Л5

<u>Синусоидален режим в линейни електрически вериги.</u>

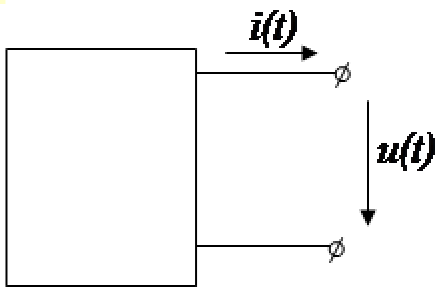
(лекция ***25.10.2022г.****)*

Преподавател: <u>проф. д-р Илона Ячева</u>

кат. “Теоретична Електротехника”,
Технически университет - София

<u>**Резонанс.**</u>

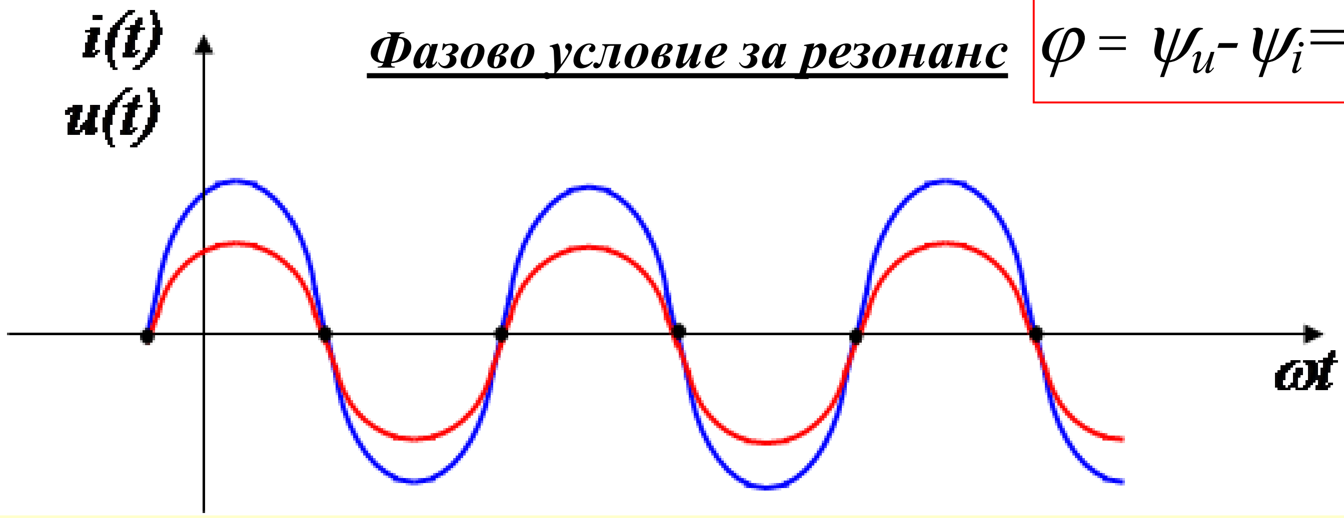
Резонансът е такова състояние на една пасивна ел.верига, включваща ***поне 1 бобина*** и ***поне 1 кондензатор***, при <u>което входният ток и входното напрежение съвпадат по фаза</u>.



$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

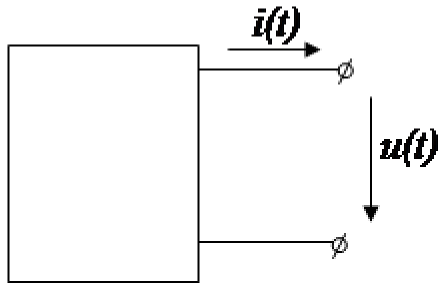
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \overset{0}{\varphi})$$

<u>***Фазово условие за резонанс***</u> $\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$



Резонанс.

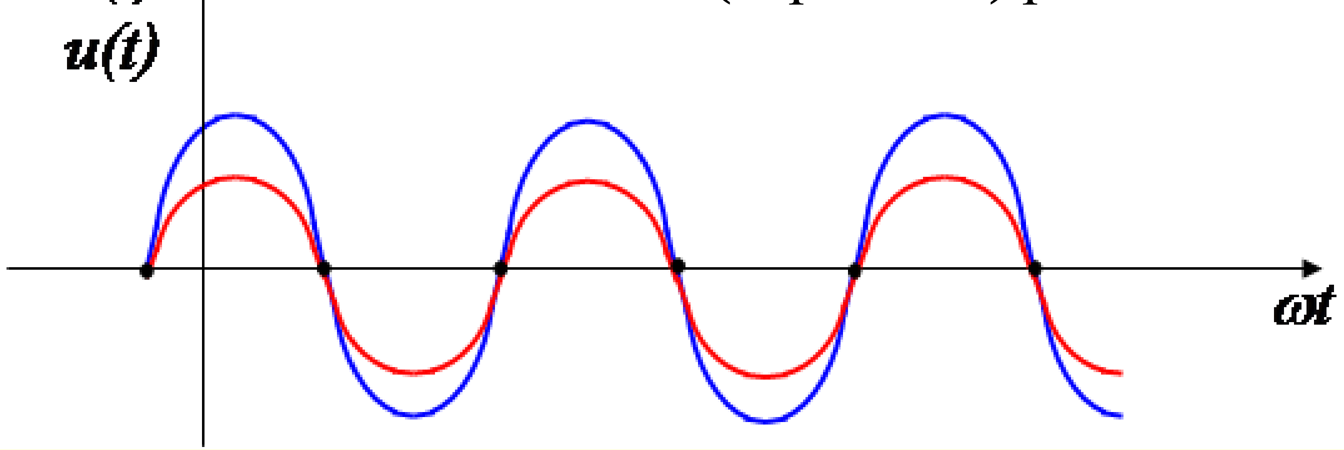
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$$



$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \cancelto{0}{\varphi})$$

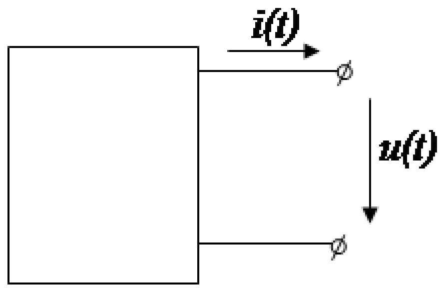
Различават се два вида резонансни режими:

- напрежителен (последователен) резонанс
- токов (паралелен) резонанс



<u>Резонанс.</u>

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$$



0

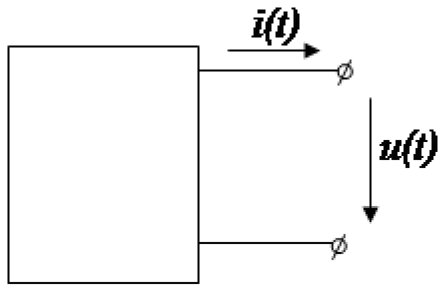
$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$$

<u>Реактивната мощност</u> на двуполюсника е <u>равна на нула</u>- т.е. между генератора и консуматора <u>няма енергийни колебания</u>.

Колебания се осъществяват само между консервативните елементи, като общата сума от електрическата и магнитна енергии, има <u>неизменна големина във времето</u>.

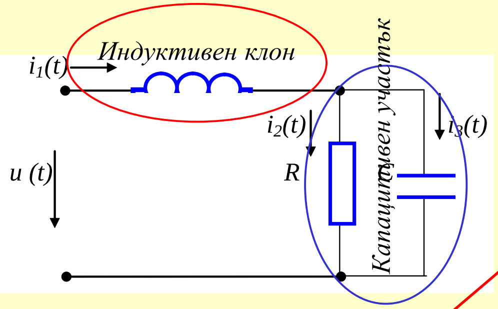
При определени условия резонансните колебания могат да имат <u>много по-голяма амплитуда от амплитудата на входния сигнал</u>.

Резонанс

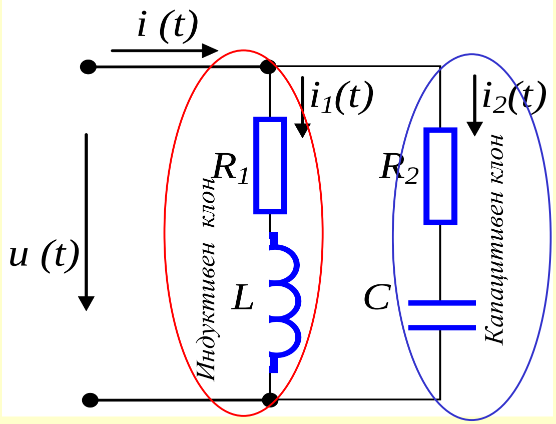


$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$$



Резонанс



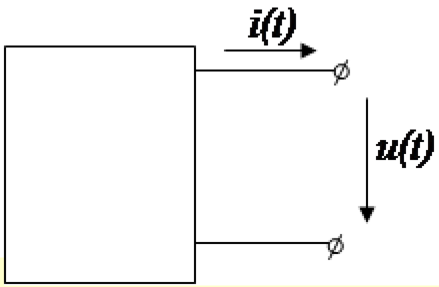
Последователен (напрежителен)

Индуктивният и капацитивният участък са свързани ***последователно***

Паралелен (токов)

Индуктивният и капацитивният участък са свързани ***в паралел***

Резонанс



$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$$

Промяна на параметрите: *R, L, C*

Промяна на честотата *f*

~~**Промяна на амплитудата на входния сигнал**~~

Резонанс

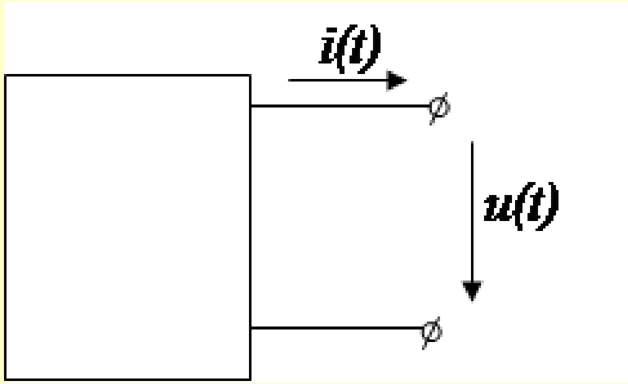
Последователен (напрежителен)

*Индуктивният и капацитивният участък са свързани **последователно***

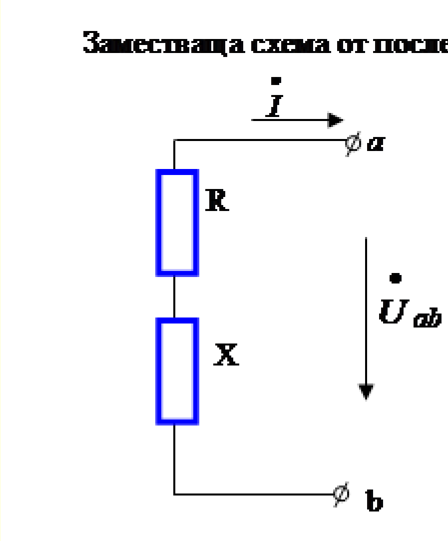
Паралелен (токов)

*Индуктивният и капацитивният участък са свързани **в паралел***

Резонанс



$$u(t) = u_m \sin \omega t$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t - \varphi)$$

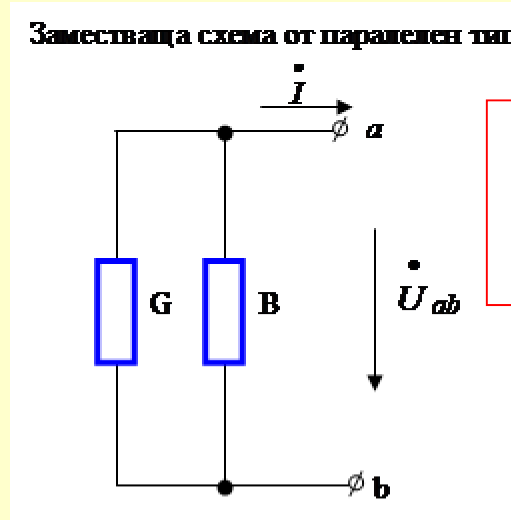


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z},$$

където: $Z = R + jX$

0

Условие за
напрежителен резонанс



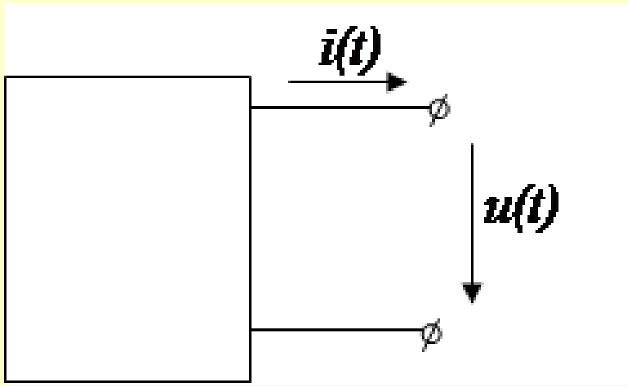
$$\dot{I} = Y.\dot{U}_{ab},$$

където: $Y = G - jB$

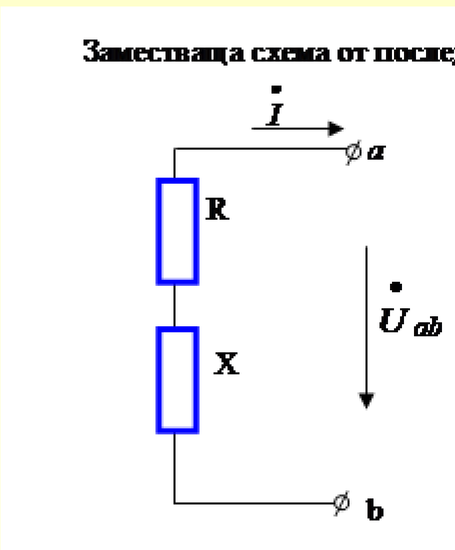
0

Условие за
токов резонанс

Еквивалентни схеми на пасивен двуполюсник от последователен и паралелен тип при синусоидален режим. Взаимно преминаване.

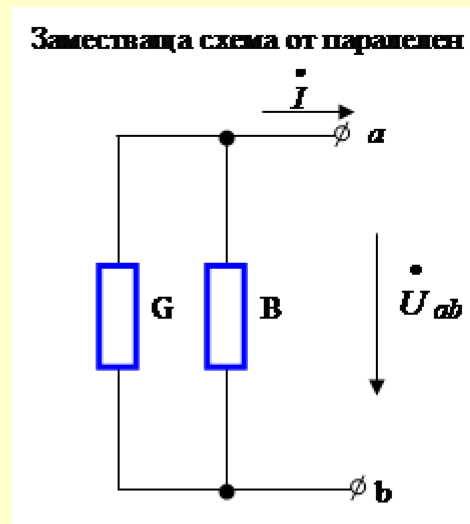


$$u(t) = u_m \sin \omega t$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t - \varphi)$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z},$$

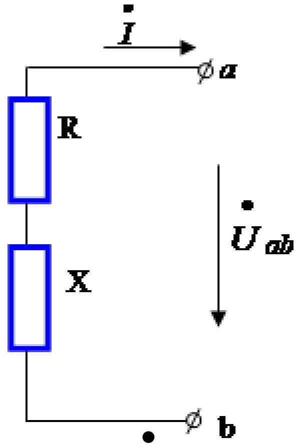
където: $Z = R + jX$



$$\dot{I} = Y.\dot{U}_{ab},$$

където: $Y = G - jB$

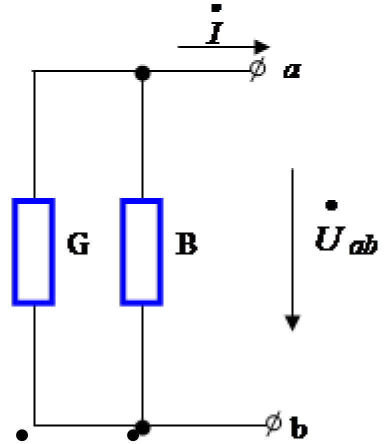
Заместваща схема от последователен тип



$$\dot I = \frac{\dot U_{ab}}{Z},$$

където: $Z = R+jX$

Заместваща схема от паралелен тип



$$\dot I = Y.\dot U_{ab},$$

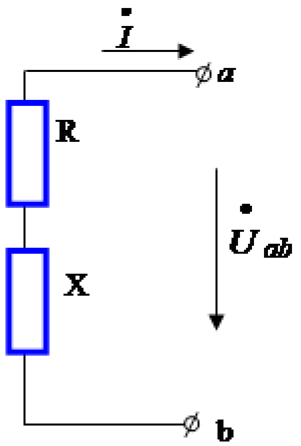
където: $Y = G-jB$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$\longrightarrow$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

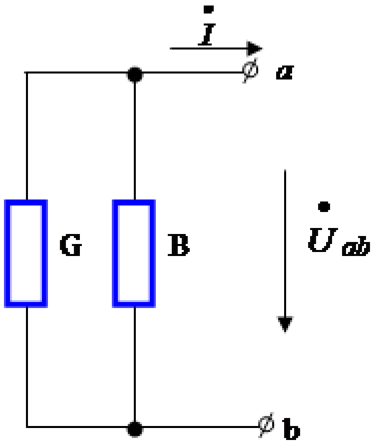
Заместваща схема от последователен тип



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z},$$

където: $Z = R + jX$

Заместваща схема от паралелен тип



$$\dot{I} = Y.\dot{U}_{ab},$$

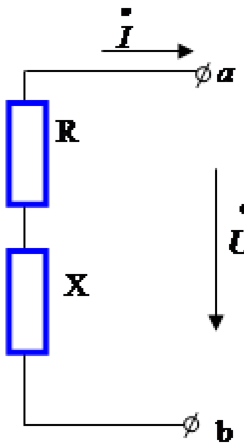
където: $Y = G - jB$

$$\boxed{(a+jb)(a-jb) = a^2 + b^2}$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{1}{(R+jX)}\frac{(R-jX)}{(R-jX)} = \frac{R}{R^2+X^2} - j\frac{X}{R^2+X^2} = G - jB$$

$$\boxed{\Rightarrow G = \frac{R}{R^2+X^2}}, \quad \boxed{B = \frac{X}{R^2+X^2}}$$

Заместваща схема от последователен тип

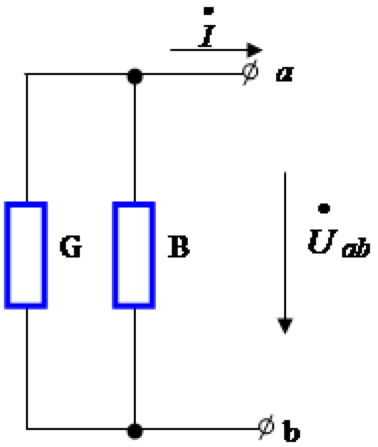


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z},$$

където: $Z = R + jX$

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

Заместваща схема от паралелен тип



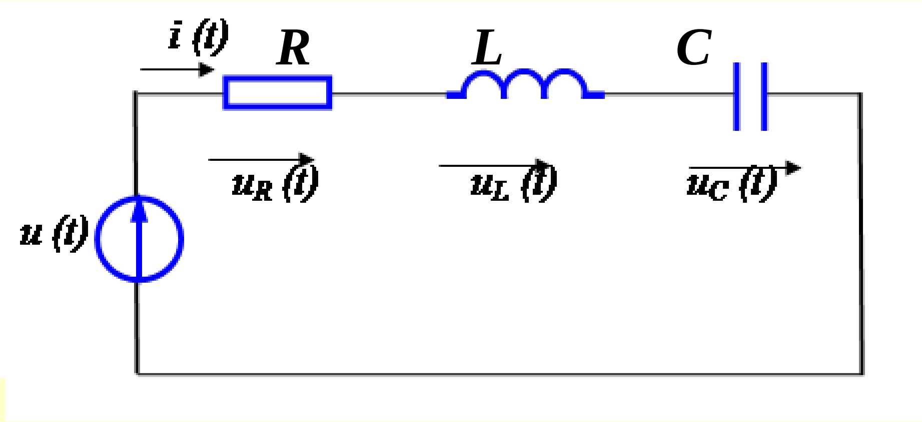
$$\dot{I} = Y.\dot{U}_{ab},$$

където: $Y = G - jB$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G - jB} = \frac{1}{(G - jB)}\frac{(G + jB)}{(G + jB)} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j\frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX$$

$$\Rightarrow R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

Напрежителен резонанс в R, L, C двуполюсник от последователен тип



$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C =$$

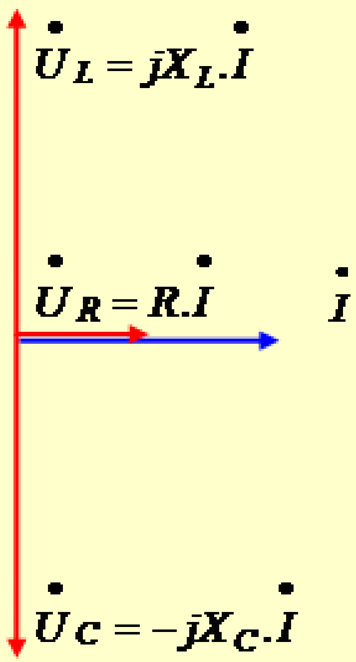
$$= \dot{I}\,R + \dot{I}\,j\omega L + \dot{I}(-j\frac{1}{\omega C}) =$$

$$= \dot{I}(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}) =$$

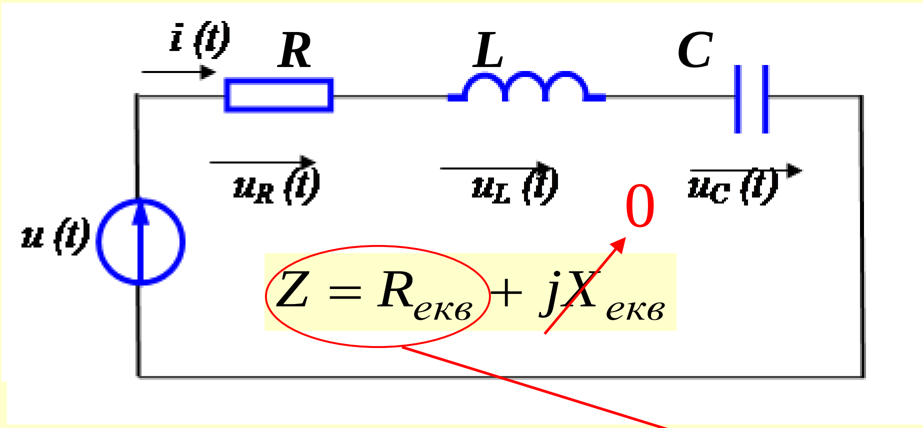
$$= \dot{I}\,Z = \dot{I}(R_{екв} + jX_{екв})$$

$$Z = R_{екв} + j\cancelto{0}{X_{екв}}$$

$\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{X_{екв} = 0}$ - **условие за напрежителен резонанс**



$$\dot{U} = \dot{U}_R + \cancelto{0}{(\dot{U}_L + \dot{U}_C)} = \dot{U}_R$$



$$Z = R_{екв} + j\cancel{X_{екв}}$$

Резонансна честота

$$\mathrm{X}_{\text{екв}} = X_L - X_C = 0$$

$$\Rightarrow X_L = X_C$$

$$\Rightarrow \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}$$

$$\boxed{\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L.C}}}$$

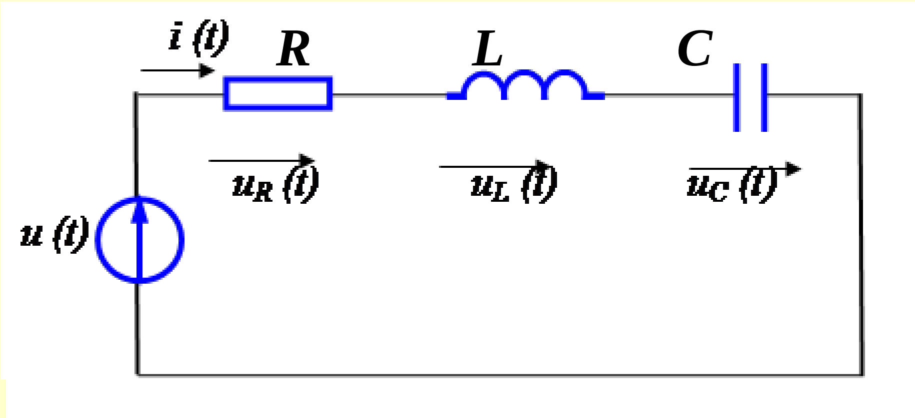
Токът при напрежителен резонанс е максимален: $\dot{I}_p = \dfrac{\dot{U}}{Z} = \dfrac{\dot{U}}{R}$

.

Характеристично съпротивление

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

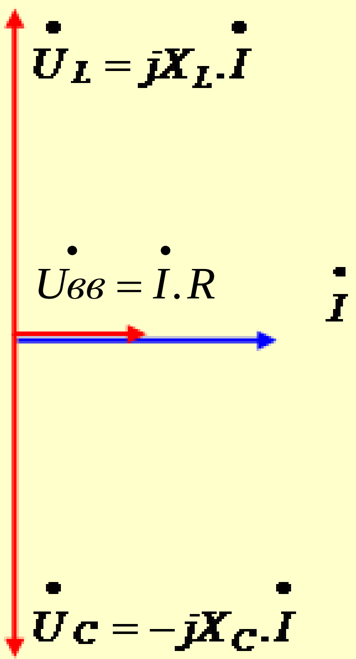
$$X_L = X_C = \omega_p L = \frac{1}{\sqrt{LC}}.L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$



Качествен фактор

$$Q = \frac{\rho}{R}$$

Q* -** показва колко пъти напрежението върху реактивните елементи ***L и ***C*** е по-голямо от входното напрежение



$$Q = \frac{U_L}{U_{вх}} = \frac{U_C}{U_{вх}} = \frac{\omega_p L.I}{R.I} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1/\omega_p C}{R} = \frac{\rho}{R}$$

<u>Честотни характеристики</u>

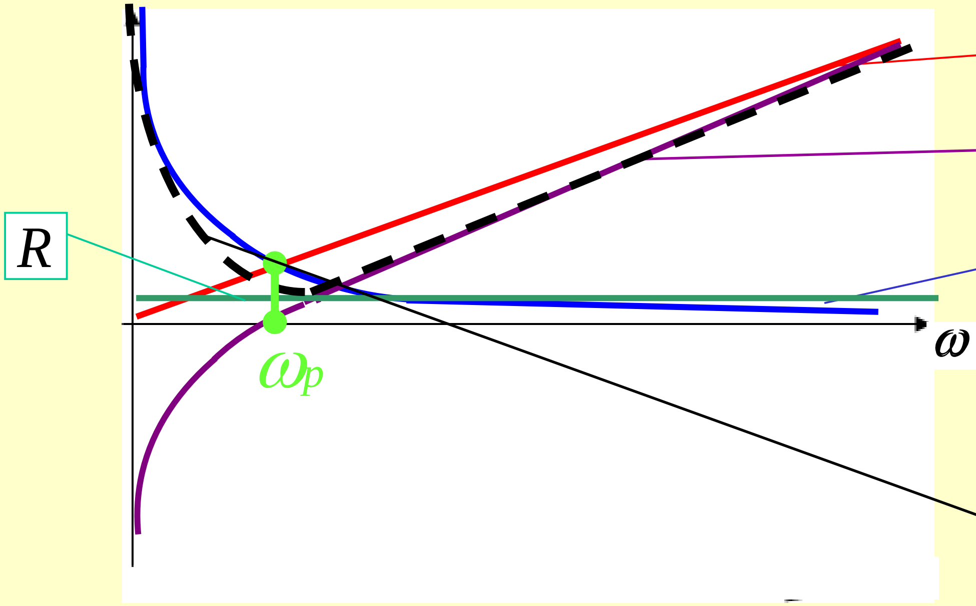
Зависимостта на даден параметър от честотата е <u>честотна характеристика</u>

За да получим честотните характеристики ще разгледаме как се променят параметрите на веригата при изменение на честотата ω от нула **към безкрайност (*ω = 0÷∞*)**.

При този анализ приемаме, че амплитудата на входното напрежение не зависи от честотата (***Um* =** const), както и че R=const, L=const, C=const.

Честотни характеристики

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$$



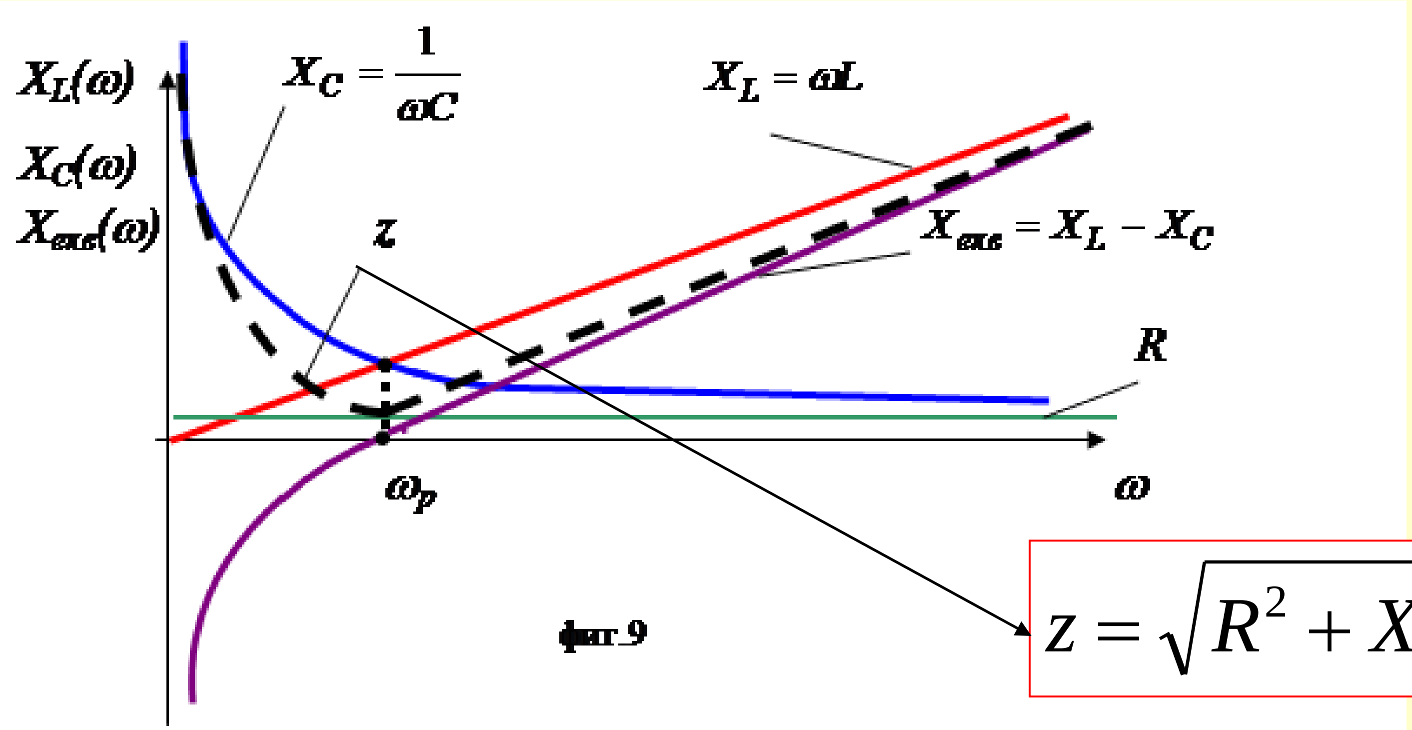
$$X_L = \omega L$$

$$X_{екв} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$z = \sqrt{R^2 + X_{екв}{}^2}$$

Честотни характеристики



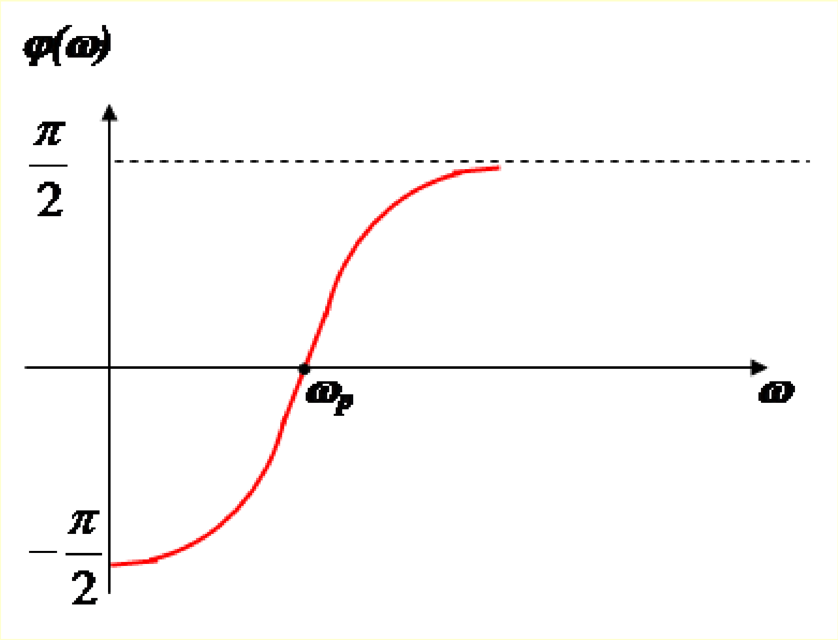
$$z = \sqrt{R^2 + X_{екв}{}^2}$$

$\omega = \omega_p \Rightarrow X_{екв} = 0, \; z = R$

$\omega < \omega_p \Rightarrow$ вх. съпрот. има капацитивен характер

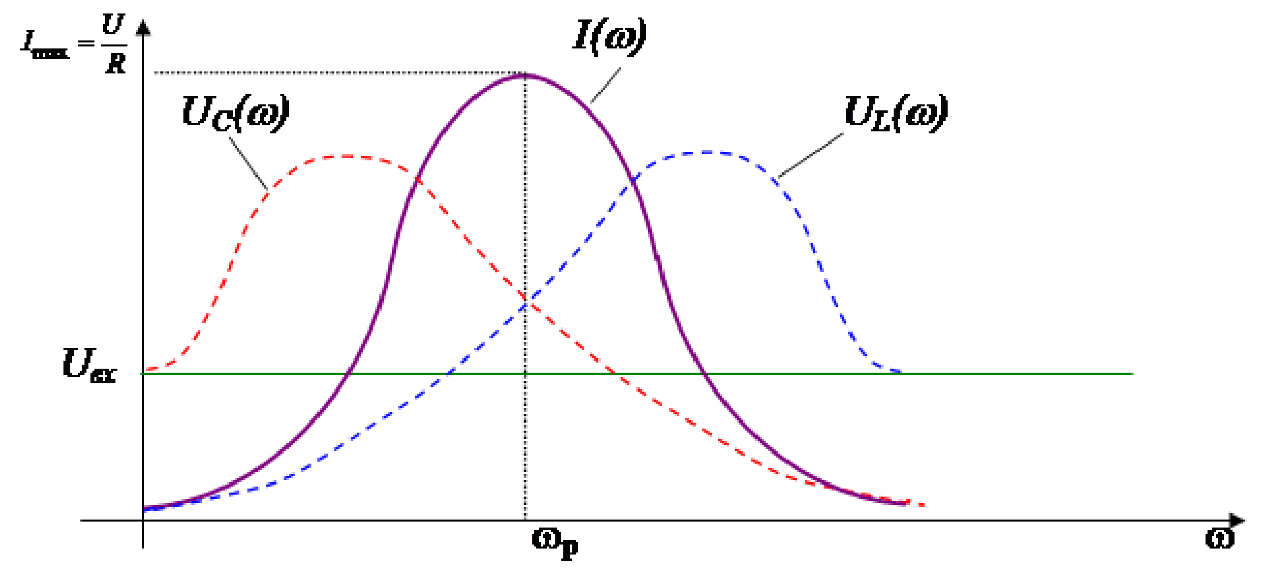
$\omega > \omega_p \Rightarrow$ вх. съпрот. има индуктивен характер

фазочестотната характеристика



$$\varphi = arctg\,\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

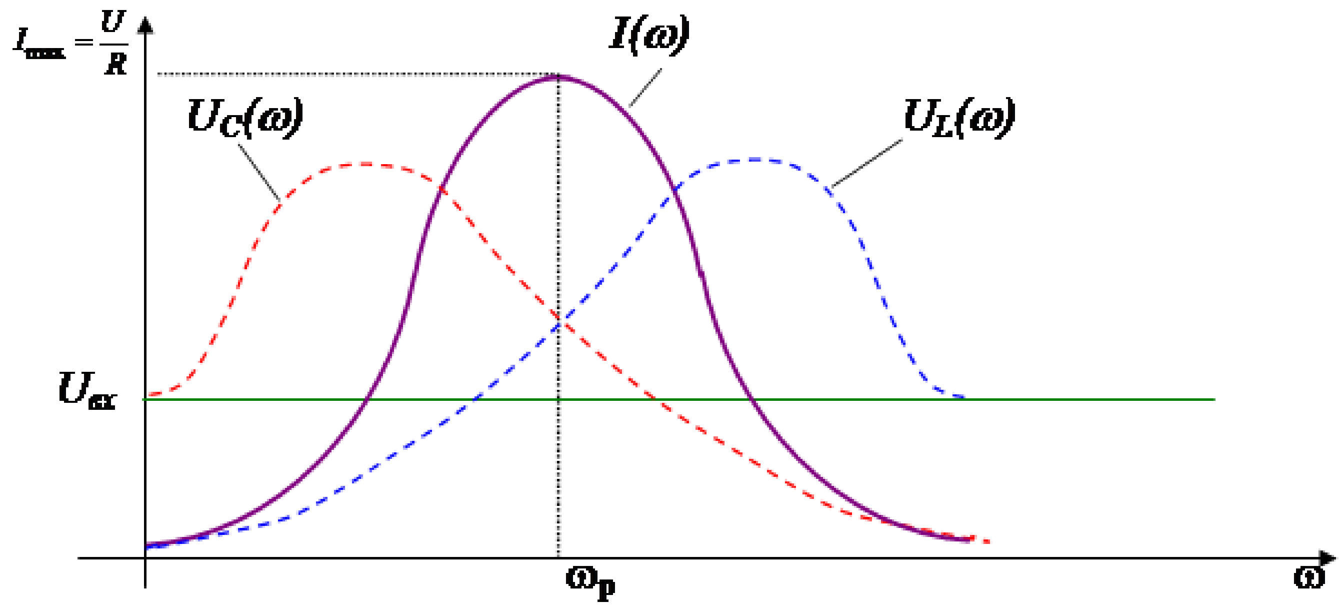
Ефективни стойности на напреженията U_L, U_C и тока I, в зависимост от честотата



фиг.11

$$I(\omega) = \frac{U}{z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$U_L = I(\omega).\omega L = \frac{U.\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad U_C = I(\omega).\frac{1}{\omega C} = \frac{U}{\omega C.\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$



фиг.11

1. $\omega = 0 \quad \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} \to \infty \quad \Rightarrow I = 0, \quad U_C = U_{вх}$.Следователно не протича ток, а входното напрежение е приложено върху кондензатора.

2 . $\omega = 0 \div \omega_p \quad \Rightarrow X_C \downarrow, \quad X_L \uparrow$ токът нараства

3. $\omega = \omega_p \quad \Rightarrow X_C = X_L \Rightarrow X_{екв} = 0 \quad I_p = I_{\max} = \frac{U}{R}$ токът е максимален

4. $\omega = \omega_p \div \infty \quad \Rightarrow X_L = \omega L \to \infty \quad \Rightarrow I = 0, \quad U_L = U_{вх}$ Следователно не протича ток, а входното напрежение е приложено върху бобината.

Съпоставяне на резонансните качества на отделни контури

За да се съпоставят резонансните качества на отделните контури, честотната характеристика $I(\omega)$ се представя в относителни единици

$$F_I(\frac{\omega}{\omega_p}) = \frac{I}{I_p}$$

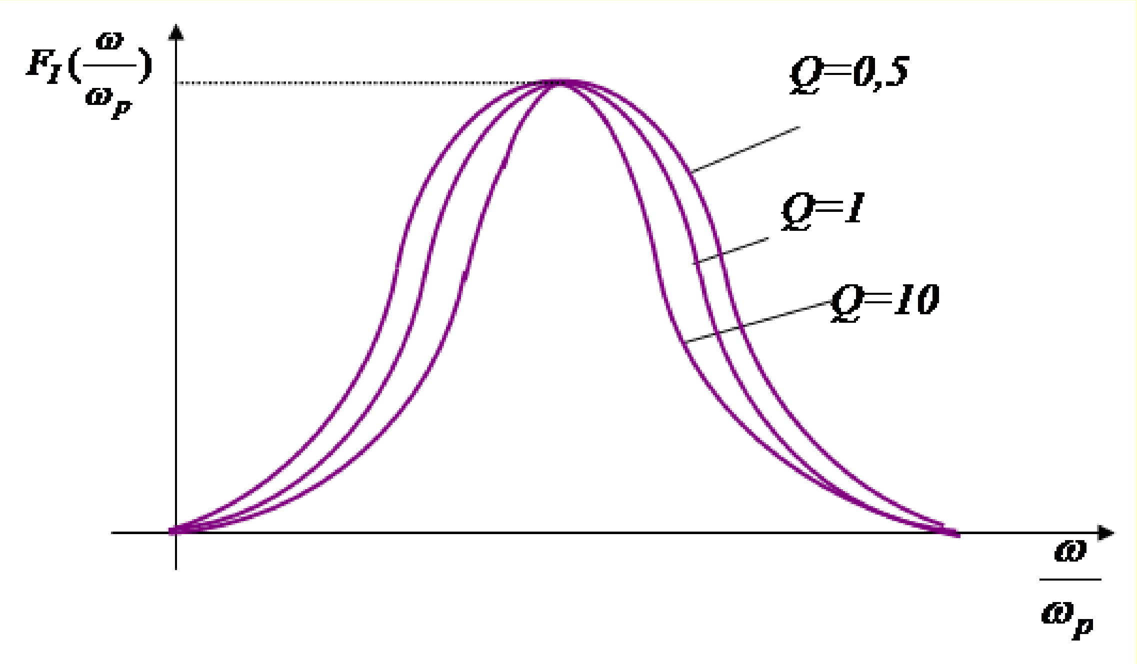
$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}$$

$$Z = R + j(\frac{\omega}{\omega_p}.\rho - \frac{\omega_p}{\omega}\rho) = R + j\rho(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})$$

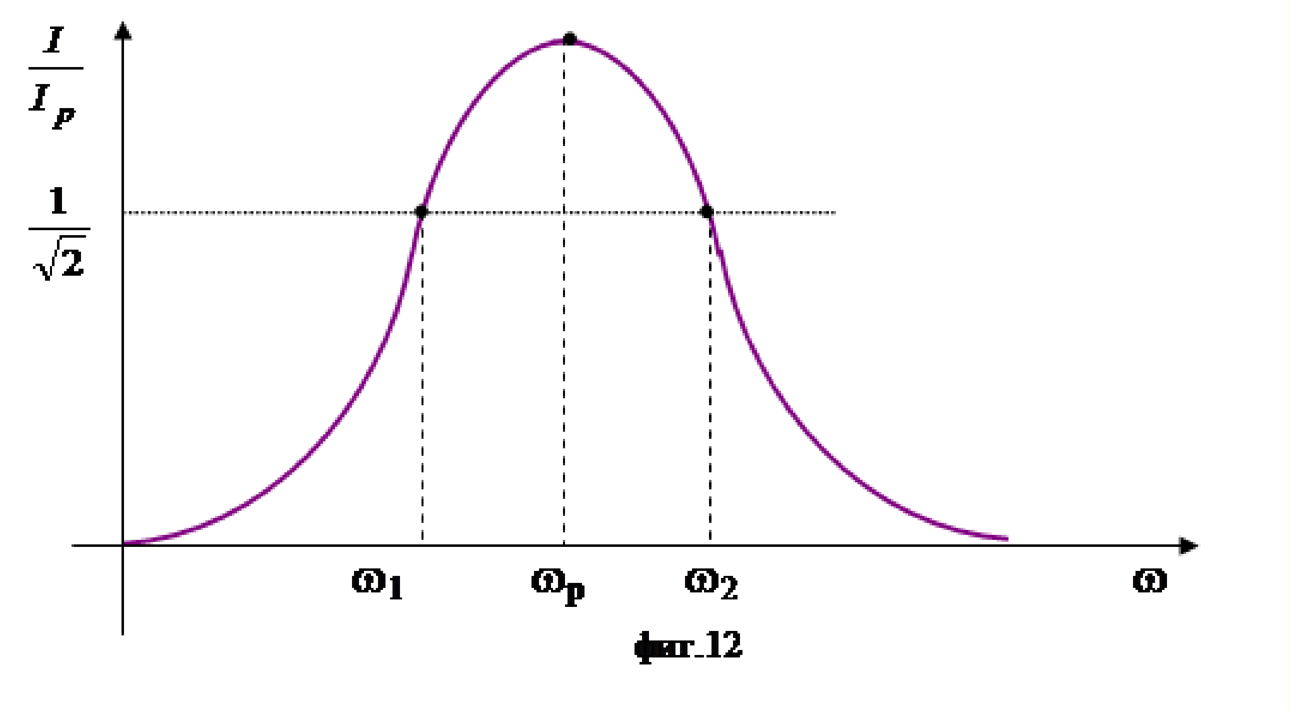
$$\Rightarrow z = \sqrt{R^2 + \rho^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2} = R\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}$$

$$F_I(\frac{\omega}{\omega_p}) = \frac{I}{I_p} = \frac{U}{z}.\frac{R}{U} = \frac{R}{z} = \frac{R}{R\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}}$$

Съпоставяне на резонансните качества на отделни контури



Резонансната крива на тока зависи изключително много от ***Q*** фактора на веригата. Колкото по-малко е съпротивлението ***R*** в контура, т.е. колкото ***Q*** фактора е по-голям толкова кривата на тока е по- остра (пикообразна).



$$\frac{I(\omega_1)}{I_p} = \frac{I(\omega_2)}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

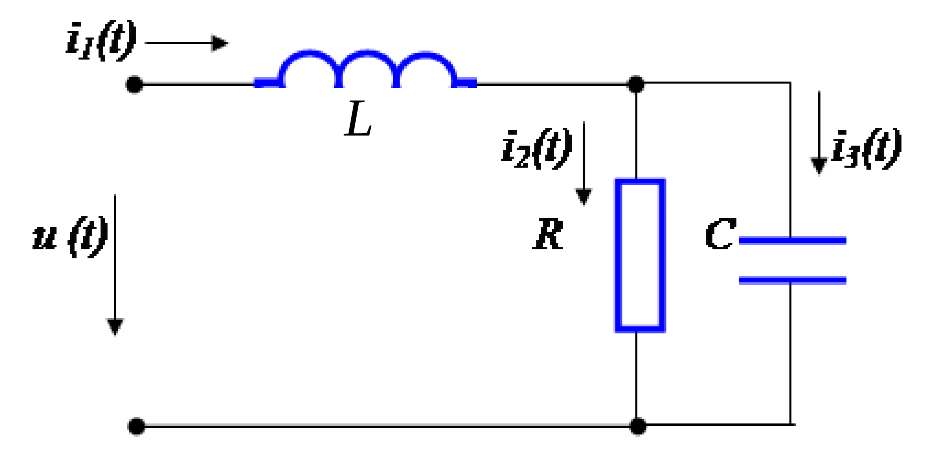
$$\omega_1 \le \omega \le \omega_2 \quad \Leftrightarrow \frac{I}{I_p} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P(\omega_p) = I_p^2 R$$

$$P(\omega_1) = I(\omega_1)^2 R = \left(\frac{I_p}{\sqrt{2}}\right)^2 R = \frac{{I_p}^2}{2} R = \frac{P(\omega_p)}{2}$$

Пример за определяне на резонансен параметър

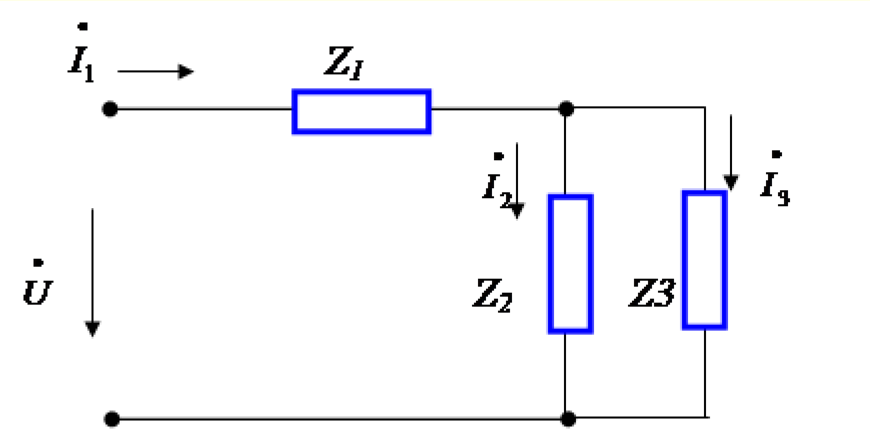
Да се определи стойността на капацитета C (фиг.13) за която във веригата има напрежителен резонанс



f=160Hz,
R = 10Ω, L=5 mH,

Решение

Xекв = 0

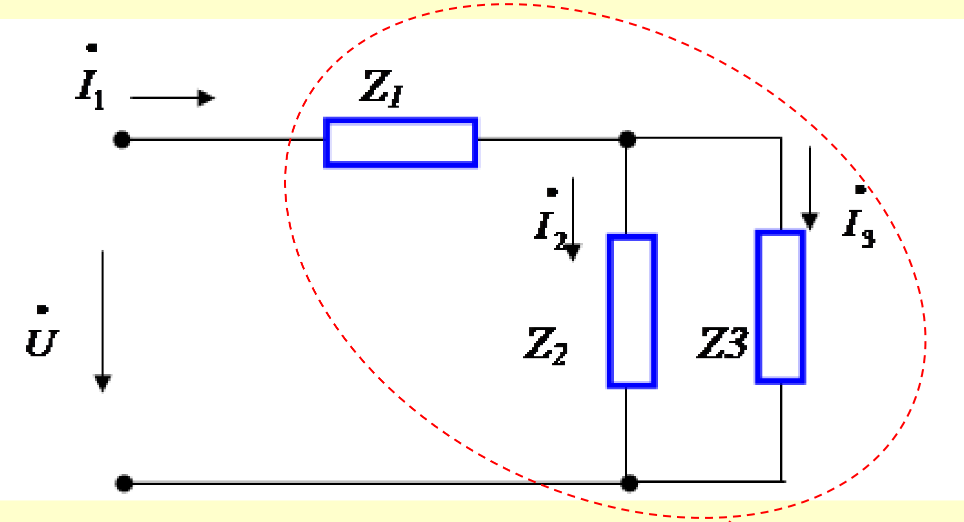


$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 1000 = 10^3 \, rad/s$$

$$Z_1 = j\omega L = j.10^3.5.10^{-3} = j5\Omega$$

$$Z_2 = R = 10\Omega$$

$$Z_3 = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

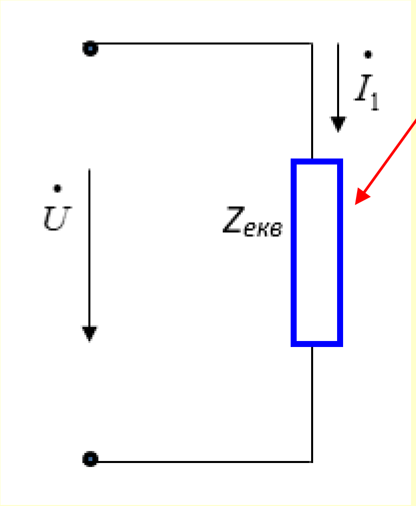


$\omega_p = 10^3 \, rad/s$

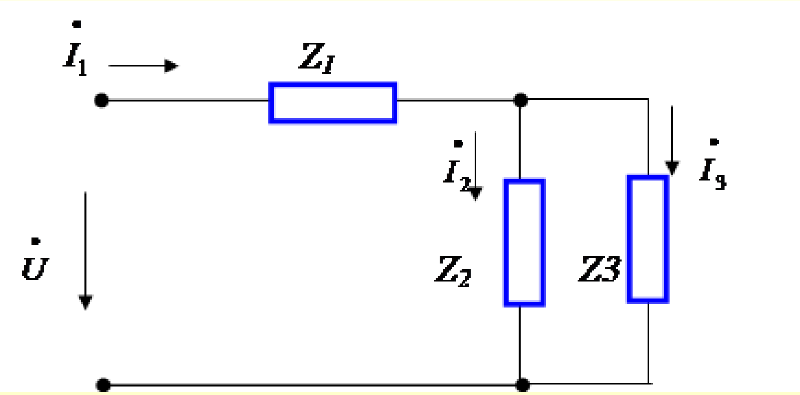
$Z_1 = j5\Omega$

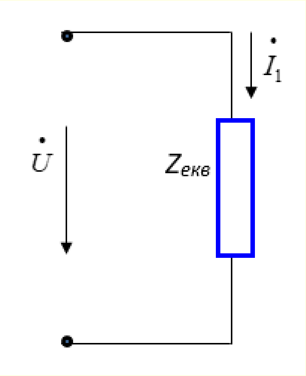
$Z_2 = 10\Omega$

$Z_3 = -jX_C$?



$$\boxed{Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}}$$





$$(a+jb)(a-jb)=a^2+b^2$$

$$R_{екв}=\frac{10.X_C{}^2}{100+X_C{}^2};\quad X_{екв}=(5-\frac{100.X_C}{100+X_C{}^2})$$

$$Z_{eke}=Z_1+\frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}$$

$$\Rightarrow\quad Z_{eke}=j5+\frac{10.(-jX_C)}{10-jX_C}=j5+\frac{10.(-jX_C)(10+jX_C)}{(10-jX_C)(10+jX_C)}=$$

$$=j5+\frac{10.(-jX_C)(10+jX_C)}{100+X_C{}^2}=j5-j\frac{100.X_C}{100+X_C{}^2}+\frac{10.X_C{}^2}{100+X_C{}^2}=$$

$$=\frac{10.X_C{}^2}{100+X_C{}^2}+j(5-\frac{100.X_C}{100+X_C{}^2})=R_{екв}+jX_{екв}$$

$$X_{екв} = (5 - \frac{100.X_C}{100 + X_C{}^2}) = 0$$

$$\Rightarrow 5(100 + X_C{}^2) - 100X_C = 0$$

$$\Rightarrow 5X_C{}^2 - 100X_C + 500 = 0$$

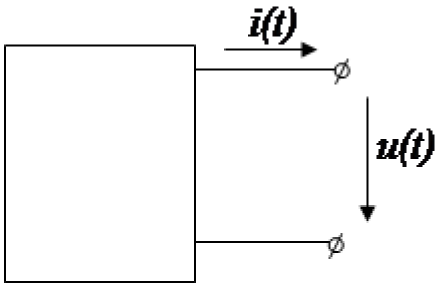
$$\Rightarrow X_C{}^2 - 20X_C + 100 = 0$$

$$\Rightarrow X_C = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} = 10\Omega$$

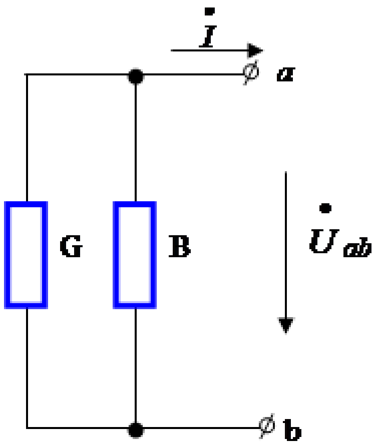
$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^3 10} = 10^{-4}F = 100.10^{-6}F = 100\mu F$$

Токов резонанс.

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$$

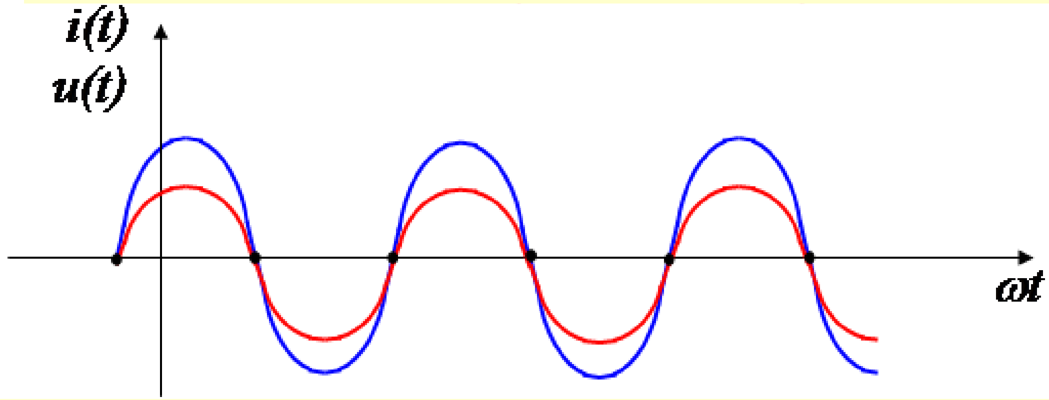


$$u(t) = u_m sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m sin(\omega t + \psi_i) = i_m sin(\omega t + \psi_u - \cancelto{0}{\varphi})$$



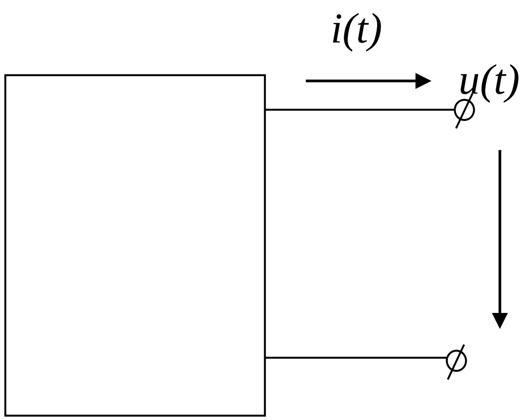
$$Y = G - \cancelto{0}{jB}$$

$\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{B_{екв} = 0}$ - **<u>условие за токов резонанс</u>**



Токов резонанс

Резонансът във верига с **паралелни клонове с разнородни реактивни** съпротивления се нарича **токов** (паралелен резонанс).



$$u(t) = u_m sin(\omega t + \psi_u),$$

$$i(t) = i_m sin(\omega t + \psi_i)$$

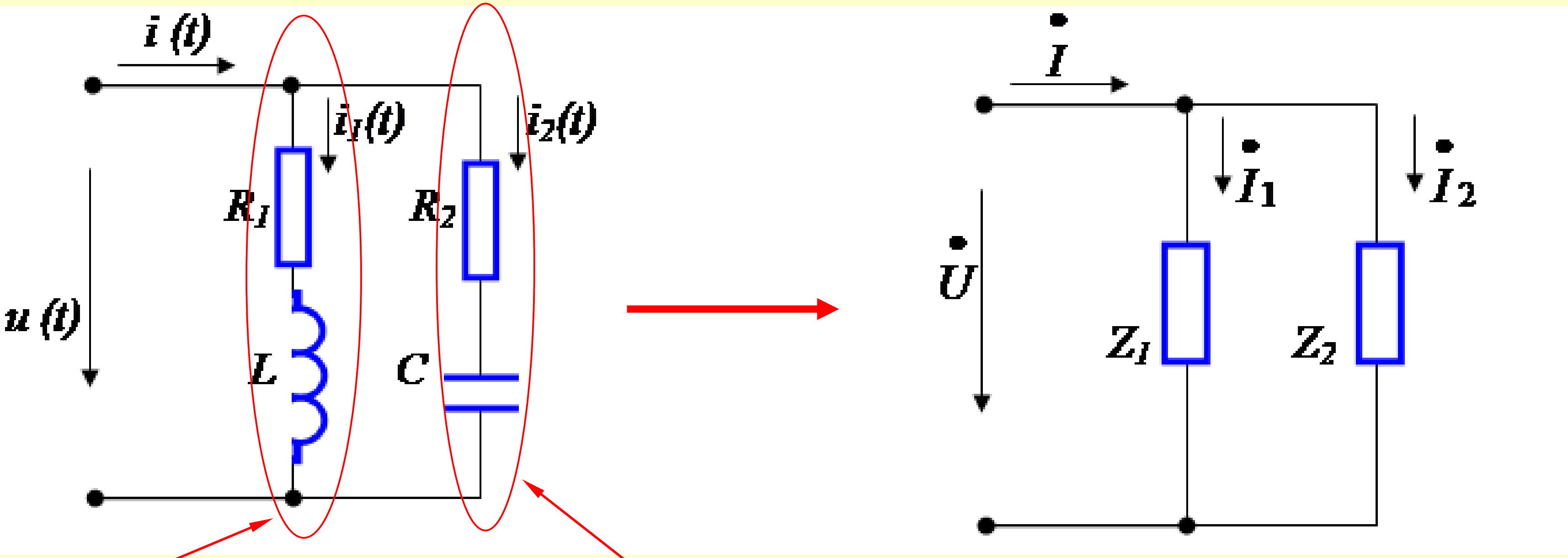
Фазово условие за резонанс

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$$

По отношение на външната верига двуполюсникът в който има токов резонанс **има поведение на активна проводимост**.

Следователно е в сила **фазовото условие за резонанс $\varphi = 0$.**

Токов резонанс



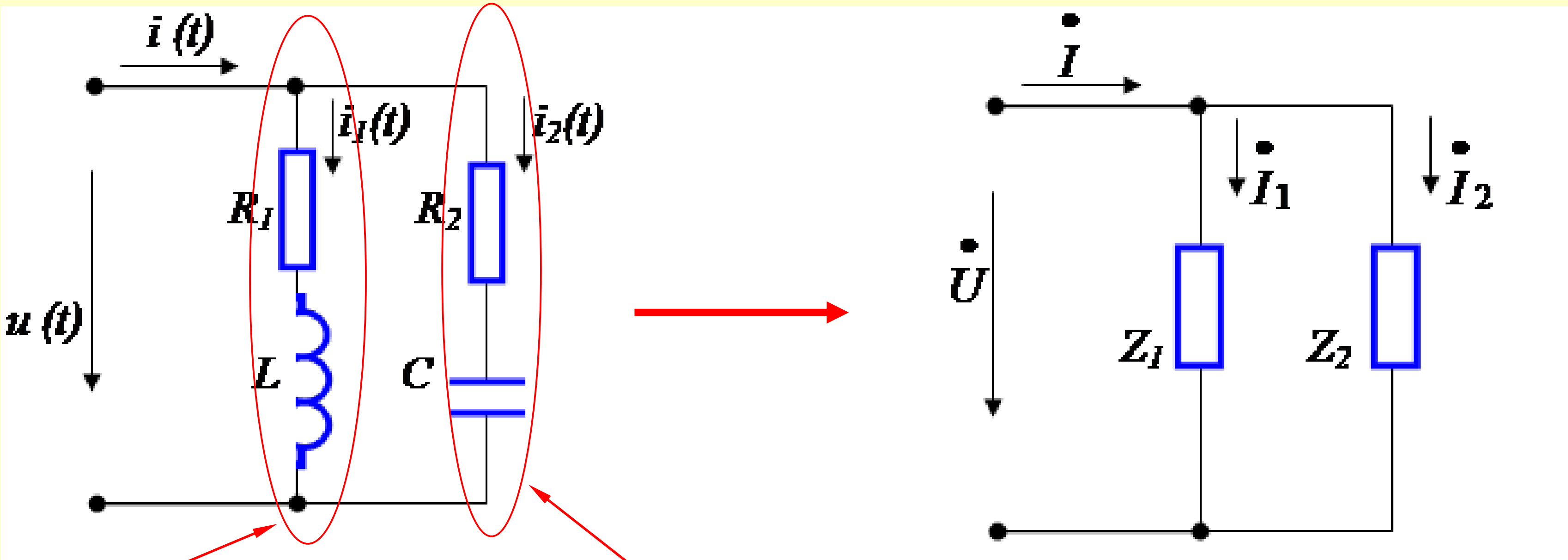
индуктивен клон

капацитивен клон

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L}; \qquad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{\dot{U}}{R_2 - j\dfrac{1}{\omega C}}$$

Токов резонанс

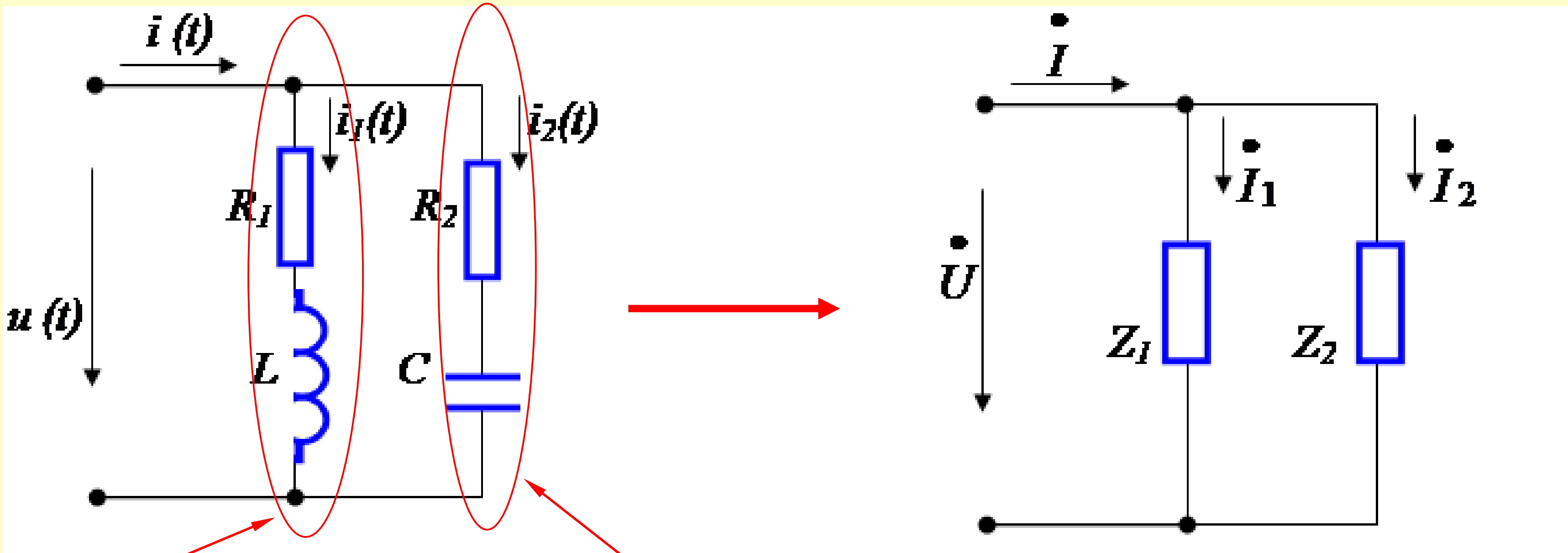


индуктивен клон   капацитивен клон

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{R_1+j\omega L}=\frac{\dot{U}}{R_1+j\omega L}\cdot\frac{(R_1-j\omega L)}{(R_1-j\omega L)}=\dot{U}\Big(\underbrace{\frac{R_1}{R_1^{\,2}+\omega^2L^2}}_{G_1}-j\underbrace{\frac{\omega L}{R_1^{\,2}+\omega^2L^2}}_{B_1}\Big)=\dot{U}.Y_1$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}}{R_2-j\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{\dot{U}}{R_2-j\dfrac{1}{\omega C}}\cdot\frac{(R_2+j\dfrac{1}{\omega C})}{(R_2+j\dfrac{1}{\omega C})}=\dot{U}\Big(\underbrace{\frac{R_2}{R_2^{\,2}+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}}_{G_2}+j\underbrace{\frac{1/\omega C}{R_2^{\,2}+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}}_{B_2}\Big)=\dot{U}.Y_2$$

Токов резонанс



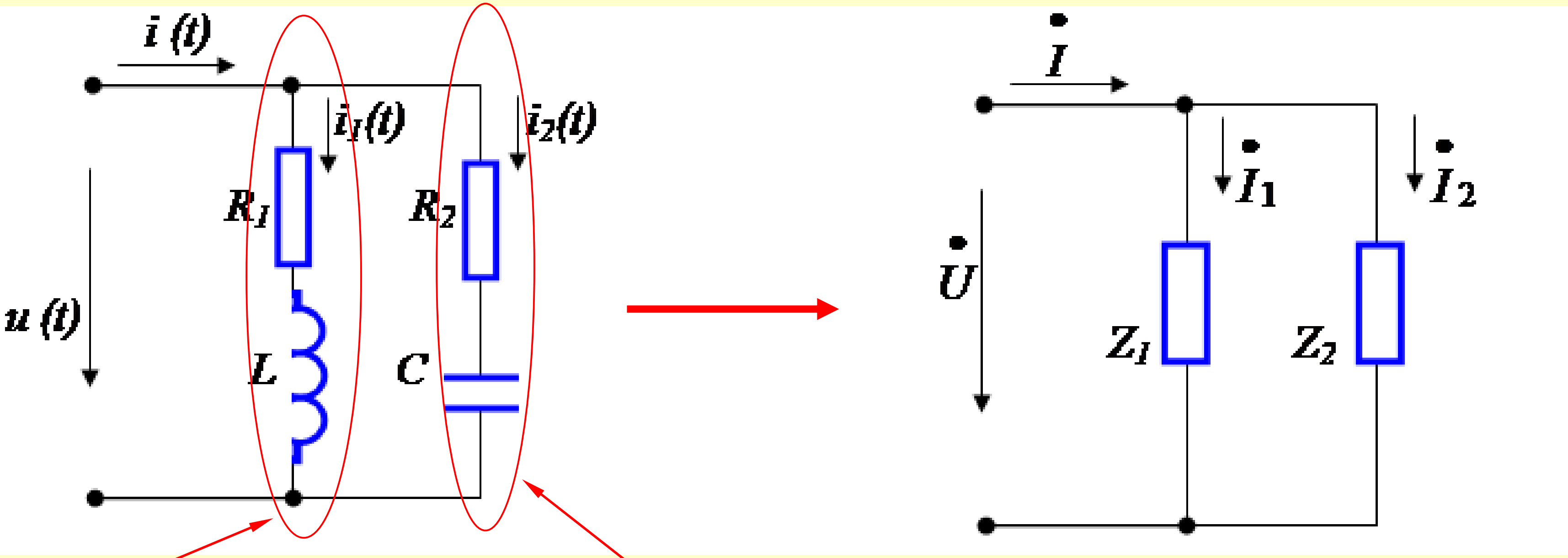
индуктивен клон

капацитивен клон

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}(Y_1 + Y_2) = \dot{U}\,Y_{екв} = \dot{U}(G_{екв} - jB_{екв})$$

$$G_{екв} = \frac{R_1}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^{\,2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}; \qquad B_{екв} = \frac{\omega L}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^{\,2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Токов резонанс



индуктивен клон

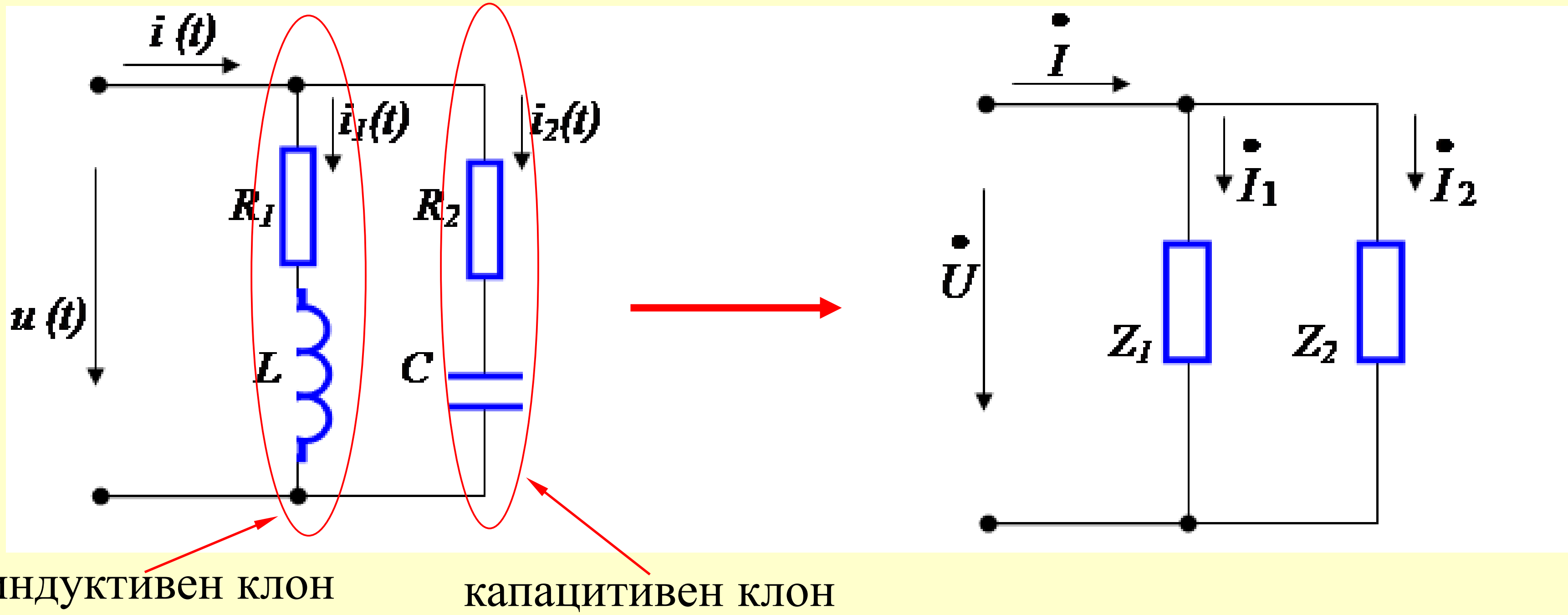
капацитивен клон

поведение на активна проводимост:

$$Y = G_{екв} - j\cancelto{0}{B_{екв}}$$

$\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{B_{екв} = 0}$ - **условие за токов резонанс**

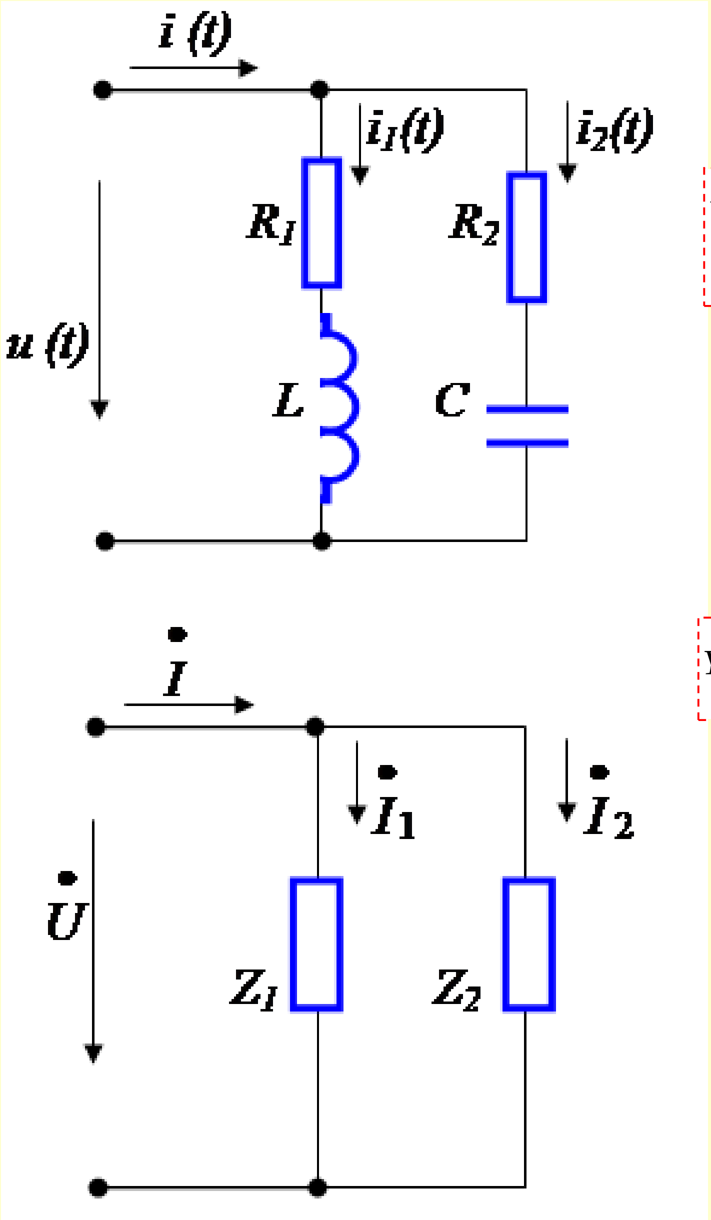
Токов резонанс



$$\boxed{B_{екв} = 0}$$

$$B_{екв} = \frac{\omega L}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^{\,2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} = 0$$

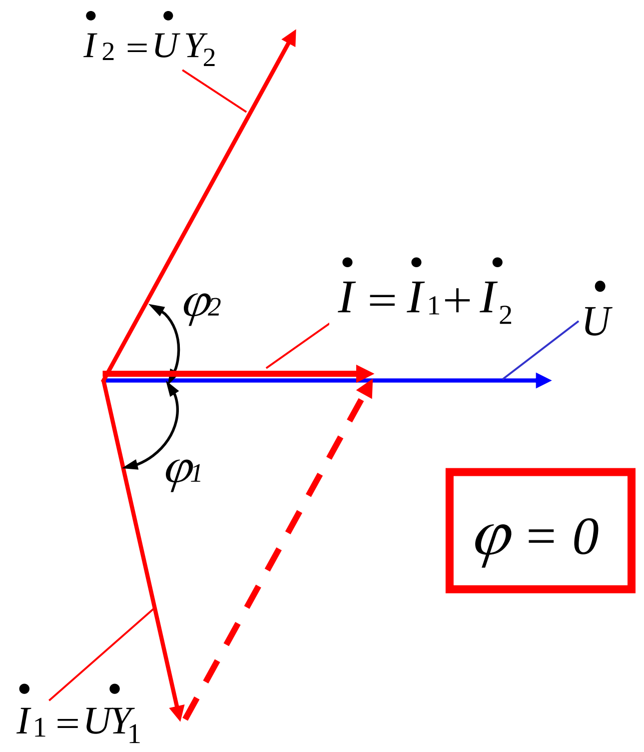
Токов резонанс



$$Y_2 = \frac{1}{R_2 - j\dfrac{1}{\omega C}}$$

$$Y_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1}$$

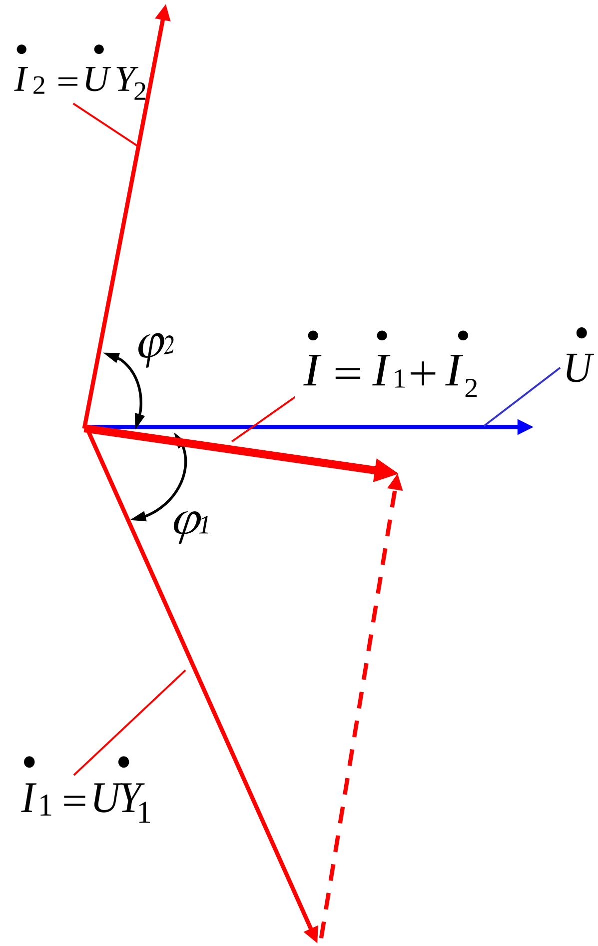
Векторна диаграма



$$\boxed{\varphi = 0}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = I_1 e^{j\varphi_1} + I_2 e^{j\varphi_2}$$

Забележка



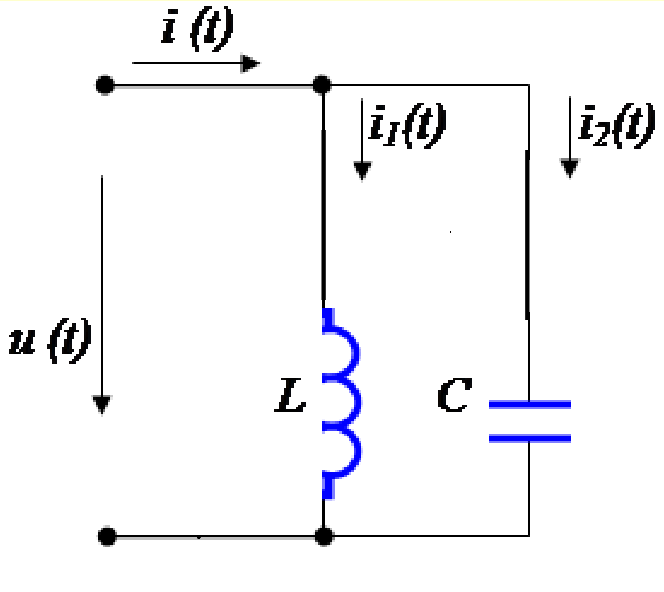
Входното съпротивление на по-голямата част от потребителите на ел.енергия има ***индуктивен*** характер.

За да се намали големината на тока, а от там и загубите на енергия в генераторите и свързващите проводници (за сметка на реактивната съставка на тока) паралелно на консуматорите се включват ***<u>кондензаторни батерии</u>***. Това е особено съществено за мощни потребители.

Ъгълът φ между напрежението и тока се регулира обикновено до $cos\varphi$ = 0,9÷0,95

Икономически по- изгодно е кондензаторните батерии да се включват на по-високо напрежение ($Ic=U.\omega C$).

Определяне на резонансната честота ωp за веригата



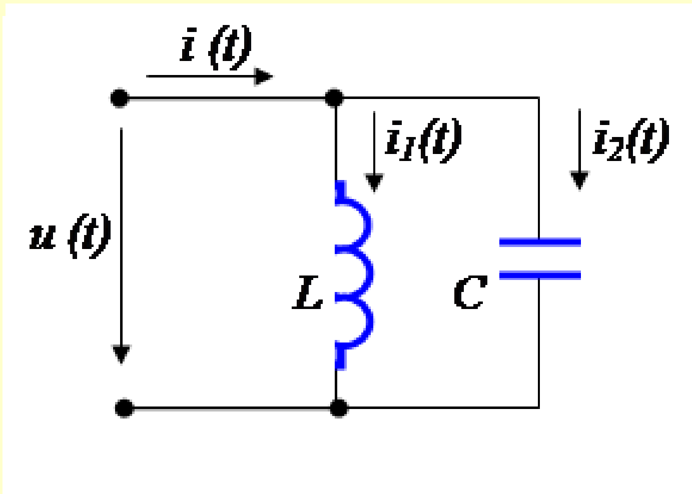
$$B_{екв} = \frac{\omega L}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^{\,2} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 0$$

$$\frac{\omega L}{\underbrace{\cancel{R_1^{\,2}}}_{0} + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{\underbrace{\cancel{R_2^{\,2}}}_{0} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

1. Идеализиран <u>контур без загуби</u> $R_1 = R_2 = 0$

$$\frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C \;\longrightarrow\; \omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1. Контур без загуби $R_1 = R_2 = 0$

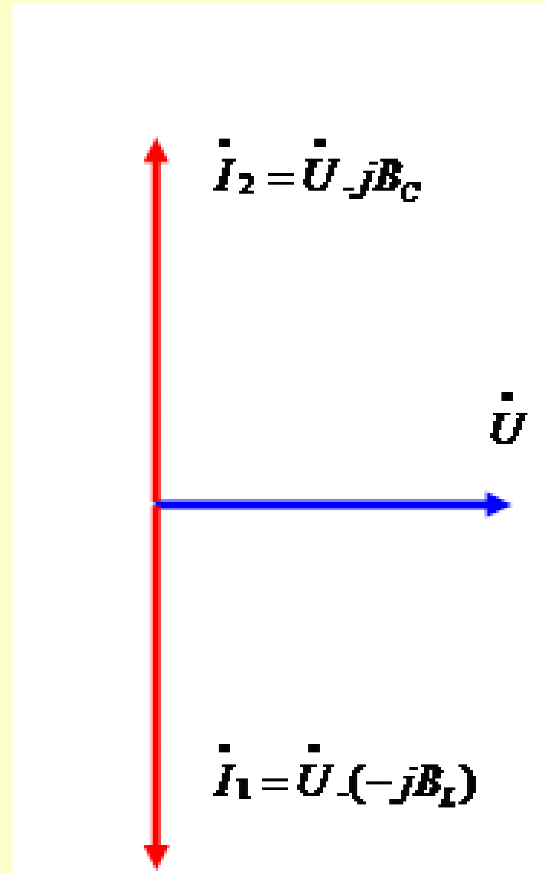


$$B_L = B_C \rightarrow \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$$

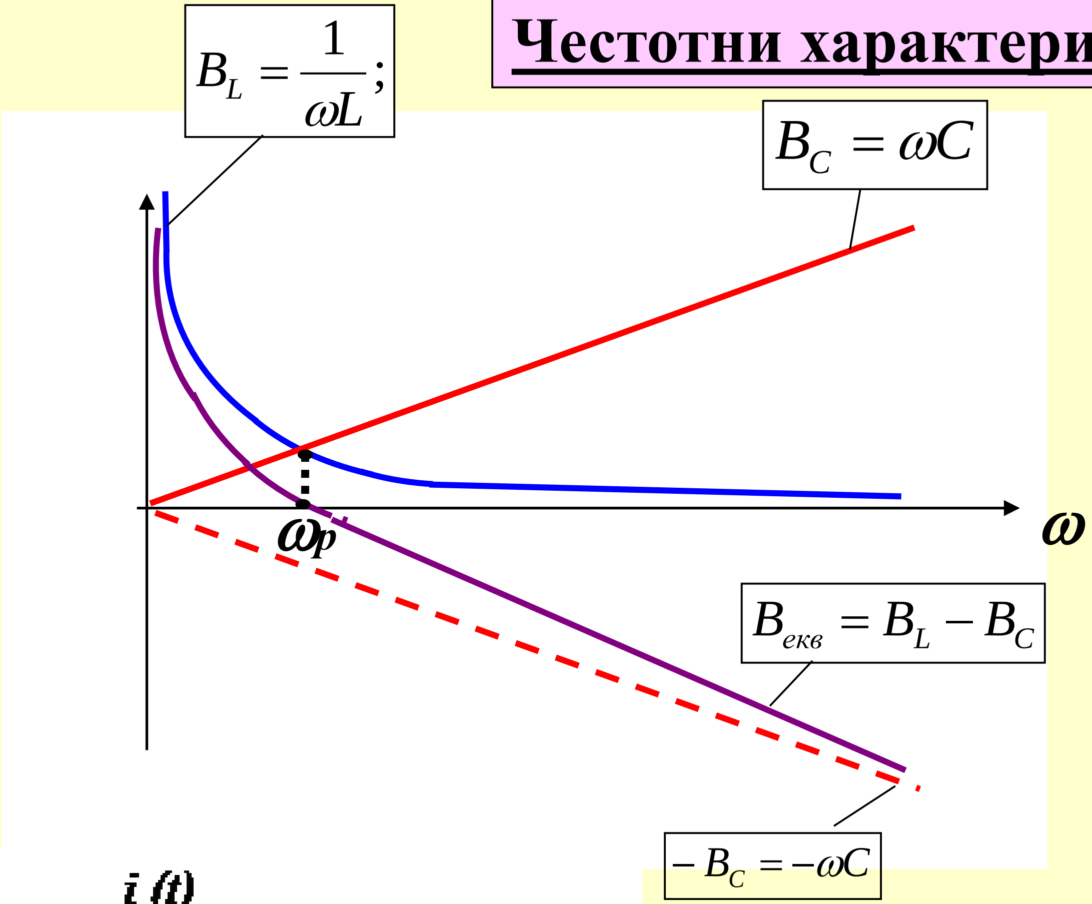
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \dot{U}.(-j\frac{1}{\omega L}) = \dot{U}.(-jB_L);$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{-j\frac{1}{\omega C}} = \dot{U}.j\omega C = \dot{U}(jB_C)$$

$$\boxed{B_L = \frac{1}{\omega_p L}; \qquad B_C = \omega_p C}$$



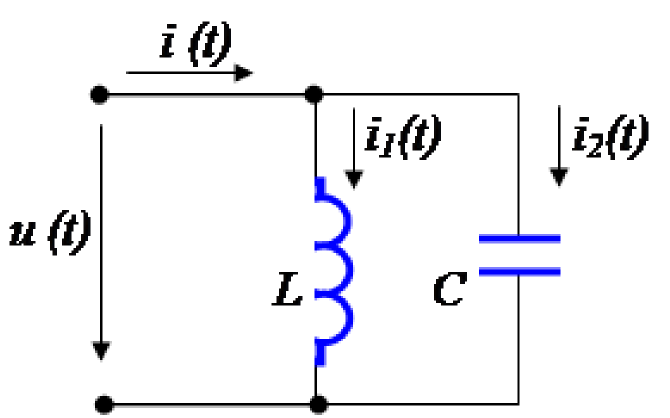
Честотни характеристики



$$B_L = \frac{1}{\omega L};$$

$$B_C = \omega C$$

$$B_{екв} = B_L - B_C$$

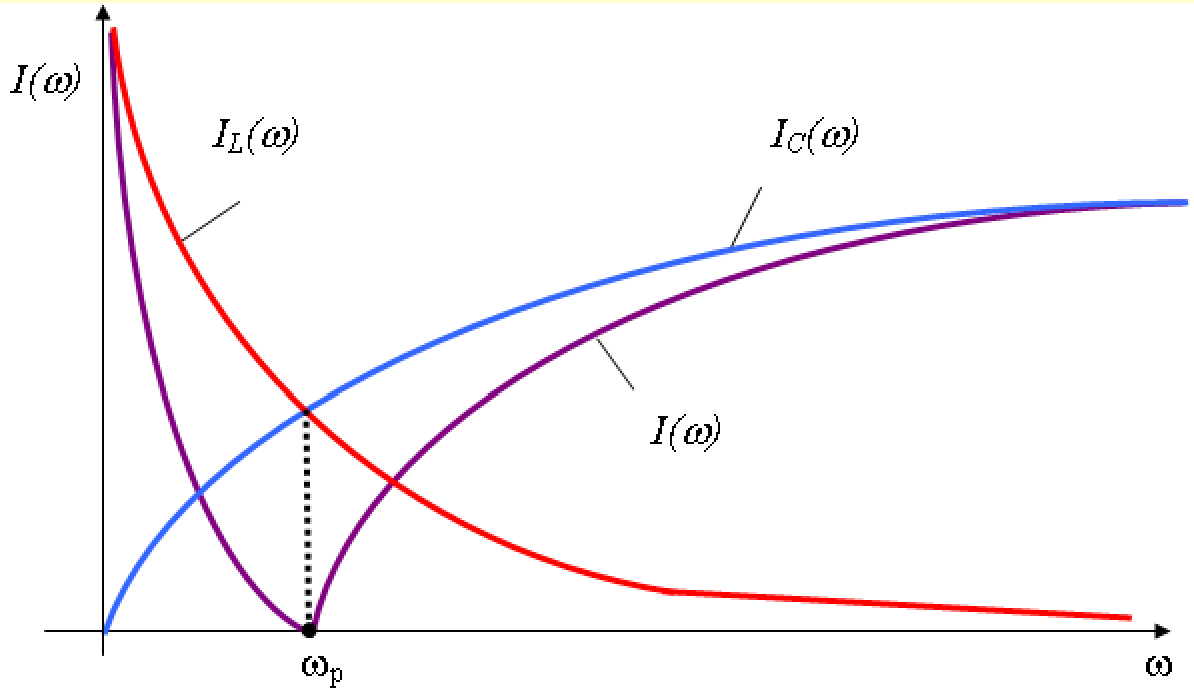


$\omega < \omega_p \Rightarrow$ проводимостта има индуктивен характер

$\omega = \omega_p \Rightarrow$ ***Векв = 0; I=0***

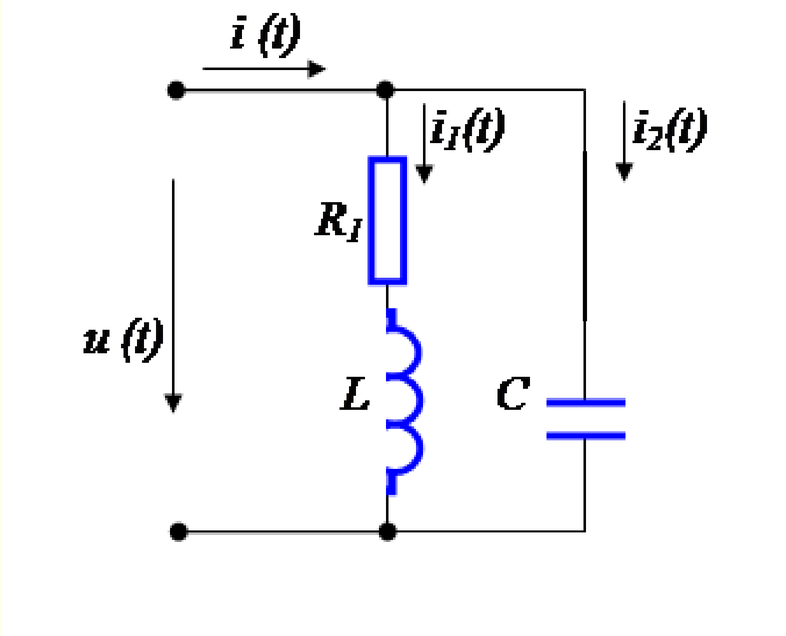
$\omega > \omega_p \Rightarrow$ проводимостта има капацитивен характер

Ефективни стойности на токовете *I1*, *I2* и *I*



фиг.5

Частен случй, когато R2=0, R1<<ωL



$$\frac{\omega L}{R_1^{\ 2} + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^{\ 2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

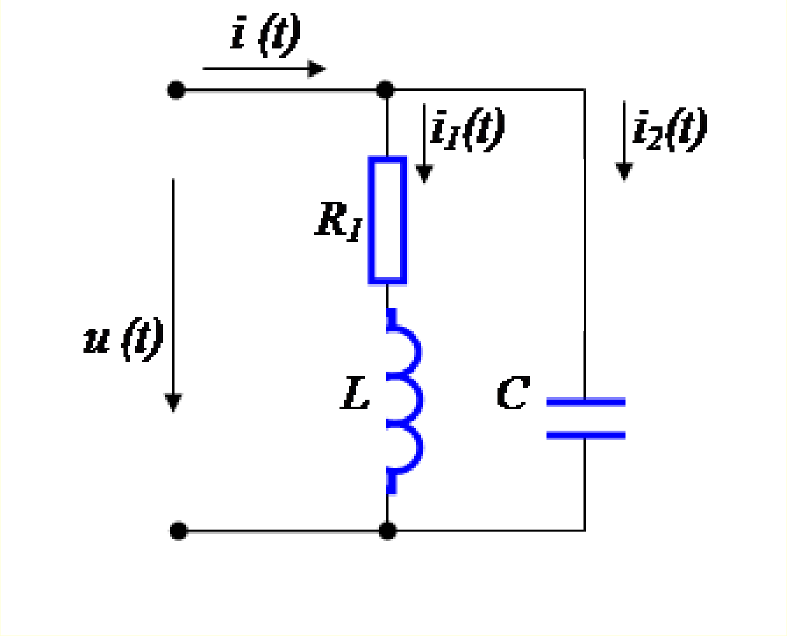
$R_2 = 0,\ R_1 \approx 0$

$$\frac{1}{\omega_p L} \approx \omega_p C$$

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Токът *I* може да се окаже **нищожно малък** в сравнение с I_1 и I_2.

Частен случй, когато R2=0, R1≠0

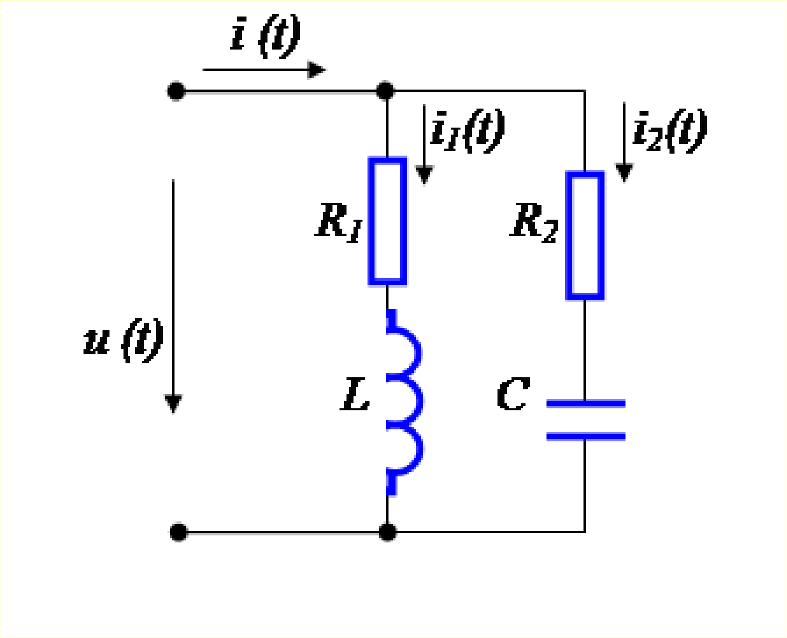


$$\frac{\omega L}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^{\,2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

R2=0, R1≠0

$$\frac{\omega L}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} = \omega C$$

R1≠0 и R2≠0



$$\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2L^2}=\frac{1/\omega C}{R_2^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}} \quad \textbf{(1)}$$

$$\omega_p L\left(R_2^2+\frac{1}{\omega_p^2C^2}\right)=\frac{1}{\omega_p C}\left(R_1^2+\omega_p^2L^2\right)$$

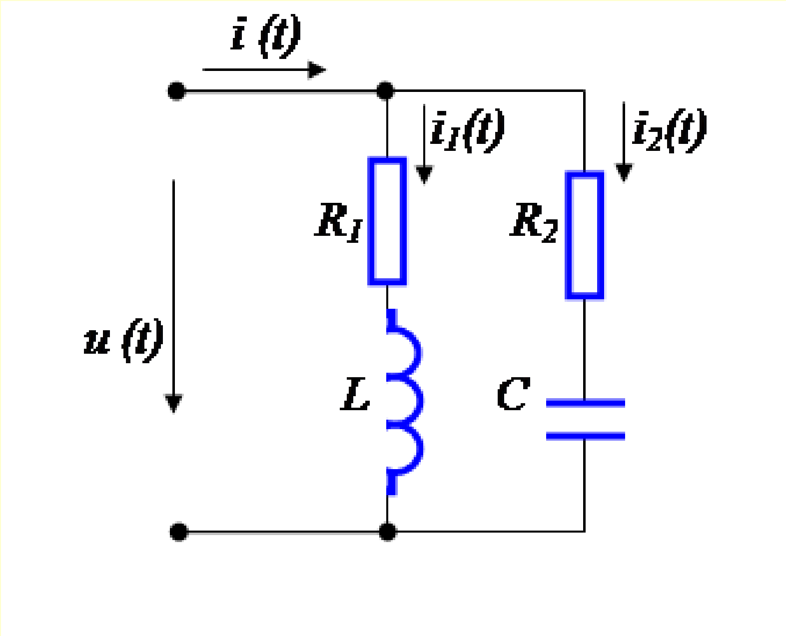
$$\Rightarrow \omega_p L R_2^2+\frac{L}{\omega_p C^2}=\frac{R_1^2}{\omega_p C}+\frac{\omega_p L^2}{C}$$

$$\Rightarrow \omega^2{}_p L R_2^2+\frac{L}{C^2}=\frac{R_1^2}{C}+\frac{\omega^2{}_p L^2}{C}$$

$$\Rightarrow \omega^2{}_p\left(LR_2^2-\frac{L^2}{C}\right)=\frac{R_1^2}{C}-\frac{L}{C^2}$$

$$\Rightarrow \omega_p=\sqrt{\frac{1}{LC}\frac{R_1^2-\dfrac{L}{C}}{\left(R_2^2-\dfrac{L}{C}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1^2-\dfrac{L}{C}}{\left(R_2^2-\dfrac{L}{C}\right)}}$$

R1≠0 и R2≠0



$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1{}^2 - \frac{L}{C}}{(R_2^2 - \frac{L}{C})}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

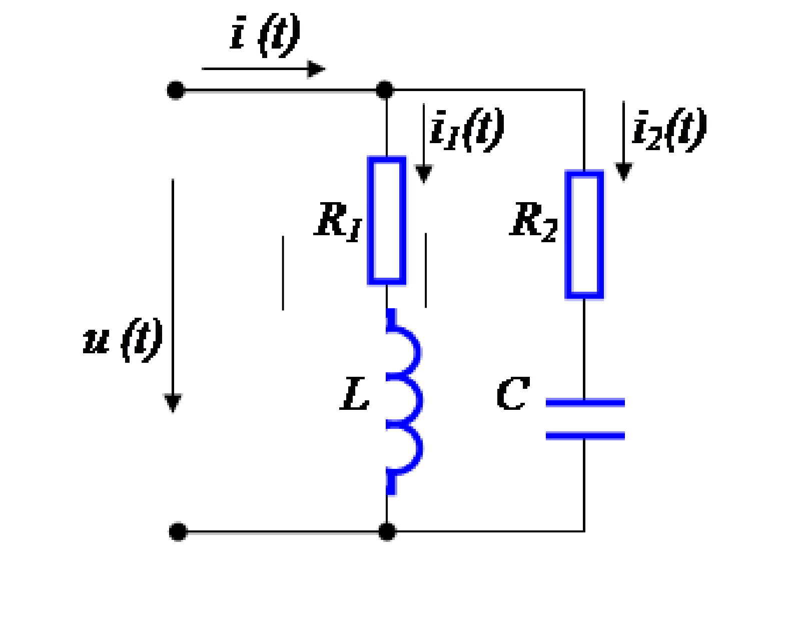
- резонансна честота
на контур без загуби

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- вълново съпротивление

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{\frac{R_1{}^2 - \rho^2}{R_2^2 - \rho^2}}$$

R1≠0 и R2≠0



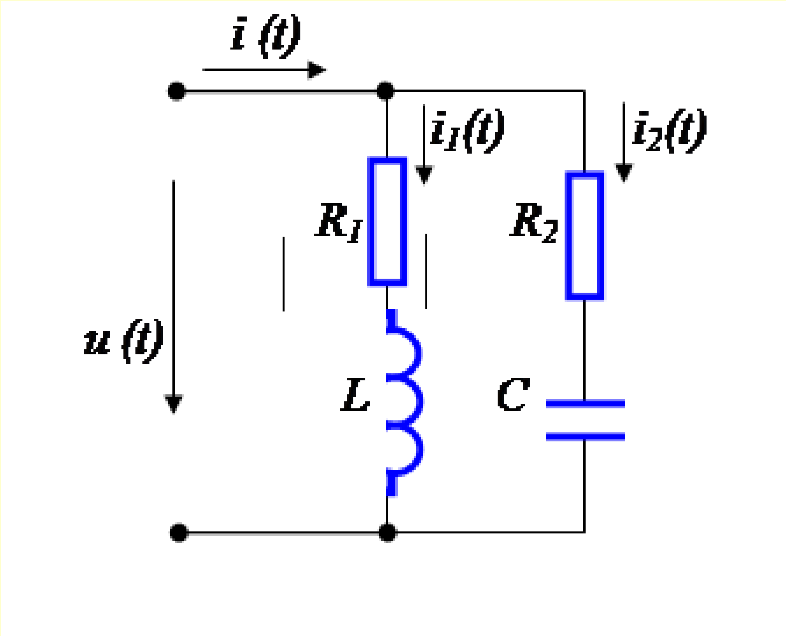
$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{R_1^{\,2} - \rho^{\,2}}{R_2^2 - \rho^{\,2}}}$$

1. $\left| \begin{array}{l} R_1 \langle \rho \\ R_2 \rangle \rho \end{array} \right.$ или $\left| \begin{array}{l} R_1 \rangle \rho \\ R_2 \langle \rho \end{array} \right.$

ω_p - имагинерна стойност

резонанс е невъзможен посредством регулиране на честотата.

R1≠0 и R2≠0

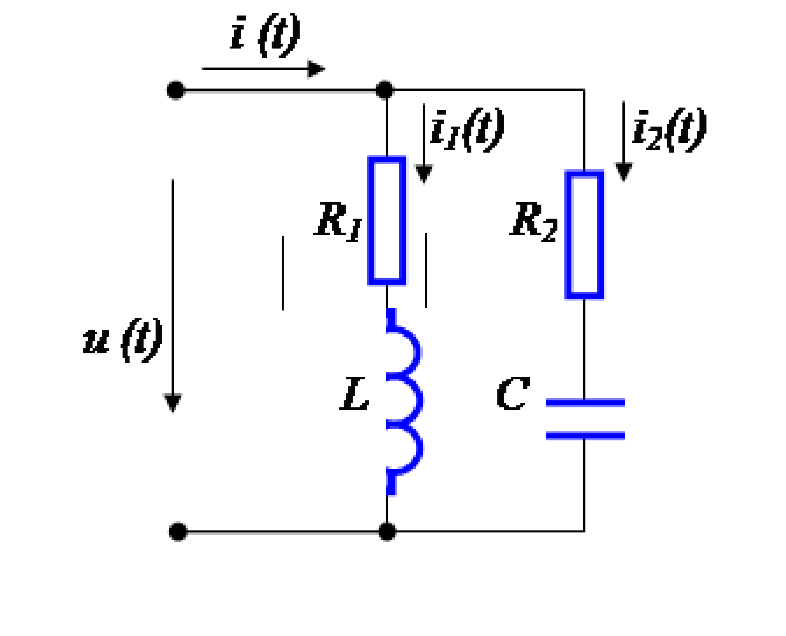


$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{R_1^{\;2} - \rho^2}{R_2^2 - \rho^2}}$$

2. $\begin{vmatrix} R_1 \langle \rho \\ R_2 \langle \rho \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} R_1 \rangle \rho \\ R_2 \rangle \rho \end{vmatrix}$

ω_p - реална стойност

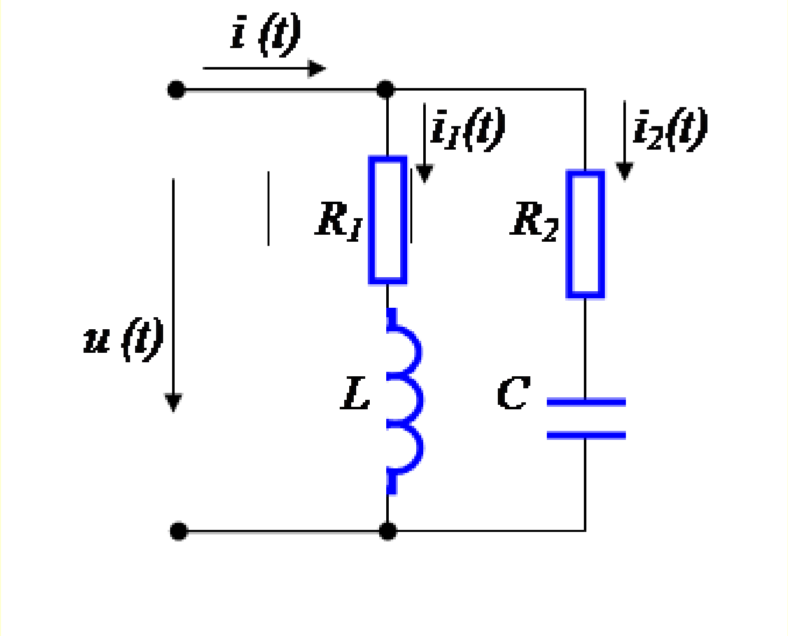
резонанс е ***<u>възможен</u>*** *посредством регулиране на честотата.*



$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{R_1^{\,2} - \rho^2}{R_2^2 - \rho^2}}$$

3. ако $R_1 = R_2 \neq \rho$

$$\omega_p = \omega_0$$

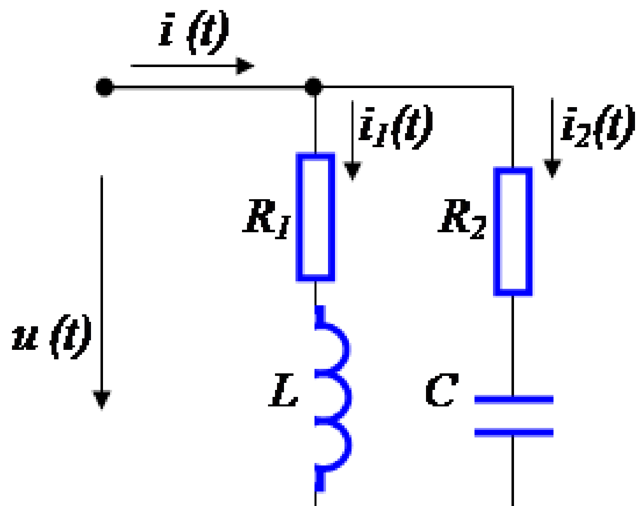


$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{R_1^{\;2} - \rho^2}{R_2^2 - \rho^2}}$$

4. ако $R_1 = R_2 = \rho$

<u>резонанс при всички честоти</u>

$R1 = R2 = \rho$ - **резонанс при всички честоти**



Доказателство:

Определяме входното съпротивление на веригата:

$Z_{ekв} = \rho$ **не зависи от честоттата!**

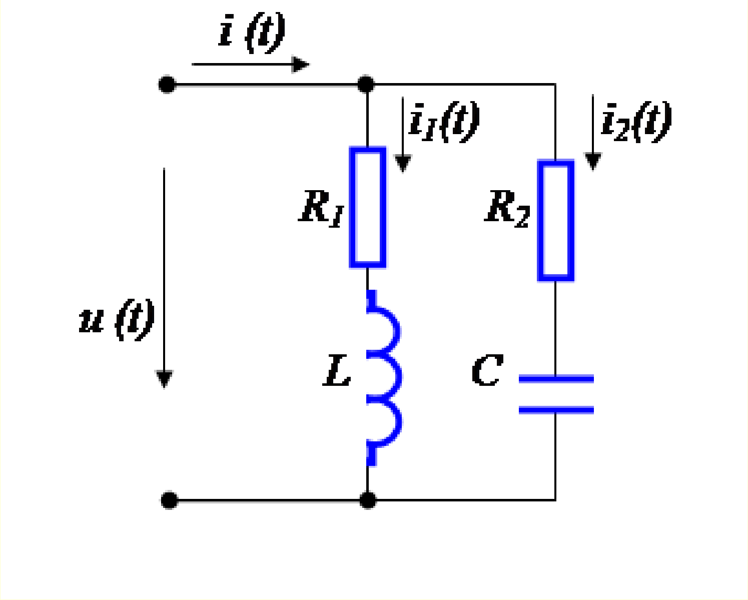
$$Z_1 = R + j\omega L, \quad Z_2 = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$Z_{ekв} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{ekв} = \frac{(R + j\omega L)(R - j\frac{1}{\omega C})}{R + j\omega L + R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + jR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} =$$

$$= \frac{R^2 + \rho^2 + jR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{2\rho^2 + j\rho(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\rho[2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]}{2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \rho$$

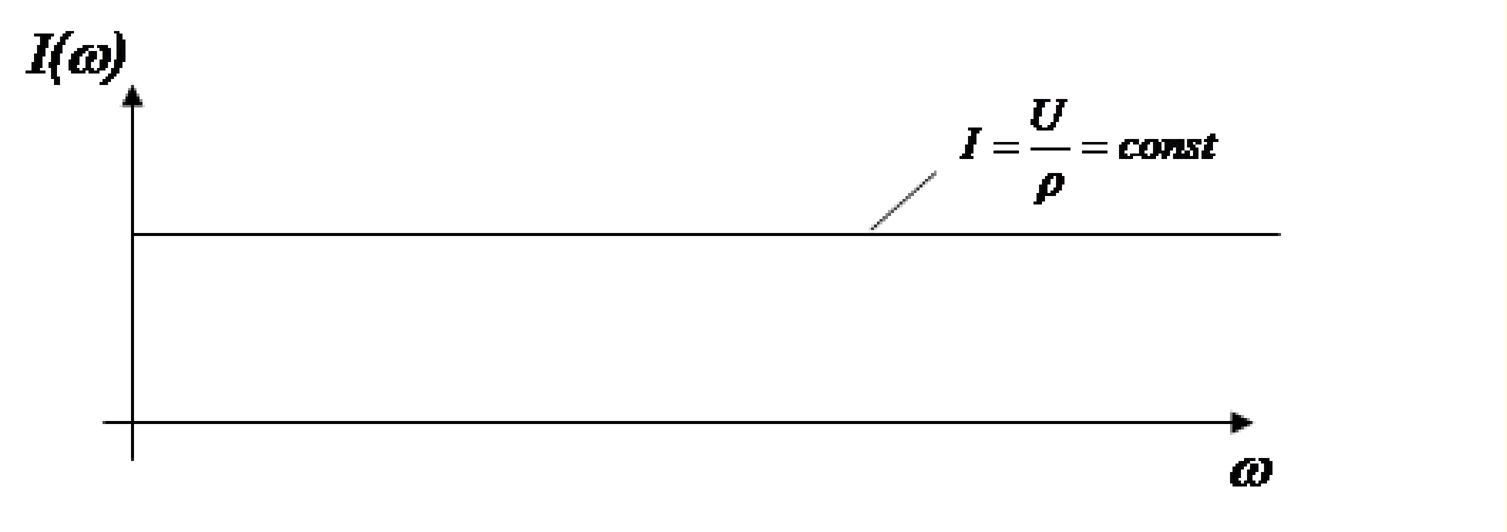
$R1 = R2 = \rho$ - **резонанс при всички честоти**



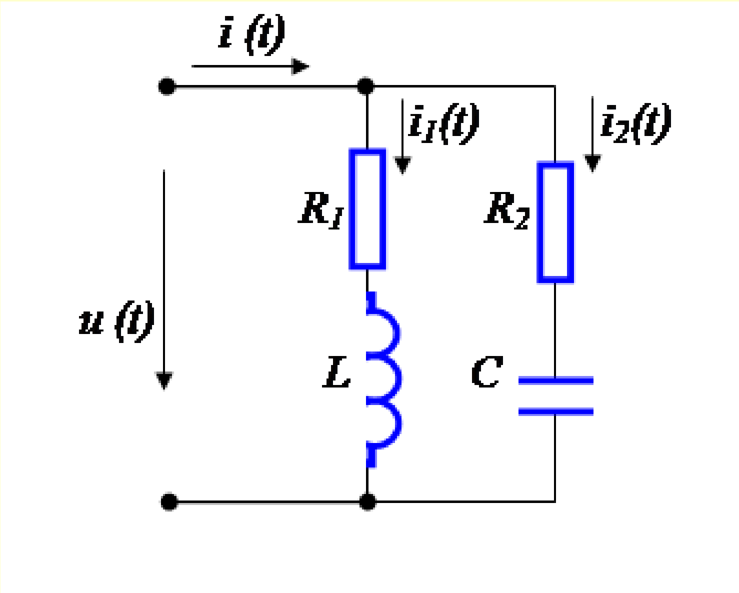
$$Z_{екв} = \rho = R$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\rho} = const$$

За **всяка честота** кривата на тока е права успоредна на абсцисната ос

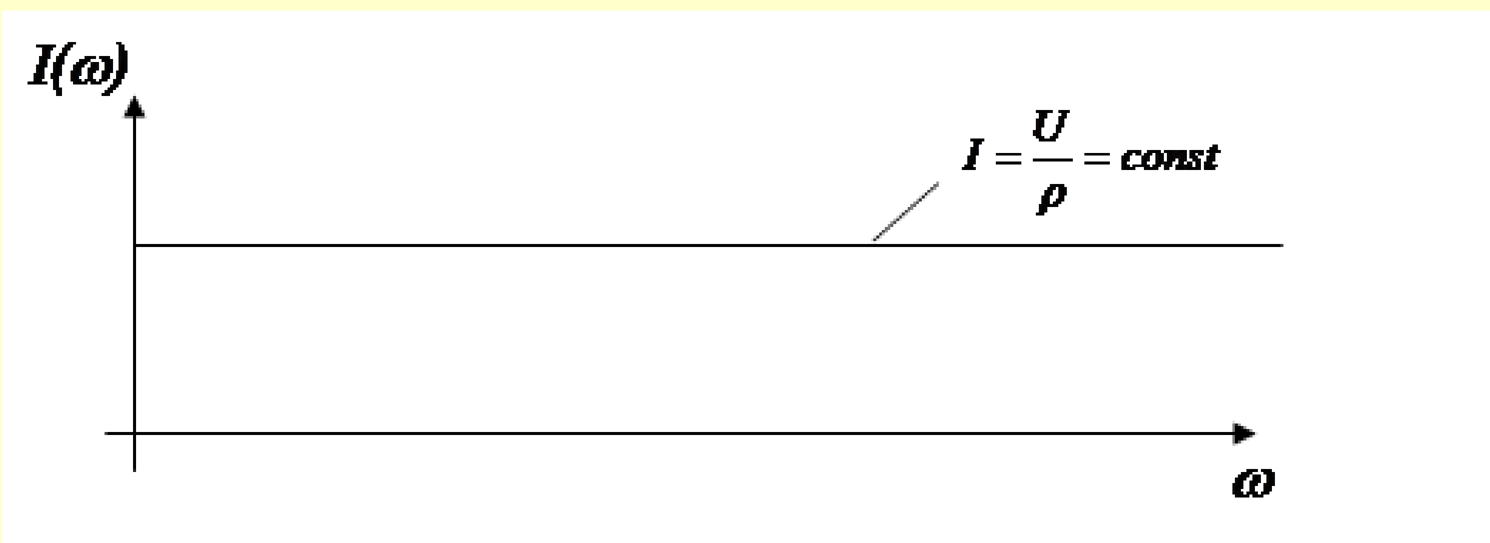


$R1 = R2 = \rho$ - **резонанс при всички честоти**

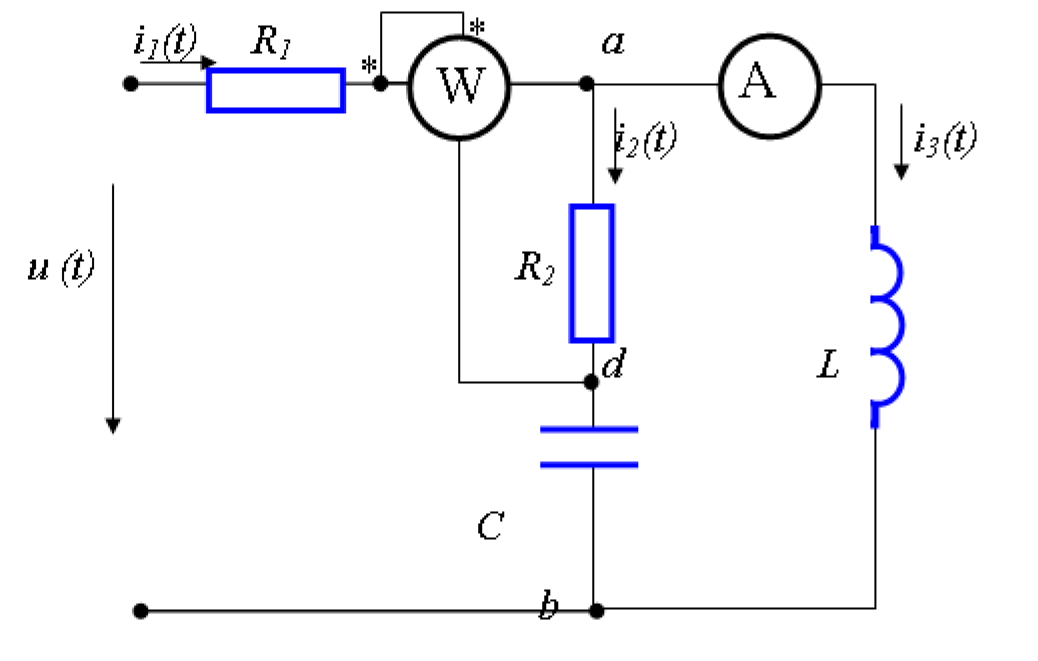


Получените резултати за резонанс при всички честоти са валидни, ***само ако параметрите на веригата не зависят от честотата.***

Поради повърхностния ефект, при който съпротивлението и индуктивността се променят с промяната на честотата, такъв режим се осъществява само за ограничен честотен обхват.



Пример- Да се определи стойността на капацитета C, за която във веригата има резонанс



$f_p = 80Hz$,

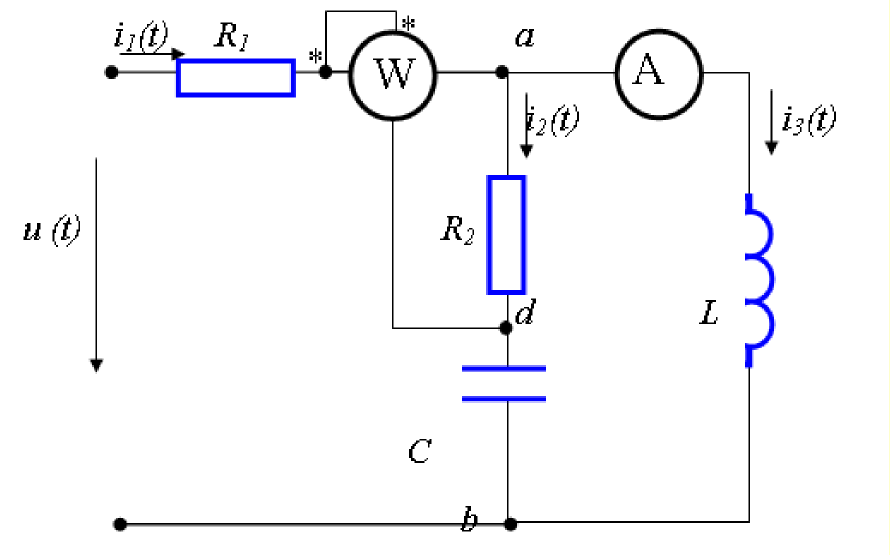
$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$,

$L = 20\ mH$,

2.Ако е известно напрежението на входа на веригата:

$u(t) = 141\sin(\omega t - 53)V$,

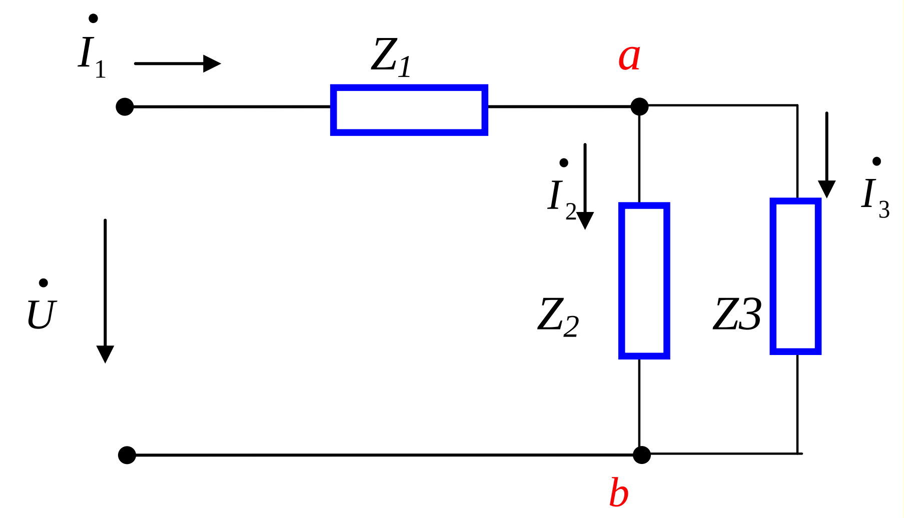
да се определят показанията на уредите.



Условието за ***токов резонанс*** е:

$$Y_{ab} = G_{ab} - j\cancel{B}_{ab} \quad \mathbf{0}$$

$$\boxed{B_{ab} = 0}$$

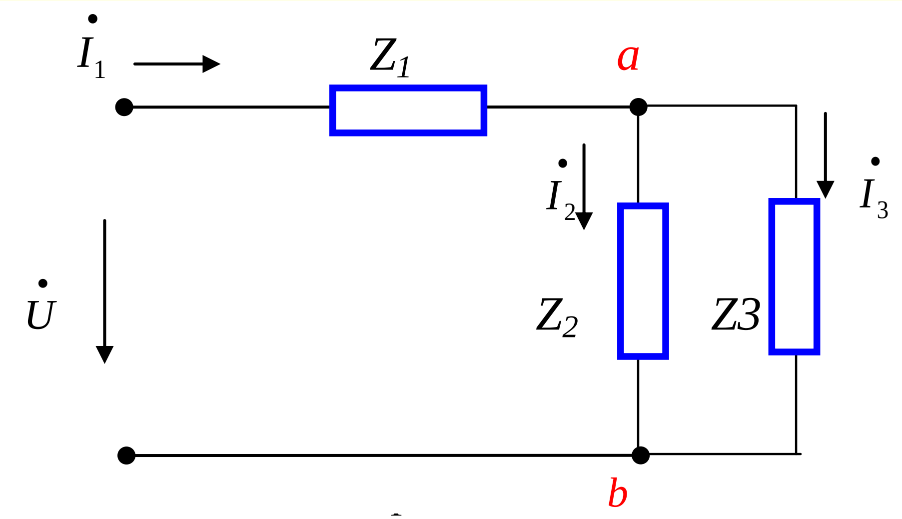


$$\omega = 2\pi f = 2\pi.80 \approx 500 = 5.10^2 \, rad/s$$

$$Z_1 = R_1 = 10\Omega$$

$$Z_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C} = (5 - jX_C)\Omega$$

$$Z_3 = j\omega L = j5.10^2 20.10^{-3} = j10\Omega$$



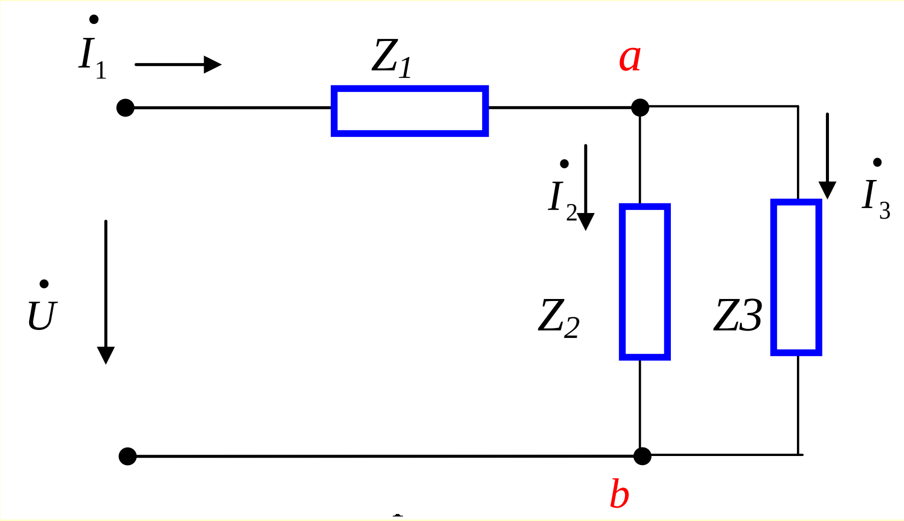
$$Z_1 = R_1 = 10\Omega$$
$$Z_2 = (5 - jX_C)\Omega$$
$$Z_3 = j10\Omega$$

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{5 - jX_C} + \frac{1}{j10} = \frac{1}{(5 - jX_C)}\frac{(5 + jX_C)}{(5 + jX_C)} - j0.1 =$$

$$\frac{5 + jX_C}{5^2 + X_C{}^2} - j0.1 = \frac{5}{25 + X_C{}^2} + j\frac{X_C}{25 + X_C{}^2} - j0.1 =$$

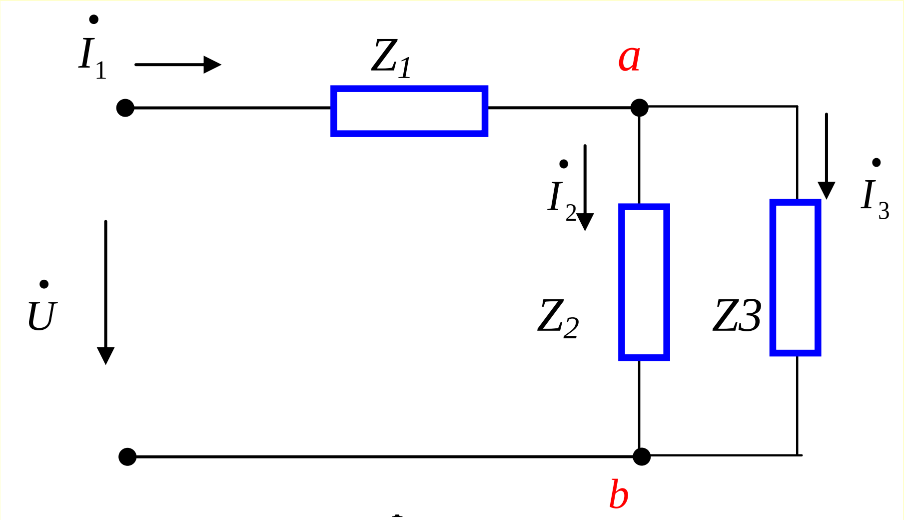
$$= \frac{5}{5^2 + X_C{}^2} + j\left(\frac{X_C}{25 + X_C{}^2} - 0.1\right) = G_{ab} - jB_{ab}$$



$$G_{ab} = \frac{5}{5^2 + X_C{}^2};$$

$$B_{ab} = \frac{X_C}{25 + X_C{}^2} - 0.1$$

$$\boxed{B_{ab} = \frac{X_C}{25 + X_C{}^2} - 0.1 = 0}$$



$$\boxed{B_{ab} = \frac{X_C}{25 + X_C^{\,2}} - 0.1 = 0}$$

$$\boxed{\Rightarrow C = 400\,\mu F}$$

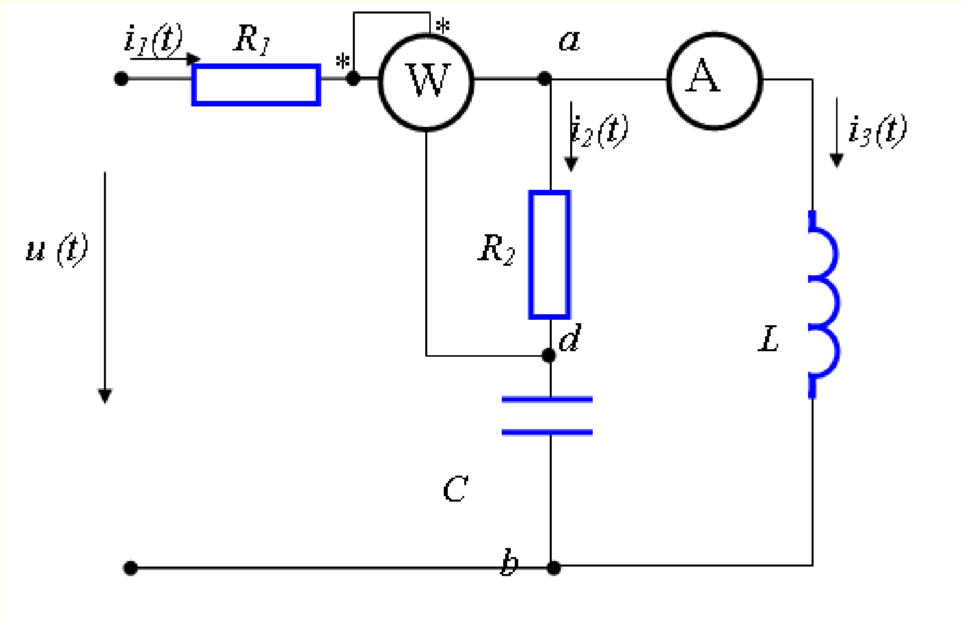
$$\Rightarrow \frac{X_C}{25 + X_C^{\,2}} = 0.1 \quad \text{или} \quad \frac{10\,X_C}{25 + X_C^{\,2}} = 1$$

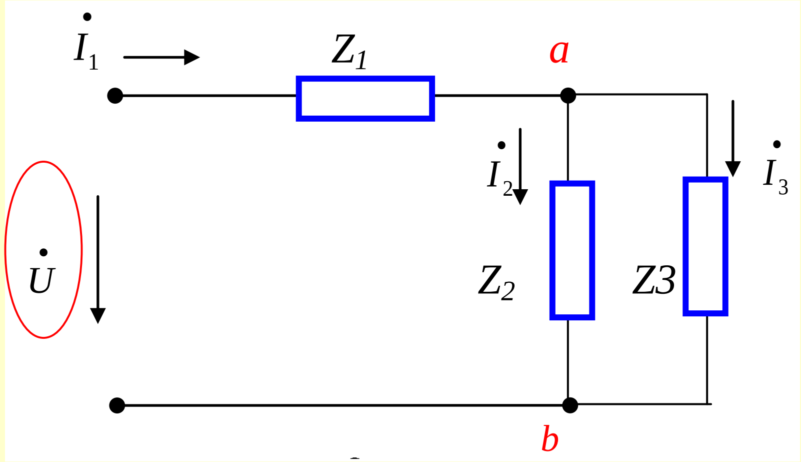
$$\Rightarrow 25 - 10\,X_C + X_C^{\,2} = 0$$

$$\Rightarrow X_C = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = 5\Omega$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{5.10^2 5} = 4.10^{-4} F = 400.10^{-6} F = 400\,\mu F$$

Определяне показанията на уредите





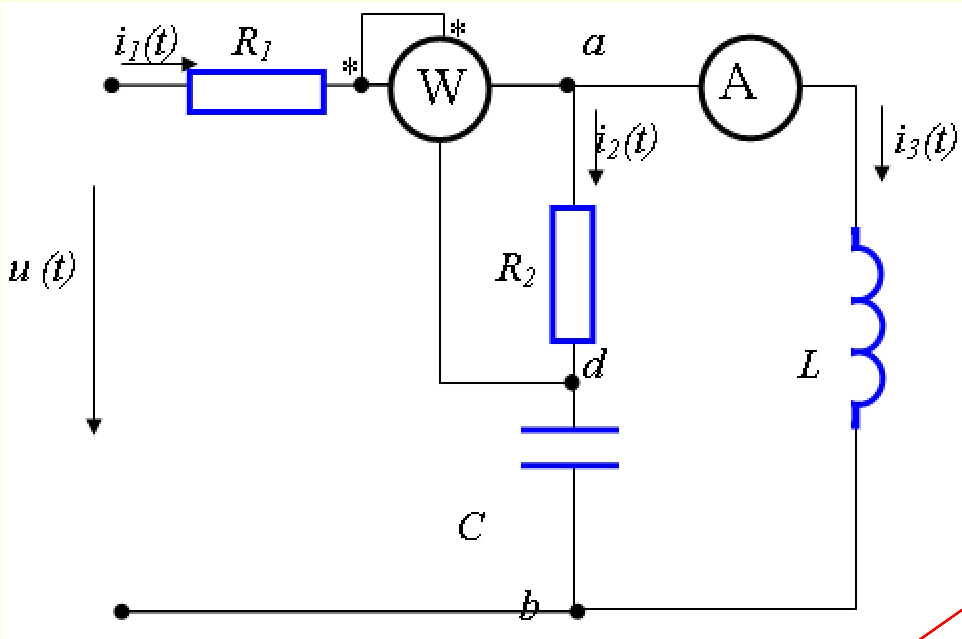
Напрежението на източника е:

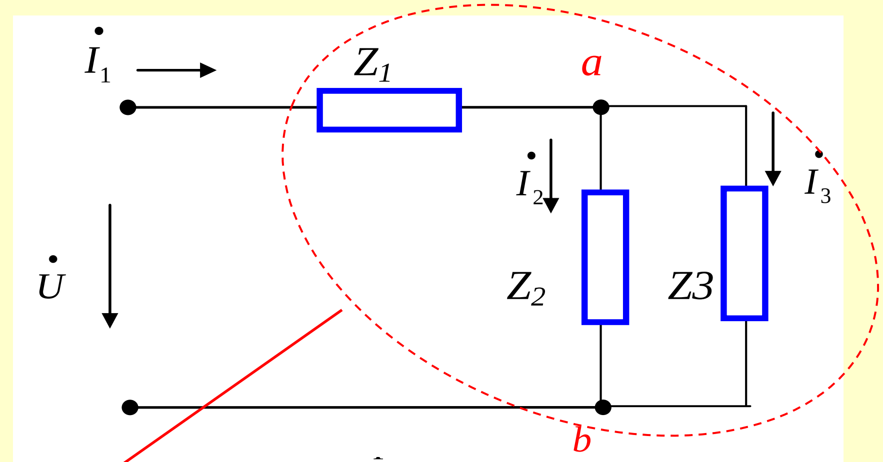
$u(t) = 141\sin(\omega t + 53) V$

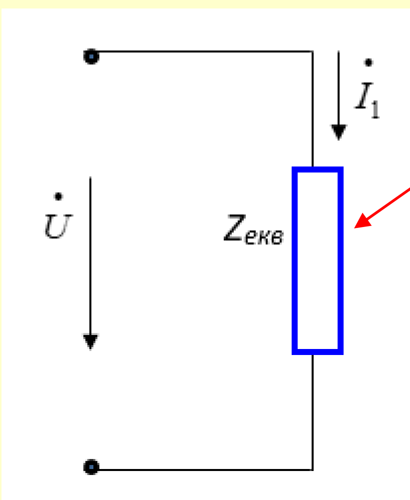
Следователно комплексното напрежение на източника се определя като:

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{141}{\sqrt{2}}e^{j53} =$$

$$100.[\cos 53^\circ + j\sin 53^\circ] = 100.(0{,}6 + j0{,}8) = (60 + j80)V$$



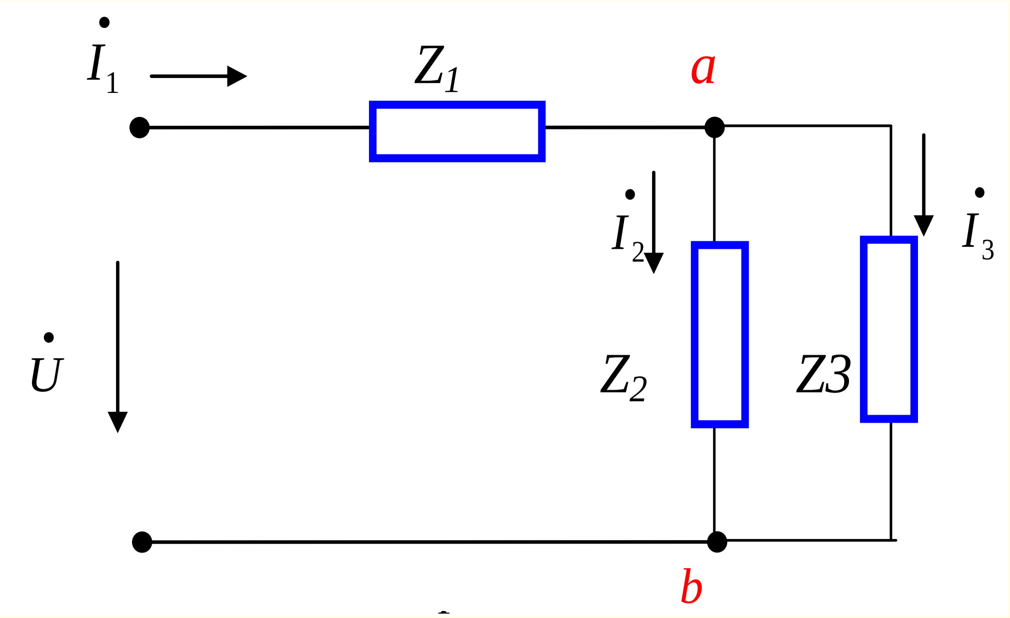


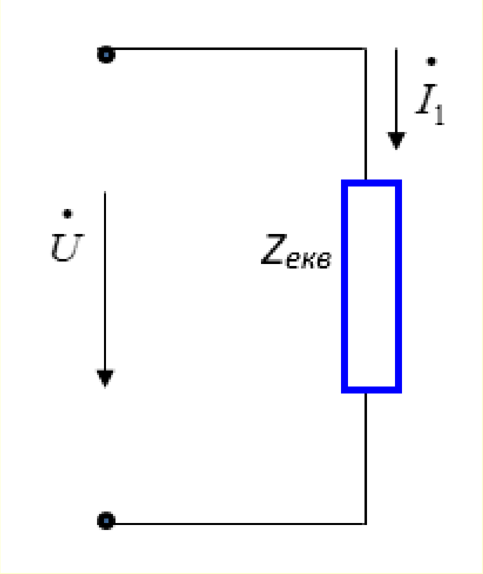


$$Z_{\text{екв}} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{\text{екв}} = 10 + \frac{(5 - j5).(j10)}{5 - j5 + j10} = 10 + \frac{(1 - j).(j10)}{1 + j} =$$

$$10 + \frac{10(1 + j)}{1 + j} = 10 + 10 = 20\Omega$$



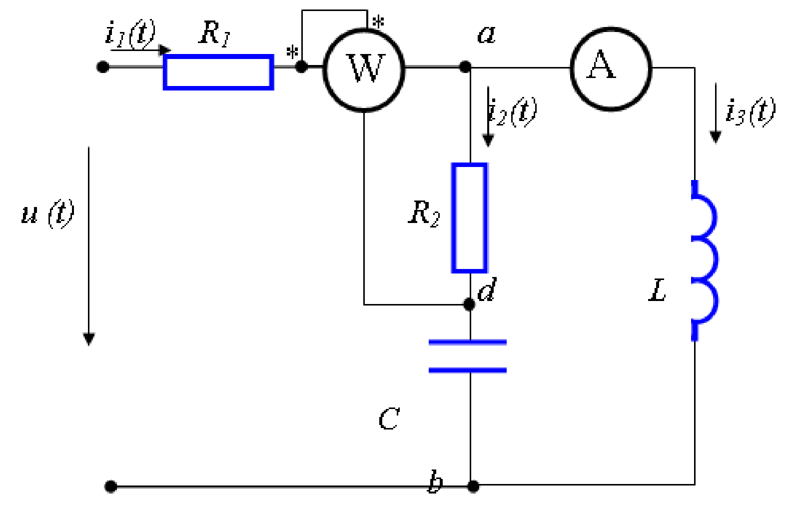


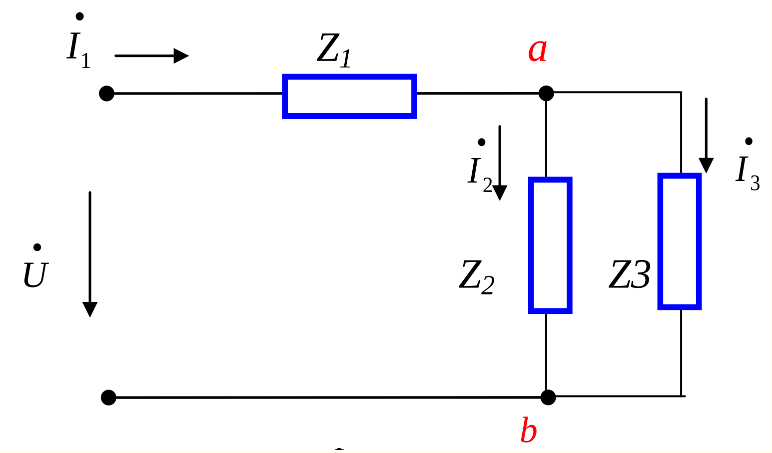
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ek}} = \frac{60 + j80}{20} = (3 + j4)A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = (3 + j4)\frac{j10}{5 - j5} = \frac{(-40 + j30)}{5 - j5} = \frac{(-8 + j6)}{1 - j} =$$

$$\frac{(-8 + j6)}{1 - j}\frac{(1 + j)}{(1 + j)} = \frac{(-8 + j6 - 8j - 6)}{2} = (7 - j)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 3 + j4 - 7 + j = (-4 + 5j)A$$





$$\dot{I}_1 = (3 + j4)A$$

$$\dot{I}_2 = (7 - j)A$$

$$\dot{I}_3 = (-4 + 5j)A$$

$$I_A = I_3 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6{,}4A$$

$$P_W = \mathrm{Re}[\dot{U}_W \overset{*}{I}_W] = \mathrm{Re}[\dot{U}_{ad} \overset{*}{I}_1] = \mathrm{Re}[\dot{I}_2 R_2 \overset{*}{I}_1]$$

$$= \mathrm{Re}[(7 - j)5(3 - j4)] =$$

$$= \mathrm{Re}[(35 - j5)(3 - j4)] = 35.3 - 5.4 = 85W$$


Благодаря за вниманието
проф. д-р Илона Ячева