Utilizando (4.3) e (4.4), obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} -f(P) = \langle \tilde{N}_u(P), S_v(P) \rangle = a_{11}F(P) + a_{21}G(P) \\ -f(P) = \langle \tilde{N}_v(P), S_u(P) \rangle = a_{12}E(P) + a_{22}F(P) \\ -e(P) = \langle \tilde{N}_u(P), S_u(P) \rangle = a_{11}E(P) + a_{21}F(P) \\ -g(P) = \langle \tilde{N}_v(P), S_v(P) \rangle = a_{12}F(P) + a_{22}G(P) \end{cases} \quad (4.5)$$

sendo

$$\begin{cases} E(P) = \langle S_u(P), S_u(P) \rangle \\ F(P) = \langle S_u(P), S_v(P) \rangle \\ G(P) = \langle S_v(P), S_v(P) \rangle \end{cases}$$

os coeficientes da Primeira Forma Quadrática.

As relações (4.5) podem ser escritas como

$$-\begin{bmatrix} e(P) & f(P) \\ f(P) & g(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(P) & F(P) \\ F(P) & G(P) \end{bmatrix},$$

de onde deduzimos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e(P) & f(P) \\ f(P) & g(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(P) & F(P) \\ F(P) & G(P) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.6)$$

Mas

$$\begin{bmatrix} E(P) & F(P) \\ F(P) & G(P) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{E(P)G(P)-F(P)^2} \begin{bmatrix} G(P) & -F(P) \\ -F(P) & E(P) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7) concluímos que

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{f(P)F(P)-e(P)G(P)}{E(P)G(P)-F(P)^2}; & a_{12} = \frac{g(P)F(P)-f(P)G(P)}{E(P)G(P)-F(P)^2}; \\ a_{21} = \frac{e(P)F(P)-f(P)E(P)}{E(P)G(P)-F(P)^2}; & a_{22} = \frac{f(P)F(P)-g(P)E(P)}{E(P)G(P)-F(P)^2}. \end{cases}$$

Desta forma,

$$[dN_Q] = \begin{bmatrix} \frac{fF-eG}{EG-F^2}(P) & \frac{gF-fG}{EG-F^2}(P) \\ \frac{eF-fE}{EG-F^2}(P) & \frac{fF-gE}{EG-F^2}(P) \end{bmatrix}.$$

CURVATURA NORMAL E CURVATURAS PRINCIPAIS

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular, $Q = S(P)$ e $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S(U)$ curva regular em $S(U)$ tal que $Q = \beta(0)$. Suponhamos que em Q a curva β possua curvatura $k^{(\beta)}(Q) = \frac{|\beta'(0) \times \beta''(0)|}{|\beta'(0)|^3}$.

Se β for parametrizada pelo comprimento de arco, então $k^{(\beta)}(Q) = |\beta''(0)|$ e $n(Q) = \frac{\beta''(0)}{|\beta''(0)|}$ é um vetor normal unitário a β em Q .

Assim, temos um ângulo $\theta \in [0, \pi]$ entre $N(Q)$ (vetor normal a S em Q) e $n(Q)$, que é dado por $\cos(\theta) = \langle n(Q), N(Q) \rangle$.

O número

$$k_n^{(\beta)}(Q) = k^{(\beta)}(Q) \cos(\theta)$$

é chamado de **curvatura normal** de β em Q .

Observemos que se considerarmos β como sendo a curva obtida pela intersecção de S com um plano normal a S em Q , então $n(Q)$ é paralelo a $N(Q)$, o que significa $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ radianos, o que significa $|k_n^{(\beta)}(Q)| = k^{(\beta)}(Q)$. Desta forma, a menos de sinal, a curvatura normal de S em Q coincide com a curvatura de β em Q .

Consideremos β parametrizada pelo comprimento de arco e indiquemos por $\bar{N}(t) = N(\alpha(t))$ a restrição da Aplicação Normal de Gauss a β e $\bar{n}(t) = n(\alpha(t))$ o vetor normal a β em $\beta(t)$.

Logo, $\overline{\mathbf{N}}'(t) = d\mathbf{N}_{\beta(t)}(\beta'(t))$, ou seja, $\overline{\mathbf{N}}'(0) = d\mathbf{N}_Q(\beta'(0))$.

Deste modo,

$$\begin{aligned}\langle \overline{\mathbf{N}}(t), \beta'(t) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \langle \overline{\mathbf{N}}'(t), \beta'(t) \rangle + \langle \overline{\mathbf{N}}(t), \beta''(t) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \langle \overline{\mathbf{N}}(t), \beta''(t) \rangle &= -\langle \overline{\mathbf{N}}'(t), \beta'(t) \rangle \Rightarrow \\ \langle \overline{\mathbf{N}}(0), \beta''(0) \rangle &= -\langle \overline{\mathbf{N}}'(0), \beta'(0) \rangle \Rightarrow \\ \langle \overline{\mathbf{N}}(0), \beta''(0) \rangle &= -\langle d\mathbf{N}_Q(\beta'(0)), \beta'(0) \rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Pi_Q(\beta'(0)) &= -\langle d\mathbf{N}_Q(\beta'(0)), \beta'(0) \rangle \\ &= -\langle \overline{\mathbf{N}}(0), \beta''(0) \rangle \\ &= \langle \overline{\mathbf{N}}(0), |\beta''(0)| \overline{\mathbf{n}}(0) \rangle \\ &= |\beta''(0)| \langle \overline{\mathbf{N}}(0), \overline{\mathbf{n}}(0) \rangle \\ &= k^{(\beta)}(Q) \cos(\theta) \\ &= k_n^{(\beta)}(Q).\end{aligned}$$

e aqui entra a justificativa de trabalharmos com $-\mathbf{Q}$ e não com \mathbf{Q} nas seções anteriores.

Logo, a Segunda Forma Quadrática em um vetor unitário $w \in T_Q S$ fornece-nos a curvatura normal de uma curva regular β qualquer em S passando por Q e que possua w como vetor tangente. Particularmente, esta curva β pode ser uma curva parametrizada pelo comprimento de arco obtida da intersecção de S com um plano normal a S em Q paralelo a w . Daí a justificativa de chamarmos $k_n^{(\beta)}(Q)$ de curvatura *normal*. Podemos, desta forma, falar de curvatura normal de S em Q segundo uma direção determinada por w e escrever $k_n^{(w)}(Q)$ no lugar de $k_n^{(\beta)}(Q)$.

Ainda pelo que vimos acima, o fato de $d\mathbf{N}_Q$ ser auto-adjunto garante-nos a existência de vetores $e_1, e_2 \in T_Q S$ unitários ortogonais tais que

$$\begin{aligned}d\mathbf{N}_Q(e_1) &= -k_1 e_1 \\ &\text{e} \\ d\mathbf{N}_Q(e_2) &= -k_2 e_2,\end{aligned}$$

sendo $k_2 \geq k_1$ valores máximo e mínimo de $\Pi_Q(w)$ quando w percorre $\mathbb{S}^1 \subset T_Q S$, o que equivale dizer que as curvaturas normais máxima e mínima de S em Q são os autovalores de $d\mathbf{N}_Q$, ou seja, os valores da diagonal de $[d\mathbf{N}_Q]$. Finalmente, observamos que as curvaturas normais máxima e mínima de S em Q ocorrem em direções ortogonais.

Chamamos as curvaturas normais mínima k_1 e máxima k_2 de S em Q de **curvaturas principais** de S em Q e as direções dadas pelos vetores e_1 e e_2 de **direções principais** de S em Q . Os vetores e_1 e e_2 são chamados de **vetores principais**.

Proposição 4.9 (*Fórmula de Euler*) *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular; $P \in U$, e_1, e_2 os vetores principais de S em $Q = S(P)$ e k_1, k_2 as curvaturas principais de S em Q . Seja $w \in \mathbb{S}^1 \subset T_Q S$. Se $w = e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta)$, então*

$$k_n^{(w)}(Q) = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta).$$

Demonstração.

Temos

$$\begin{aligned}
 k_n^{(w)}(Q) &= -\langle dN_Q(w), w \rangle \\
 &= -\langle dN_Q(e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta)), e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta) \rangle \\
 &= -\langle dN_Q(e_1) \cos(\theta) + dN_Q(e_2) \sin(\theta), e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta) \rangle \\
 &= \langle k_1 e_1 \cos(\theta) + k_2 e_2 \sin(\theta), e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta) \rangle \\
 &= k_1 \cos^2(\theta) \langle e_1, e_1 \rangle + k_1 \cos(\theta) \sin(\theta) \langle e_1, e_2 \rangle + k_2 \sin(\theta) \cos(\theta) \langle e_2, e_1 \rangle + k_2 \sin^2(\theta) \langle e_2, e_2 \rangle \\
 &= k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta)
 \end{aligned}$$

□

VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA DAS CURVATURAS PRINCIPAIS

Nesta subseção visualizaremos geometricamente o fato das curvaturas principais de S em um ponto Q ocorrerem em direções ortogonais. Para isto, aproximaremos a superfície S em Q por uma quádrlica tangente a S em tal ponto (que chamaremos de *parabolóide osculador*), obtida do seu Polinômio de Taylor de segunda ordem. Veremos que as direções principais da quádrlica em Q são as mesmas que as de S em Q .

Tomemos

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

função diferenciável tal que $(0,0) \in U$, $f(0,0) = 0$, $Q = (0,0,0)$, gráfico de f contido em $\text{Im } S$ e os vetores normais a S em Q possuindo a mesma direção do eixo Oz de \mathbb{R}^3 . Logo, $(0,0)$ é ponto crítico de f . Assim,

$$\begin{aligned}
 f_u(0,0) &= 0 \\
 &\text{e} \\
 f_v(0,0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Assim, aproximando S em Q por seu Polinômio de Taylor de ordem dois, temos

$$\begin{aligned}
 f(u,v) &= f(0,0) + f_u(0,0)(u-0) + f_v(0,0)(v-0) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(f_{uu}(0,0)(u-0)^2 + 2f_{uv}(0,0)(u-0)(v-0) + f_{vv}(0,0)(v-0)^2 \right) \\
 &\quad + R(u,v)
 \end{aligned}$$

sendo

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R(u,v)}{|(u,v)|^2} = 0.$$

Assim,

$$f(u,v) \cong \frac{1}{2} f_{uu}(0,0) u^2 + f_{uv}(0,0) uv + \frac{1}{2} f_{vv}(0,0) v^2 \text{ em } U.$$

Denotamos o gráfico \mathcal{P} de

$$\begin{aligned}
 g : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (u,v) &\longmapsto \frac{1}{2} f_{uu}(0,0) u^2 + f_{uv}(0,0) uv + \frac{1}{2} f_{vv}(0,0) v^2
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

por *parabolóide osculador* de S em Q , sendo f a aplicação (4.8).

Classificação de pontos sobre S .

Localmente, toda superfície regular é gráfico de uma função diferenciável f de duas variáveis reais. Logo, podemos tomar a parametrização

$$\begin{aligned} S: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v}, f(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \end{aligned} \quad (4.10)$$

tal que $S(P) = Q$ e f é dada por (4.8).

Podemos tomar S tal que $|S_{\mathbf{u}}(P)| = |S_{\mathbf{v}}(P)| = 1$ e $S_{\mathbf{u}}(P) \perp S_{\mathbf{v}}(P)$.

Logo, $E(P) = 1$, $F(P) = 0$ e $G(P) = 1$.

Fixemos um vetor unitário $w = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in T_Q S$, ($T_Q S$ com a base formada pelos vetores $S_{\mathbf{u}}(P)$ e $S_{\mathbf{v}}(P)$).

Logo, a curvatura normal de S em Q segundo a direção dada por w é

$$\begin{aligned} \Pi_Q^{(S)}(w) &= -\langle dN_Q(w), w \rangle \\ &= -\left\langle \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2}(P) \mathbf{a} + \frac{gF - fG}{EG - F^2}(P) \mathbf{b}, \frac{eF - fE}{EG - F^2}(P) \mathbf{a} + \frac{fF - gE}{EG - F^2}(P) \mathbf{b} \right), (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right\rangle \\ &= -\langle (-e(P) \mathbf{a} - f(P) \mathbf{b}, -f(P) \mathbf{a} - g(P) \mathbf{b}), (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle \\ &= e(P) \mathbf{a}^2 + 2f(P) \mathbf{a} \mathbf{b} + g(P) \mathbf{b}^2 \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{cases} e(P) = \langle \tilde{N}(P), S_{\mathbf{uu}}(P) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, f_{\mathbf{uu}}(P)) \rangle = f_{\mathbf{uu}}(P) \\ f(P) = \langle \tilde{N}(P), S_{\mathbf{uv}}(P) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, f_{\mathbf{uv}}(P)) \rangle = f_{\mathbf{uv}}(P) \\ g(P) = \langle \tilde{N}(P), S_{\mathbf{vv}}(P) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, f_{\mathbf{vv}}(P)) \rangle = f_{\mathbf{vv}}(P) \end{cases}$$

O parabolóide \mathcal{P} osculador a S em Q , está parametrizado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v}, g(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \end{aligned}$$

sendo g dada em (4.9).

A curvatura normal do parabolóide osculador \mathcal{P} em Q segundo a direção dada por w é dada por

$$\Pi_Q^{(\mathcal{P})}(w) = \bar{e}(P) \mathbf{a}^2 + 2\bar{f}(P) \mathbf{a} \mathbf{b} + \bar{g}(P) \mathbf{b}^2,$$

sendo

$$\begin{cases} \bar{e}(P) = \langle \tilde{N}(P), \mathcal{P}_{\mathbf{uu}}(P) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, g_{\mathbf{uu}}(P)) \rangle = f_{\mathbf{uu}}(P) = e(P) \\ \bar{f}(P) = \langle \tilde{N}(P), \mathcal{P}_{\mathbf{uv}}(P) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, g_{\mathbf{uv}}(P)) \rangle = f_{\mathbf{uv}}(P) = f(P) \\ \bar{g}(P) = \langle \tilde{N}(P), \mathcal{P}_{\mathbf{vv}}(P) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, g_{\mathbf{vv}}(P)) \rangle = f_{\mathbf{vv}}(P) = g(P) \end{cases}.$$

Conclusão:

$$\Pi_Q^{(S)}(w) = \Pi_Q^{(\mathcal{P})}(w),$$

ou seja, as curvaturas normais de S em Q e de \mathcal{P} em Q são as mesmas. Particularmente, as curvaturas principais são as mesmas.

A vantagem de se trabalhar com o parabolóide osculador e não com a superfície S está na facilidade dos cálculos das curvaturas no parabolóide.

Notemos também que na parametrização (4.10):

$$[dN_Q] = \begin{bmatrix} -f_{\mathbf{uu}}(P) & -f_{\mathbf{uv}}(P) \\ -f_{\mathbf{uv}}(P) & -f_{\mathbf{vv}}(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{\mathbf{uu}}(P) & -g_{\mathbf{uv}}(P) \\ -g_{\mathbf{uv}}(P) & -g_{\mathbf{vv}}(P) \end{bmatrix}.$$

Algumas definições:

Seja \mathcal{P} o parabolóide osculador de S em Q .

(i) Se \mathcal{P} é um parabolóide elíptico, dizemos que Q é um **ponto elíptico** de S .
(equivalentemente, $\det [dN_Q] > 0$)

(ii) Se \mathcal{P} é um parabolóide hiperbólico, dizemos que Q é um **ponto hiperbólico** de S .
(equivalentemente, $\det [dN_Q] < 0$)

(iii) Se \mathcal{P} é um parabolóide cilíndrico (tipo “calha”), dizemos que Q é um **ponto parabólico** de S .
(equivalentemente, $\det [dN_Q] = 0$, mas $dN_Q \neq 0$)

(iv) Se \mathcal{P} é um plano, dizemos que Q é um **ponto planar** de S .
(equivalentemente, $\det [dN_Q] = 0$ e $dN_Q = 0$)

Um exemplo: classificação de pontos do toro

(i) *Pontos Parabólicos.*

Tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} f: A \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{1 - \left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 2 \right)^2} - 1, \end{aligned}$$

sendo $A = \left\{ B_3(2, 0) - \overline{B_1(2, 0)} \right\}$. ($B_r(P)$ a bola aberta de centro P e raio r , $\overline{B_r(P)}$ a bola fechada de centro P e raio r)

Logo, $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$ é a “metade superior de um toro deitado” e a origem do Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais é um ponto situado sobre o “círculo superior do toro deitado”.

FIGURA 52: Pontos parabólicos sobre o toro circular.

O parabolóide osculador \mathcal{P} no ponto $Q = (0, 0, 0)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

A figura abaixo mostra parte do toro e parte do parabolóide osculador \mathcal{P} (azul) tangentes em um ponto parabólico de S .

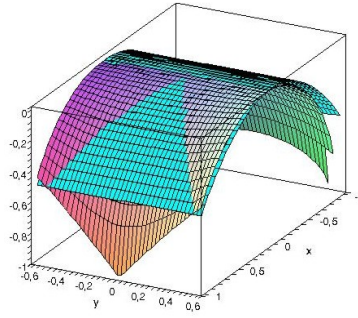


FIGURA 53: Visualização de parte do toro circular e seu parabolóide osculador em uma vizinhança de ponto parabólico.

Temos

$$[dN_{(0,0,0)}] = \begin{bmatrix} -g_{xx}(0,0,0) & -g_{xy}(0,0,0) \\ -g_{xy}(0,0,0) & -g_{yy}(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a curvatura normal mínima de S ou \mathcal{P} em $(0,0,0)$ é $k_1 = -1$ ($k_1 = -$ autovalor a_{11}) e ocorre na direção do autovetor $e_1 = (1,0)$. A curvatura normal máxima é $k_2 = 0$ ($k_2 = -$ auto-valor a_{22}) e ocorre na direção do autovetor $e_2 = (0,1)$.

(ii) *Pontos elípticos*

Tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} f: [-1,1] \times [-3,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \sqrt{1 - \frac{y^2}{(\sqrt{1-x^2}+2)^2}} (\sqrt{1-x^2}+2) - 3 \end{aligned}$$

$S = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in (-1,1) \times (-3,3)\}$ é a “metade inferior externa de um toro ‘em pé’ ” e a origem do Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais é um ponto situado sobre o “círculo máximo do toro”.

FIGURA 54: Pontos elípticos sobre o toro circular.

O parabolóide osculador no ponto $Q = (0,0,0)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,g(x,y)) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} \end{aligned}$$

A figura abaixo parte do toro e parte do parabolóide elíptico \mathcal{P} (azul) tangentes em um ponto ponto elíptico de S .

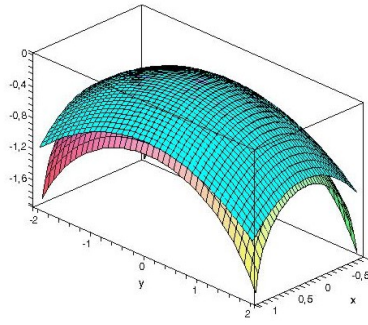


FIGURA 55 Visualização de parte do toro circular e seu parabolóide osculador em uma vizinhança de ponto elíptico.

Temos

$$[dN_{(0,0,0)}] = \begin{bmatrix} -g_{xx}(0,0,0) & -g_{xy}(0,0,0) \\ -g_{xy}(0,0,0) & -g_{yy}(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Logo a curvatura normal mínima de S ou \mathcal{P} em $(0,0,0)$ é -1 e ocorre na direção do autovetor $e_1 = (1,0)$. A curvatura normal máxima é $\frac{1}{3}$ e ocorre na direção do autovetor $e_2 = (0,1)$.

(iii) *Pontos hiperbólicos*

Tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} f: (-1,1) \times (-2,2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto -\sqrt{1 - \frac{y^2}{(-\sqrt{1-x^2}+2)^2}} \left(-\sqrt{1-x^2} + 2 \right) + 1 \end{aligned}$$

$S = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in (-1,1) \times (-2,2)\}$ é a “metade inferior interna de um toro ‘em pé’” e a origem do Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais é um ponto situado sobre o “círculo mínimo do toro”.

FIGURA 56: Ponto hiperbólico sobre o toro circular.

O parabolóide osculador no ponto $Q = (0,0,0)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,g(x,y)) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{-x^2+y^2}{2} \end{aligned}$$

A figura abaixo mostra parte do toro e parte do parabolóide hiperbólico \mathcal{P} (azul) tangentes em um ponto hiperbólico de S .

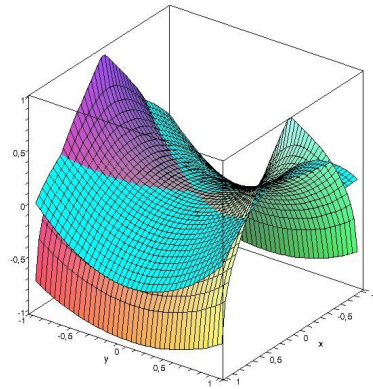


FIGURA 57: Visualização de parte do toro circular e seu parabolóide osculador em uma vizinhança de ponto hiperbólico.

Temos

$$[dN_{(0,0,0)}] = \begin{bmatrix} -g_{xx}(0,0,0) & -g_{xy}(0,0,0) \\ -g_{xy}(0,0,0) & -g_{yy}(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo a curvatura normal mínima de S ou \mathcal{P} em $(0,0,0)$ é -1 e ocorre na direção do autovetor $e_1 = (1,0)$. A curvatura normal máxima é 1 e ocorre na direção do autovetor $e_2 = (0,1)$.

Um exemplo não trivial de ponto planar

Tomemos a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto -(x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

$S = \{(x,y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ é a superfície da figura abaixo e a origem do Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais é o “vértice” da superfície.

FIGURA 58: Ponto planar sobre uma vizinhança não plana de superfície regular.

O parabolóide osculador no ponto $Q = (0,0,0)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,g(x,y)) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

ou seja, um plano.

Temos

$$[dN_{(0,0,0)}] = \begin{bmatrix} -g_{xx}(0,0,0) & -g_{xy}(0,0,0) \\ -g_{xy}(0,0,0) & -g_{yy}(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, as curvaturas normais máxima e mínima de S ou \mathcal{P} em $(0,0,0)$ são nulas, ou seja, em $(0,0,0)$ temos curvaturas normais constantes em qualquer direção pois qualquer vetor não nulo é autovetor de dN_Q .

4.6 Curvatura Gaussiana e Curvatura Média

Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular com curvaturas principais k_1 e k_2 em $Q = S(P)$, $P \in U$. Definimos

$$K(P) = k_1 k_2$$

como sendo a *curvatura gaussiana* de S em P e

$$H(P) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

como sendo a *curvatura média* de S em P .

Observação: Conhecendo-se $K(P)$ e $H(P)$, podemos encontrar as curvaturas principais em $Q = S(P)$ resolvendo a equação do segundo grau:

$$x^2 - 2H(P)x + K(P) = 0.$$

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada em [6], páginas 171 e 172.

Proposição 4.10 *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $P \in U$. Então, as curvaturas gaussiana e média são dadas por:*

$$K(P) = \frac{e(P)g(P) - f(P)^2}{E(P)G(P) - F(P)^2}$$

e

$$H(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e(P)G(P) - 2f(P)F(P) + E(P)g(P)}{E(P)G(P) - F(P)^2},$$

sendo $E(P)$, $F(P)$ e $G(P)$ coeficientes de da Primeira Forma Quadrática de S em $Q = S(P)$ e $e(P)$, $f(P)$ e $g(P)$ os coeficientes da Segunda Forma Quadrática de S em $Q = S(P)$.

Exemplo 4.21 Seja $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ a parametrização de um cilindro. Temos

$$\begin{aligned} E(P) &= 1, \quad F(P) = 0, \quad G(P) = 1 \\ e(P) &= -1, \quad f(P) = 0, \quad g(P) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $K(P) = \frac{0}{1} = 0$, $\forall P \in U$ e $H(P) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$, $\forall P \in U$.

Exemplo 4.22 Seja $S(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. (parabolóide hiperbólico) Temos:

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 1, \quad F(0, 0) = 0, \quad G(0, 0) = 1 \\ e(0, 0) &= -2, \quad f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 2 \end{aligned}$$

Assim, $K(0, 0) = -4$ e $H(0, 0) = 0$. As curvaturas principais em $P = (0, 0)$ são $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$.

Exemplo 4.23 Sejam $S(u, v) = ((1 - u^3) \cos(v), (1 - u^3) \sin(v), 1)$, $-1 < u < 1$ e $v \in \mathbb{R}$. Esta superfície é obtida pela rotação da curva $\alpha(u) = (0, u, u^3)$, $-1 < u < 1$, em torno da reta $z = 1$ contida no plano yz . Seu nome é *Chapéu de Sherlock*. Temos

$$\begin{aligned} E(0, v) &= 1, \quad F(0, v) = 0, \quad G(0, v) = 1 \\ e(0, v) &= 0, \quad f(0, v) = 0, \quad g(0, v) = -1 \end{aligned}$$

para qualquer $(0, v) \in \mathbb{R}^2$.

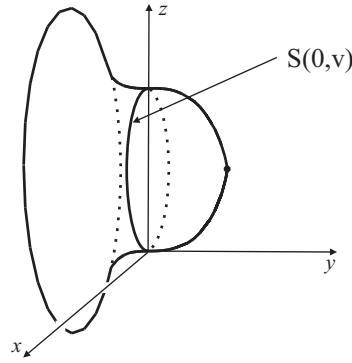


FIGURA 59: Chapéu de Sherlock.

Logo, $K(0, v) = 0$ e $H(0, v) = -\frac{1}{2}$ para todo $v \in \mathbb{R}$. As curvaturas principais em $(0, v)$ são $k_1 = -1$ e $k_2 = 0$.

Dizemos que $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regular é uma **superfície mínima** se $H(P) = 0$; $\forall P \in U$.

Dentre as superfícies regulares em \mathbb{R}^3 , duas classes se destacam:

- (1) As superfícies de curvatura gaussiana constante (para qualquer ponto), como por exemplo:
 - (i) plano e cilindro, no qual $K(P) = 0$, $\forall P$.
 - (ii) esfera de raio $r > 0$, na qual $K(P) = \frac{1}{r^2}$, $\forall P$.
 - (iii) pseudo-esfera, na qual $K(P) = -1$, $\forall P$. A pseudo-esfera pode ser obtida pela rotação da tratriz:

$$\alpha(t) = \left(\sin(t), 0, \cos(t) + \ln \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right), \quad t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[,$$

em torno do eixo z .

- (2) As superfícies mínimas, como por exemplo:
 - (i) plano, no qual $H(P) = 0$, $\forall P$.
 - (ii) catenóide no qual $H(P) = 0$, $\forall P$.
 - (iii) helicóide, no qual $H(P) = 0$, $\forall P$. (superfície gerada por todos os segmentos paralelos a xy ligando o eixo z a uma hélice cilíndrica de eixo z).

Algumas propriedades geométricas interessantes em superfícies com $K(P) = c$ ou $H(P) = 0$, $\forall P$, são:

- Se S e \bar{S} possuem mesma curvatura gaussiana constante, então é possível restringir os domínios de S e \bar{S} de tal modo que exista uma isometria entre S e \bar{S} (homogeneidade).
- Se S é superfície mínima, então considerando uma região suficientemente pequena em S , a área dessa região é menor do que ou igual à área de qualquer superfície que tenha a mesma fronteira da região (é a superfície da “película de sabão”).

4.7 Classificação de Pontos em Superfícies

Vimos a classificação de pontos de uma superfície regular em elípticos, hiperbólicos, parabólicos e planares utilizando as curvaturas principais. Utilizando as curvaturas gaussiana e média podemos redefinir esses conceitos conforme abaixo.

Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $P \in U$. Dizemos que o ponto $Q = S(P)$ é:

- (i) *elíptico* quando $K(P) > 0$.
- (ii) *hiperbólico* quando $K(P) < 0$.
- (iii) *parabólico* quando $K(P) = 0$ e $H(P) \neq 0$.
- (iv) *planar* quando $K(P) = 0$ e $H(P) = 0$.

Exemplo 4.24 (i) Todos os pontos de um plano são planares, pois $K(P) = H(P) = 0, \forall P$.

(ii) Todos os pontos de uma esfera de raio r são elípticos pois $K(P) = \frac{1}{r^2}, \forall P$.

(iii) O ponto $P = (0,0)$ do parabolóide hiperbólico $S(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ é hiperbólico pois $K(0,0) = -4$. Na verdade, todos os pontos de um parabolóide hiperbólico são hiperbólicos.

(iv) Todos os pontos do cilindro $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ são parabólicos, pois $K(P) = 0$ e $H(P) = -\frac{1}{2} \neq 0, \forall P \in \mathcal{U}$.

Exemplo 4.25 (i) No “Chapéu de Sherlock” $S(u, v) = ((1 - u^3) \cos(v), u, (1 - u^3) \sin(v) + 1), -1 < u < 1$ e $v \in \mathbb{R}$, os pontos da forma $S(u, v)$ com $u = 0$ são parabólicos; com $-1 < u < 0$ são hiperbólicos e; com $0 < u < 1$ são elípticos.

(ii) No toro $S(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)), (u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < a$ temos:

- (a) Se $-\frac{\pi}{2} + 2h\pi < u < \frac{\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$, então os pontos $P = (u, v)$ são elípticos.
- (b) Se $u = \frac{\pi}{2} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$, então os pontos $P = (u, v)$ são pontos parabólicos.
- (c) Se $\frac{\pi}{2} + 2h\pi < u < \frac{3\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$, então os pontos $P = (u, v)$ são hiperbólicos.

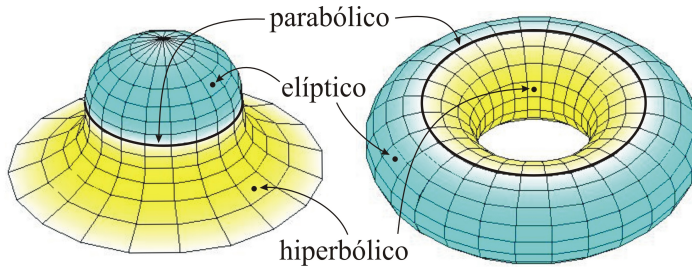


FIGURA 60: Classificação de pontos sobre o toro circular e sobre o Chapéu de Sherlock.

Observação: Em uma superfície mínima temos $k_1 = -k_2$. Logo:

$$K(P) = -(k_2)^2 \leq 0, \forall P \in \mathcal{U}.$$

Conclusão: Em uma superfície mínima todos os pontos são hiperbólicos ou planares.

PLANOS TANGENTES E CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS

(1) Sejam $S : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $P \in \mathcal{U}$. Vimos que $Q = S(P)$ é elíptico quando $K(P) > 0$. Mas, $K(P) = k_1 k_2 > 0$, ou seja, $k_1, k_2 > 0$ ou $k_1, k_2 < 0$. Lembrando que a curvatura normal k_n é tal que $k_1 \leq k_n^{(w)}(Q) \leq k_2$ para todo $w \in T_Q S - \{0\}$, temos:

(1 - i) Se $k_1, k_2 > 0$, então:

$$0 < k_1 \leq k_n^{(w)}(Q) \leq k_2 \implies k_n^{(w)}(Q) > 0, \forall w \in T_Q S - \{0\}.$$

Vimos que $|k_n^{(w)}(Q)| = k(t_0)$ sendo $k(t_0)$ a curvatura da curva β que é a secção normal da superfície S determinada por w , ($\beta(t_0) = Q$).

Como $k_n^{(w)}(Q) > 0$ para qualquer $w \in T_Q S - \{0\}$, então $k(t_0) > 0$ para qualquer secção normal da superfície S passando por Q .

Vimos em curvas planas que se $k(t_0) > 0$, então a curva β tem concavidade voltada para o sentido do vetor $\beta''(t_0)$. Mas

$$n(Q) = \frac{\beta''(t_0)}{|\beta''(t_0)|}$$

é o vetor normal unitário à curva β em $\beta(t_0)$ e vimos

$$k_n^{(w)}(Q) = k(t_0) \cos(\theta)$$

sendo θ o ângulo entre os vetores $n(Q)$ e $N(Q)$, com $N(Q)$ vetor unitário normal a S em Q . Como, neste caso,

$$\cos(\theta) = 1 \implies \theta = 0 \implies n(Q) = N(Q)$$

para qualquer secção normal de S passando por Q , ou seja, todas as secções normais β possuem concavidades voltadas para o sentido do vetor $N(Q)$.

Conclusão: Existe uma vizinhança V de P tal que $S(V)$ está contido em apenas um dos semiespaços determinados pelo plano tangente a S em Q .

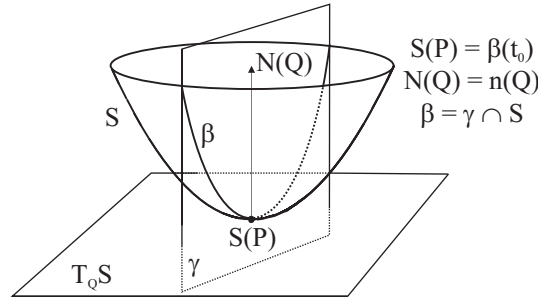


FIGURA 61: Curvaturas principais positivas: em uma vizinhança de um ponto elíptico Q a superfície S está apenas de um lado do plano tangente $T_Q S$.

(1 – ii) Se $k_1, k_2 < 0$, então:

$$k_2 \leq k_n^{(w)}(Q) \leq k_1 < 0 \implies k_n^{(w)}(Q) < 0, \forall w \in T_Q S - \{0\}.$$

Como $k_n(w, Q) = k(t_0) \cos(\theta)$ e $k(t_0) > 0$ (as parametrizações de β são tais que a curvatura $k(t_0)$ seja positiva), temos que

$$\cos(\theta) = -1 \implies \theta = \pi,$$

ou seja, $N(Q)$ e $n(Q)$ possuem sentidos opostos. Assim, para qualquer secção normal de S passando por Q temos a concavidade voltada para o sentido do vetor $-N(Q)$.

Conclusão: Existe uma vizinhança V de P tal que $S(V)$ está contido em apenas um dos semiespaços determinado pelo plano tangente a S em Q .

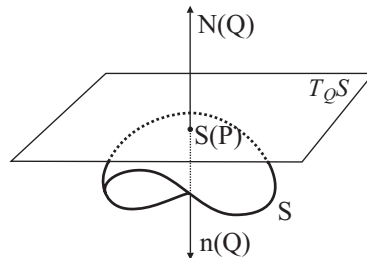


FIGURA 62: Curvaturas principais negativas: em uma vizinhança de um ponto elíptico Q a superfície S está apenas de um lado do plano tangente $T_Q S$.

(2) Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $P \in U$. Vimos que $Q = S(P)$ é hiperbólico quando $K(P) < 0$. Mas $K(P) = k_1 k_2 < 0$ implica em k_1 e k_2 possuírem sinais opostos. Neste caso temos secções normais a S passando por Q com concavidades locais voltadas para os dois semiespaços determinados por $T_Q S$.

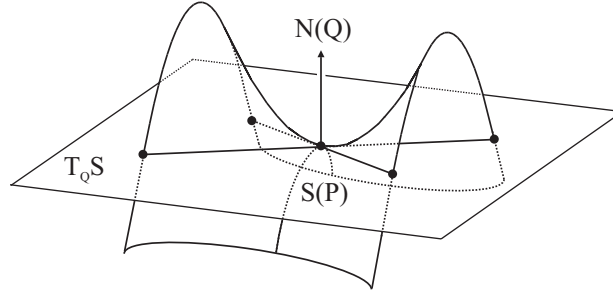


FIGURA 63: Em uma vizinhança de um ponto hiperbólico Q a superfície S está em ambos os lados do plano tangente $T_Q S$.

(3) Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $P \in U$.

Vimos que $Q = S(P)$ é parabólico quando $K(P) > 0$ e $H(P) \neq 0$.

Mas $K(P) = k_1 k_2 = 0$ é equivalente a $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$.

Como $H(P) = \frac{k_1 + k_2}{2} \neq 0$ temos k_1 e k_2 não nulos ao mesmo tempo.

Assim, se $k_1 = 0$, então:

$$0 = k_1 \leq k_n^{(w)}(Q) \leq k_2 \implies 0 \leq k_n^{(w)}(Q).$$

Se $k_2 = 0$, então:

$$k_1 \leq k_n^{(w)}(Q) \leq k_2 = 0 \implies k_n^{(w)}(Q) \leq 0.$$

Geometricamente temos que *há uma* secção normal de S passando por Q na qual a curvatura $k(t_0)$ é nula e todas as *outras* secções normais a S passando por Q estão com concavidades locais voltadas para um mesmo semiespaço determinado por $T_Q S$. No entanto, isso não quer dizer que, localmente, *todas* as secções normais estão com concavidades voltadas para um mesmo lado de $T_Q S$. A secção normal que possui curvatura nula pode ter comportamento do tipo da curva $y = x^3$ no plano. No “Chapéu de Scherlock” há exemplos desse tipo de comportamento.

(4) Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $P \in U$. Vimos que $Q = S(P)$ é planar quando $K(P) = H(P) = 0$. Como $K(P) = k_1 k_2$ e $H(P) = \frac{k_1 + k_2}{2}$, então:

$$k_1 = k_2 = 0 \implies k_n^{(w)}(Q) = 0; \forall w \in T_Q S - \{0\}.$$

Geometricamente, toda secção normal a S passando por Q possui curvatura nula, ou seja, localmente (em torno de Q) a superfície S se comporta como um plano.

Assim como no caso dos pontos parabólicos, nada se pode afirmar sobre a concavidade das secções normais em $Q \in S$ em relação ao plano tangente $T_Q S$. Dois exemplos do comportamento errático dos pontos planares com relação ao plano tangente são dados pelas superfícies $S(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (**Sela de Macaco**) e $S(u, v) = (v^4 \cos(u), v^4 \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (rotação de $z = x^4$ em torno do eixo z).

4.8 Geodésicas

As geodésicas sobre uma superfície regular S podem ser pensadas intuitivamente como sendo as “curvas sobre S que minimizam distâncias”. As geodésicas desempenham, portanto, o mesmo papel que as retas no plano euclidiano.

DERIVADA COVARIANTE

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície parametrizada regular, $\mathcal{T} = \{T_Q S : Q \in S(U)\}$ e

$$\begin{aligned} w : V \subset S(U) &\longrightarrow \mathcal{T} \\ Q &\longmapsto w(Q) \in T_Q S \end{aligned}$$

um campo diferenciável de vetores tangentes a V . Sejam $y \in T_Q S$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow V \subset S$ uma curva regular com $\alpha(0) = Q$ e $\alpha'(0) = y$.

Seja $w : \alpha(I) \subset V \subset S \rightarrow T_Q S \subset \mathbb{R}^3$ a restrição de w a $\alpha(I)$, que pode ser pensada como uma aplicação de I em $T_Q S \subset \mathbb{R}^3$. Logo, $w'(0) = \frac{dw}{dt}(0) \in \mathbb{R}^3$ e podemos considerar o vetor projeção de $w'(0)$ sobre $T_Q S$. Este vetor projeção de $w'(0)$ é chamado de **derivada covariante** do campo w em Q em relação ao vetor y e é indicado por $\frac{Dw}{dt}(0)$ ou $D_y(w)(Q)$.

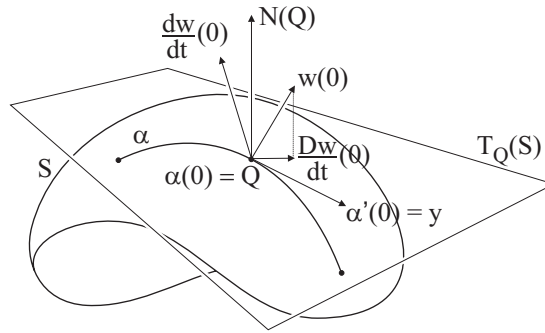


FIGURA 64: Definindo a derivada covariante.

Uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S(U)$, é chamada de **geodésica** de S quando seu campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$ é tal que a derivada covariante de $\alpha'(t)$ em $\alpha(t)$ em relação ao vetor $y = \alpha'(t)$ é nula, ou seja, $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0, \forall t \in I$.

A definição acima significa que o vetor $\alpha''(t)$ é paralelo ao vetor $\tilde{N}(u(t), v(t))$, normal à superfície em $Q = S(u(t), v(t))$.

Observação: Se $\alpha''(t) \neq 0, \forall t \in I$, $\tilde{n}(t) = \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|}$ é o vetor normal à curva α em t . Se α é uma geodésica, então $\tilde{n}(t) // \tilde{N}(u(t), v(t))$.

Exemplo 4.26 Todas as retas em uma superfície regular S são geodésicas. De fato, se $\alpha(t)$ é uma reta em S , então:

$$\alpha''(t) = 0 \implies \alpha''(t) // \tilde{N}(u(t), v(t)), \quad (\alpha''(t) = 0, \tilde{N}(u(t), v(t)))$$

Observação: Seja $\alpha(t)$ uma secção normal de S em $Q = \alpha(t_0) \in U$. Embora $\tilde{n}(t_0) // \tilde{N}(u(t_0), v(t_0))$, nem sempre a secção α é geodésica de S , pois os vetores $\tilde{n}(t)$ e $\tilde{N}(u(t), v(t))$ podem ser paralelos apenas em $\alpha(t_0)$.

Exemplo 4.27 Cilindro: $S(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Os meridianos de um cilindro são geodésicas (pois são retas).

Seja $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), c)$, c constante (um círculo contido no cilindro).

Temos $\alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$ e

$$\tilde{N}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0) \implies \tilde{N}(u(t), v(t)) = \tilde{N}(t, c) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

(observemos que $\alpha(t) = S(t, c)$).

Logo, $\alpha''(t) \parallel \tilde{N}(t, c)$, ou seja, $\alpha(t)$ é uma geodésica em S .

Seja $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ (uma hélice circular contida no cilindro).

Temos $\alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$ e

$$\tilde{N}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0) \implies \tilde{N}(u(t), v(t)) = \tilde{N}(t, t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

(observemos que $\alpha(t) = S(t, t)$).

Logo, $\alpha''(t) \parallel \tilde{N}(t, t)$, ou seja, $\alpha(t)$ é uma geodésica em S .

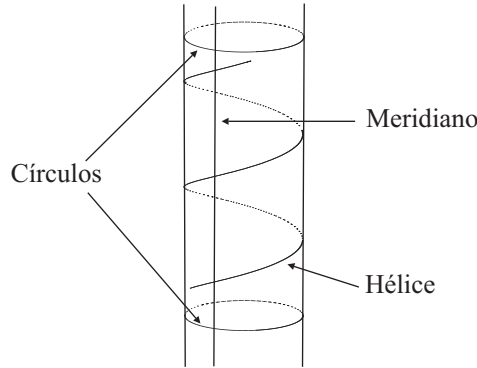


FIGURA 65: As geodésicas de um cilindro.

Proposição 4.11 *Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular. Se $\alpha(t) = S(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma geodésica, então:*

(a) $|\alpha'(t)|$ é constante;

(b) Se α for parametrizada pelo comprimento de arco e $\alpha''(t) \neq 0$, então:

$$(i) \frac{d}{dt} \left(\tilde{N}(u(t), v(t)) \right) = -k(t) T(t) - \tau(t) B(t), \text{ quando } \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|} = \tilde{N}(u(t), v(t)).$$

$$(ii) -\frac{d}{dt} \left(\tilde{N}(u(t), v(t)) \right) = -k(t) T(t) - \tau(t) B(t), \text{ quando } \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|} = -\tilde{N}(u(t), v(t)).$$

Sendo $\tilde{N}(u(t), v(t))$ vetor normal à superfície em $S(u(t), v(t))$, $k(t)$ a curvatura e $\tau(t)$ a torção de α em $\alpha(t)$, respectivamente.

Demonstração.

(a) Seja $\alpha(t) = S(u(t), v(t))$ é uma geodésica de S . Como $\alpha''(t)$ é normal a S em $S(u(t), v(t))$, isto é, $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Assim,

$$\frac{d}{dt} |\alpha'(t)|^2 = \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0,$$

ou seja $|\alpha'(t)| = c$, constante.

(b) Como $\alpha(t) = S(u(t), v(t))$ é uma geodésica, então $\alpha''(t)$ e, portanto, o vetor normal $\tilde{n}(t)$, é normal à superfície. Logo, $\tilde{n}(t) = \pm \tilde{N}(u(t), v(t))$.

(i) se $\tilde{n}(t) = \tilde{N}(u(t), v(t))$, então

$$\frac{d\tilde{N}}{dt}(u(t), v(t)) = \tilde{n}'(t) = -k(t) T(t) - \tau(t) B(t) \quad (2^a. \text{ Equação de Frenet}).$$

(ii) se $\tilde{n}(t) = -\tilde{N}(u(t), v(t))$, então

$$-\frac{d\tilde{N}}{dt}(u(t), v(t)) = \tilde{n}'(t) = -k(t)T(t) - \tau(t)B(t) \quad (2^a. \text{ Equação de Frenet}).$$

□

Com o auxílio da proposição acima, é fácil provar que de uma curva α na esfera é uma geodésica se, e somente se, α é um círculo máximo.

Observação: Considere o plano π gerado por $\tilde{N}(u(t), v(t))$ e $\alpha'(t)$ passando por $\alpha(t)$ em uma superfície regular S . Vamos supor α parametrizada pelo comprimento de arco. Se α é uma geodésica, então $\tilde{n}(t) = \pm\tilde{N}(u(t), v(t))$. Logo, o plano π é gerado por $\tilde{n}(t)$ e $T(t) = \alpha'(t)$, ou seja, π é o plano osculador de α em t .

Conclusão: Se α é uma geodésica em S , então o plano osculador de α em t é perpendicular ao plano tangente à superfície S em $\alpha(t)$.

SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Temos que $S_u(u, v)$, $S_v(u, v)$ e $\tilde{N}(u, v) = \frac{S_u \times S_v}{|S_u \times S_v|}(u, v)$

são linearmente independentes. Logo, $\{S_u, S_v, \tilde{N}\}$ forma uma base de \mathbb{R}^3 para cada $(u, v) \in U$.

Deste modo, os vetores $S_{uu}(u, v)$, $S_{uv}(u, v)$ e $S_{vv}(u, v)$ podem ser escritos como combinações lineares de S_u, S_v e \tilde{N} , ou seja:

$$\begin{cases} S_{uu}(u, v) = \Gamma_{11}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{11}^2 S_v(u, v) + a_{11} \tilde{N}(u, v) \\ S_{uv}(u, v) = \Gamma_{12}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{12}^2 S_v(u, v) + a_{12} \tilde{N}(u, v) \\ S_{vv}(u, v) = \Gamma_{22}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{22}^2 S_v(u, v) + a_{22} \tilde{N}(u, v) \end{cases} \quad (4.11)$$

sendo $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v) \in \mathbb{R}$ e $a_{ij} = a_{ij}(u, v) \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $\langle \tilde{N}_u, \tilde{N} \rangle(u, v) = 0$ e $\langle \tilde{N}_v, \tilde{N} \rangle(u, v) = 0$. Portanto, \tilde{N}_u e \tilde{N}_v são vetores do plano tangente a S em $Q = S(P)$, $P = (u, v)$. Logo,

$$\begin{cases} \tilde{N}_u(u, v) = b_{11} S_u(u, v) + b_{12} S_v(u, v) \\ \tilde{N}_v(u, v) = b_{21} S_u(u, v) + b_{22} S_v(u, v) \end{cases} \quad (4.12)$$

sendo $b_{ij} = b_{ij}(u, v) \in \mathbb{R}$.

Após algumas contas:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}(u, v) & \Gamma_{11}^2(u, v) &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}(u, v) \\ \Gamma_{12}^1(u, v) &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}(u, v) & \Gamma_{12}^2(u, v) &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}(u, v) \\ \Gamma_{22}^1(u, v) &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}(u, v) & \Gamma_{22}^2(u, v) &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}(u, v) \\ b_{11}(u, v) &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}(u, v) & b_{12}(u, v) &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}(u, v) \\ b_{21}(u, v) &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}(u, v) & b_{22}(u, v) &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}(u, v) \\ a_{11}(u, v) &= e(u, v); \quad a_{12}(u, v) = f(u, v); \quad a_{22}(u, v) = g(u, v) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Os números reais Γ_{ij}^k ; $k, i, j = 1, 2$; são chamados *Símbolos de Christoffel* da superfície S .

Proposição 4.12 *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ superfície regular e $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = S(u(t), v(t))$ curva regular sobre S . Então, α é uma geodésica de S se, e somente se, as funções $u = u(t)$ e $v = v(t)$ satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias:*

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

Demonstração.

Sendo $\alpha(t) = S(u(t), v(t))$ curva regular, então em t temos:

$$\begin{aligned} \alpha' &= u' S_u(u, v) + v' S_v(u, v) \Rightarrow \\ \alpha'' &= u'' S_u(u, v) + u' (S_{uu}(u, v) u' + S_{uv}(u, v) v') + v'' S_v(u, v) + v' (S_{vu}(u, v) u' + S_{vv}(u, v) v') \\ &= u'' S_u(u, v) + (u')^2 S_{uu}(u, v) + u'v' S_{uv}(u, v) + v'' S_v(u, v) + v' u' S_{vu}(u, v) + (v')^2 S_{vv}(u, v) \\ &= u'' S_u(u, v) + (u')^2 S_{uu}(u, v) + 2u'v' S_{uv}(u, v) + v'' S_v(u, v) + (v')^2 S_{vv}(u, v). \end{aligned}$$

Mas, em t temos:

$$\begin{cases} S_{uu}(u, v) = \Gamma_{11}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{11}^2 S_v(u, v) + a_{11} \tilde{N}(u, v) \\ S_{uv}(u, v) = \Gamma_{12}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{12}^2 S_v(u, v) + a_{12} \tilde{N}(u, v) \\ S_{vv}(u, v) = \Gamma_{22}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{22}^2 S_v(u, v) + a_{22} \tilde{N}(u, v) \end{cases},$$

sendo $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v)$ e $a_{ij} = a_{ij}(u, v)$.

Por outro lado, sendo $e = e(u, v)$, temos em t :

$$\begin{aligned} e &= \langle S_{uu}(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{11}^2 S_v(u, v) + a_{11} \tilde{N}(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 S_u(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle + \langle \Gamma_{11}^2 S_v(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle + \langle a_{11} \tilde{N}(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 \langle S_u(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle S_v(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle + a_{11} \langle \tilde{N}(u, v), \tilde{N}(u, v) \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 \cdot 0 + \Gamma_{11}^2 \cdot 0 + a_{11} \cdot 1 \\ &= a_{11}. \end{aligned}$$

Analogamente, $f = a_{12}$ e $g = a_{22}$.

Deste modo, em t :

$$\begin{aligned} \alpha'' &= u'' S_u(u, v) + (u')^2 (\Gamma_{11}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{11}^2 S_v(u, v) + e \tilde{N}(u, v)) \\ &\quad + 2u'v' (\Gamma_{12}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{12}^2 S_v(u, v) + f \tilde{N}(u, v)) \\ &\quad + v'' S_v(u, v) + (v')^2 (\Gamma_{22}^1 S_u(u, v) + \Gamma_{22}^2 S_v(u, v) + g \tilde{N}(u, v)) \\ &= u'' S_u(u, v) + (u')^2 \Gamma_{11}^1 S_u(u, v) + (u')^2 \Gamma_{11}^2 S_v(u, v) + (u')^2 e \tilde{N}(u, v) \\ &\quad + 2u'v' \Gamma_{12}^1 S_u(u, v) + 2u'v' \Gamma_{12}^2 S_v(u, v) + 2u'v' f \tilde{N}(u, v) \\ &\quad + v'' S_v(u, v) + (v')^2 \Gamma_{22}^1 S_u(u, v) + (v')^2 \Gamma_{22}^2 S_v(u, v) + (v')^2 g \tilde{N}(u, v) \\ &= \left(u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 \right) S_u(u, v) \\ &\quad + \left((u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'' + (v')^2 \Gamma_{22}^2 \right) S_v(u, v) \\ &\quad + \left((u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g \right) \tilde{N}(u, v) \end{aligned}$$

\Rightarrow) Como $\alpha(t)$ é uma geodésica de S , para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ não tem componente tangencial à superfície, ou seja, escrevendo $\alpha'(t)$ na base $\{S_u(u(t), v(t)), S_v(u(t), v(t)), \tilde{N}(u(t), v(t))\}$, os coeficientes de $\alpha'(t)$ que multiplicam $S_u(u(t), v(t))$ e $S_v(u(t), v(t))$ devem ser nulos.

Assim:

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'' + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

\Leftarrow) Por outro lado, se as equações acima são verdadeiras, então, em t :

$$\alpha'' = \left((u')^2 e + 2u'v'f + (v')^2 g \right) \tilde{N}(u, v),$$

ou seja, $\alpha''(t)$ é ortogonal a $T_{\alpha(t)}S$, ou seja, $\alpha''(t) \perp \tilde{N}(u(t), v(t))$. Logo, α é uma geodésica. \square

Exemplo 4.28 Plano: $S(u, v) = P + uw_1 + vw_2$, $u, v \in \mathbb{R}$.

Tomemos $S_u(P) = w_1$ e $S_v(P) = w_2$.

Temos $E = |w_1|^2$, $F = \langle w_1, w_2 \rangle$, $G = |w_2|^2$, $E_u = E_v = 0$, $F_u = F_v = 0$ e $G_u = G_v$.

Substituindo no sistema de equações diferenciais ordinárias acima:

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ v'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = b \\ v' = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = a + bt \\ v = c + dt \end{cases}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= S(a + bt, c + dt) = P + (a + bt)w_1 + (c + dt)w_2 \Rightarrow \\ \alpha(t) &= P + aw_1 + cw_2 + t(bw_1 + dw_2). \end{aligned}$$

Logo, α é geodésica do plano se, e somente se, α é uma reta.

Exemplo 4.29 Vimos que $S, \bar{S}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são superfícies isométricas se, e somente se, $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$. Sejam

$$\begin{aligned} S(u, v) &= (u, v, 0); \quad 0 < u < 2\pi; \quad v \in \mathbb{R}. \quad (\text{plano}) \\ \bar{S}(u, v) &= (\cos(u), \sin(u), v); \quad 0 < u < 2\pi; \quad v \in \mathbb{R}. \quad (\text{cilindro}) \end{aligned}$$

Assim, $E = 1 = \bar{E}$, $F = 0 = \bar{F}$ e $G = 1 = \bar{G}$.

Observemos que em superfícies isométricas os Símbolos de Christoffel são iguais. Logo, se $\alpha(t) = S(u(t), v(t))$ é uma geodésica em S , então $\bar{\alpha}(t) = \bar{S}(u(t), v(t))$ é uma geodésica em \bar{S} .

Como vimos no exemplo anterior, $u(t) = a + bt$ e $v(t) = c + dt$. Logo, as geodésicas do cilindro são

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{S}(a + bt, c + dt) \Rightarrow \bar{\alpha}(t) = (\cos(a + bt), \sin(a + bt), c + dt).$$

Se $b = 0$ e $d \neq 0$, então $\bar{\alpha}(t) = (\cos(a), \sin(a), c + dt)$ é um meridiano do cilindro.

Se $b \neq 0$ e $d = 0$, então $\bar{\alpha}(t) = (\cos(a + bt), \sin(a + bt), c)$ é um círculo do cilindro.

Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então $\bar{\alpha}(t) = (\cos(a + bt), \sin(a + bt), c + dt)$ é uma hélice do cilindro.

E estes três tipos de curvas são as únicas geodésicas possíveis em um cilindro.

Outra consequência importante da proposição acima:

Se $S, \bar{S}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são superfícies isométricas, $\phi: S(U) \rightarrow \bar{S}(U)$ é uma isometria entre S e \bar{S} e $\alpha(t) = S(u(t), v(t))$ é uma geodésica em S , então $\phi \circ \alpha(t) = \phi(S(u(t), v(t)))$ é uma geodésica em \bar{S} .

Temos $\bar{\alpha} = \bar{S} \circ \beta$ e $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$. De fato,

$$\phi \circ \alpha(t) = \phi(S(u(t), v(t))) = \phi(S(\beta(t))) = \bar{S}(\beta(t)) \Rightarrow \phi \circ \alpha = \bar{S} \circ \beta.$$

CURVATURA GEODÉSICA

Seja w um campo diferenciável e unitário de vetores tangentes a $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, superfície regular, ao longo de $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S(U)$. Como $w(t)$, $t \in I$, é unitário, então

$$\langle w'(t), w(t) \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{Dw}{dt}(t), w(t) \right\rangle = 0.$$

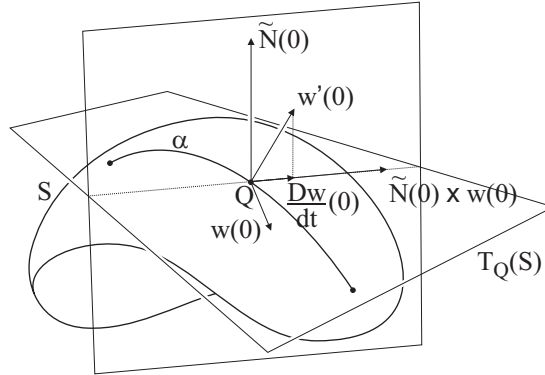


FIGURA 66: Definindo curvatura geodésica.

Como $\langle \tilde{N}(t) \times w(t), w(t) \rangle = 0$ e tanto $\frac{Dw}{dt}(t)$ como $\tilde{N}(t) \times w(t)$ estão em $T_Q S$, temos que estes vetores são proporcionais, ou seja, existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{Dw}{dt}(t) = \lambda(t) (\tilde{N}(t) \times w(t))$. (\tilde{N} é Aplicação Normal de Gauss restrita à curva α). O número $\lambda(t)$ é chamado *valor algébrico* de $\frac{Dw}{dt}(t)$ em t . Quando α é regular, parametrizada pelo comprimento de arco, e $w(t) = \alpha'(t)$, o valor algébrico de $\frac{D\alpha'}{dt}(t)$ é chamado de **curvatura geodésica** de α em t , denotada por $k_g(t)$.

Observações:

- (i) se α é uma geodésica, então $k_g = 0$ pois $\frac{D\alpha'}{dt}(t) = 0$, $\forall t \in I$.
- (ii) a curvatura geodésica mede o “quanto uma curva deixa de ser geodésica”.
- (iii) é possível provar que se $k(t)$ é a curvatura de α em t , $k_n(t)$ é curvatura normal de S em $\alpha(t)$ na direção de $\alpha'(t)$ e $k_g(t)$ é a curvatura geodésica de α em t , então

$$k(t)^2 = k_g^2(t) + k_n^2(t).$$

- (iv) se mudarmos a orientação de α , isto é, reparametrizando α por β tal que $\beta'(t) = -\alpha'(t)$, então a curvatura geodésica muda de sinal.

4.9 Três Importantes Teoremas da Geometria Diferencial

Nesta seção introduzimos três dos principais teoremas relacionados à superfícies: os teoremas *Egregium de Gauss*, *Fundamental das Superfícies* e de *Gauss-Bonnet*.

TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

Um resultado surpreendente da Geometria Diferencial é o fato da curvatura gaussiana, cuja definição faz uso da Segunda Forma Quadrática, depender, na verdade, apenas da Primeira Forma Quadrática. Este resultado é conhecido como Teorema Egregium de Gauss.

Teorema 4.1 (*Egregium de Gauss*) *A curvatura gaussiana só depende da primeira forma quadrática.*

Demonstração.

Inicialmente, lembramos que se $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície e \tilde{N} é a Aplicação Normal de Gauss a ela associada, então como vimos na seção anterior, S_{uu}, S_{uv}, S_{vv} são combinações lineares de S_u, S_v e \tilde{N} . Além disso, \tilde{N}_u, \tilde{N}_v , por serem tangentes à superfície, são combinações lineares de S_u e S_v . Os coeficientes destas combinações lineares, que foram obtidos em 4.13, não são independentes, pois devem satisfazer as relações:

$$\begin{aligned}(S_{uu})_v &= (S_{uv})_u, \\ (S_{vv})_u &= (S_{uv})_v, \\ \tilde{N}_{uv} &= \tilde{N}_{vu}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Substituindo 4.11 e 4.12 em 4.14, cada equação de 4.14 se reduz a anular uma combinação linear de S_u, S_v e \tilde{N} , que são vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Portanto, anulando os coeficientes destas combinações lineares obtemos nove relações.

Vejamos com detalhes as relações que resultam da primeira equação de 4.14.

Substituindo 4.13 na primeira equação de 4.14 temos

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\Gamma_{11}^1 S_u + \Gamma_{11}^2 S_v + e \tilde{N} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\Gamma_{12}^1 S_u + \Gamma_{12}^2 S_v + f \tilde{N} \right).$$

Efetuada as derivadas parciais acima e substituindo $S_{uu}, S_{uv}, S_{vv}, \tilde{N}_u$ e \tilde{N}_v em função de S_u, S_v e \tilde{N} , pelas relações 4.13, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\left(\Gamma_{11}^1 \right)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e \frac{gF - fG}{EG - F^2} &= \left(\Gamma_{12}^1 \right)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + f \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ \left(\Gamma_{11}^2 \right)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e \frac{fF - gE}{EG - F^2} &= \left(\Gamma_{12}^2 \right)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ f \Gamma_{11}^1 + g \Gamma_{11}^2 + e_v &= e \Gamma_{12}^1 + f \Gamma_{12}^2 + f_u,\end{aligned}$$

onde nas equações acima substituímos os coeficientes b_{ij} de \tilde{N}_u e \tilde{N}_v por suas expressões dadas em 4.13. As três equações acima podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned}F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} &= \left(\Gamma_{12}^1 \right)_u - \left(\Gamma_{11}^1 \right)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1, \\ -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} &= \left(\Gamma_{12}^2 \right)_u - \left(\Gamma_{11}^2 \right)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2,\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$e_v - f_u = e \Gamma_{12}^1 + f \left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) - g \Gamma_{11}^2.\tag{4.16}$$

De modo análogo, considerando os coeficientes de S_u, S_v e \tilde{N} das duas últimas equações de 4.14 obtemos outras seis relações, das quais destacamos

$$f_v - g_u = e \Gamma_{22}^1 + f \left(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \right) - g \Gamma_{12}^2\tag{4.17}$$

A equação 4.15 é precisamente

$$-EK = \left(\Gamma_{12}^2 \right)_u - \left(\Gamma_{11}^2 \right)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \left(\Gamma_{12}^2 \right)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2\tag{4.18}$$

e como os símbolos de Christoffel só dependem da primeira forma quadrática, concluímos que a curvatura gaussiana depende apenas da primeira forma quadrática. \square

A equação 4.18 da demonstração do Teorema Egregium de Gauss:

$$-EK = \left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \left(\Gamma_{12}^2\right)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2$$

é dita ***Equação de Gauss***.

As equações 4.16 e 4.17

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

são chamadas ***Equações de Codazzi-Mainardi***.

As equações equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi são ditas ***Equações de Compatibilidade***.

Observações:

- (1) Como vimos, a curvatura gaussiana é definida a partir da primeira e segunda formas quadráticas, mas o teorema acima afirma que, na verdade, a curvatura gaussiana depende apenas da primeira forma quadrática. Como consequência, superfícies isométricas possuem mesma curvatura gaussiana.
- (2) A recíproca da propriedade descrita em (1) não é verdadeira, isto é, duas superfícies podem possuir mesma curvatura gaussiana e não serem isométricas.
- (3) A recíproca descrita em (2) é verdadeira se a curvatura gaussiana das superfícies forem iguais e constantes.
- (4) Como as curvaturas gaussianas do plano e da esfera são diferentes, temos que seus coeficientes da primeira forma fundamental serão diferentes e, conseqüentemente, o plano e a esfera não são isométricos, mesmo restringindo seus domínios. O mesmo com o toro e a esfera, toro e cilindro, esfera e cilindro, plano e toro, esfera e cone, etc.

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS SUPERFÍCIES

O Teorema Fundamental das Superfícies é o análogo dos Teoremas Fundamentais das Curvas no Plano e no Espaço. No caso das curvas, vimos que dadas as funções curvatura e torção (no caso espacial), existe uma curva que possui a curvatura e torção dadas. No caso das superfícies, dadas os coeficientes das duas formas quadráticas temos, sob certas condições, a existência de uma superfície que possui as formas quadráticas dadas.

Teorema 4.2 *Sejam E, F, G, e, f, g funções reais diferenciáveis definidas em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, tais que $E, F, EG - F^2 > 0$. Se E, F, G, e, f, g satisfazem as Equações de Compatibilidade, então:*

- (a) *Existe uma superfície parametrizada regular $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que E, F, G são os coeficientes da primeira forma quadrática de S e e, f, g são os coeficientes da segunda forma quadrática de S .*
- (b) *Se S e \bar{S} são duas superfícies satisfazendo (a), então existe um movimento rígido M de \mathbb{R}^3 (uma isometria de \mathbb{R}^3) tal que $\bar{S} = M \circ S$.*

A demonstração do Teorema Fundamental das Superfícies envolve conceitos de equações diferenciais parciais e está além dos objetivos deste trabalho. No entanto, sua demonstração pode ser encontrada em [3], páginas de 375 a 379.

TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\alpha : [0, l] \rightarrow S(U)$ curva parametrizada. Dizemos que α é **curva simples, fechada e regular por partes** quando:

- (i) $\alpha(0) = \alpha(l)$. (condição de fechamento de α)
- (ii) se $t_1, t_2 \in [0, l]$, $t_1 \neq t_2$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$. (condição de simplicidade de α)
- (iii) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$ de $[0, l]$ tal que α é regular em cada (t_i, t_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$. (condição de regularidade por partes)

Cada $\alpha(t_i)$ na definição acima é chamado *vértice* de α e $\alpha((t_i, t_{i+1}))$ é chamado de *arco regular* de α .

Uma região $R \subset S(U)$ (R é aberto conexo de S unido com sua fronteira) é dita **região simples** se R é homeomorfa a um disco e sua fronteira é uma curva α simples fechada e regular por partes.

Dizemos que α é *orientada positivamente* quando em cada $\alpha'(t)$ temos uma base $\{\alpha'(t), h(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}S$ com a mesma orientação de $\{S_u(u(t), v(t)), S_v(u(t), v(t))\}$ é tal que $h(t)$ “aponta para dentro de R ”, isto é, para qualquer curva $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow R \subset S(U)$ com $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, temos $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$.

Denotemos $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'(t_i)^-$ por vetor tangente a α em t_i pela esquerda e $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'(t_i)^+$ por vetor tangente a α em t_i pela direita. Seja θ_i a medida em radianos do ângulo entre $\alpha'(t_i)^-$ e $\alpha'(t_i)^+$, $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$, orientado conforme a orientação de S .

Chamamos θ_i de *ângulo externo* de α no vértice $\alpha(t_i)$.

No caso de $|\theta_i| = \pi$, isto é, o ponto $\alpha(t_i)$ é uma *cúspide*, a orientação de θ_i é dada pela orientação de $\bar{\theta}$, ângulo entre $\alpha'(t_i - \varepsilon)$ e $\alpha'(t_i + \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, isto é, $\alpha(t_i - \varepsilon) \in \alpha((t_{i-1}, t_i))$ e $\alpha(t_i + \varepsilon) \in \alpha((t_i, t_{i+1}))$.

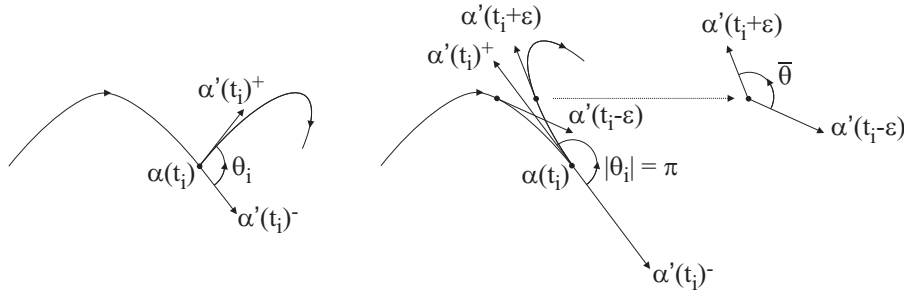


FIGURA 67: Definindo ângulo externo em vértices de curvas.

A demonstração da versão local do Teorema de Gauss-Bonnet pode ser encontrada em [3] páginas 322 e 323.

Teorema 4.3 (Gauss-Bonnet - versão local) *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $R \subset S(U)$ uma região simples com fronteira α orientada positivamente e parametrizada pelo comprimento de arco. Sejam $\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k)$ vértices de α e $\theta_0, \dots, \theta_k$ as medidas de seus respectivos ângulos externos em radianos. Então:*

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) dt + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

sendo k_g a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e K a curvatura gaussiana de S .

Observação: a integral de superfície $\iint_R K d\sigma$ é dada por

$$\iint_R K d\sigma = \iint_{S^{-1}(R)} K(u, v) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv.$$

Exemplo 4.30 Se R for uma região limitada por um triângulo geodésico, então $k_g(t) = 0$, $\forall t \in (t_i, t_{i+1})$ e $\sum_{i=0}^2 \theta_i = \sum_{i=0}^2 (\pi - p_i)$ sendo p_i as medidas dos ângulos internos do triângulo. Logo, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, temos

$$\iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^2 (\pi - p_i) = 2\pi.$$

(i) Se $K(u, v) = 0$, $\forall (u, v) \in U$, isto é, S é uma região planar, temos que R é um triângulo euclidiano. Assim, temos

$$\sum_{i=0}^2 (p_i) = \pi$$

que é a soma dos ângulos internos do triângulo.

(ii) Se $K(u, v) = 1$, $\forall (u, v) \in U$, isto é, S é a esfera de raio 1, então $\iint_R 1 d\sigma$ é a área de R , ou seja,

$$A(R) = \left(\sum_{i=0}^2 p_i \right) - \pi.$$

(iii) Se $K(u, v) = -1$, $\forall (u, v) \in U$, isto é, S é um pseudo-esfera, então a área de R é dada por:

$$A(R) = \pi - \left(\sum_{i=0}^2 p_i \right).$$

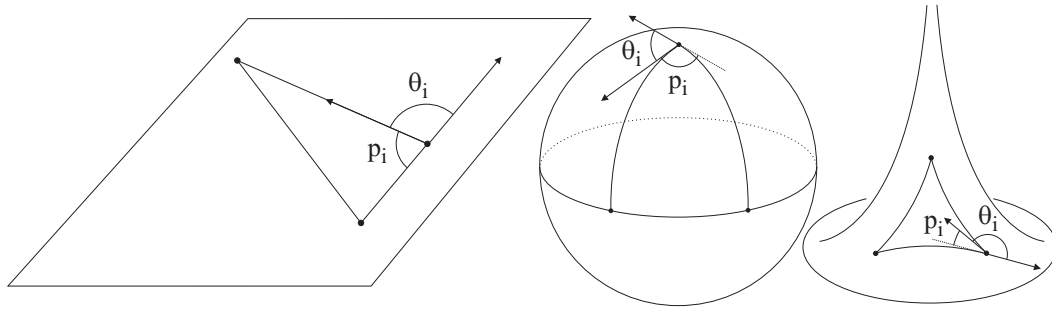


FIGURA 68: O Teorema de Gauss-Bonnet e a área de triângulo geodésicos.

Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Seja $R \subset S(U)$ conexo. Dizemos que R é uma **região regular** quando R é compacta e sua fronteira é uma reunião finita de curvas fechadas simples e regulares por partes que não se intersectam.

Observação: Uma superfície regular S compacta e conexa é considerada como sendo uma região regular com fronteira vazia.

Uma região simples com apenas três vértices e ângulos externos $\theta_i \neq 0$; $i = 1, 2, 3$; é chamada de *triângulo*. Uma triangulação de uma região regular $R \subset S(U)$ é uma família finita \mathcal{T} de triângulos T_i ; $i = 1, 2, \dots, n$; tal que:

(i) $\bigcup_{i=1}^n T_i = R.$

(ii) se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .

Dada uma triangulação \mathcal{T} de uma região regular $R \subset S(U)$ de uma superfície S , seja F o número de triângulo (faces), A o número de arcos regulares dos triângulos (arestas) e V o número de vértices da triangulação. O número $\chi = V - A + F$ é chamado de **característica de Euler-Poincaré** da triangulação. Em topologia, prova-se que χ depende apenas de R . Logo, podemos identificar $\chi = \chi(R)$. A demonstração da versão global do Teorema de Gauss-Bonnet e corolários pode ser encontrada em [3] páginas 328 a 331.

Teorema 4.4 (Gauss Bonnet - versão global) *Sejam $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $R \subset S$ uma região regular com fronteiras c_1, \dots, c_n , curvas simples, fechadas, regular por partes e parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que cada c_i está orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ as medidas dos ângulos externos dos vértices das curvas c_i . Então:*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(t) dt + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=0}^p \theta_j = 2\pi \chi(R).$$

sendo $\chi(R)$ a característica de Euler-Poincaré da região regular R .

Corolário 4.1 *Se R é uma região simples de S , então*

$$\int_C k_g(t) dt + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=0}^p \theta_j = 2\pi,$$

sendo $\theta_1, \dots, \theta_p$ as medidas dos ângulos externos dos vértices da curva C , fronteira de R .
(ou seja, se R é uma região simples, então o teorema global se restringe ao teorema local)

Corolário 4.2 *Se S é uma superfície compacta e orientável, então:*

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi \chi(S),$$

que é chamada de curvatura integral ou curvatura global de S .

Observações:

(i) Se S for homeomorfa a uma esfera, temos $\iint_S K d\sigma = 4\pi$.

(ii) Se S for uma esfera de raio r , então $K(u, v) = \frac{1}{r^2}$ e $\iint_S K d\sigma = \frac{1}{r^2} \iint_S 1 d\sigma = 4\pi$, o que implica que a área da esfera de raio r é $4\pi r^2$.

Referências Bibliográficas

- [1] ARAUJO, P. V. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática Universitária). 1998.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda. 1974.
- [3] CARMO, M. P. DO. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Textos Universitários). 2005.
- [4] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3^a. ed. Campinas: Editora da Unicamp. 2002.
- [5] GRAUSTEIN, W. C. *Differential Geometry*. New York: Dover Publications, Inc. 1966.
- [6] GUGGENHEIMER, H. W. *Differential Geometry*. New York: Dover Publications, Inc. 1977.
- [7] KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. New York: Dover Publications, Inc. 1991.
- [8] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 3^a. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática Universitária). 1999.
- [9] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol. 1. 12^a. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática Universitária). 2000.
- [10] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol. 2. 9^a. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática Universitária). 2000.
- [11] LIPSCHULTZ, M. *Differential Geometry*. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc. (Schaum's Outlines of Theory and Problems) 1969.
- [12] LIPSCHUTZ, S. *Topologia Geral*. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda. (Coleção Schaum) 1971.
- [13] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2nd. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc. 2000.
- [14] NETTO, C. D. & LEAL, N. R. *Elementos de Geometria Diferencial*. 2^a. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda. 1978.
- [15] RODRIGUES, L. B. R. & AGUSTINI, E. "Um Texto Sobre Curvas Parametrizadas no Plano". *Famat em Revista*. N^o. 07. Setembro 2006. pp. 90-133.
- [16] RODRIGUES, L. B. R. & AGUSTINI, E. "Um Texto Sobre Superfícies Parametrizadas Regulares". *Famat em Revista*. N^o. 09. Outubro 2007. pp. 95-146.
- [17] STRUIK, D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*. 2^a. ed. New York: Dover Publications, Inc. 1961.
- [18] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Brasília: Editora da UnB. 1988.
- [19] www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/. Site de História da Matemática da Universidade de Saint Andrews-UK.

Índice Remissivo

Aplicação Normal de Gauss, 89

círculo, 11

círculo osculador de curva no plano, 37

característica de Euler-Poincaré, 118

cardióide, 18

catenóide, 79

centro de curvatura de curva no plano, 37

Chapéu de Sherlock, 103

ciclóide, 17

cilindro circular reto, 76

coeficientes da Primeira Forma Quadrática, 83

coeficientes da Segunda Forma Quadrática, 93

comprimento de arco de curva no espaço, 48

comprimento de arco de curva no plano, 19

cone circular reto, 75

curva convexa no plano, 34

curva diferenciável de classe C^∞ no espaço, 47

curva diferenciável de classe C^∞ no plano, 11

curva diferenciável de classe C^0 no espaço, 47

curva diferenciável de classe C^0 no plano, 11

curva diferenciável de classe C^k no espaço, 47

curva diferenciável de classe C^k no plano, 11

curva param. pelo compr. de arco no espaço, 48

curva param. pelo compr. de arco no plano, 20

curva parametrizada no espaço, 47

curva parametrizada no plano, 11

curva plana no espaço, 52

curva regular de classe C^k no espaço, 48

curva regular de classe C^k no plano, 15

curva regular fechada no plano, 39

curva regular por partes no espaço, 48

curva regular por partes no plano, 17

curva simples no espaço, 48

curva simples no plano, 17

curva simples, fechada e regular por partes, 116

curva suave no espaço, 47

curva suave no plano, 11

curvas congruentes no espaço, 68

curvas coordenadas, 79

curvatura de curva parametrizada pca no plano, 28

curvatura de curva pca no espaço, 53

curvatura gaussiana, 103

curvatura geodésica, 113

curvatura média, 103

curvatura normal, 95

curvaturas principais, 96

derivada covariante, 108

direções principais, 96

distância intrínseca, 87

Equação de Gauss, 115

Equações de Codazzi-Mainardi, 115

Equações de Compatibilidade, 115

esfera, 76

espiral logarítmica, 15

evoluta de curva no plano, 38

função componente de curva no espaço, 47

função componente de curva no plano, 11

função comprimento de arco de curva no espaço, 48

função comprimento de arco de curva plana, 20

função coordenada de curva no espaço, 47

função coordenada de curva no plano, 11

geodésica, 108

hélice, 61

hélice cônica, 50

hélice circular, 49

hipérbole, 12

isometria, 87

isometria no espaço, 66

isometria que preserva orientação no espaço, 69

meridianos, 77

mudança de parâ. inverte orient. no espaço, 49

mudança de parâ. inverte orientação no plano, 23

mudança de parâ. preserva orient. no espaço, 49

mudança de parâ. preserva orient. no plano, 23

mudança de parâmetros, 81

mudança de parâmetros de curva no espaço, 48

mudança de parâmetros de curva no plano, 21

operador linear auto-adjunto, 89

orientação de curva parametrizada no espaço, 49

- orientação de curva parametrizada no plano, 23
- parabolóide circular, 75
- parabolóide hiperbólico, 81
- parabolóide osculador, 98
- paralelos, 77
- plano, 76
- plano normal a curva no espaço, 51
- plano osculador a plano no espaço, 51
- plano retificante a curva no espaço, 51
- plano tangente, 80
- ponto elíptico, 99
- ponto hiperbólico, 99
- ponto parabólico, 99
- ponto planar, 99
- Primeira Equação de Frenet curva no espaço, 54
- Primeira Equação de Frenet curva no plano, 28
- Primeira Forma Quadrática, 83
- raio de curvatura de curva no plano, 36
- Referencial de Frenet-Serret de curva no plano, 27
- referencial móvel de curva no plano, 27
- região regular, 117
- região simples, 116
- reparam. pelo compr. de arco curva no plano, 24
- reparametrização de curva no espaço, 48
- reparametrização de curva no plano, 21
- reparametrização pca de curva no espaço, 49
- reta normal principal a curva no espaço, 51
- reta tangente a curva no espaço, 48
- reta tangente a curva no plano, 15
- rotação por ângulo no plano, 41
- Símbolos de Christoffel, 110
- Segunda Equação de Frenet curva no espaço, 57
- Segunda Equação de Frenet curva no plano, 29
- Segunda Forma Quadrática, 93
- Sela de Macaco, 107
- singularidade em curva no espaço, 48
- singularidade em curva no plano, 17
- singularidade essencial em curva no espaço, 48
- singularidade essencial em curva no plano, 17
- superfície de revolução, 77
- superfície mínima, 104
- superfície parametrizada diferenciável, 73
- superfície regular, 73
- superfície simples, 86
- superfícies isométricas, 86
- Terceira Equação de Frenet curva no espaço, 54
- torção de curva no espaço, 54
- toro circular, 78
- traço de curva no espaço, 47
- traço de curva no plano, 11
- transformação ortogonal no espaço, 66
- translação por vetor no plano, 41
- tratriz, 16
- Triedro de Frenet para curva no espaço, 51
- Triedro Móvel para curva no espaço, 51
- vértice de uma curva no plano, 39
- vetor binormal a curva no espaço, 51
- vetor normal principal a curva no espaço, 51
- vetor tangente a curva no espaço, 48
- vetor tangente a curva no plano, 15
- vetores principais, 96