Л12

<u>Преходни процеси в линейни електрически вериги</u>

(06.12.2022г.)

Лектор: **<u>проф. д-р Илона Ячева</u>**

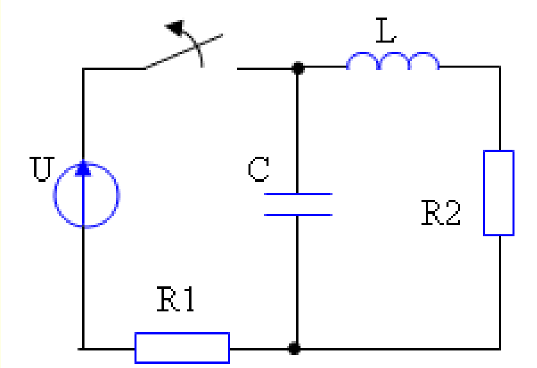
кат. "Теоретична Електротехника",
Технически Университет-София

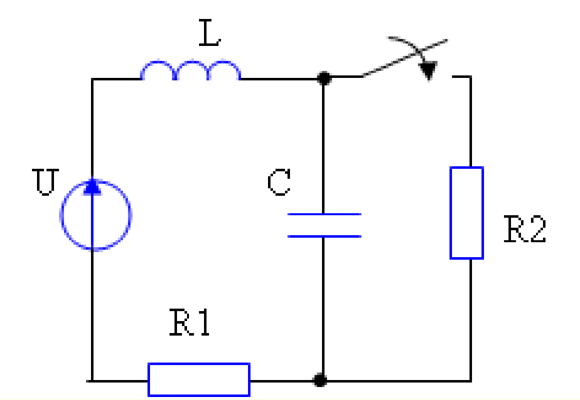
<u>**Преходни процеси в линейни ел.вериги**</u>

<u>**Преходен процес**</u>- процес, който възниква и се развива при <u>**прехода**</u> на <u>ел.верига от едно стационарно състояние в друго</u>.

Този преход може да е **следствие** от:

- включване или изключване на източници на енергия
- промяна в характеристиките на действащите електродвижещи величини
- изменение в топологията на веригата
- промяна в големините на параметрите на отделните елементи





<u>**Комутация**</u> - Самият момент на промяна се нарича комутация

Преходни процеси в линейни ел.вериги

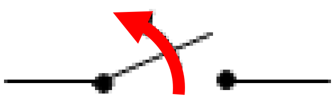
Преходен процес- процес, който възниква и се развива при **прехода** на ел.верига от едно стационарно състояние в друго.

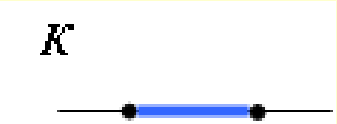
Комутация - Самият момент на промяна се нарича комутация.

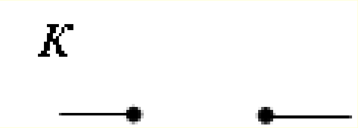
За осъществяването на комутацията в електрическите вериги се използва **ключ** – идеален елемент, който:

преди комутация

след комутация

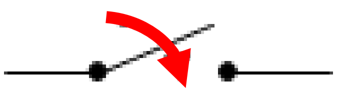
- се отваря 

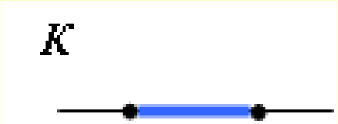




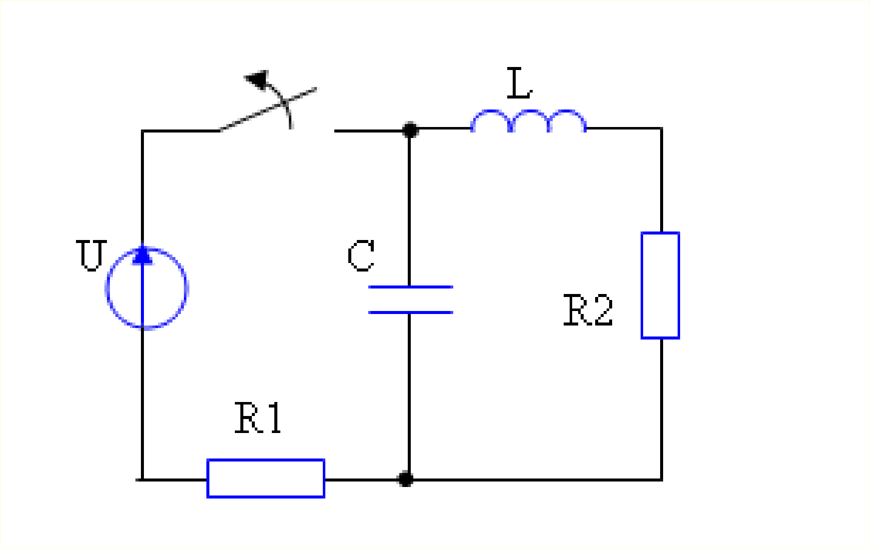
преди комутация

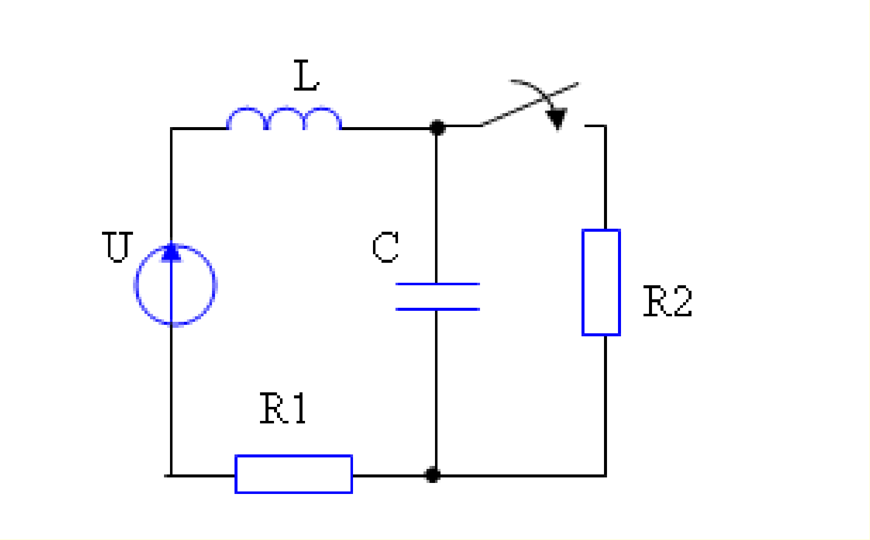
след комутация

- се затваря 



<u>Преходният процес не се извършва мигновено,</u> поради запасената във веригата ел.магнитна енергия.





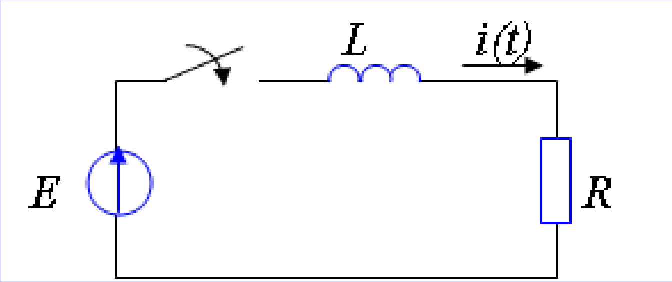
- **Теоретично** - този процес продължава <u>безкрайно дълго</u>.
- **Практически** - протича <u>много бързо</u> - от части от секундата (десети, стотни и дори милионни) и рядко до няколко секунди.

Процесите, протичащи във веригата по време на преходния процес се описват със ***система уравнения по законите на Кирхоф***, съответстваща на топологията на веригата **след комутацията.**

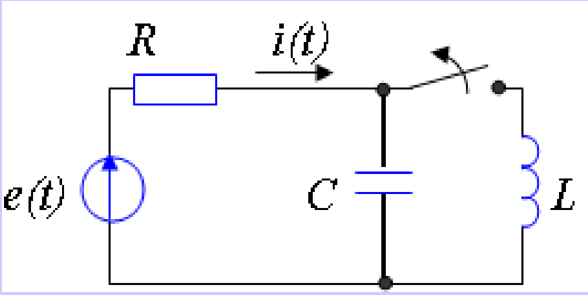
Елемент	Напрежение	ток
R	$u_R(t) = R.i_R(t)$	$i_R(t) = \dfrac{u_R(t)}{R}$
L	$u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$	$i_L(t) = \dfrac{1}{L}\int u_L(t)dt$
C	$u_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i_C(t)d$	$i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$

Ред веригата на ДУ, описващо преходния процес

- Верига от ***първи ред***

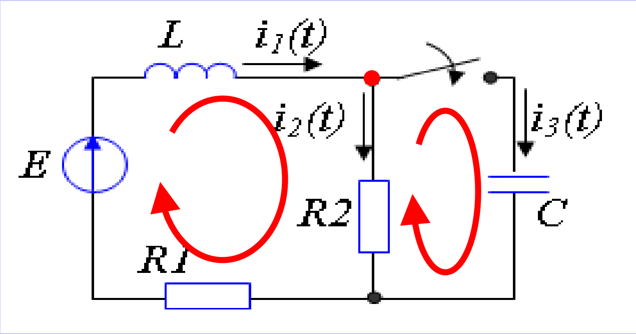


$$R.i(t)+L\frac{di}{dt}=E$$



$$R.\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=e'(t)$$

- Верига от ***втори ред***



$$R_2LC\frac{d^2i_1}{dt^2}+(R_1R_2C+L)\frac{di_1}{dt}+(R_1+R_2)i_1(t)=0$$

<u>Всяка величина (ток и напрежение)</u> <u>по време на преходния процес</u> се определя като сума от две компоненти – свободна и стационарна

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{ст}(t)$$

пълното решение на **<u>хомогенното ДУ</u>**

<u>Свободен процес</u>, *който се развива в резултат* ***на предварително запасената енергия*** *(източниците на енергия се приемат за нула)*

частното решение на **<u>нехомогенното ДУ</u>**

Стационарен процес, *който се установява във веригата след като* ***измененията в режима вече са приключили***

- *Компонентата се определя от корените на* ***<u>характеристичното уравнение</u>****, което съответства на хомогенното ДУ.*

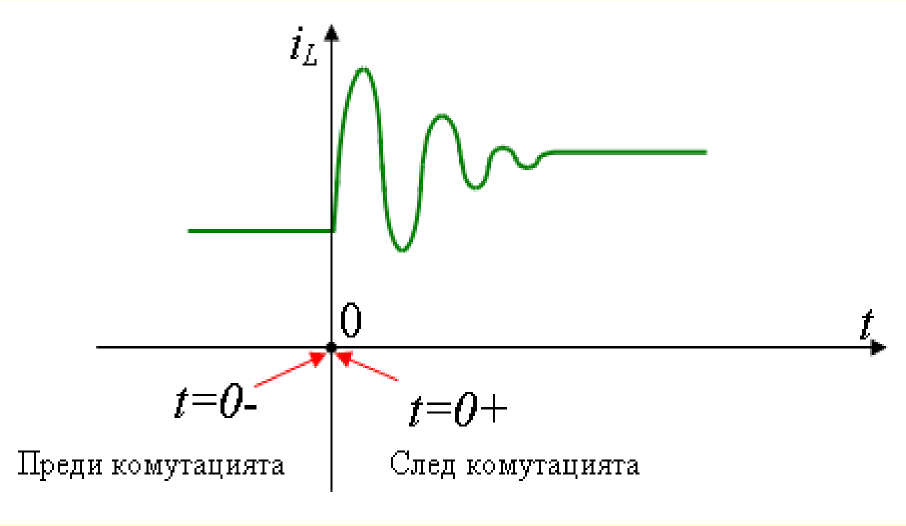
- *Компонентата се определя от* ***<u>анализа на веригата дълго след</u>*** *комутацията.*

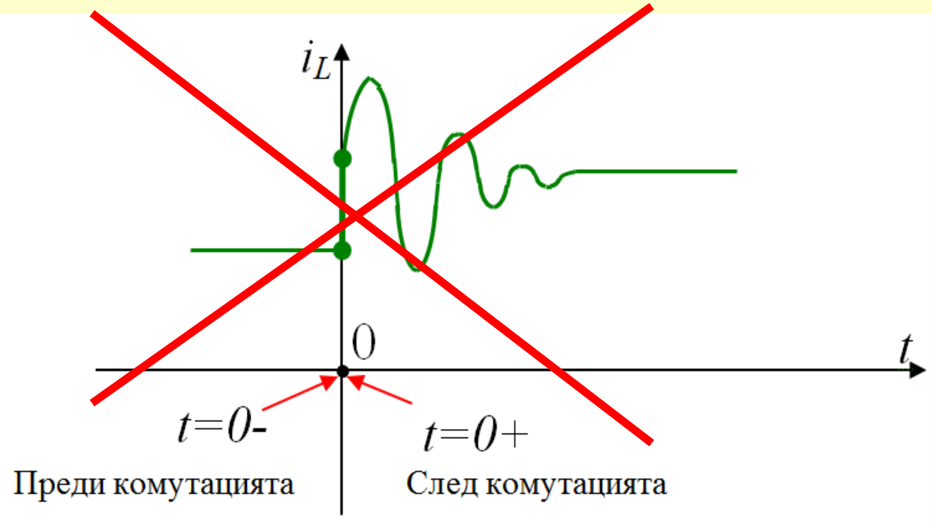
<u>**Закони на комутацията**</u>

- формулирани са при условие, че <u>енергийните източници във веригата не доставят безкрайно голяма мощност</u>.

<u>**I закон на комутацията:**</u> Токът през бобината <u>**не може**</u> да се изменя със скок в момента на комутацията

$$\boxed{i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0)} \Longleftarrow \textbf{ННУ}$$

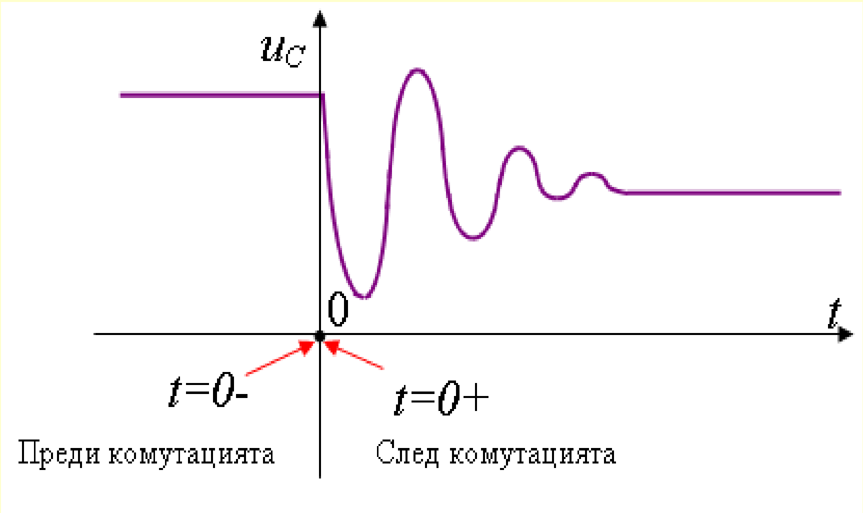


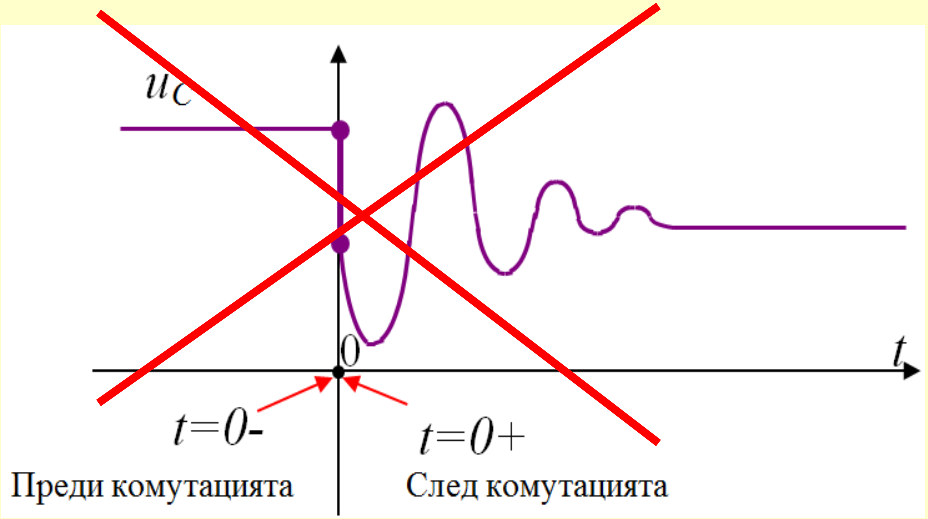


Закони на комутацията

II закон на комутацията: Напрежението на кондензатора **не може** да се изменя със скок в момента на комутацията

$$\boxed{u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0)} \Leftarrow \text{ННУ}$$



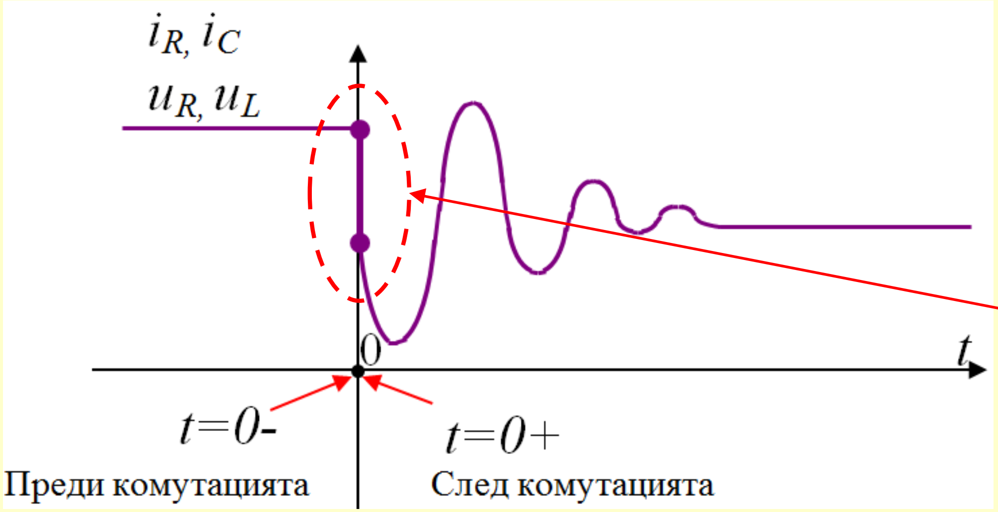


<u>Независими</u> начални условия (ННУ)

$$i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0)$$
$$u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0)$$

<u>ННУ не зависят</u> от структурата на веригата след комутацията, а се определят от ***<u>веригата преди комутацията</u>*** за момента t = **0-**

Зависими начални условия (ЗНУ) - всички останали токове и напрежения в момента нула (0+)



***Могат** да се изменят*

$$x(0-) \neq x(0+)$$

ЗНУ се определят чрез независимите начални условия на базата на системата ДУ записана за ***<u>веригата след комутация</u>*** в момента t = **0+.**

Класически метод за анализ на преходни процеси

1.Определят се ННУ

$$i_L(0-) = i_L(0+) = ?$$
$$u_C(0-) = u_C(0+) = ?$$

от веригата ***преди комутация***

2.Съставя се система ДУ, които описват преходните процеси във веригата ***след комутация***, като се използват законите на Кирхоф или някои друг от познатите методи

В тази система за напреженията или токовете на бобините и кондензаторите се записва съответно:

$$\left| \begin{array}{l} u_L = L\dfrac{di_L}{dt} \\ u_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C dt \end{array} \right. \qquad \text{или} \qquad \left| \begin{array}{l} i_L = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int u_L dt \\ i_C = C\dfrac{du_c}{dt} \end{array} \right.$$

3.Търси се общия интеграл на хомогенното ДУ, като се решава характеристичното уравнение:

$$\boxed{P(k) = 0}$$

4. Определя се свободната съставка $x_{св}(t)$ на търсения ток или напрежение

За верига от *първи* ред:

един реален **отрицателен** корен:

$$\boldsymbol{\kappa<0} \rightarrow \quad x_{св}(t) = A.e^{kt}$$

За верига от *втори* ред:

а) два различни реални **отрицателни** корена k_1 и k_2

$$x_{св}(t) = A_1.e^{k_1 t} + A_2.e^{k_2 t}$$

- Апериодичен процес

$$\boldsymbol{k_1<0}$$
$$\boldsymbol{k_2<0}$$

б) два равни реални **отрицателни** корена $k_1 = k_2 = k$

$$x_{св}(t) = (A_1 + A_2 t).e^{kt}$$

- Критично-апериодичен процес

$$\boldsymbol{k<0}$$

$$\alpha<0$$

в) два комплексно спрегнати корена с **отрицателна** реална част $k_{12} = \alpha \pm j\beta$

$$x_{св}(t) = (A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t).e^{\alpha t}$$

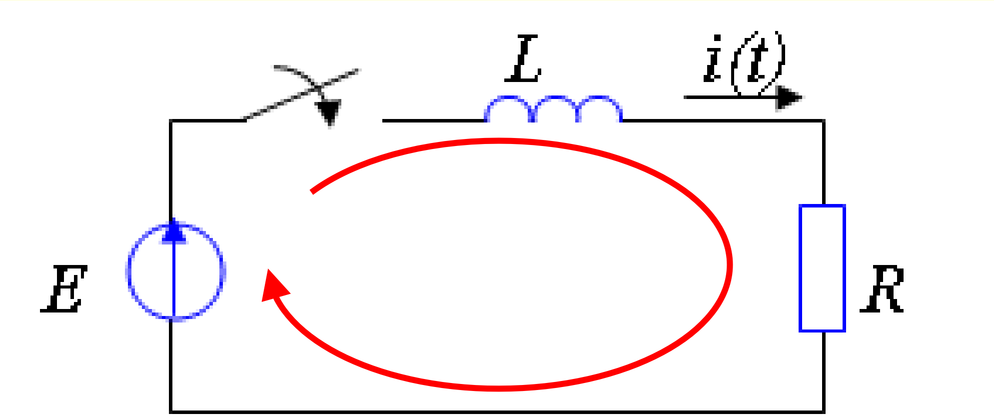
- Псевдо-периодичен процес

5. Определя се стационарната компонента $x_{ст}(t)$ на търсения ток или напрежение, като се анализира стационарния режим за веригата **дълго след комутацията** $\boxed{t \to \infty}$

6. Определя се търсената величина: $\boxed{x(t) = x_{ст}(t) + x_{св}(t)}$

7. Определят се интеграционните константи, участващи в израза на търсеното решение: *една константа* (A) *за верига от първи ред и две* $(A_1,\ A_2)$ *за верига от втори ред.* Определянето става на базата на началните условия.

Включване на RL двуполюсник към източник на постоянно напрежение



1.ННУ

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0A$$

2. Записваме системата ДУ

$$u_R(t) + u_L(t) = E$$

$$\boxed{R.i(t) + L\frac{di}{dt} = E}$$

3. Хомогенното ДУ има вида:

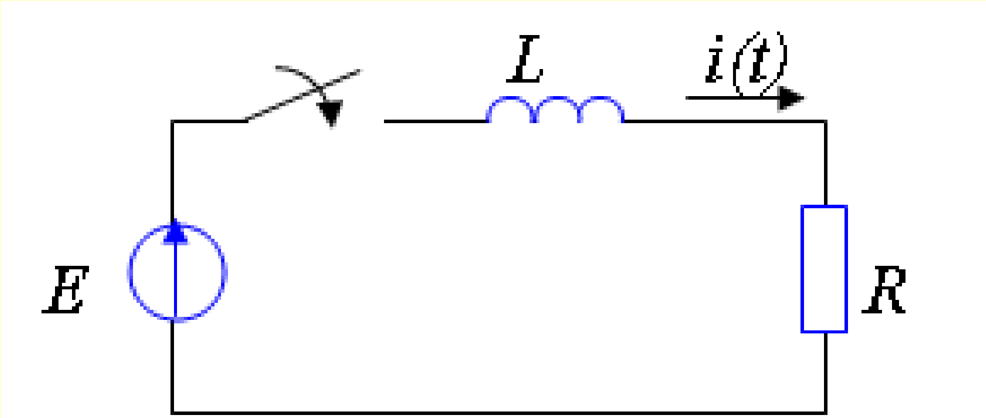
$$R.i(t) + L\frac{di}{dt} = 0$$

характеристичното уравнение:

$$R + L.k = 0$$

$$\boxed{k = \frac{-R}{L}}$$

Включване на RL двуполюсник към постоянно напрежение



$$k = \frac{-R}{L}$$

4. Определяме свободният ток във веригата:

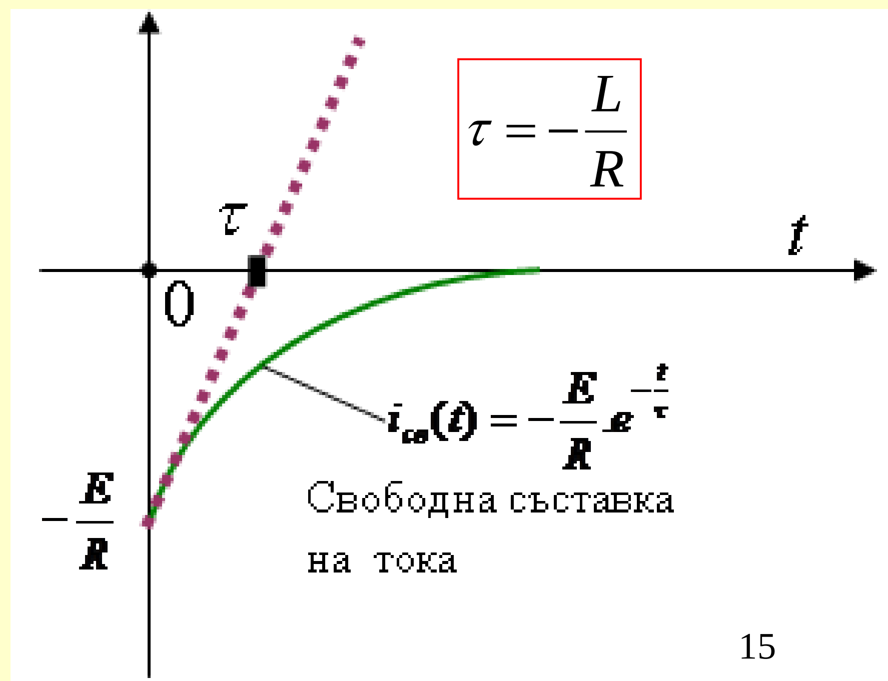
$$i_{св}(t) = A e^{\frac{-R}{L}t}$$

$$i_{св}(t) = A e^{\frac{-R}{L}t} = A e^{\frac{t}{\tau}}$$

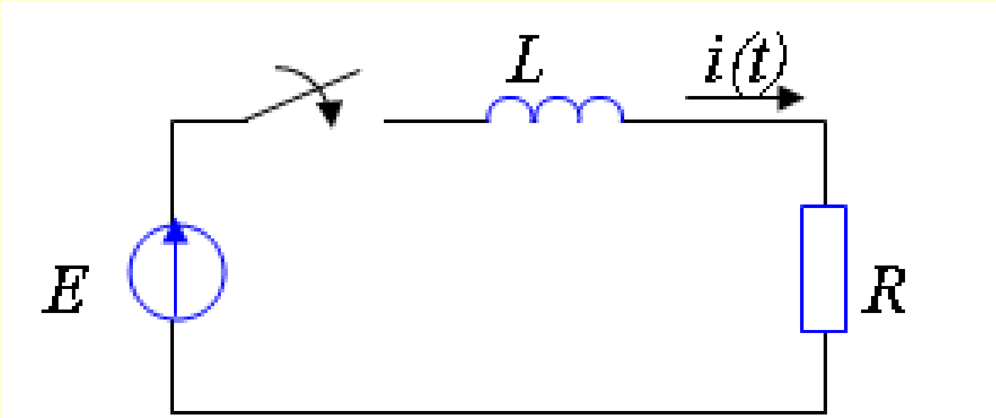
С τ се отбелязва величина, която се нарича ***константа на времето***.

Тя определя времето за което свободната съставка **намалява *е* пъти**.

$$\tau = -\frac{L}{R}$$



Включване на RL двуполюсник към постоянно напрежение



Свободният ток във веригата:

$$i_{св}(t) = A.e^{\frac{-R}{L}t}$$

Търсеният ток

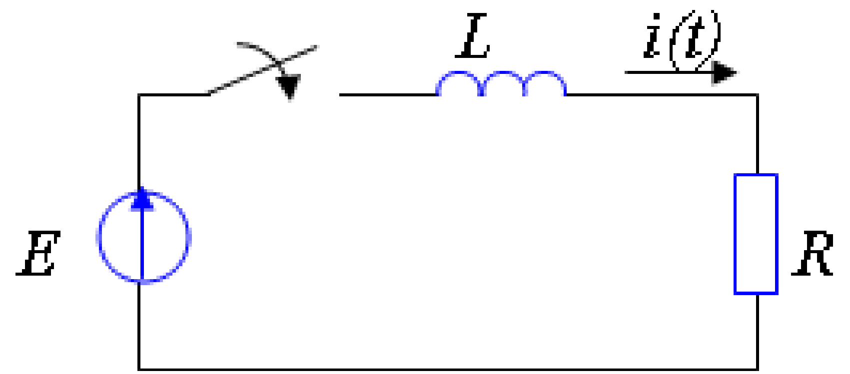
$$i(t) = i_{св}(t) + i_{ст}(t)$$

5. Определяме стационарният ток във веригата:

$$R.i(t) + \cancelto{0}{L\frac{di}{dt}} = E \quad \longrightarrow \quad i_{ст}(t) = \frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} + A.e^{\frac{-R}{L}t}$$

Включване на RL двуполюсник към постоянно напрежение



$$i(t) = \frac{E}{R} + A.e^{\frac{-R}{L}t}$$

7.Определяме неизвестната интеграционна константа ***A*** ***на базата на НУ***:

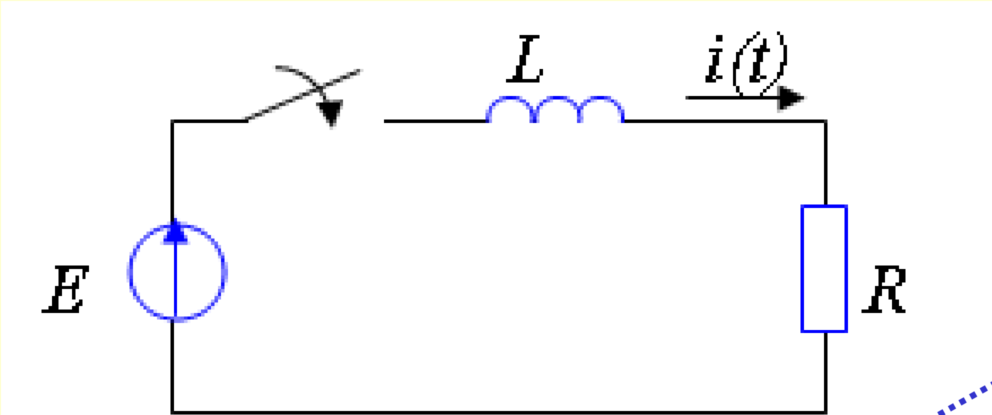
$$\boxed{i(0) = 0}$$

$$i(0) = 0 = \frac{E}{R} + A.e^{0}$$

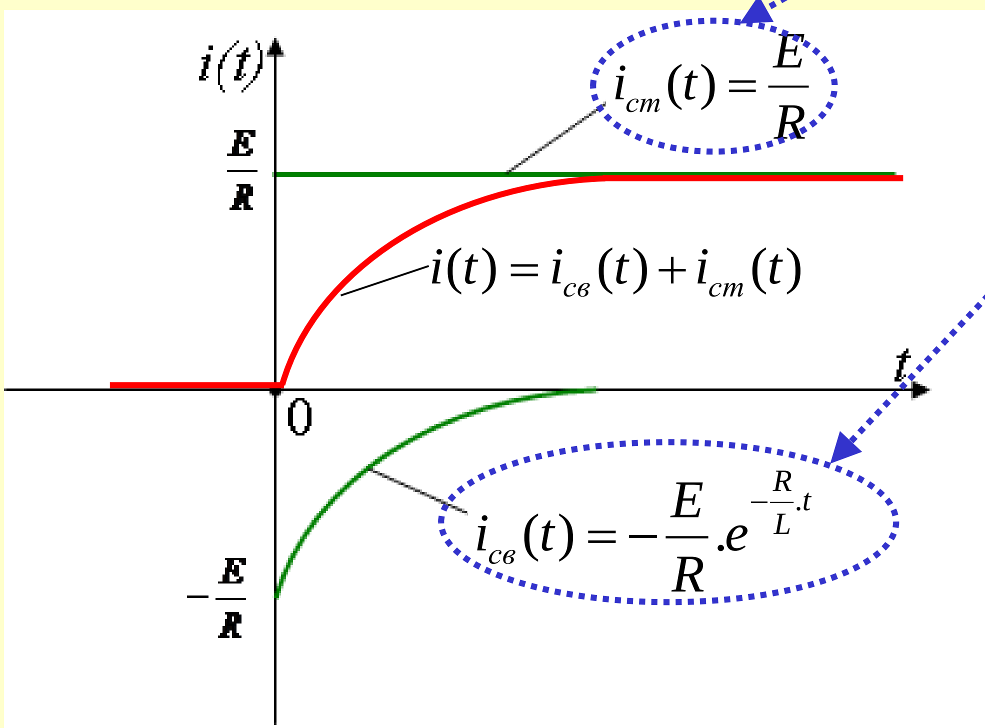
$$0 = \frac{E}{R} + A \quad \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}.e^{\frac{-R}{L}t}}$$

Включване на RL двуполюсник към постоянно напрежение

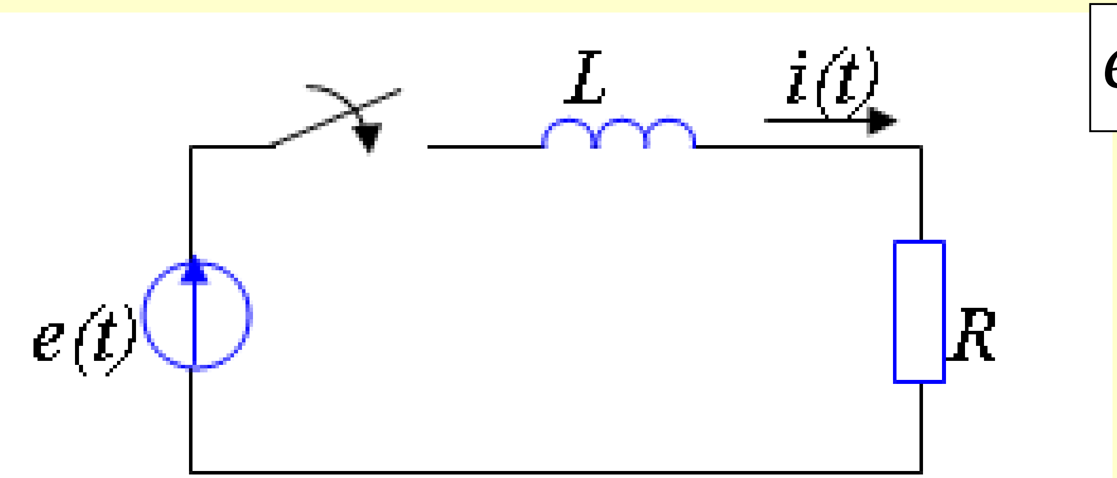


$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}.e^{\frac{-R}{L}t}$$



$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-R}{L}t}\right)}$$

Включване на RL двуполюсник към синусоидално напрежение



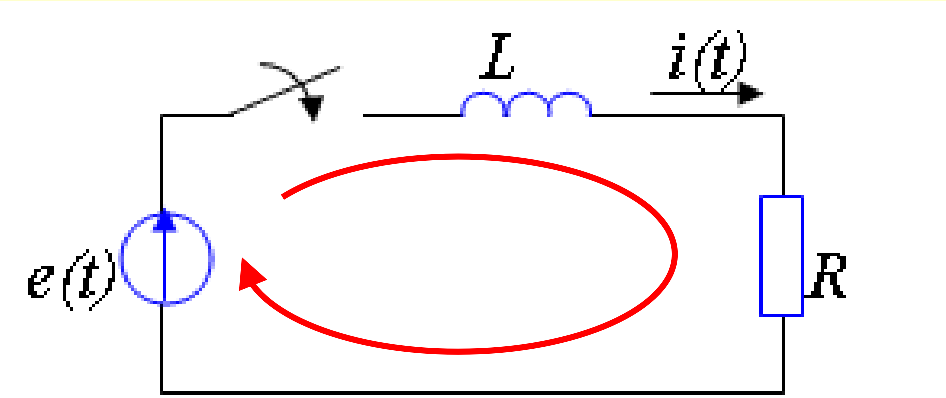
$$e(t) = e_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i(t) = ?$$

- Системата ДУ, описваща преходния процес, характеристичното уравнение, корените му и вида на свободния процес **не зависят от вида на източниците**. Те са **едни и същи** за постоянно, за синусоидално или произволно изменящо се напрежение.

- **Различен е стационарният режим**, който в разглежданата верига е синусоидален поради синусоидалния входен сигнал

Включване на RL двуполюсник към синусоидално напрежение



$$e(t) = e_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

1.ННУ

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0A$$

2. Записваме системата ДУ

$$R.i(t) + L\frac{di}{dt} = e(t)$$

3. Хомогенното ДУ има вида:

$$R.i(t) + L\frac{di}{dt} = 0$$

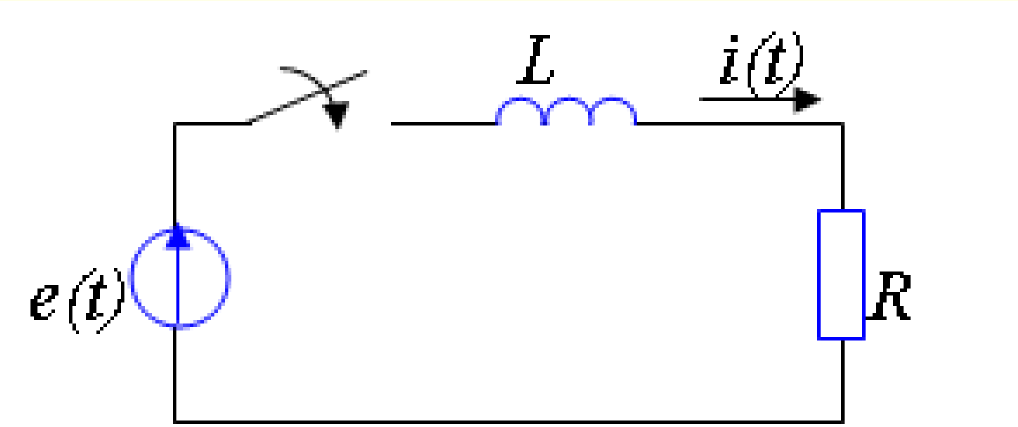
характеристичното уравнение:

$$R + L.k = 0$$

$$k = \frac{-R}{L}$$

4. Определяме свободният ток във веригата:

$$i_{св}(t) = A.e^{\frac{-R}{L}t}$$



$$\boxed{e(t) = e_m \sin(\omega t + \psi_u)}$$

5. Стационарният ток

$$\boxed{i_{cm}(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)}$$

$$i_m = \frac{e_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

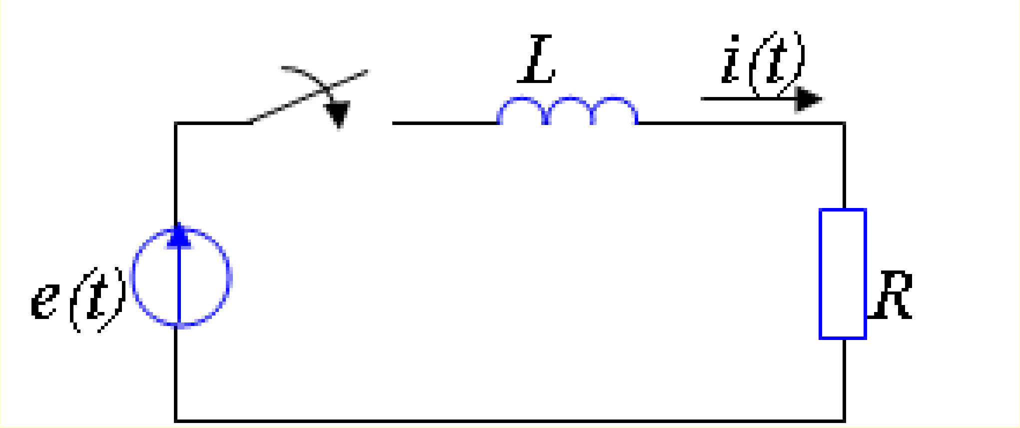
$$\varphi = arctg \frac{\omega L}{R}$$

Свободният ток във веригата:

$$\boxed{i_{cв}(t) = A.e^{\frac{-R}{L}t}}$$

Търсеният ток

$$i(t) = i_{cв}(t) + i_{cm}(t)$$



$$e(t) = e_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Стационарен ток

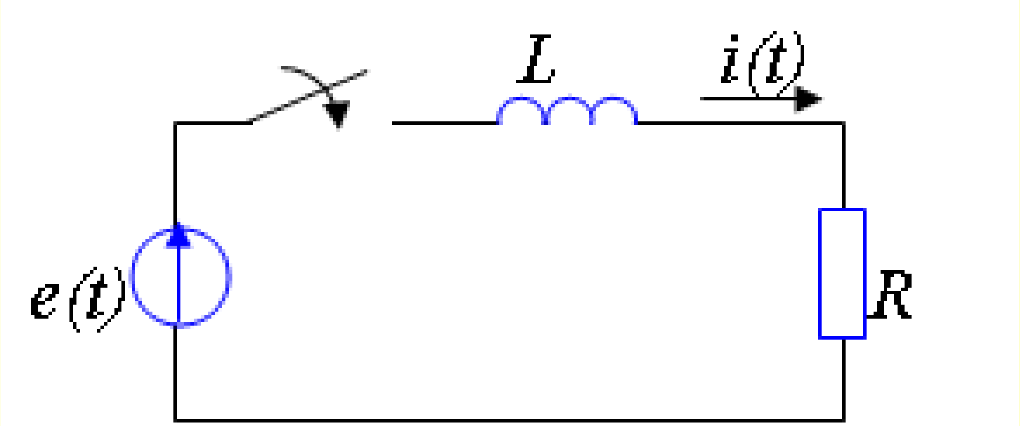
$$i_{cm}(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$$

Свободен ток

$$i_{cв}(t) = A.e^{\frac{-R}{L}t}$$

6. **Търсеният** ток $i(t) = i_{cm}(t) + i_{cв}(t)$

$$\boxed{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A.e^{\frac{-R}{L}t}}$$



$$e(t) = e_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

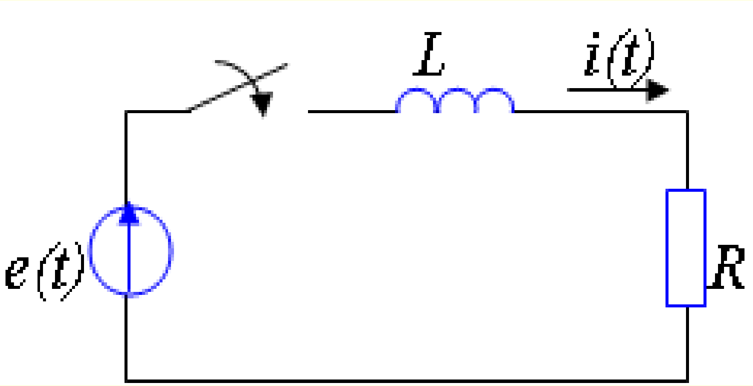
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A.e^{\frac{-R}{L}t}$$

7. Определяме неизвестната интеграционна константа *A* на базата на **НУ (*t = 0*)**:

$$i(0) = 0 \longrightarrow 0 = i_m \sin(\omega.0 + \psi_u - \varphi) + A.e^0$$

$$0 = i_m \sin(\psi_u - \varphi) + A \quad \Rightarrow A = -i_m \sin(\psi_u - \varphi)$$

Тогава свободният ток е $$i_{св}(t) = -i_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{\frac{-R}{L}t}$$



$$i(t) = i_{cm}(t) + i_{cв}(t)$$

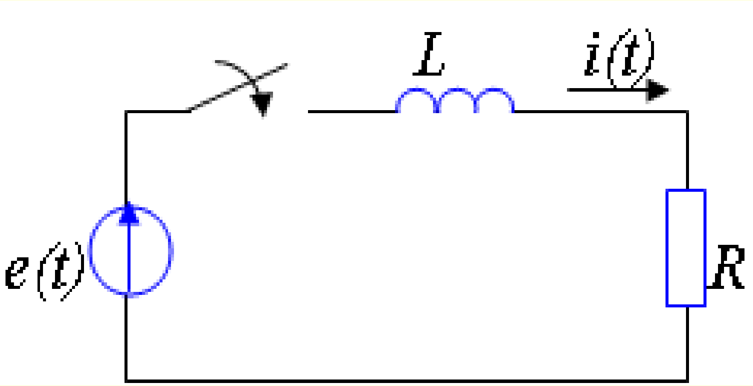
$$i_{cm}(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$$

$$i_{cв}(t) = -i_m \sin(\psi_u - \varphi)].e^{\frac{-R}{L}t}$$

$$\psi_u - \varphi = 0 \longrightarrow i_{cв}(t) = -i_m \sin(\cancel{\psi_u - \varphi}^{\,0})e^{\frac{-R}{L}t}$$

$$i_{cв} = 0$$

$$i(t) = i_{cm} = i_m[\sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$$



$$i(t) = i_{cm}(t) + i_{cв}(t)$$

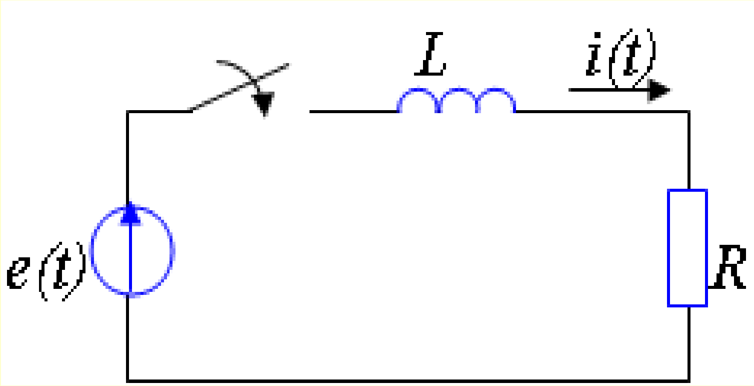
$$i_{cm}(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$$

$$i_{cв}(t) = -i_m \sin(\psi_u - \varphi)].e^{\frac{-R}{L}t}$$

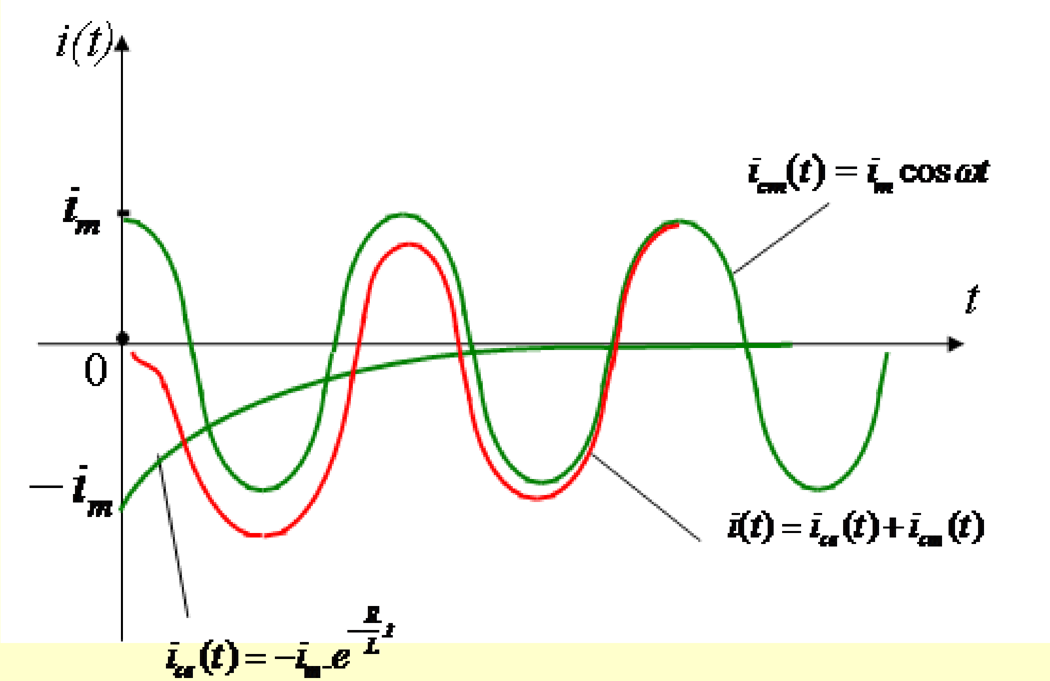
$$\psi_u - \varphi = \frac{\pi}{2} \longrightarrow i_{cв}(t) = -i_m \cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} e^{\frac{-R}{L}t} \longrightarrow i_{cв}(t) = i_{\max} = -i_m e^{\frac{-R}{L}t}$$

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - i_m \sin(\frac{\pi}{2}).e^{\frac{-R}{L}t}$$

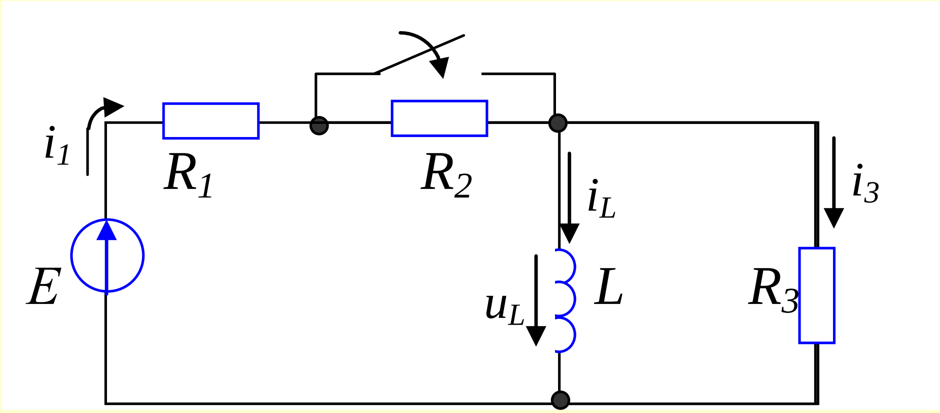
$$\boxed{i(t) = i_m \cos\omega t - i_m.e^{\frac{-R}{L}t}}$$



$$i(t) = i_m \cos\omega t - i_m . e^{\frac{-R}{L}t}$$



Пример 1: Преходен процес във верига от I ред



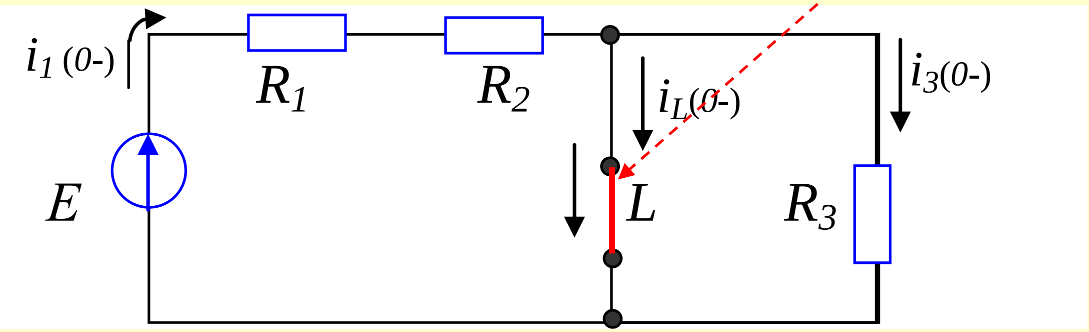
$R_1 = R_2 = 1\Omega$,
$R_3 = 3\Omega$
$L = 10mH$,
$E = 100V$ **=const**

$\boxed{i_L(t) = ?}$

1. ННУ-
$t = 0-$

$$\boxed{i_L(0-) = i_L(0+) = \mathbf{50A}}$$

Схема ***преди*** ***комутацията***

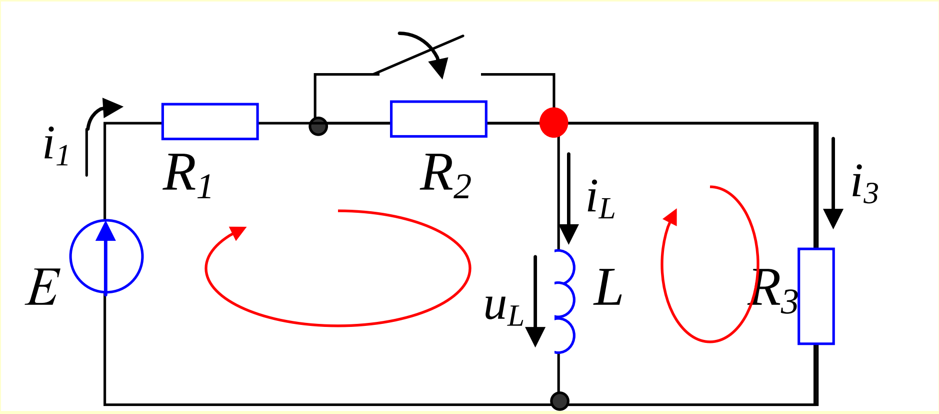


$$i_3(0-) = 0$$

$$\Rightarrow i_1(0-) = i_L(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{100}{1+1} = \frac{100}{2} = 50A$$

2. Система ДУ



$$\left|\begin{aligned} & i_1 - i_L - i_3 = 0 \\ & i_1.R_1 + u_L = E \\ & u_{R3} - u_L = 0 \end{aligned}\right.$$

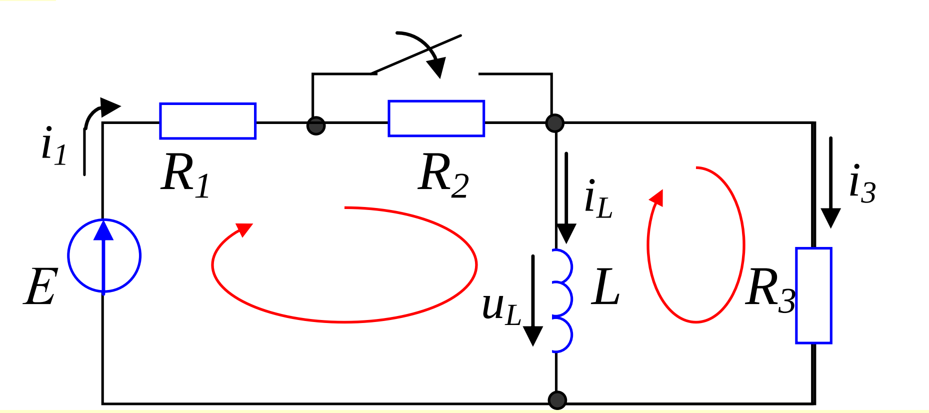
$$\boxed{\begin{aligned} & i_1 - i_L - i_3 = 0 \\ & i_1.R_1 + L\frac{\partial i_L}{\partial t} = E \\ & i_3.R_3 - L\frac{\partial i_L}{\partial t} = 0 \end{aligned}}$$

3.Характеристично уравнение - *то* е *едно и също за дадена верига*, независимо от това кой ток или кое напрежение трябва да се определи.

- Записва се като детерминантата от коефициентите пред неизвестните токове в системата се приравнява на нула. При това производните и интегралите се заменят както следва:

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{\partial x}{\partial t} \to k \\ & \int x dt \to \frac{1}{k} \end{aligned}}$$

2. Система ДУ



$$i_1 - i_L - i_3 = 0$$
$$i_1.R_1 + L\frac{\partial i_L}{\partial t} = E$$
$$i_3.R_3 - L\frac{\partial i_L}{\partial t} = 0$$

3.Характеристично уравнение:

$$\frac{\partial i}{\partial t} \to k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & Lk & 0 \\ 0 & -Lk & R_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1.\begin{vmatrix} Lk & 0 \\ -Lk & R_3 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} R_1 & Lk \\ 0 & -Lk \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1.R_3 Lk - (-1).R_1.R_3 + (-1).R_1.(-Lk) = 0$$

$$\boxed{(R_1 + R_3)Lk + R_1.R_3 = 0}$$

$$k = -\frac{R_1.R_3}{(R_1 + R_3)L} = -\frac{1.3}{(1+3).10.10^{-3}} = -\frac{3}{4.10^{-2}} = -75$$

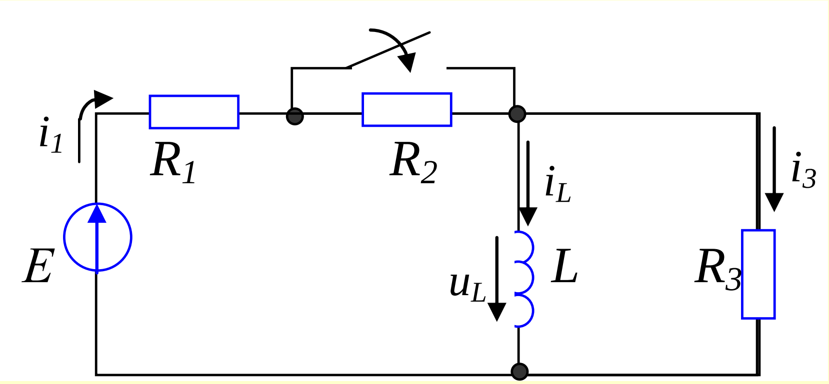
$$\boxed{k = -75}$$

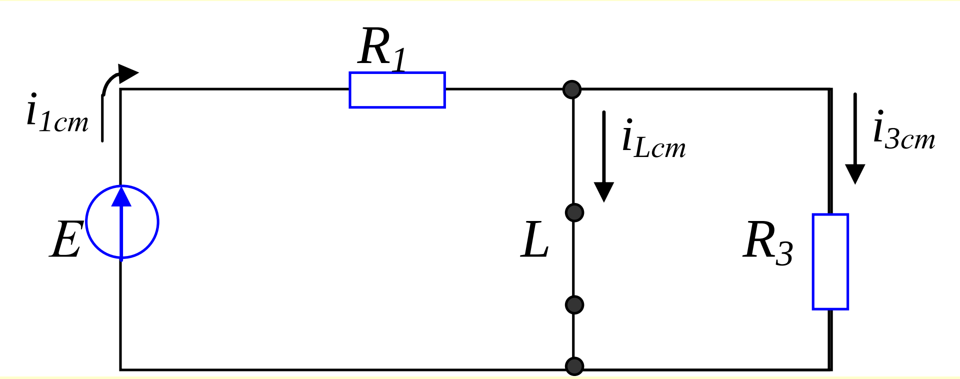
Търсеният ток е сума $i(t) = i_{ст}(t) + i_{св}(t)$

4. Определяне на свободната съставка на тока $\boxed{i_{св}(t) = ?}$

$$k = -75 \quad \Rightarrow \quad i_{L\,св}(t) = A.e^{kt} = A.e^{-75t}$$

5. Определяне на стационарния ток $\boxed{i_{Lст} = ?}$ $t \to \infty$





$i_{3ст} = 0$ $\quad \Rightarrow \quad i_{1ст} = i_{Lст}$ $\quad i_{1ст} = i_{Lст} = \dfrac{E}{R_1} = \dfrac{100}{1} = 100\,A$

$$\boxed{\Rightarrow \quad i_L(t) = i_{ст}(t) + i_{св}(t) = 100 + A.e^{-75t}}$$

6. Определяне на неизвестната константа A=?

*(от началните условия за **t=0+**)*

$$i_L(0+) = 50A$$

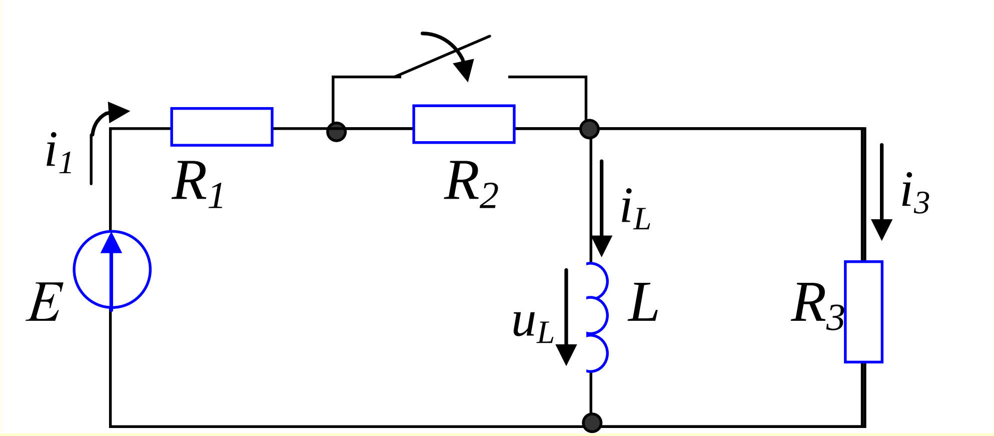
$$i_L(t) = 100 + A.e^{-75t}$$

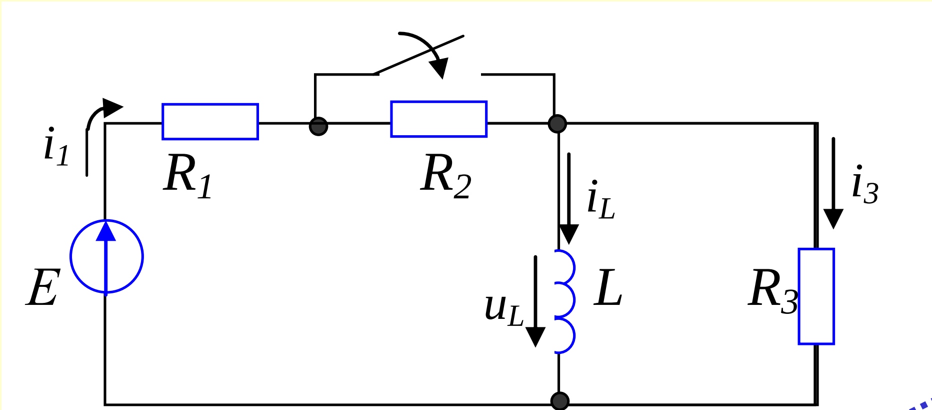
$$\Rightarrow i_L(0+) = 50 = 100 + A.e^{0} = 100 + A$$

$$\Rightarrow A = 50 - 100 = -50$$

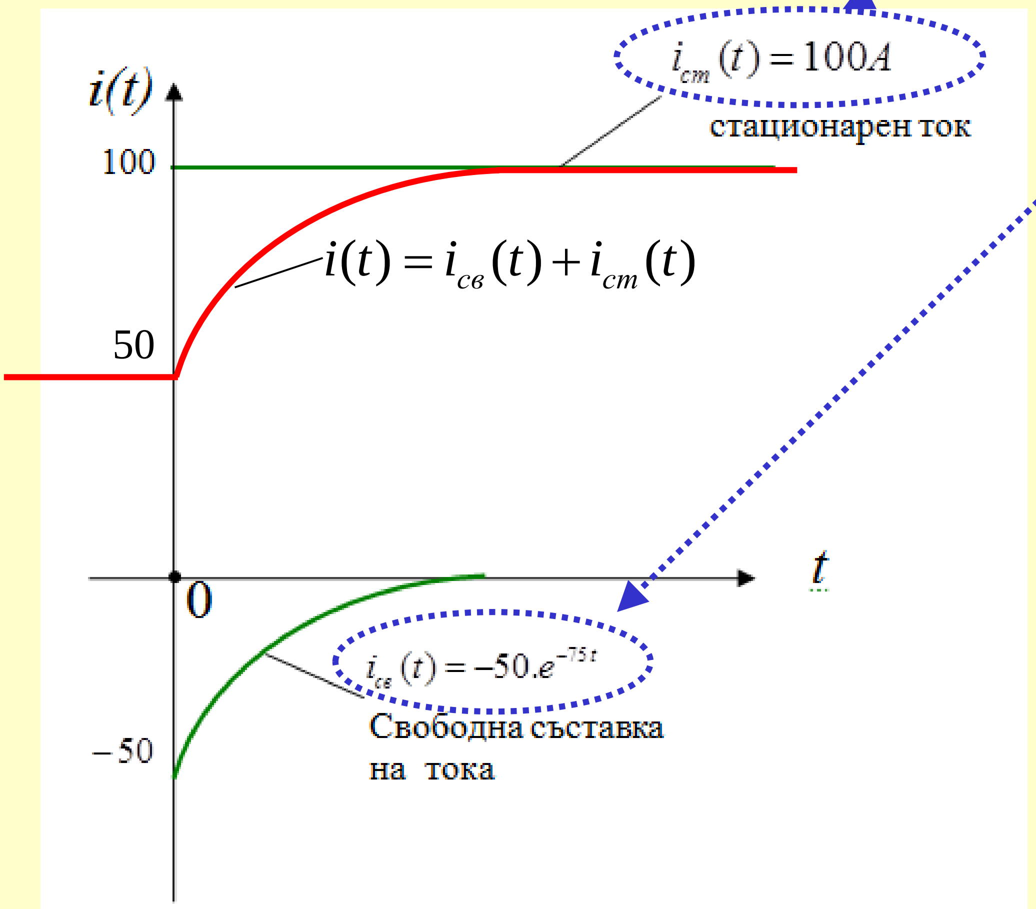
7. Крайно решение

$$\boxed{i_L(t) = (100 - 50.e^{-75t})A}$$

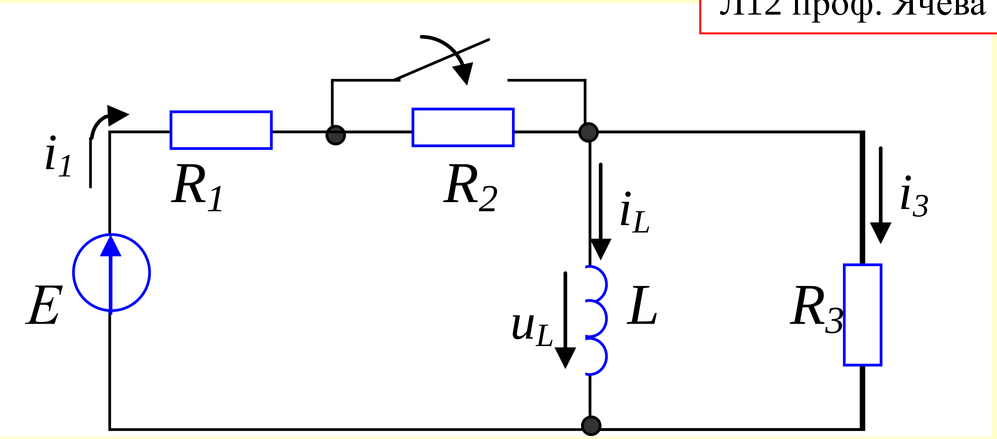




$$i_L(t) = 100 - 50.e^{-75t}$$



Определяне на напрежението

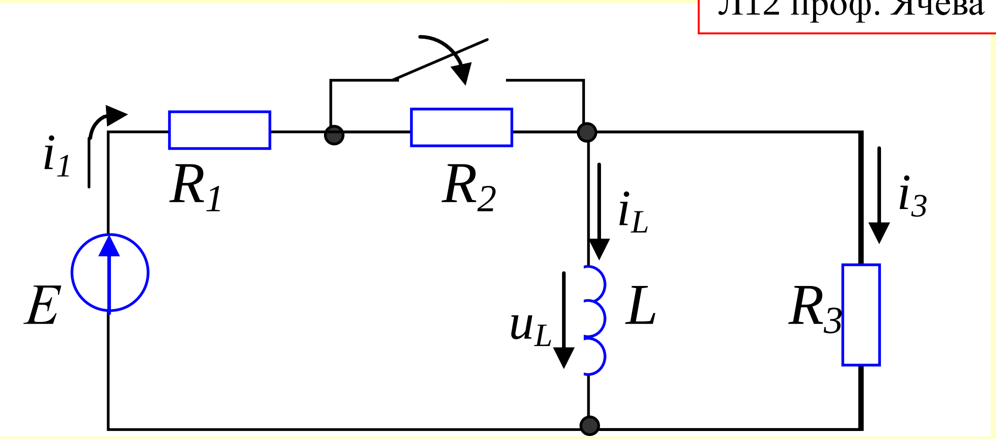


$$\boxed{u_L(t) = ?}$$

$$\boxed{i_L(t) = (100 - 50.e^{-75t})A}$$

$$L = 10mH = 10.10^{-3}H$$

$$\boxed{u_L(t) = L\frac{\partial i_L}{\partial t}} = 10.10^{-3}\frac{\partial}{\partial t}(100 - 50.e^{-75t}) = 10^{-2}(-50).(-75)e^{-75t} = 37{,}50e^{-75t}A$$



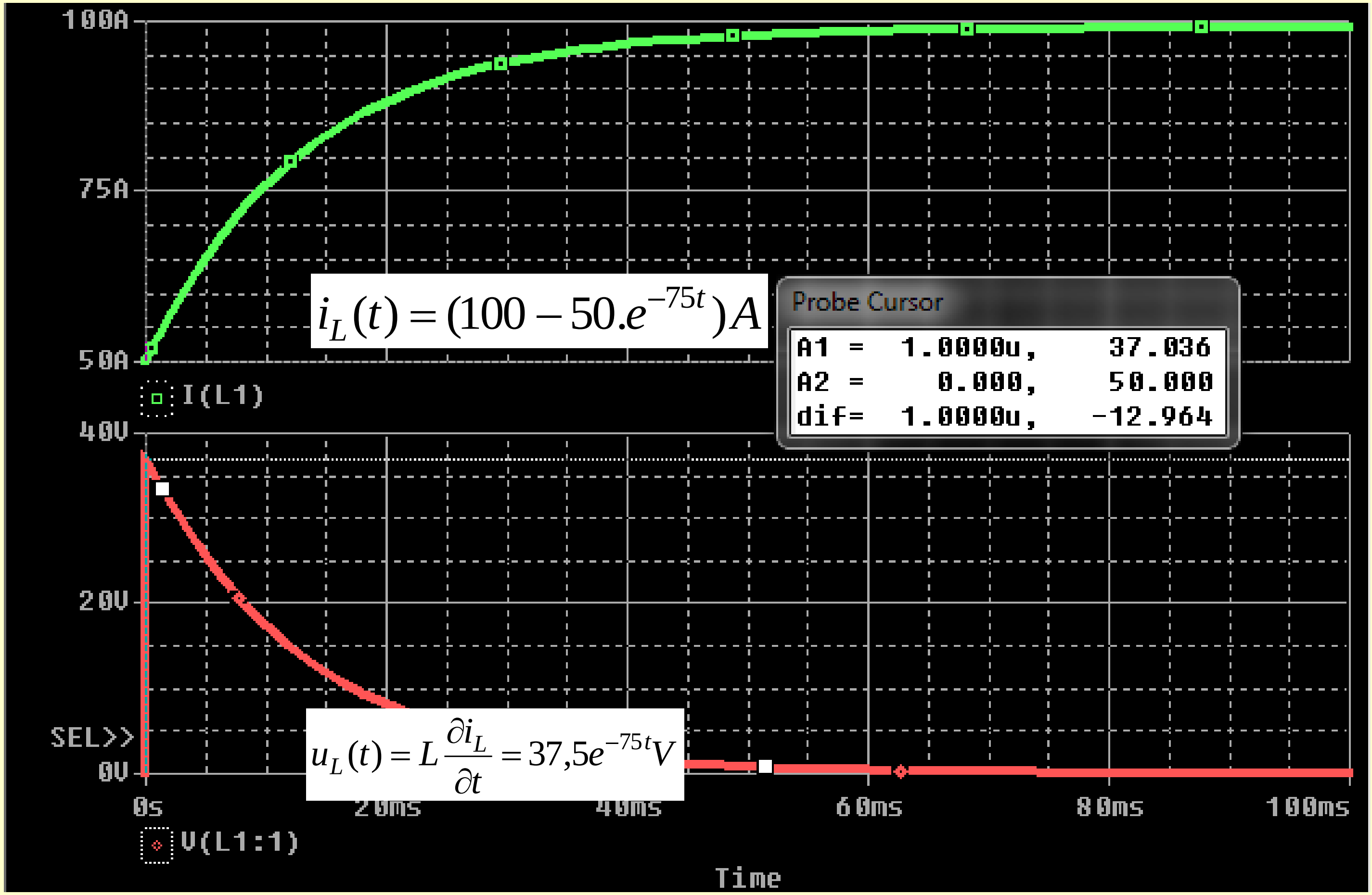
Определяне на токовете

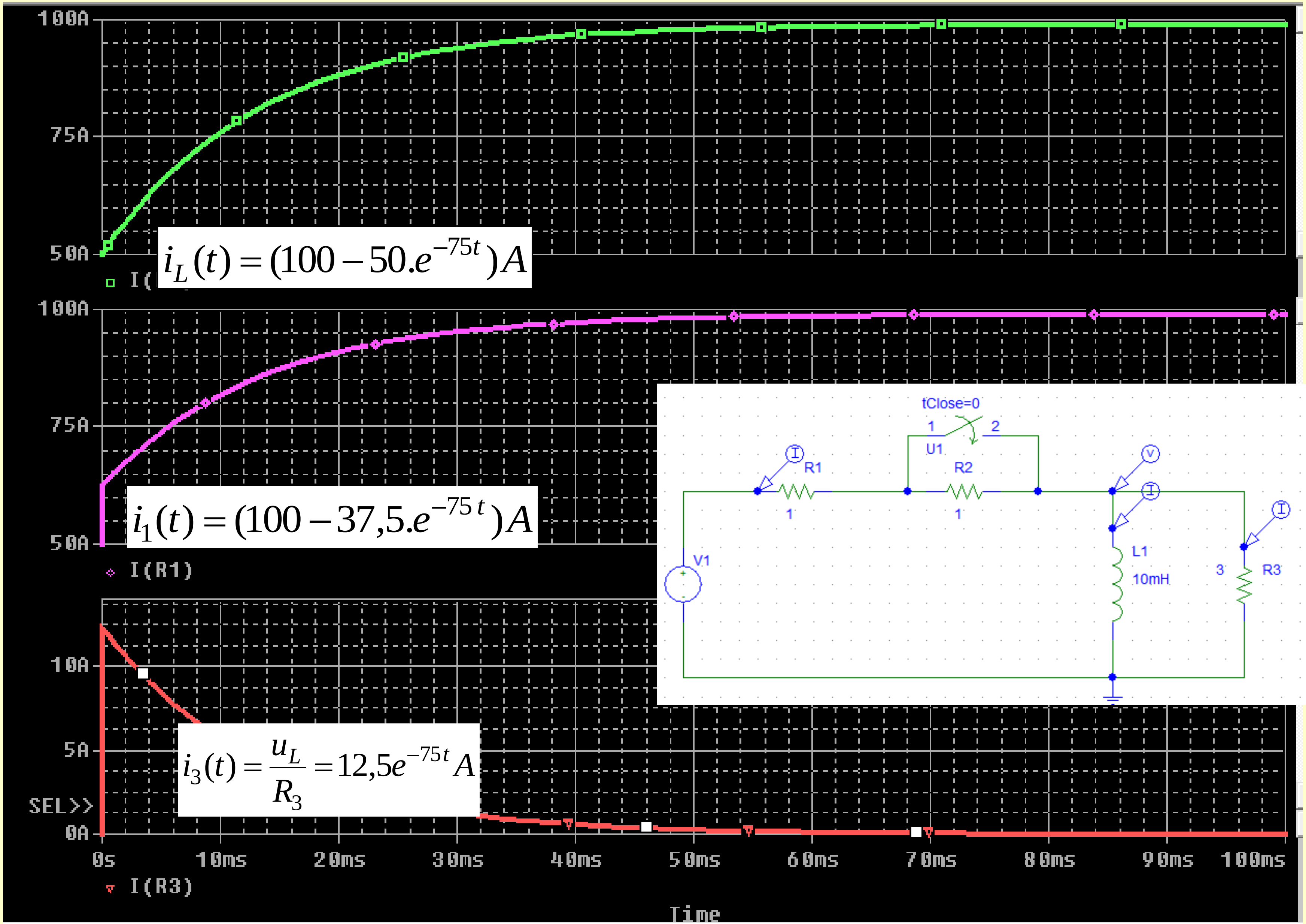
$$\boxed{i_1(t) = ?; \quad i_3(t) = ?}$$

$$\boxed{u_L(t) = 37{,}50e^{-75t} A}$$

$$\boxed{i_3(t) = \frac{u_L}{R_3}} = \frac{37{,}5.e^{-75t}}{3} = \boxed{12{,}5e^{-75t} A}$$

$$\boxed{i_1(t) = i_L(t) + i_3(t)} = 100 - 50.e^{-75t} + 12{,}5e^{-75t} \boxed{= 100 - 37{,}5.e^{-75t}}$$


100A
75A
50A
I(L1)
40V
20V
SEL>>
0V
0s
20ms
40ms
60ms
80ms
100ms
V(L1:1)
Time
$i_L(t) = (100 - 50.e^{-75t})A$
$u_L(t) = L\frac{\partial i_L}{\partial t} = 37{,}5e^{-75t}V$
Probe Cursor
A1 = 1.0000u, 37.036
A2 = 0.000, 50.000
dif= 1.0000u, -12.964



$$i_L(t) = (100 - 50.e^{-75t})A$$

$$i_1(t) = (100 - 37,5.e^{-75\,t})A$$

$$i_3(t) = \frac{u_L}{R_3} = 12,5e^{-75t}\,A$$


Благодаря за вниманието
проф. д-р Илона Ячева