Geodésicas:

Definição 1:

Seja $X(u,v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$ é uma geodésica da superfície X se, para cada $t\in I$, $\alpha''(t)$ é um vetor normal a X em $u(t)$ e $v(t)$.

Proposição 1:

Uma curva geodésica $\alpha(t)$ em uma superfície possui $\|\alpha'(t)\|$ constante.

Proposição 2:

Seja $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$, $t\in I\subset\mathbb{R}$, uma curva regular de uma superfície $X(u,v)$. Então, α é uma geodésica de X se, e somente se, as funções $u(t)$ e $v(t)$ satisfazem o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} u''+(u')^2\Gamma_{11}^{1}+2u'v'\Gamma_{12}^{1}+(v')^2\Gamma_{22}^{1}=0 \\ v''+(u')^2\Gamma_{11}^{2}+2u'v'\Gamma_{12}^{2}+(v')^2\Gamma_{22}^{2}=0 \end{cases}$$

Proposição 3:

Seja $X(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular. Para todo $q \in \mathcal{U}$ e para todo vetor não-nulo $w \in T_q X$, existe $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, da superfície X, tal que $(u(0), v(0)) = q$ e $\alpha'(t) = w$.

Demonstrações:

Proposição 1:

Derivando $|\alpha'(t)|^2$ em relação a t, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}|\alpha'(t)|^2 = \frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle.$$

Como a curva α é uma geodésica, então o vetor $\alpha''(t)$ é perpendicular à superfície no ponto $\alpha(t)$, isto é, o vetor $\alpha''(t)$ é perpendicular a $\alpha'(t)$, portanto

$$2\langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle = 0.$$

Logo, $|\alpha'(t)|$ é uma constante. $\blacksquare$

Proposição 2:

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)) \Rightarrow \alpha' = u'X_u + v'X_v$$

$$\Rightarrow \alpha'' = u''X_u + (u')^2 X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2 X_{vv} + v''X_v.$$

Como $X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN$,

$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN$, $X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN$, então

$$\alpha'' = u'' X_u + (u')^2 \left[\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \right] +$$

$$2u'v' \left[\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \right] +$$

$$(v')^2 \left[\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \right] + v'' X_v$$

$$= \left[u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 \right] X_u +$$

$$\left[v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 \right] X_v +$$

$$\left[(u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g \right] N.$$

Por definição, $\alpha(t)$ é uma geodésica de X se, $\forall t \in I$ $\alpha''(t)$ não tem componente tangencial à superfície. Portanto, os coeficientes de X_u e X_v em $\alpha''(t)$ devem ser nulos.

$\Leftarrow$) Por outro lado, se os coeficientes de X_u e X_v são nulos, então

$$\alpha''(t) = \left[(u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g \right] N. \blacksquare$$

Proposição 3:

Se $q = (u_0, v_0)$, consideremos $w = aX_u(q) + bX_v(q)$.

Pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, existem $\varepsilon > 0$ e funções $u(t)$, $v(t)$ definidas em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ satisfazendo o sistema da proposição anterior, com as condições iniciais fixadas $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $u'(0) = a$ e $v'(0) = b$. Além disso, tais funções são únicas. Segue-se da proposição anterior que a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica de X tal que $(u(0), v(0)) = q$ e $\alpha'(0) = w$. $\blacksquare$

Observações:

- Como os símbolos de Christoffel só dependem da primeira forma fundamental, então, da definição de superfícies isométricas e do fato de que as geodésicas são caracterizadas pelo sistema de equações da proposição 2, se duas superfícies são isométricas, então as geodésicas de uma superfície são levadas em geodésicas da outra superfície, através de isometria;
- As geodésicas são curvas que podem ser caracterizadas por serem o caminho mais curto na superfície entre quaisquer dois pontos;
- A reparametrização de uma geodésica, pelo comprimento de arco, continua sendo geodésica;
- Toda reta contida em uma superfície é uma geodésica da superfície;
- Todo círculo máximo, parametrizado pelo

comprimento de arco, é uma geodésica da esfera de raio $r > 0$;

- No cilindro, as geodésicas são: os meridianos, os paralelos e as hélices.