

Методи за анализ на синусоидален режим в линейни електрически вериги.

(лекция **03.11.2022г.**)

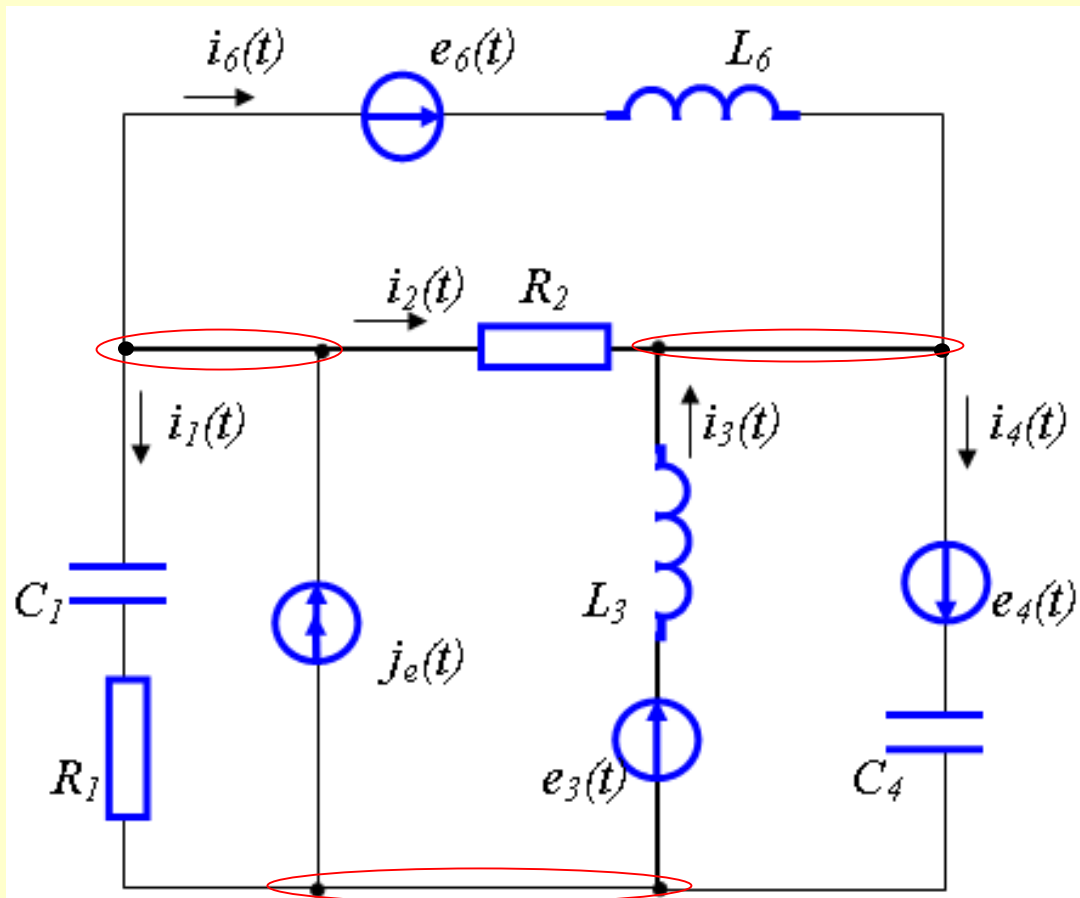
Преподавател: проф. д-р Илона Ячева

*кат. “Теоретична Електротехника”,
Технически университет - София*



Методи за анализ на стационарни режими в линейни електрически вериги

- При анализ на вериги с повече от един източник и по-голям брой клонове се използват различни методи за анализ на стационарни режими



При използването им се достига до решаване на линейни системи уравнения относно неизвестни токове или потенциали.

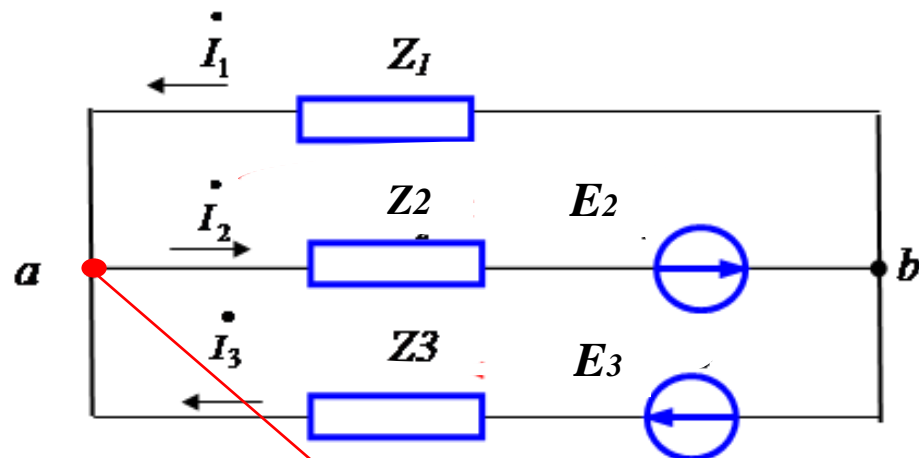
Важно е правилно да определим броя възли и клонове във веригата

брой възли **$n=3$** ,

брой клонове **$m=6$**

Метод с клонови токове

- система уравнения по законите на Кирхоф



за възел "a":

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

за двата контура :

$$-\dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_2 = -E_2$$

$$\dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_3 Z_3 = E_2 + E_3$$

1. Определяме брой клонове и брой възли във веригата:

- брой възли $n=2$,
- брой клонове $m=3$

2. Записваме система уравнения по метода с клонови токове:

- $n-1=1$ уравнения по I закон на Кирхоф
- $k=m-n+1=2$ уравнения по II закон на Кирхоф

- Предимство - приложим за всяка схема независимо от режима и вида на входните сигнали.
- Недостатък - голям брой уравнения за по-сложни вериги.

Метод с контурни токове

Алгоритъм на метода

1. Определяме брой клонове и брой възли във веригата:

брой възли - n

брой клонове - m

2. Избираме K брой независими контура, в които протичат

K -на брой контурни тока $\overset{\bullet}{I}_{\text{конт } 1}, \overset{\bullet}{I}_{\text{конт } 2}, \overset{\bullet}{I}_{\text{конт } 3}, \dots, \overset{\bullet}{I}_{\text{конт } k}$

$$k = m - n + 1$$

3. Записваме система от K -на брой уравнения относно неизвестните контурни токове, която има вида:

Система уравнения по МКТ

$$\begin{aligned}
 & \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{11} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{12} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{13} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{1k} = \dot{E}_{\text{конт } 1} \\
 & \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{21} + \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{22} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{23} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{2k} = \dot{E}_{\text{конт } 2} \\
 & \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{31} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{32} + \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{33} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{3k} = \dot{E}_{\text{конт } 3} \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{k1} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{k2} \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{23} \pm \dots + \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{kk} = \dot{E}_{\text{конт } k}
 \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{\text{конт } 1}, \dot{I}_{\text{конт } 2}, \dot{I}_{\text{конт } 3}, \dots, \dot{I}_{\text{конт } k}$$

--- търсените контурни токове

Система уравнения по МКТ

$$\begin{aligned}
 & + \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{11} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{12} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{13} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{1k} = \dot{E}_{\text{конт } 1} \\
 & \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{21} + \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{22} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{23} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{2k} = \dot{E}_{\text{конт } 2} \\
 & \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{31} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{32} + \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{33} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{3k} = \dot{E}_{\text{конт } 3} \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{k1} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{k2} \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{23} \pm \dots + \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{kk} = \dot{E}_{\text{конт } k}
 \end{aligned}$$

$$Z_{ii} = Z_{11}, Z_{22}, Z_{33}, \dots, Z_{kk}$$

--- собствени контурни съпротивления

Система уравнения по МКТ

$$\begin{aligned}
 + \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{11} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{12} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{13} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{1k} &= \dot{E}_{\text{конт } 1} \\
 \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{21} + \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{22} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{23} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{2k} &= \dot{E}_{\text{конт } 2} \\
 \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{31} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{32} + \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{33} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{3k} &= \dot{E}_{\text{конт } 3} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{k1} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{k2} \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{23} \pm \dots + \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{kk} &= \dot{E}_{\text{конт } k}
 \end{aligned}$$

Z_{ij}

----- взаимни контурни съпротивления за контур "i" и за контур "j".

$$Z_{ij} = Z_{ji}$$

Система уравнения по МКТ

$$\begin{aligned}
 + \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{11} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{12} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{13} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{1k} &= \dot{E}_{\text{конт } 1} \\
 \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{21} + \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{22} \pm \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{23} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{2k} &= \dot{E}_{\text{конт } 2} \\
 \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{31} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{32} + \dot{I}_{\text{конт } 3} Z_{23} \pm \dots \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{3k} &= \dot{E}_{\text{конт } 3} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 \pm \dot{I}_{\text{конт } 1} Z_{k1} \pm \dot{I}_{\text{конт } 2} Z_{k2} \pm \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{23} \pm \dots + \dot{I}_{\text{конт } k} Z_{kk} &= \dot{E}_{\text{конт } k}
 \end{aligned}$$

$\dot{E}_{\text{конт } 1}, \dot{E}_{\text{конт } 2}, \dot{E}_{\text{конт } 3}, \dots, \dot{E}_{\text{конт } k}$ ----- контурни е. д. н.

Метод с контурни токове

Алгоритъм на метода

4. Решаваме системата уравнения и определяме контурните токове:

- $I_{\text{конт } 1} = \dots\dots\dots$

- $I_{\text{конт } 2} = \dots\dots\dots$

- $I_{\text{конт } 3} = \dots\dots\dots$

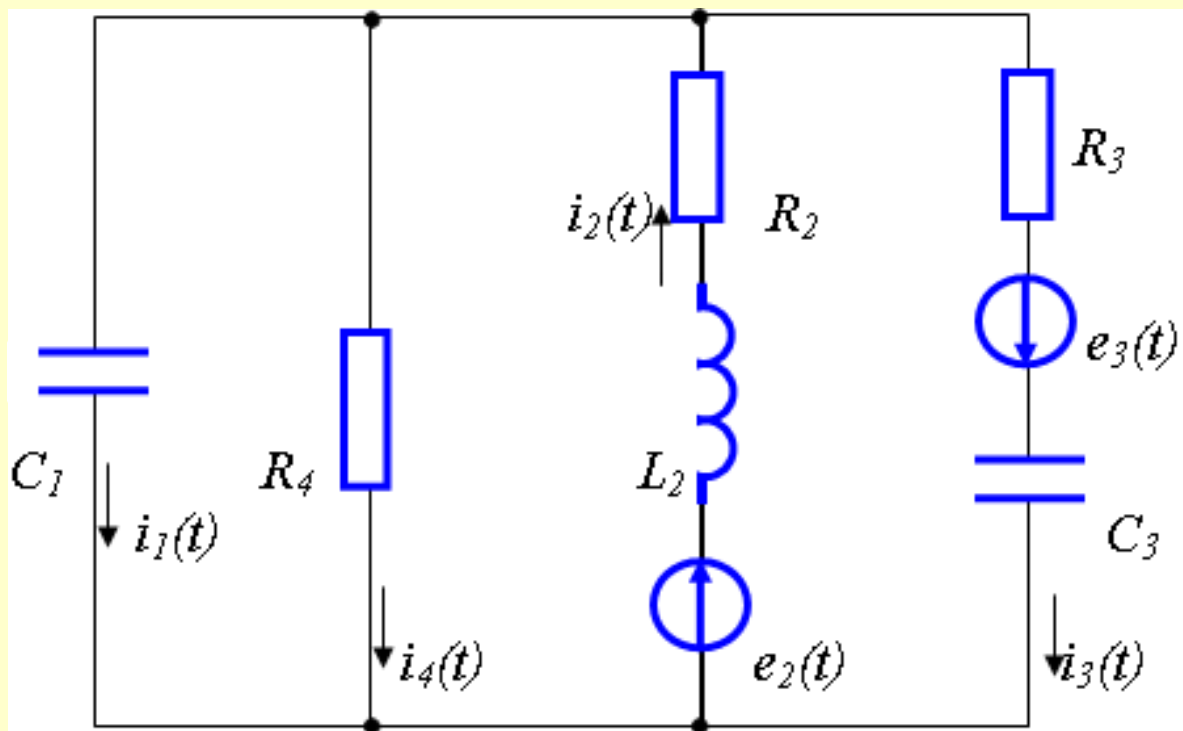
.....

- $I_{\text{конт } k} = \dots\dots\dots$

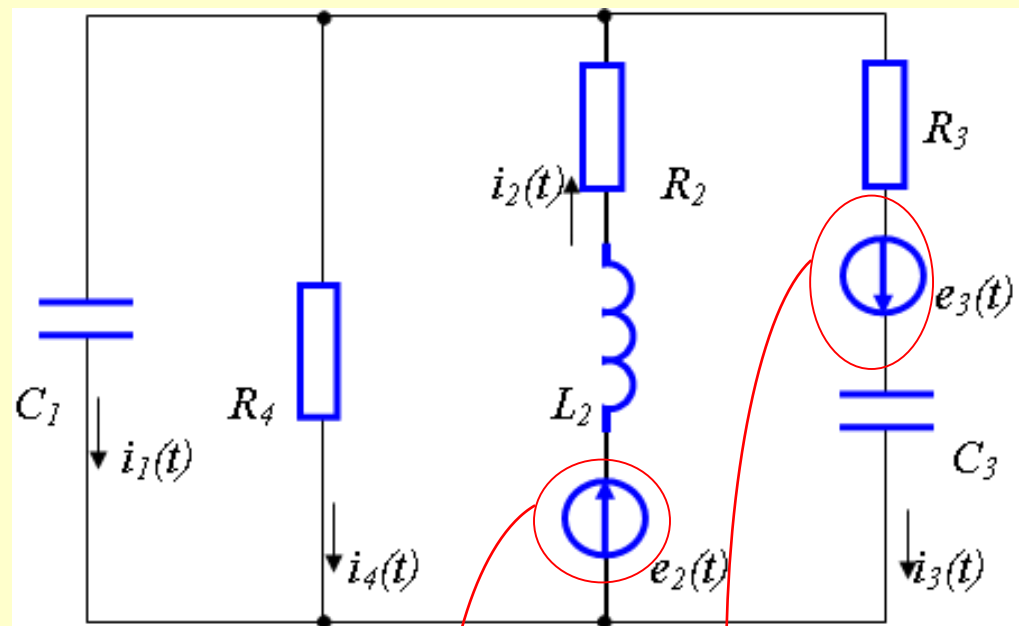
5. Определяме клоновите токове като алгебрична сума от контурните токове, които минават през съответния клон

Пример 1:

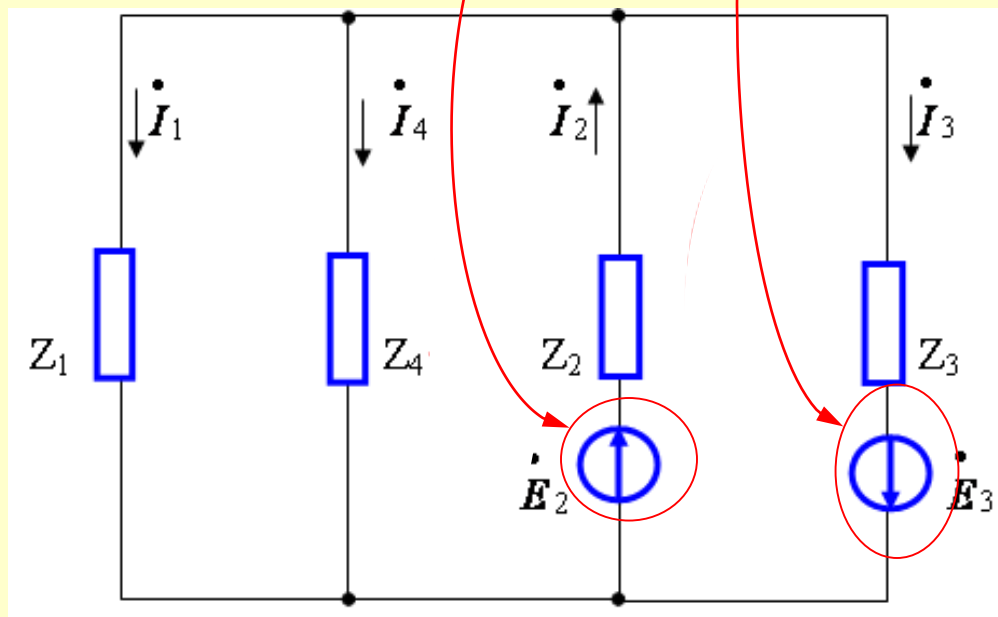
Да се определят клоновите токове за веригата показана на фигурата, като се използва МКТ



$$\begin{aligned} f &= 160 \text{ Hz}, \\ R_4 &= R_3 = 10 \Omega, R_2 = 5 \Omega, \\ L_2 &= 10 \text{ mH}, \\ C_1 &= 100 \mu\text{F}, C_3 = 125 \mu\text{F}, \\ e_2(t) &= 71 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V} \\ e_3(t) &= 112 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

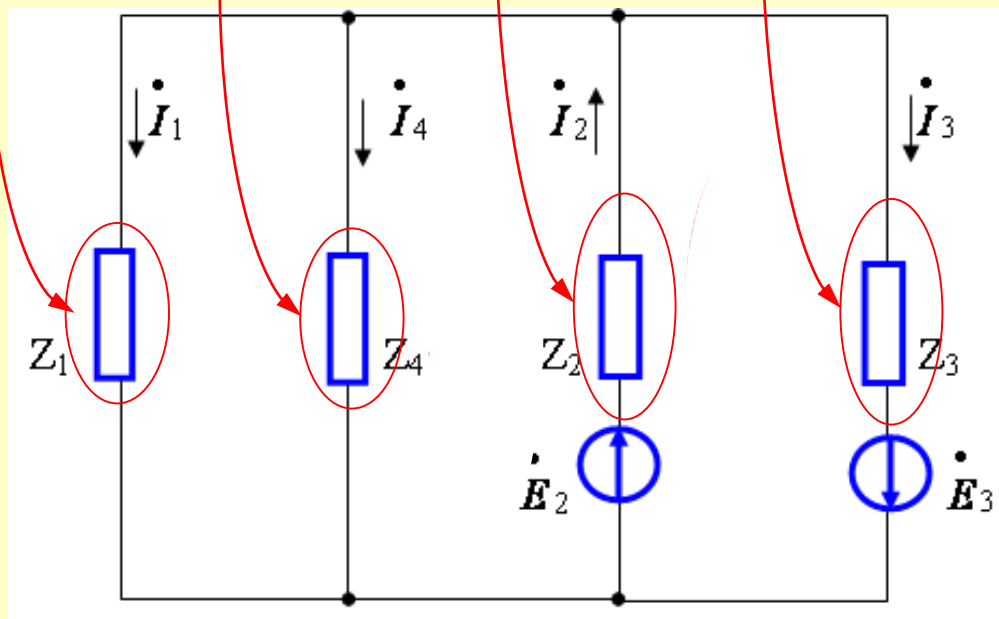
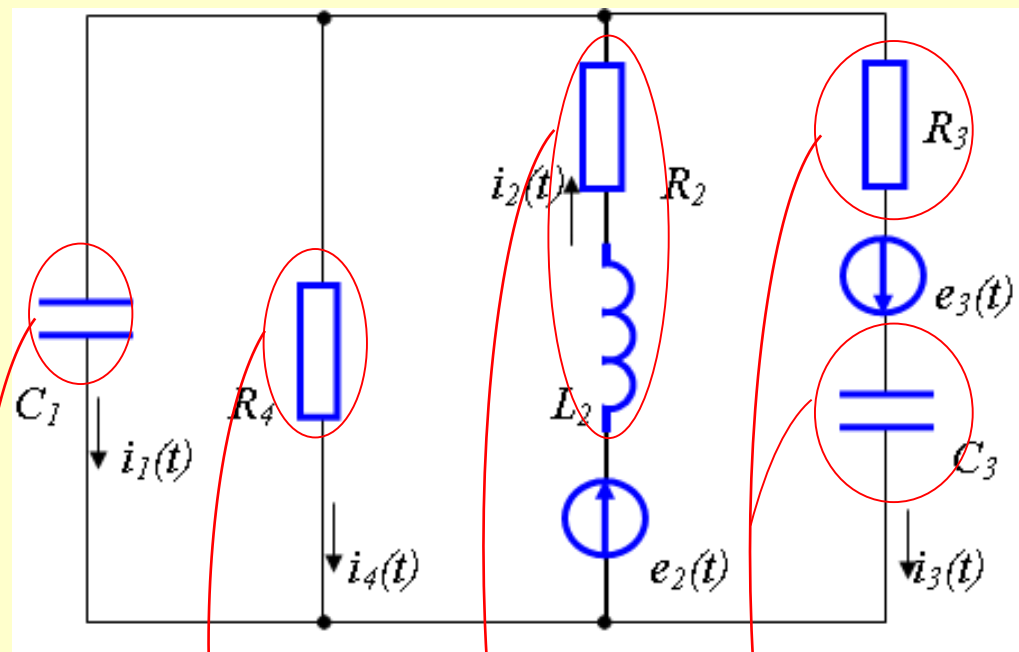


$$\begin{aligned}
 f &= 160 \text{ Hz}, \\
 R_4 &= R_3 = 10 \Omega, R_2 = 5 \Omega, \\
 L_2 &= 10 \text{ mH}, \\
 C_1 &= 100 \mu\text{F}, C_3 = 125 \mu\text{F}, \\
 e_2(t) &= 71 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V} \\
 e_3(t) &= 112 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \dot{E}_2 &= E_2 e^{j\psi_{e2}} = \frac{71}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = \\
 &= 50(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = (35 + j35) \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_3 &= E_3 e^{j\psi_{e3}} = \frac{112}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} = \\
 &= 80(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) = j80 \text{ V}
 \end{aligned}$$



$$f = 160 \text{ Hz},$$

$$R_4 = R_3 = 10 \Omega, R_2 = 5 \Omega,$$

$$L_2 = 10 \text{ mH},$$

$$C_1 = 100 \mu\text{F}, C_3 = 125 \mu\text{F},$$

$$e_2(t) = 71 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$e_3(t) = 112 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 160 \approx 1000 = 10^3 \text{ rad/s}$$

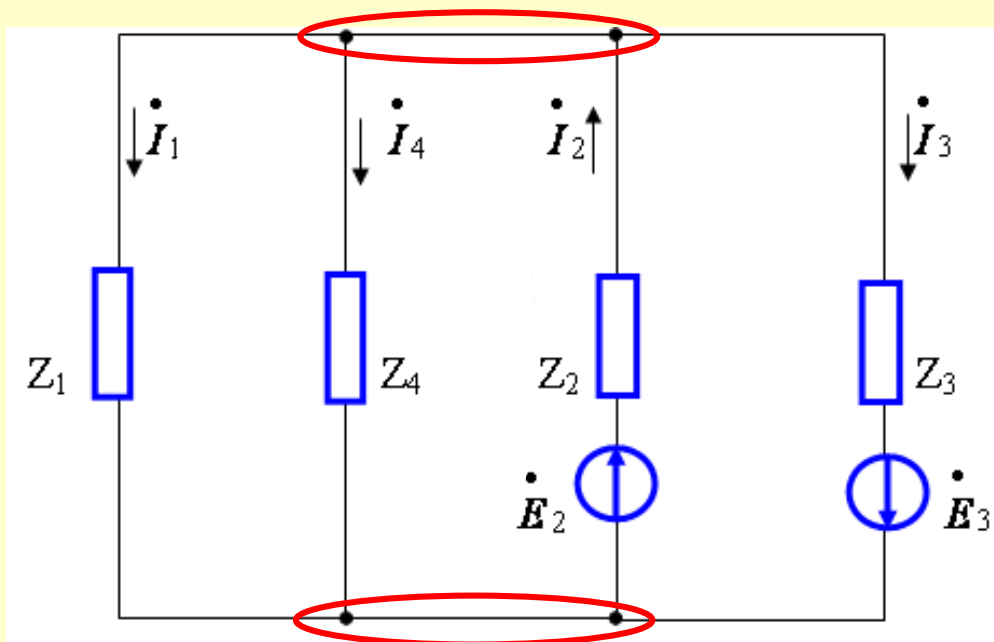
$$Z_1 = -j \frac{1}{\omega C_1} = -j10 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (5 + j10) \Omega$$

$$Z_3 = R_3 - j \frac{1}{\omega C_3} = (10 - j8) \Omega$$

$$Z_4 = R_4 = 10 \Omega$$

Решение на задачата по МКТ



1. Определяме :

брой възли $n=2$,

брой клонове $m=4$

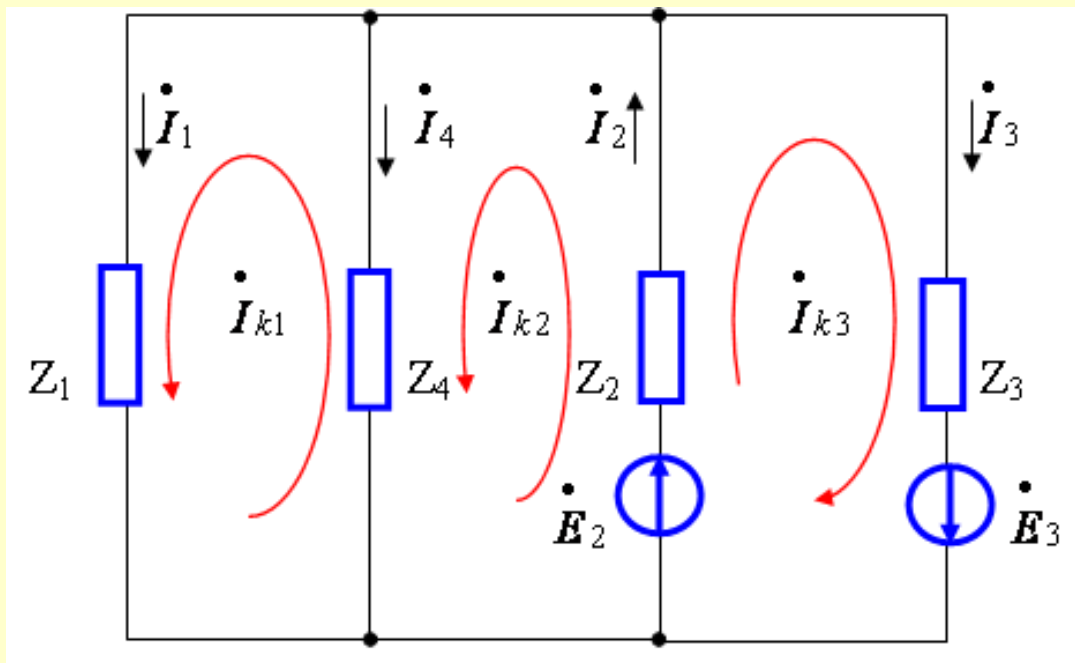
2. Определяме :

$$k=m-n+1=3$$

3. Записваме системата уравнения по метода с контурни токове

$$\begin{cases} \dot{I}_{k1}(Z_1 + Z_4) - \dot{I}_{k2} Z_4 = 0 \\ \dot{I}_{k2}(Z_4 + Z_2) - \dot{I}_{k1} Z_4 + \dot{I}_{k3} Z_2 = \dot{E}_2 \\ \dot{I}_{k3}(Z_2 + Z_3) + \dot{I}_{k2} Z_3 = \dot{E}_2 + \dot{E}_3 \end{cases}$$

Решение на задачата по МКТ



$$\begin{aligned}\dot{I}_{k1} &= (4,044 + j2,7)A \\ \dot{I}_{k2} &= (6,714 - j1,376)A \\ \dot{I}_{k3} &= (-0,302 + j3,714)A\end{aligned}$$

4. Заместваме със стойности и решаваме системата:

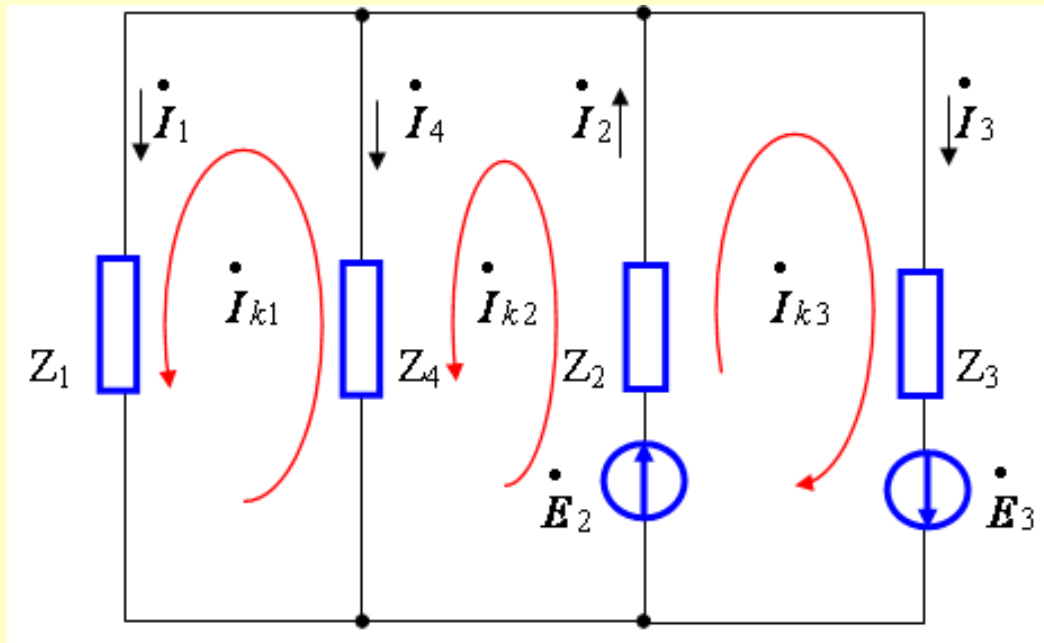
$$\dot{I}_{k1}(-j10 + 10) - \dot{I}_{k2}10 = 0$$

$$-\dot{I}_{k1}10 + \dot{I}_{k2}(10 + 5 + j10) + \dot{I}_{k3}(5 + j10) = 35 + j35$$

$$+ \dot{I}_{k2}(10 - j8) + \dot{I}_{k3}(5 + j10 + 10 - j8) = 35 + j35 + j80$$

Решение на задачата по МКТ

6. Определяме клоновите токове:



$$\dot{I}_{k1} = (4,044 + j2,7)A$$

$$\dot{I}_{k2} = (6,714 - j1,376)A$$

$$\dot{I}_{k3} = (-0,302 + j3,714)A$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{k1} = (4,044 + j2,7)A$$

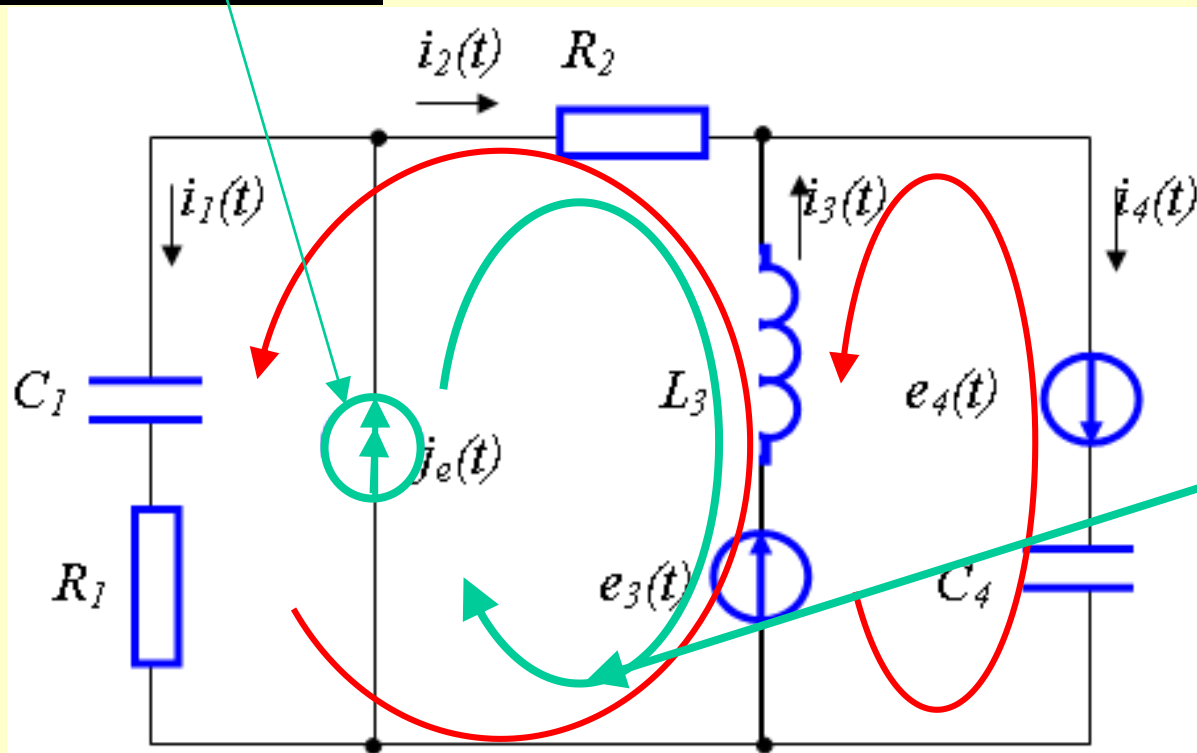
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{k2} + \dot{I}_{k3} = 6,714 - j1,376 - 0,302 + j3,714 = (6,412 + j2,438)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{k3} = (-0,302 + j3,714)A$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{k2} - \dot{I}_{k1} = 6,714 - j1,376 - 4,044 - j2,7 = (2,67 - j4,076)A$$

Особеност при метода с контурни токове

Методът с контурни токове има особеност, когато във веригата има източник на ток.



1. Определяме :

брой възли $n=3$,

брой клонове $m=5$

2. Определяме :

$$k=m-n+1=3$$

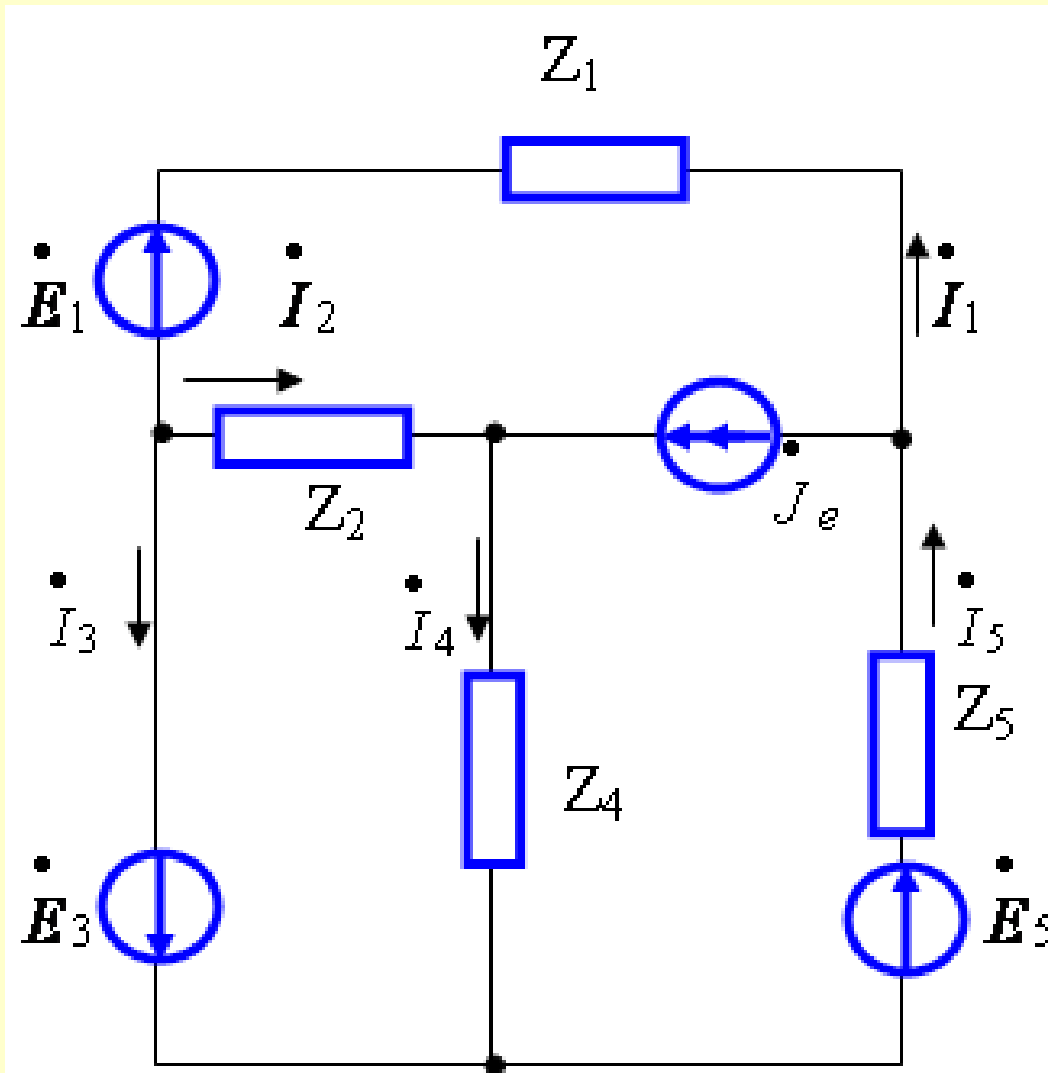
За този контур

не се пише уравнение

- контурите се избират така, че през клона с източник на ток да минава само един контурен ток.
- За контура с източник на ток не се пише уравнение, тъй като контурният ток в него е известен – това е токът на източника на ток.

Пример:

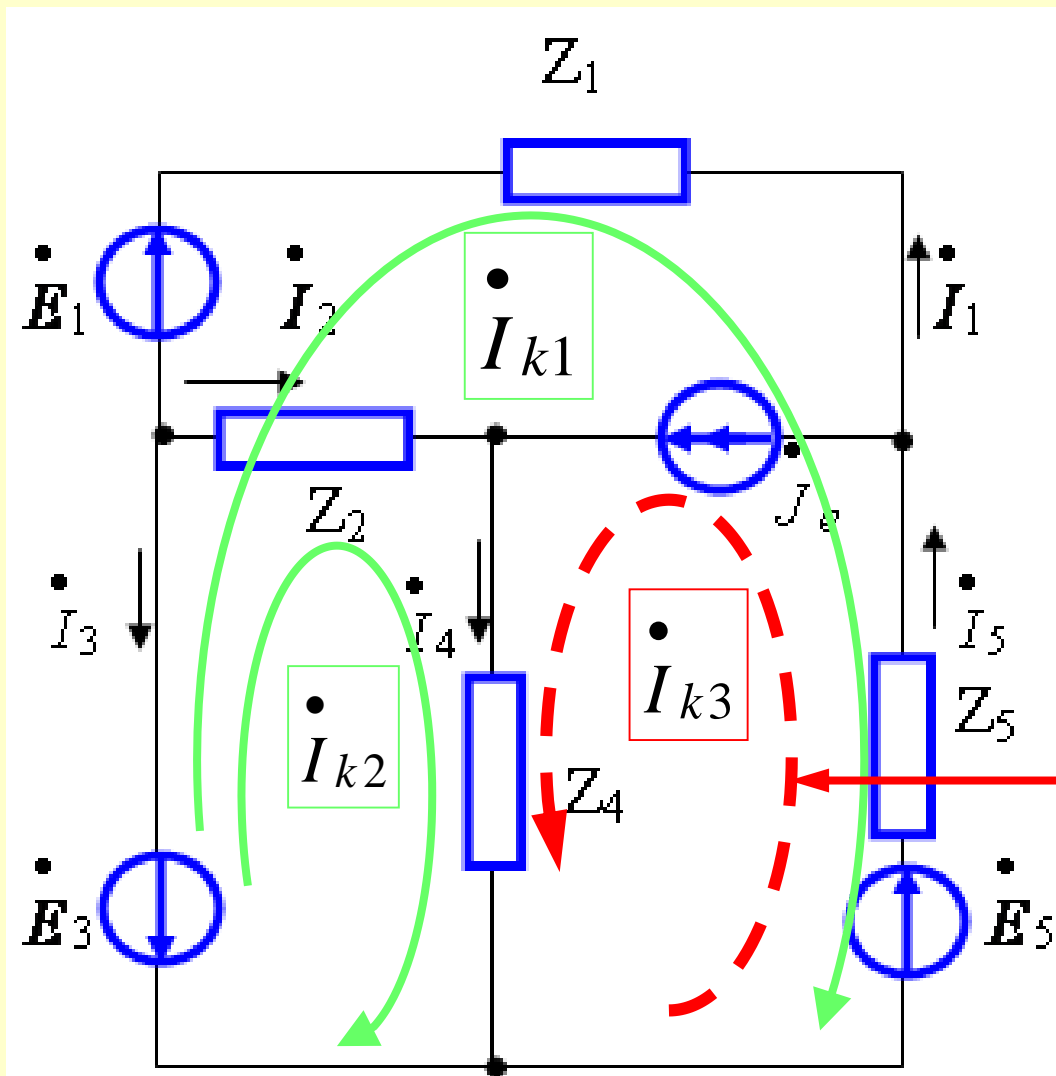
Анализ на верига с особеност по метода с контурни токове



$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= j30 \text{ V}; & \dot{E}_3 &= j100 \text{ V}; \\ \dot{E}_5 &= 50 \text{ V}; & J_e &= j2 \text{ A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_1 &= -j10\Omega \\ Z_2 &= (5 + j10)\Omega \\ Z_4 &= 5\Omega \\ Z_5 &= 10\Omega\end{aligned}$$

Решение на задачата по МКТ



1. Определяме:

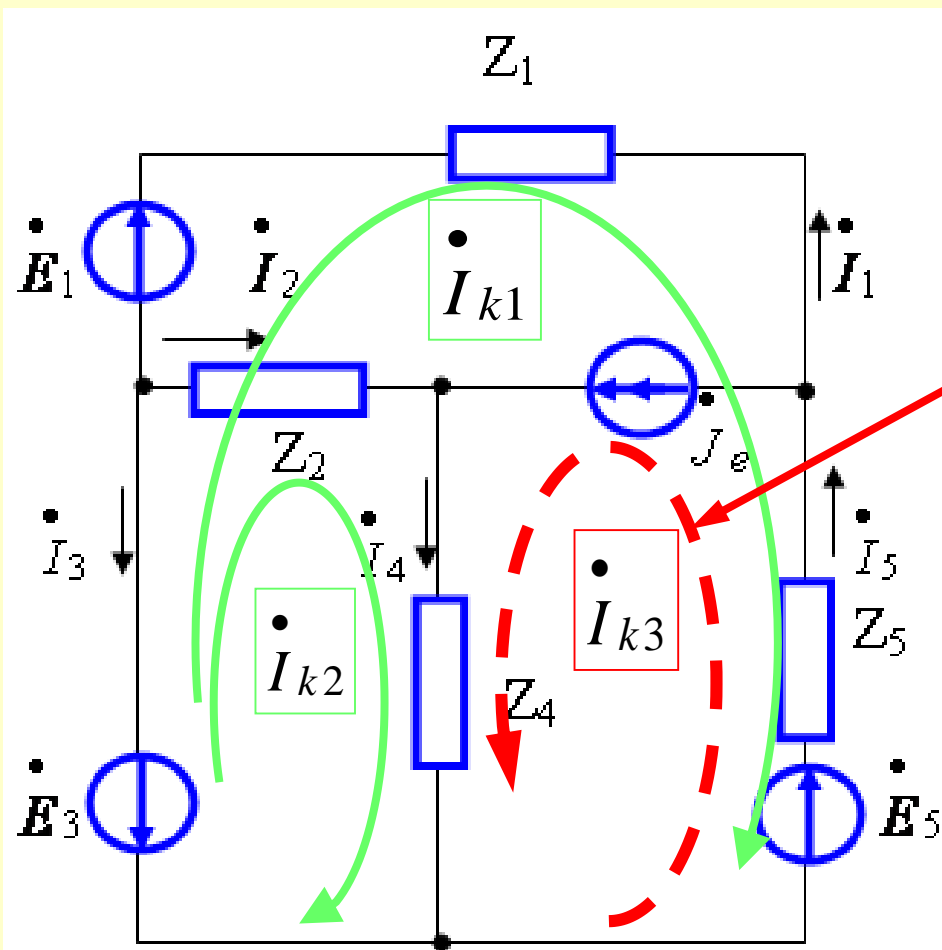
брой възли $n=4$,

брой клонове $m=6$

2. Определяме : $k=m-n+1=3$

3. Избираме контурите

$$I_{k3} = J_e = j2A$$

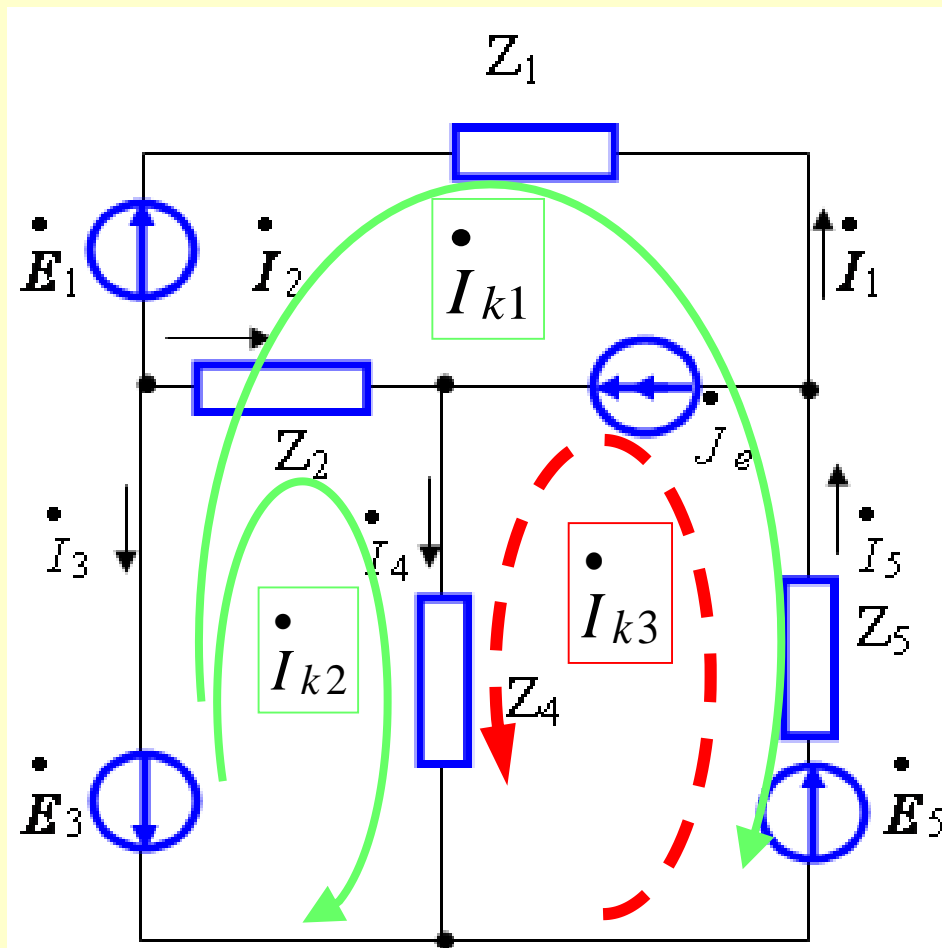


За този контур
не се пише уравнение

$$\dot{I}_{k3} = \dot{J}_e = j2A$$

$$\dot{I}_{k1}(Z_1 + Z_5) - \dot{I}_{k3} Z_5 = \dot{E}_1 - \dot{E}_3 - \dot{E}_5$$

$$\dot{I}_{k2}(Z_4 + Z_2) + \dot{I}_{k3} Z_4 = -\dot{E}_3$$



5. Определяме трите контурни тока:

$$\dot{I}_{k1} = -j5A$$

$$\dot{I}_{k2} = (-5,5 + j5,5)A$$

$$\dot{I}_{k3} = j2A$$

6. Определяме клоновите токове:

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_{k1} = j5A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{k2} = (-5,5 + j5,5)A$$

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_{k2} - \dot{I}_{k1} = 5,5 - j5,5 + j5 = (5,5 - j0,5)A$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{k2} + \dot{I}_{k3} = -5,5 + j5,5 + j2 = (-5,5 + j7,5)A$$

$$\dot{I}_5 = -\dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k3} = j5 + j2 = j7A$$

Благодаря за вниманието

проф. д-р Илона Ячева

