ЛЗ

Синусоидален режим в линейни електрически вериги

*(лекция **11.10.2022г.**)*

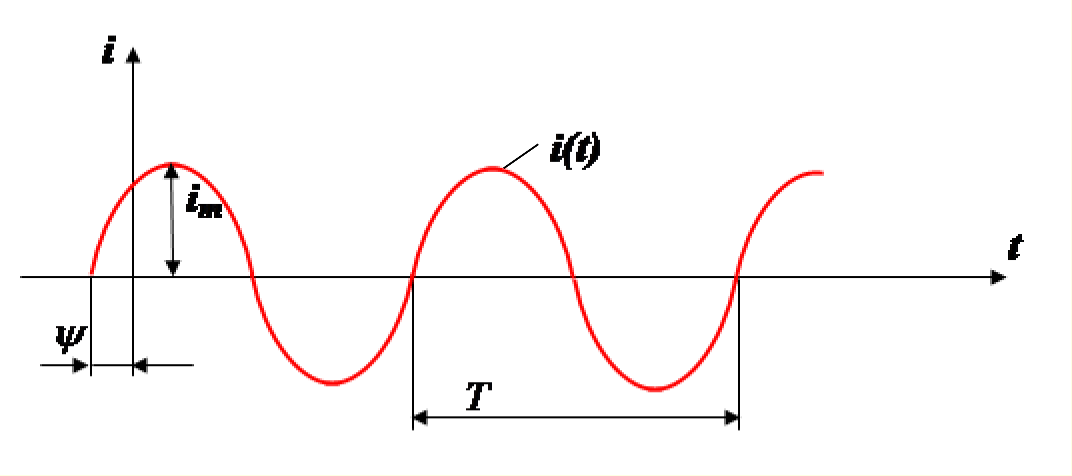
Преподавател: проф. д-р Илона Ячева

кат. “Теоретична Електротехника”,
Технически университет - София

Синусоидални режими в линейни електрически вериги.

Синусоидален ток - Ток, който се изменя във времето по **синусоидален** закон:

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi) = i_m \sin(\frac{2\pi}{T} t + \psi)$$



i_m - **амплитуда**

T – **период** [*T*] = s ;

f - **честота** [*f*] =Hz ; $f = \frac{1}{T}$

ω - **ъглова честота** **[ω]=*rad/s*,**

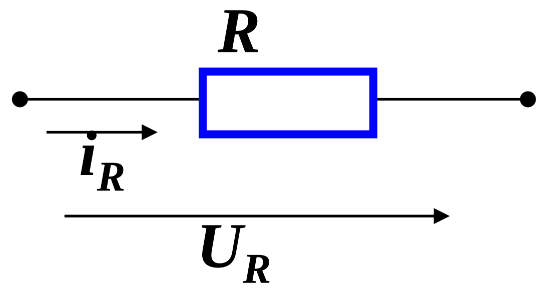
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

θ- **фаза**, $\theta = \omega . t + \psi$, [*θ*] =***rad ;***

ψ - **начална фаза** **(за *t =0*) ,** $\psi = \theta$ **[*ψ*] =*rad***

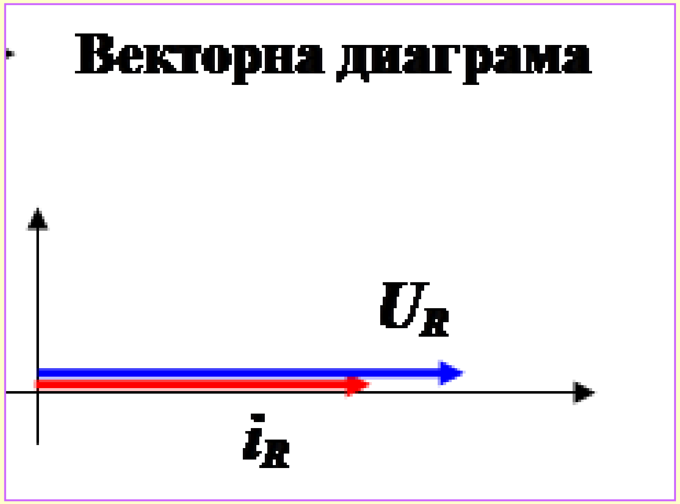
Извод: *Синусоидално изменящите се ток и напрежение се характеризират от три величини:* ***амплитуда, ъглова скорост и фаза****.*

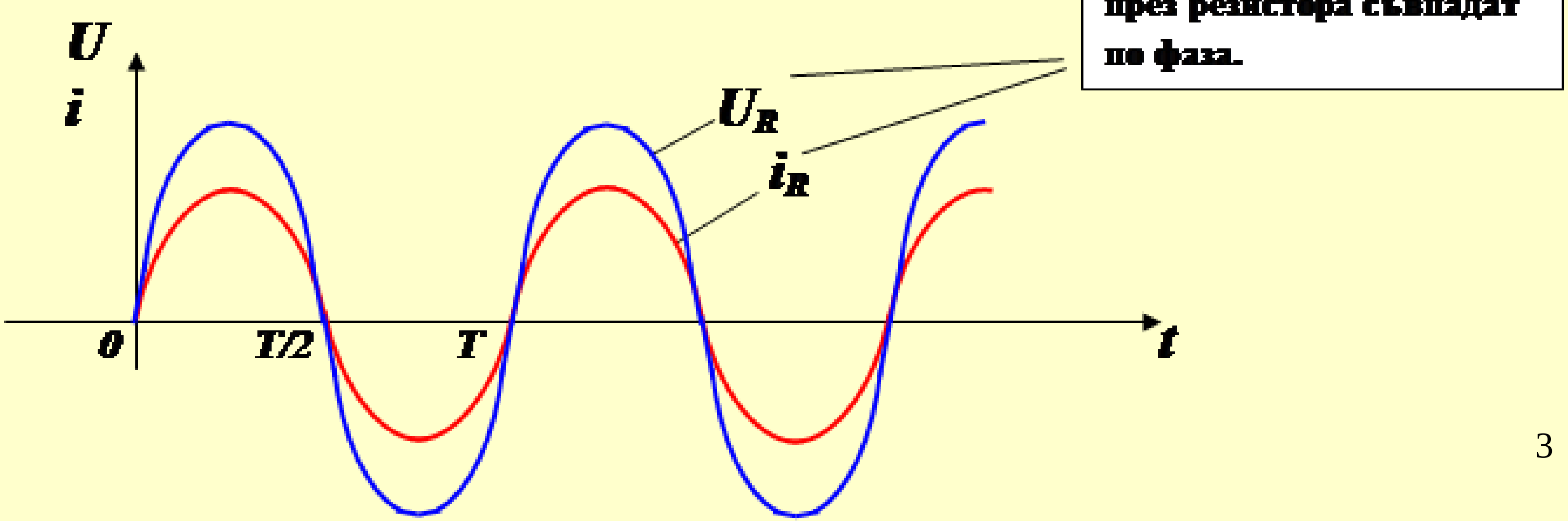
Влияние на параметрите R, L и C при синусоидален режим



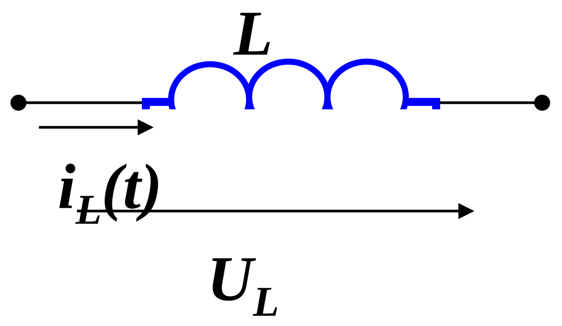
$$i(t) = i_m \sin \omega t$$

$$u(t) = R.i(t) = u_m \sin \omega t$$





бобини с индуктивност ***L***

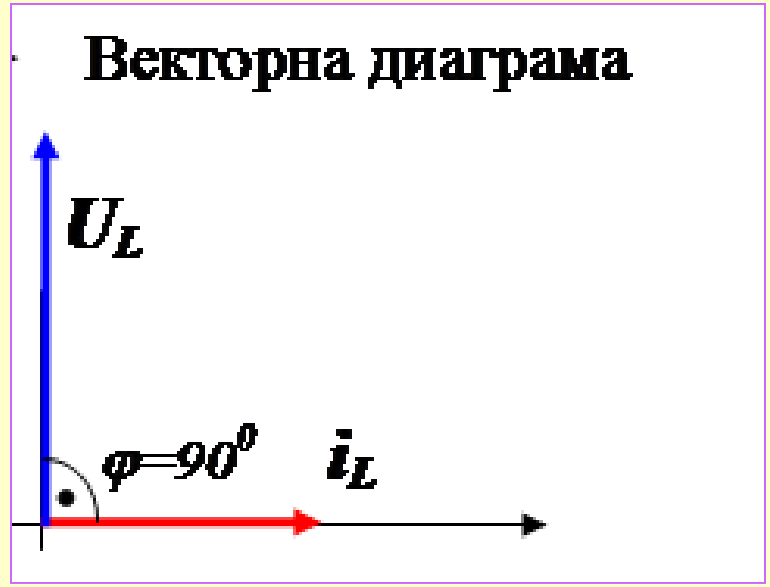


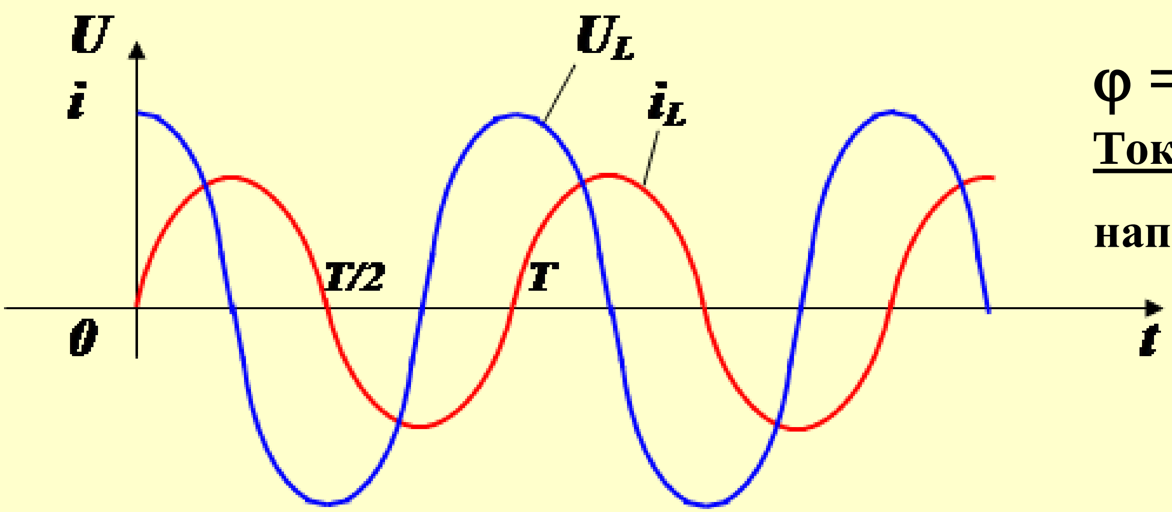
$$X_L = \omega L$$

$$i(t) = i_m \sin \omega t$$

$$u_L(t) = u_m \sin(\omega t + 90)$$

$$u_m = X_L . i_m$$



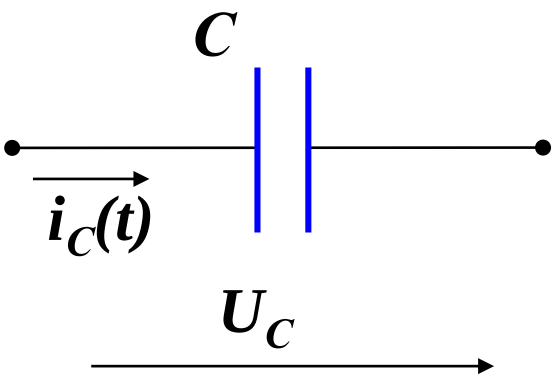


$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90 - 0 = 90$

<u>Токът изостава по фаза</u> от

напрежението на четвърт период

кондензатори с капацитет ***C***

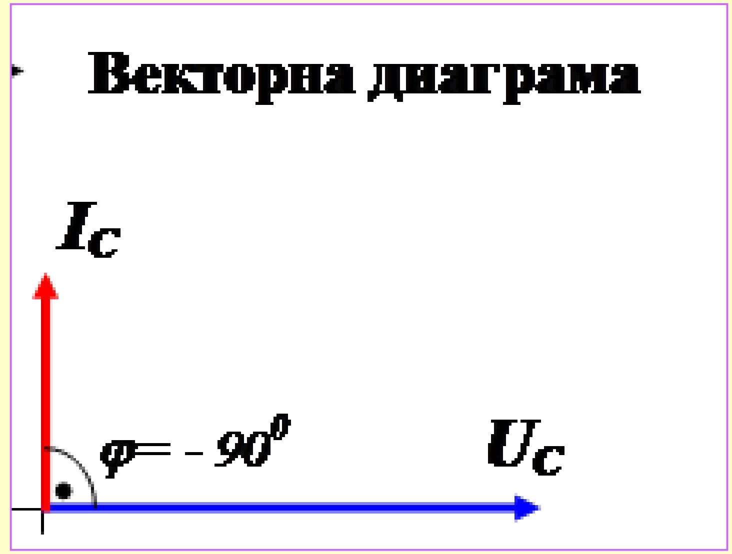


$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

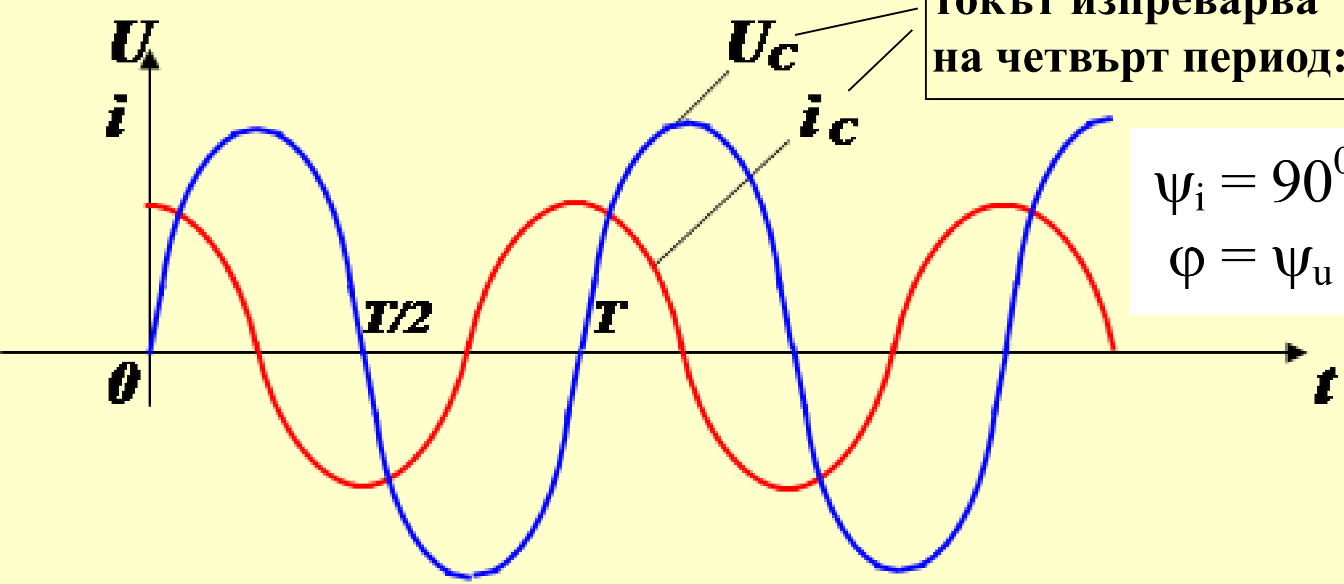
$$u_C(t) = u_m \sin \omega t$$

$$u_m = X_C . i_m$$

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$



токът изпреварва по фаза напрежението на четвърт период: φ = - 90

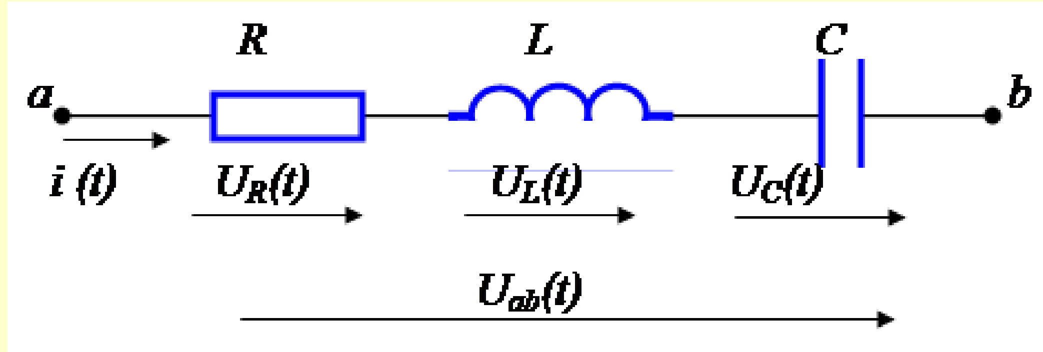


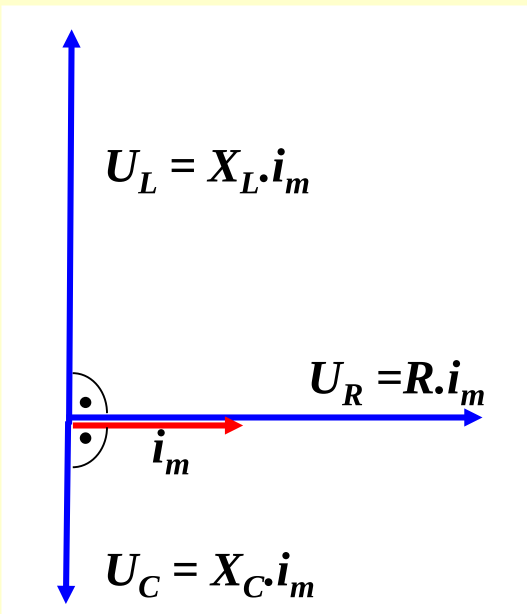
$$\psi_i = 90^0.$$

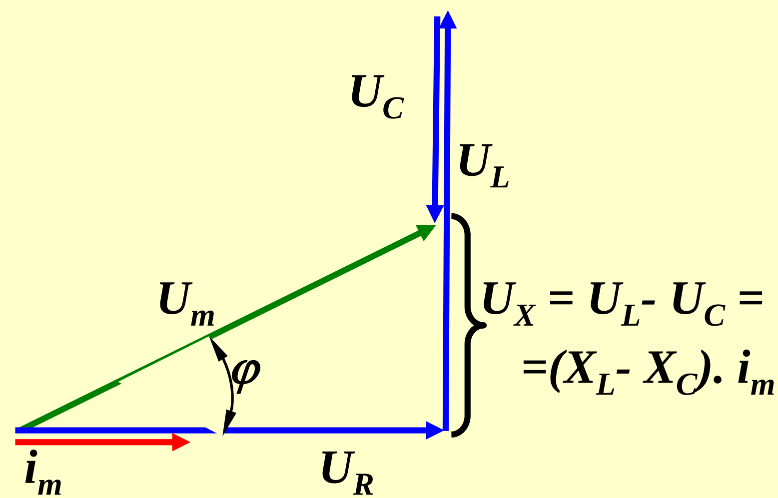
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90 = -90$$

Векторна диаграма:

$$U = U_R + U_L + U_C$$





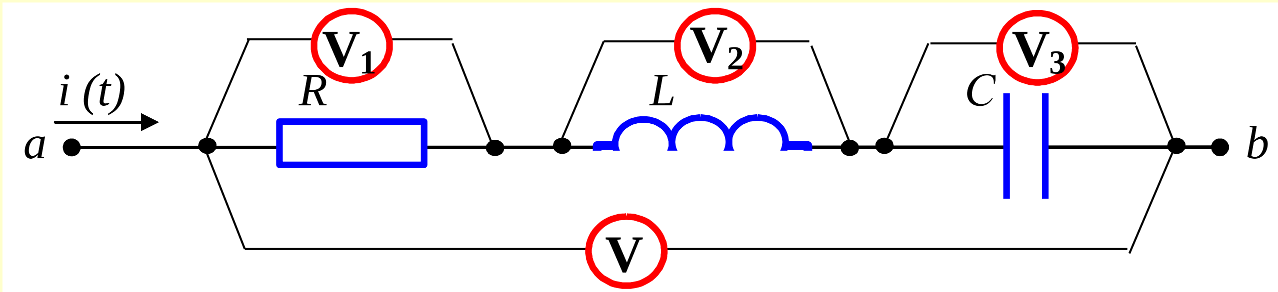


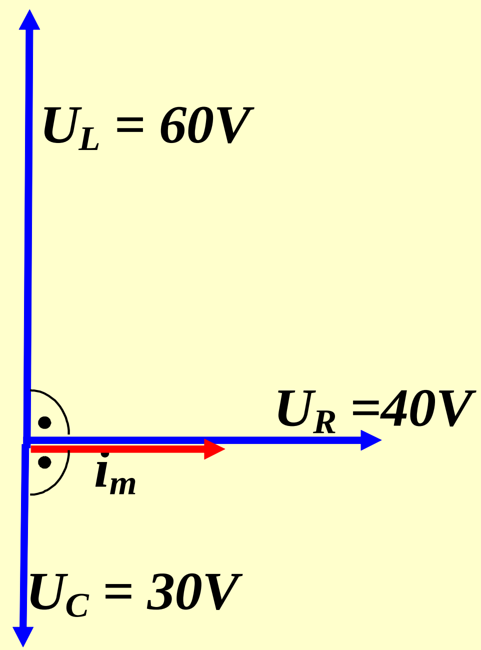
Общото напрежение е **<u>геометрична, а не алгебрична сума</u>** от напреженията на отделните елементи:

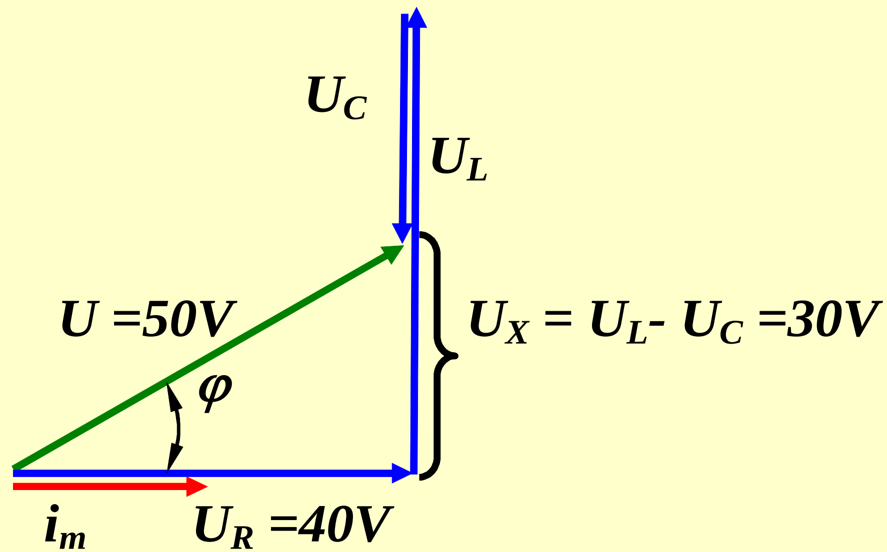
$$U_m = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{U_X}{U_R}$$

<u>Пример</u>: показанията на волтметрите **V1**, **V2** и **V3** са съответно 40V, 60V и 30V





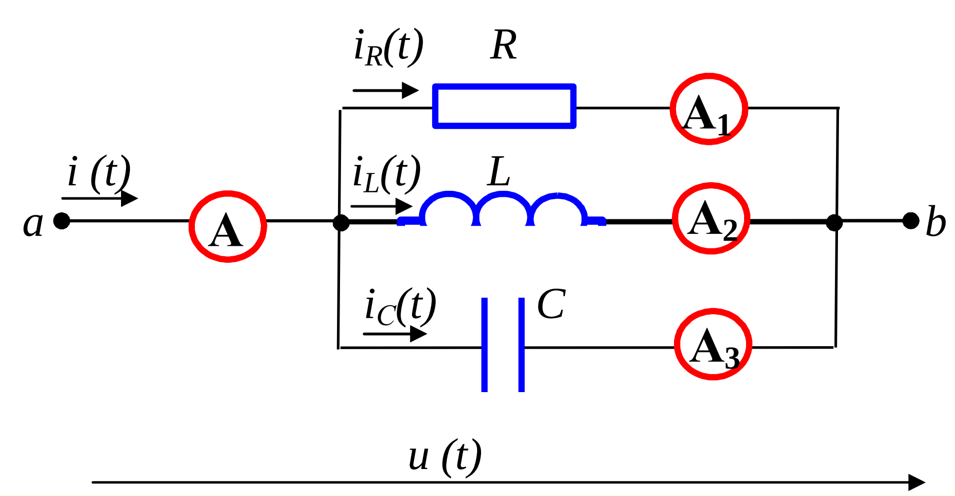


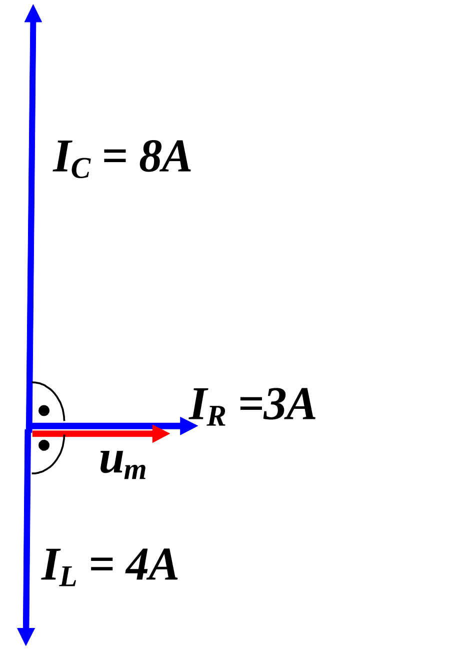
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50V$$

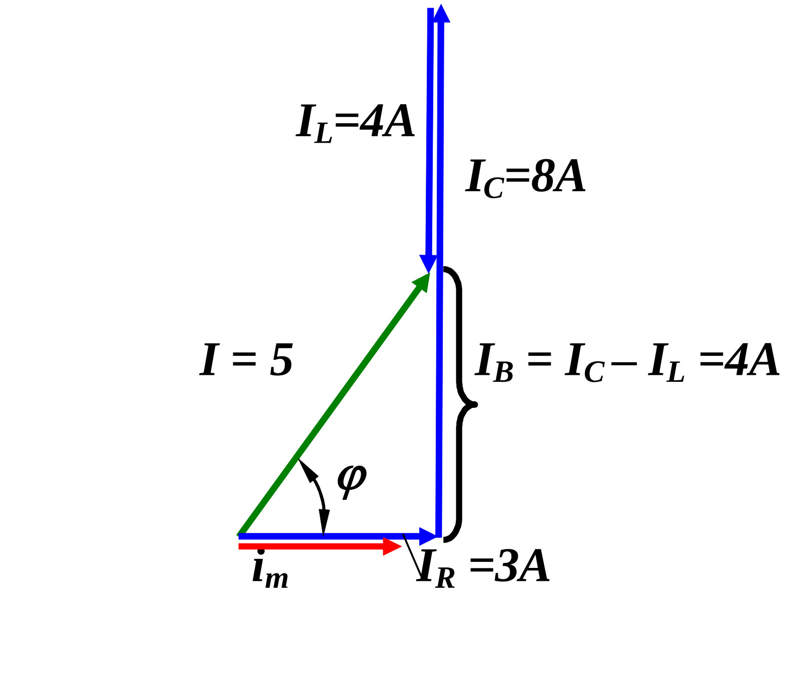
$$\varphi = arctg\frac{U_X}{U_R} = arctg\frac{30}{40} = 36{,}8^0$$

<u>Напрежението на волтметъра **V** е **50V**</u>**.**

<u>Пример</u>: Да се определи показанието на амперметъра **А**, ако показанията на амперметрите **А1**, **А2** и **А3** са съответно **<u>3А, 4А и 8А</u>**.





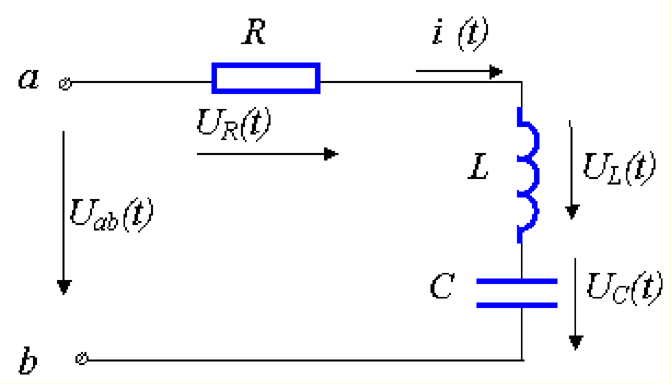


$$I = \sqrt{I_R^2 + I_B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5A$$

$$\varphi = arctg \frac{I_B}{I_R} = arctg \frac{4}{3} = 53{,}1^0$$

<u>Токът през амперметъра **А** е **5А**.</u>

Разгледаните съотношения могат да се използват при анализ на **съвсем прости вериги**



1. Определя се реактивното съпротивление на веригата

$$X = X_L - X_C$$

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

2. Определя се импедансът на веригата

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

3. Определят се:

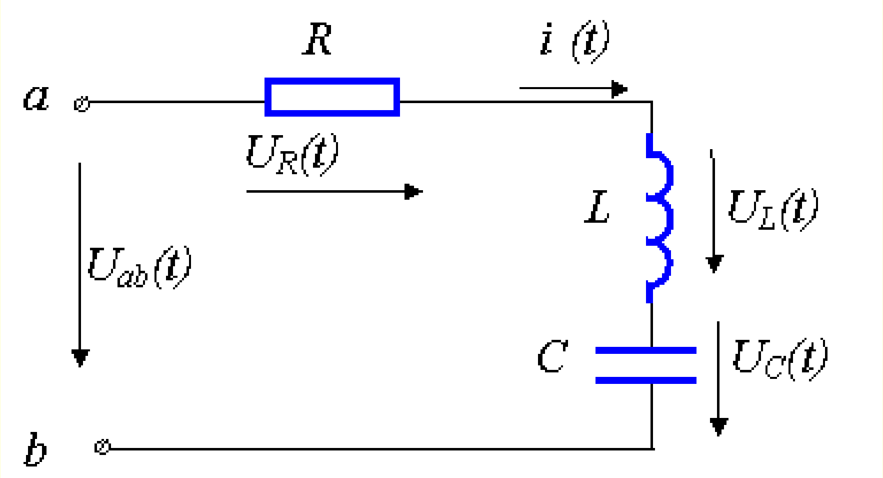
амплитудната стойност на тока $i_m = \frac{U_m}{z}$

фазовата разлика φ между напрежението и тока $\varphi = arctg\frac{X}{R}$

началната фаза на тока $\psi_i = \psi_u - \varphi$

4. Определя се тока $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$

Пример: **Анализ на проста верига при протичане на синусоидален ток**



$Uab(t) = 100\sin\omega t$
R = 3Ω, L =14mH,
C =100μF, f =160Hz.

Да се определи:
- тока във веригата $i(t)$
- напреженията $U_R(t)$, $U_L(t)$, $U_C(t)$.

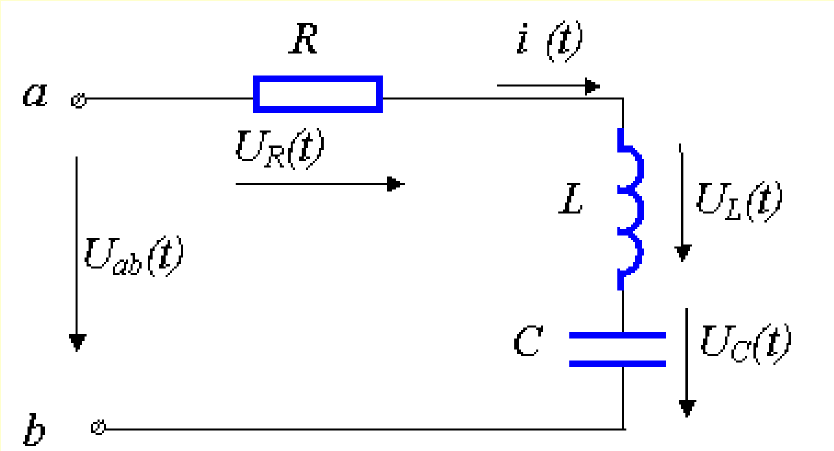
1.Определяме реактивните съпротивления т.е. съпротивленията на бобината и кондензатора.

Те **<u>зависят от ъгловата честота</u>** $\omega=2\pi.f = 2\pi.160 \approx 1000$ rad/s и са съответно:

$$\boxed{X_L = \omega L = 1000.14.10^{-3} = 14\Omega;}$$

$$\boxed{X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000.100.10^{-6}} = 10\Omega}$$

Пример: **Анализ на проста верига при протичане на синусоидален ток**



$Uab(t) = 100\sin\omega t$

$R = 3\Omega$, $X_L = 14\ \Omega$

$X_C = 10\ \Omega$, $f = 160$Hz.

2. Така импедансът на веригата се определя като:

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{3^2 + (14-10)^2} = \sqrt{9+16} = 5\Omega$$

3.Следователно амплитудната стойност на тока е: $i_m = \dfrac{U_m}{z} = \dfrac{100}{5} = 20A$

фазовата разлика φ между напрежението и тока е $\varphi = arctg\dfrac{X}{R} = arctg\dfrac{4}{3} = 71.56^0$

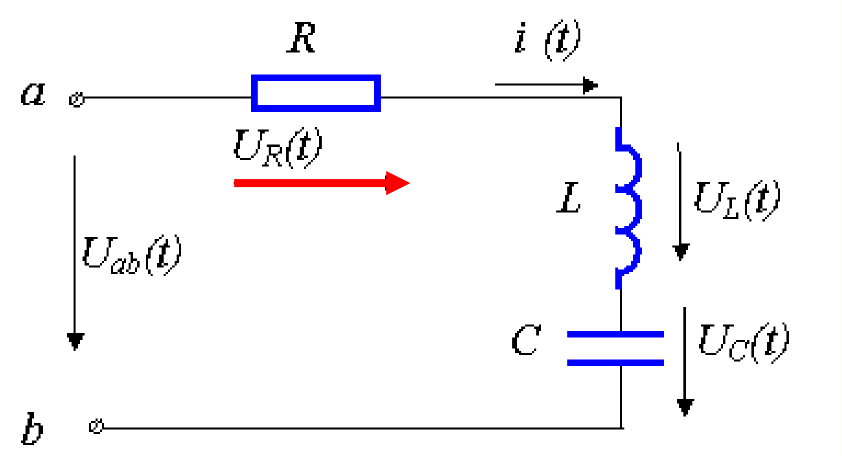
Началната фаза на входното напрежение е $\psi_U = 0$

Следователно началната фаза на тока е $\psi_i = \psi_U - \varphi = -\varphi = -71.56^0$

4. Тогава токът във веригата се определя като:

$$\boxed{i(t) = i_m \sin(\omega t + \varphi) = 20\sin(\omega t - 71.56^0)}$$

Пример: **Определяне на напреженията върху отделните елементи във веригата**



$Uab(t) = 100\sin\omega t$

$R = 3\Omega$, $X_L = 14\ \Omega$

$X_C = 10\ \Omega$,

$$i(t) = 20\sin(\omega t - 71.56^0)$$

1. Напрежението върху резистора $U_R(t)$

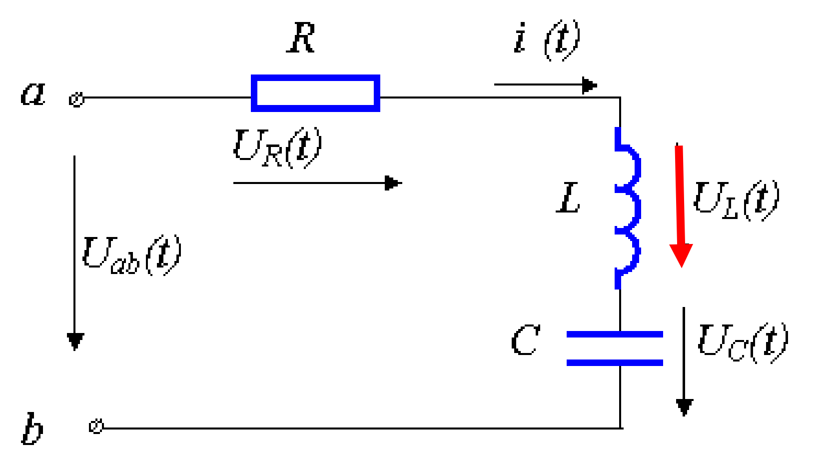
- Амплитудната стойност на напрежението върху резистора се определя като:

$$U_{mR} = i_m R = 20.3 = 60V$$

Напрежението и тока през резистора съвпадат по фаза, $\psi_{UR} = \psi_i = -71.56^0$

$$U_R(t) = U_{mR}\sin(\omega t + \psi_{UR}) = 60\sin(1000t - 71.56^0)V$$

Пример: **Определяне на напреженията върху отделните елементи във веригата**



$Uab(t) = 100\sin\omega t$

$R = 3\Omega$, $X_L = 14\ \Omega$

$X_C = 10\ \Omega$,

$$\boxed{i(t) = 20\sin(\omega t - 71.56^0)}$$

2. <u>Напрежението върху бобината $U_L(t)$</u>

- Амплитудната стойност на напрежението върху бобината се определя като:

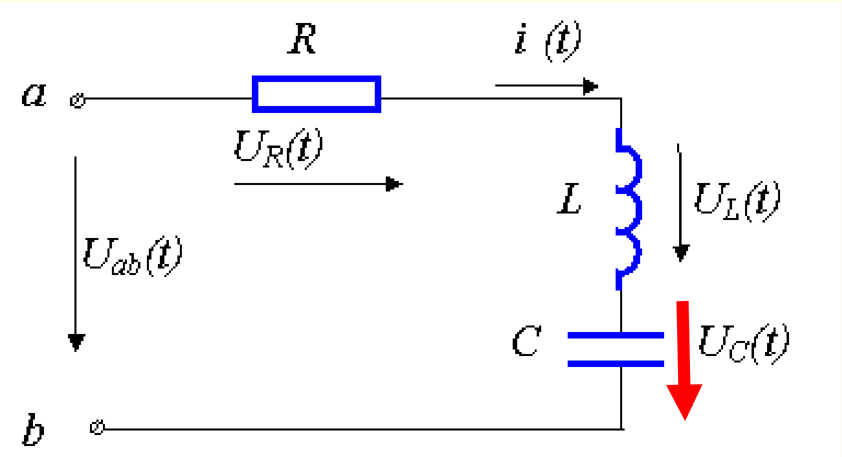
$$U_{mL} = i_m X_L = 20.14 = 280V$$

Напрежението изпреварва тока през бобината с 90

$$\psi_{UL} = \psi_i + 90^0 = -71.56^0 + 90^0 = 18.44^0$$

$$\boxed{U_L(t) = U_{mL}\sin(\omega t + \psi_{UL}) = 280\sin(1000t + 18.44^0)V}$$

Пример: **Определяне на напреженията върху отделните елементи във веригата**



$Uab(t) = 100\sin\omega t$

$R = 3\Omega$, $X_L = 14\ \Omega$

$X_C = 10\ \Omega$,

$$i(t) = 20\sin(\omega t - 71.56^0)$$

3. Напрежението върху кондензатора $U_C(t)$

- Амплитудната стойност на напрежението върху кондензатора се определя като:

$$U_{mC} = i_m X_c = 20.10 = 200V$$

Напрежението изостава от тока през кондензатора с 90

$$\psi_{UC} = \psi_i - 90^0 = -71.56^0 - 90^0 = -161.56^0$$

$$U_C(t) = U_{mC}\sin(\omega t + \psi_{UC}) = 200\sin(1000t - 161.56^0)V$$

<u>**Изобразяване на синусоидални величини с комплекси.**</u>

При анализа на синусоидални режими в линейни електрически вериги най-често се използва <u>**метод с комплексни образи**</u> (символичен метод).

<u>**синусоидална**</u> величина
ток
напрежение

→

<u>**комплексна**</u> величина
ток
напрежение

<u>**консуматори**</u>
резистори - **R**
бобини - **L**
кондензатори - **C**

→

<u>**комплексни**</u> съпротивления

Анализира се схема, в която <u>източниците и съпротивленията</u> са **<u>заменени с техни комплексни образи</u>**

↓

<u>Полученото решение е комплексна величина</u>

↓

<u>Прави се обратно преобразуване от комплексна в синусоидална величина</u>

Някои основни понятия, свързани с комплексните числа

В електротехниката **имагинерната единица** се означава с ***j***, а не с ***i*** !

$$j = \sqrt{-1}$$

Комплексните числа могат да се записват по два начина:

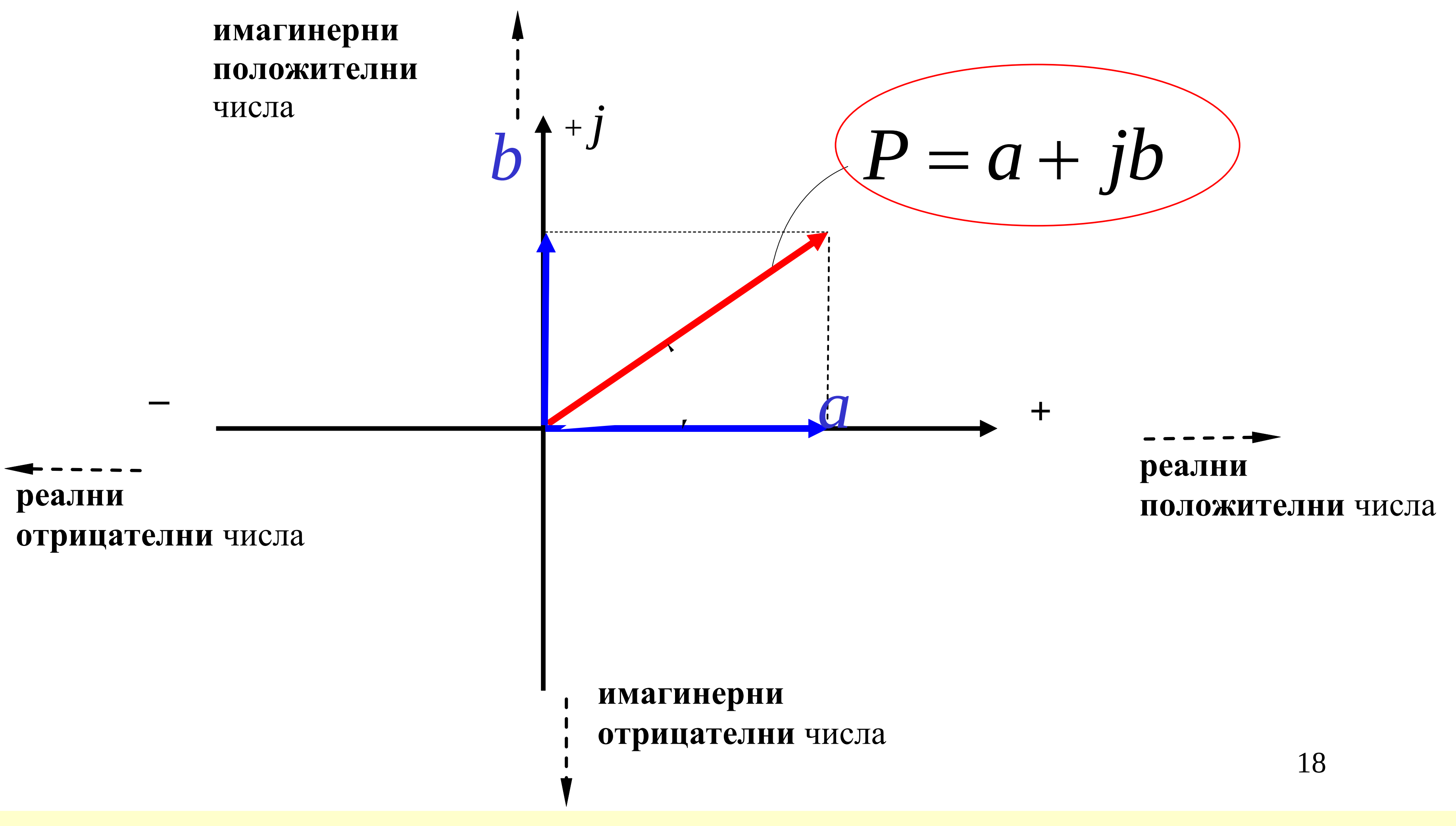
като **алгебрична сума** на реална и имагинерна част ***P= a+jb***

в **експоненциален вид**, като произведение на модул и експонента:

$$P = ce^{j\varphi}$$

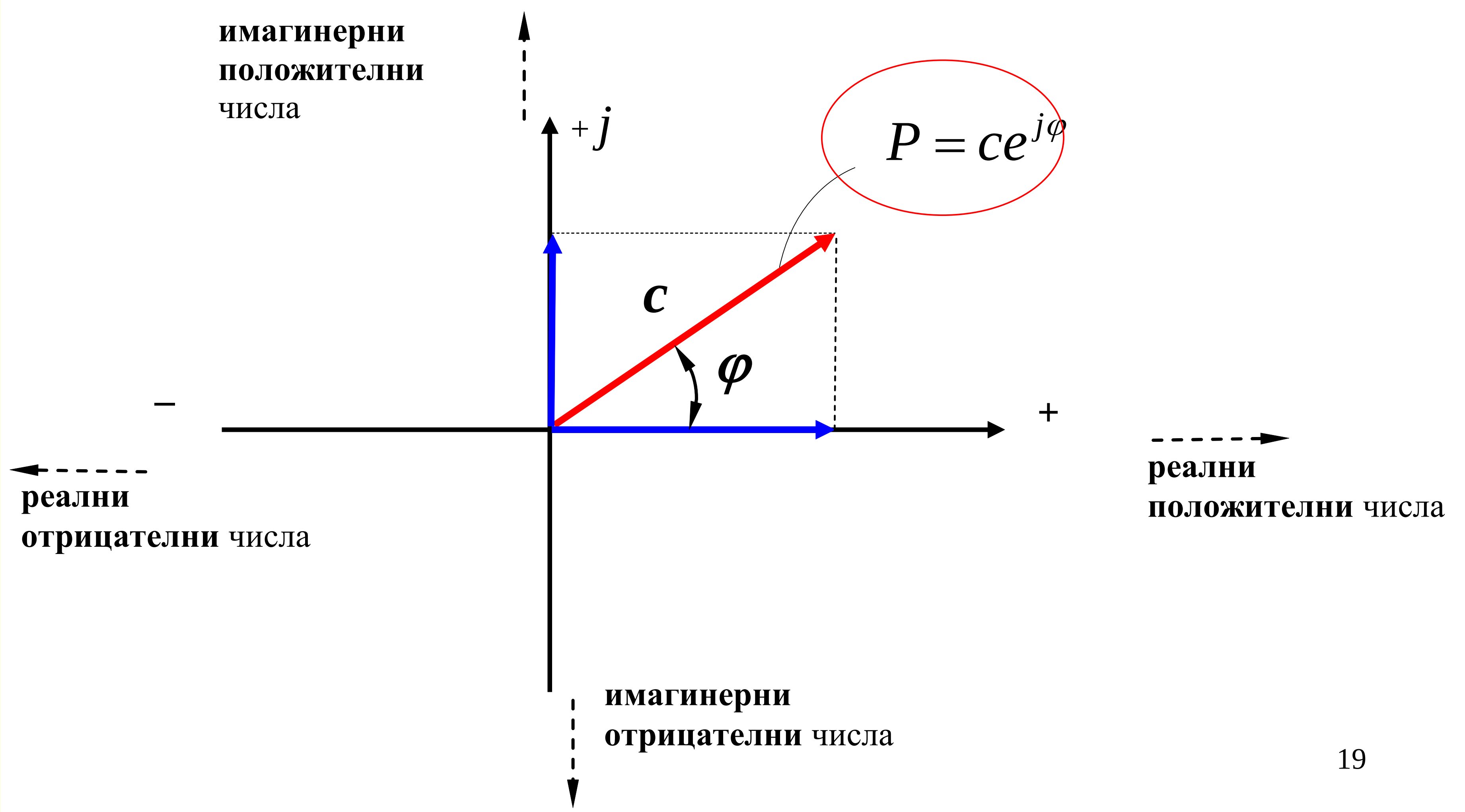
Комплексните числа могат да се изобразяват в комплексната равнина:

*в **алгебричен вид**, като сума на реална и имагинерна част:*



Комплексните числа могат да се изобразяват в комплексната равнина:

в ***експоненциален вид****, като произведение на модул и експонента:*

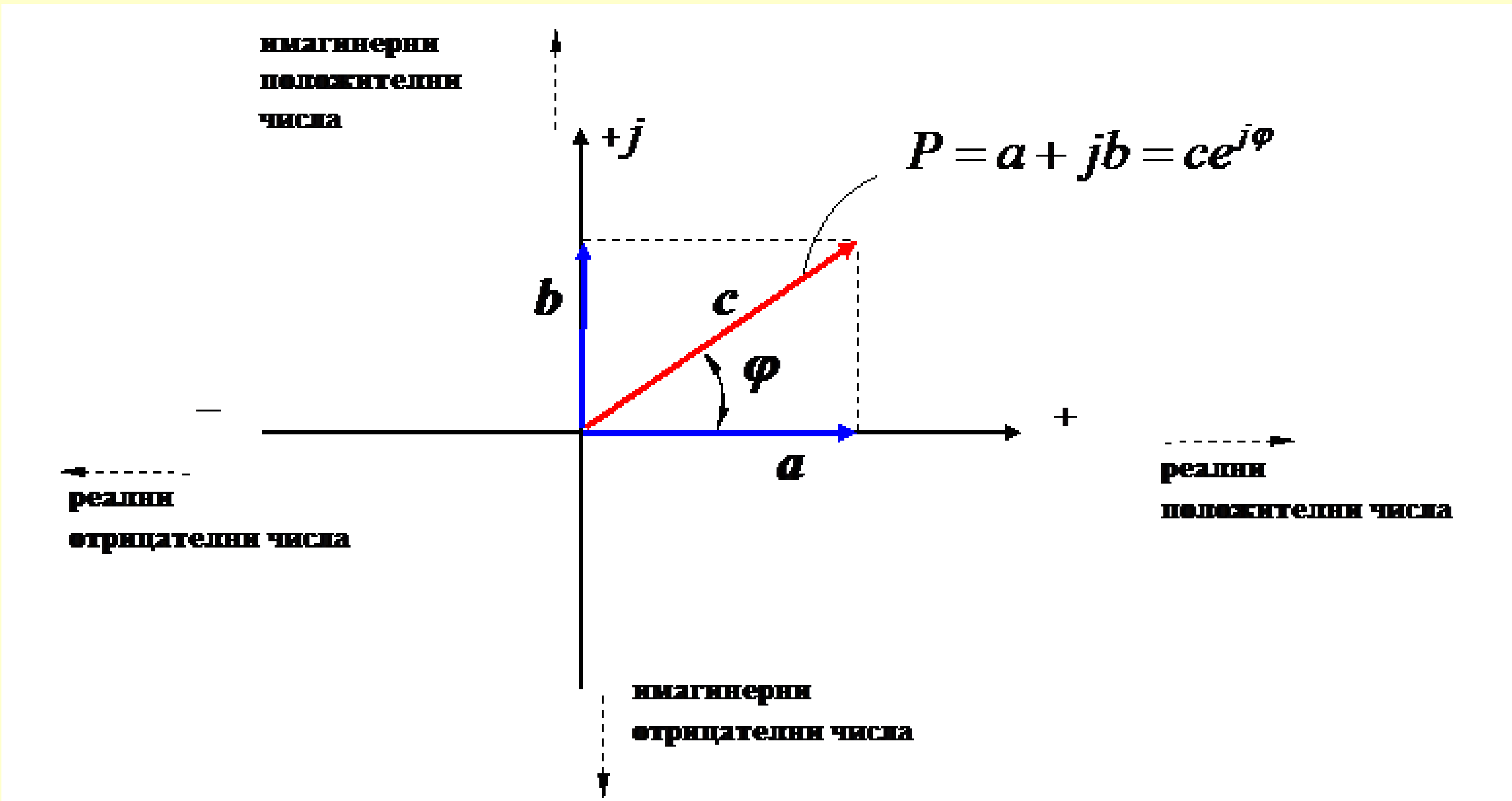


$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\varphi = arctg\,\frac{b}{a}$$

$$a = c.\cos\varphi;$$

$$b = c.\sin\varphi$$



Комплексен образ и **комплексна ефективна стойност** на синусоидална величина

Ако за токът *i(t)* е известно, че се изменя по синусоидален закон: $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$,

то неговия **комплексен образ** може да се запише като:

$$\underset{\bullet}{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$$

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i), \longrightarrow \underset{\bullet}{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$$

Комплексният образ $\dot{i}(t)$ може да се представи и като:

$$\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = \sqrt{2}.I.e^{j\omega t}.e^{j\psi_i} = \sqrt{2}e^{j\omega t}.Ie^{j\psi_i} = \sqrt{2}e^{j\omega t}.\dot{I}$$

където $\boxed{\dot{I} = Ie^{j\psi_i}}$

е **<u>комплексна ефективна стойност</u>** на синусоидалната величина.

Често тази стойност се нарича за по-кратко **<u>комплекс</u>** на синусоидалната величина.

Но в една верига всяка синусоидално изменяща се с честота $\boldsymbol{\omega}$ величина съдържа в комплексния си образ един и същи коефициент $\sqrt{2}e^{j\omega t}$

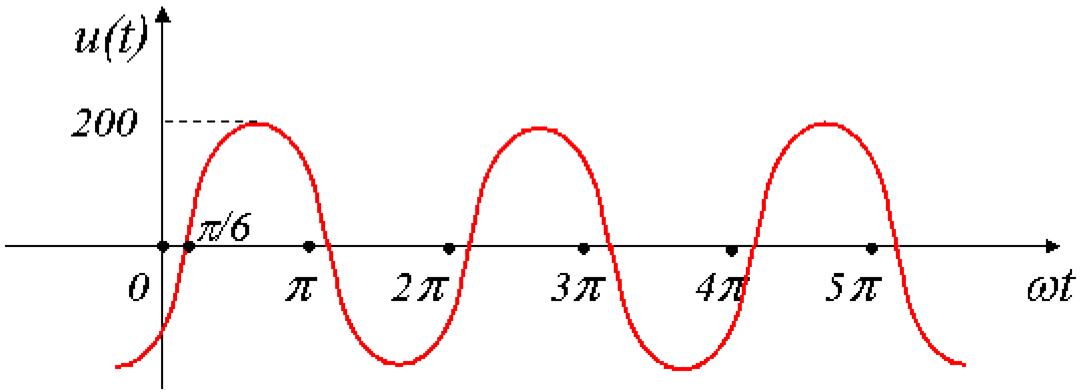
Съществената информация, характеризираща синусоидалната величина се съдържа в **комплексната ефективна стойност**.

Комплексна ефективна стойност на синусоидална величина

Ако за токът *i(t)* е известно, че се изменя по синусоидален закон: $\boldsymbol{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)}$,

то $\boxed{\dot{I} = Ie^{j\psi_i}}$ $I = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}}$

<u>Пример1</u> Да се определи комплекса на синусоидално изменящото се напрежение $u(t) = 200\sin(\omega t - 30^0)$V.



$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$$

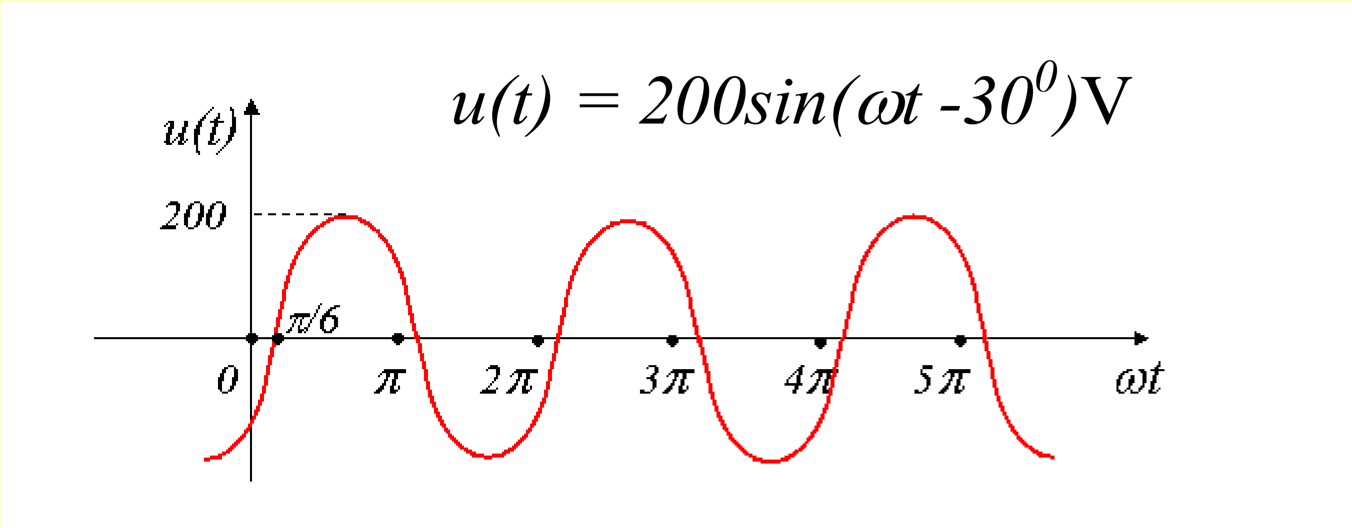
$$U = \frac{u_m}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}},$$

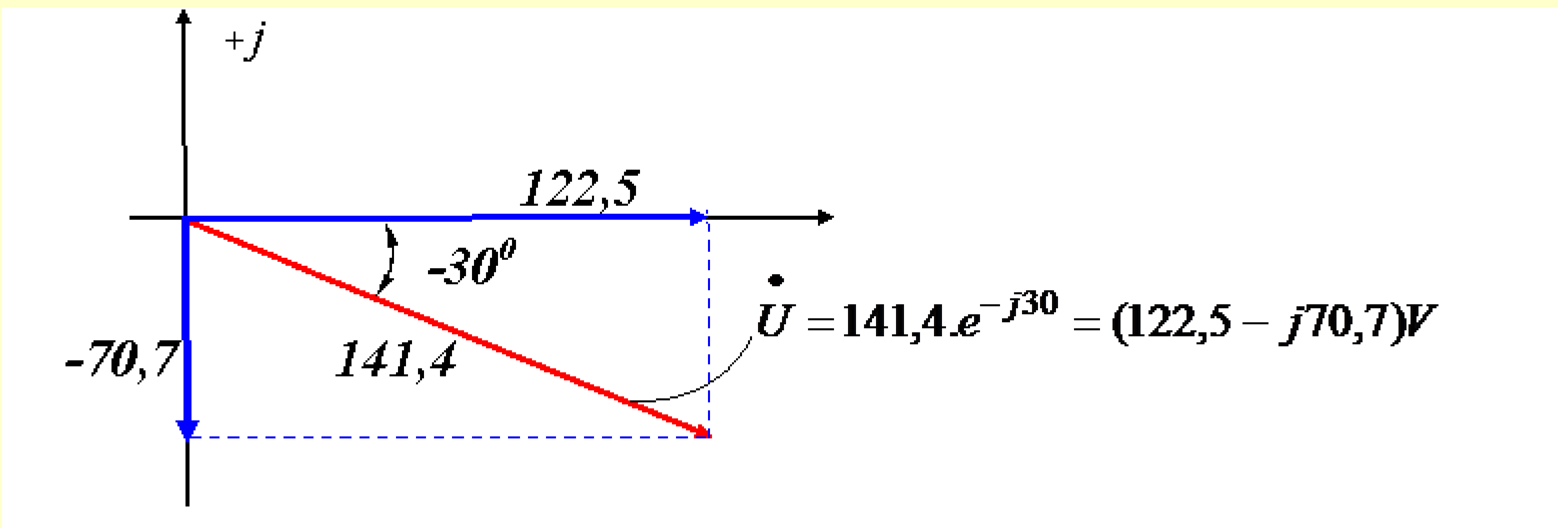
$$\psi_u = -30^0.$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j(-30)} = 141{,}4 e^{j(-30)} =$$

$$= 141{,}4[\cos(-30) + j\sin(-30)] = 141{,}4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = (122.5 - j70.7)V$$

Можем да изобразим това напрежение в комплексната равнина:

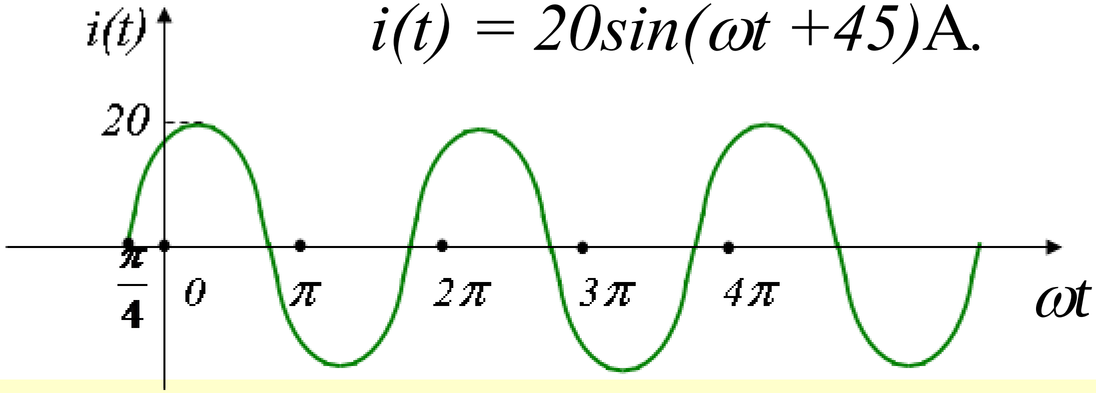




Примери: за определяне на комплексната ефективна стойност на синусоидална величина

Пример 2: Да се определи комплекса на синусоидално изменящия се ток

$$i(t) = 20\sin(\omega t + 45)\text{A}.$$



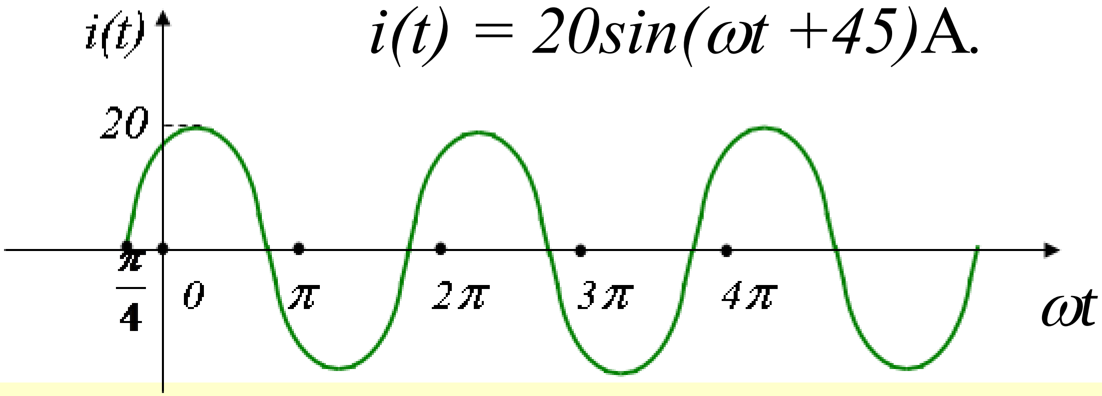
Комплексната ефективна стойност (комплекса) се определя като: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

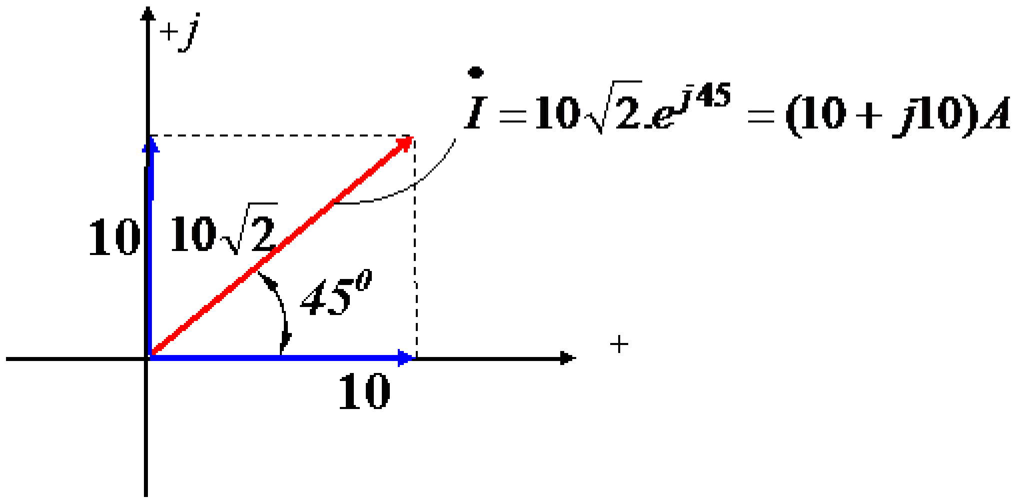
Ефективната стойност е $I = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{20}{\sqrt{2}}$ началната фаза $\psi_i = 45^0$.

$$\dot{I} = \frac{20}{\sqrt{2}}e^{j45} = 10\sqrt{2}.e^{j45} =$$

$$= 10\sqrt{2}.(\cos 45 + j\sin 45) = 10\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (10 + j10)A$$

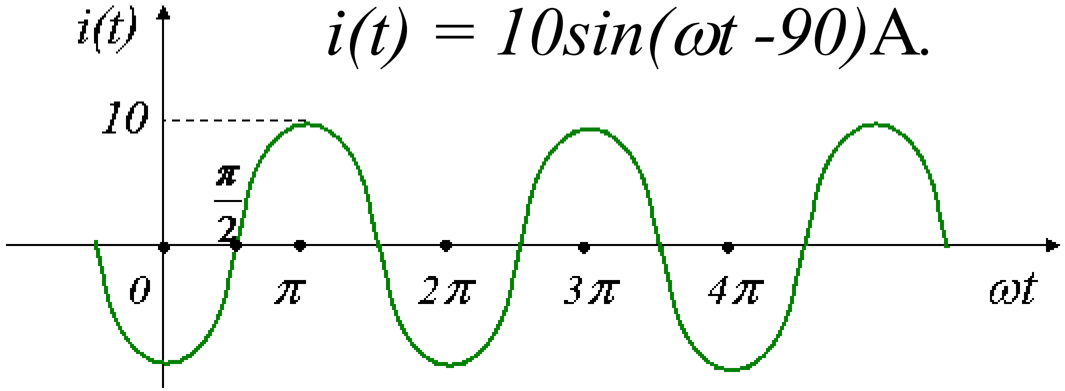
Можем да изобразим този ток в комплексната равнина





Пример 3: Да се определи комплекса на синусоидално изменящия се ток

$i(t) = 10\sin(\omega t - 90)$ A.



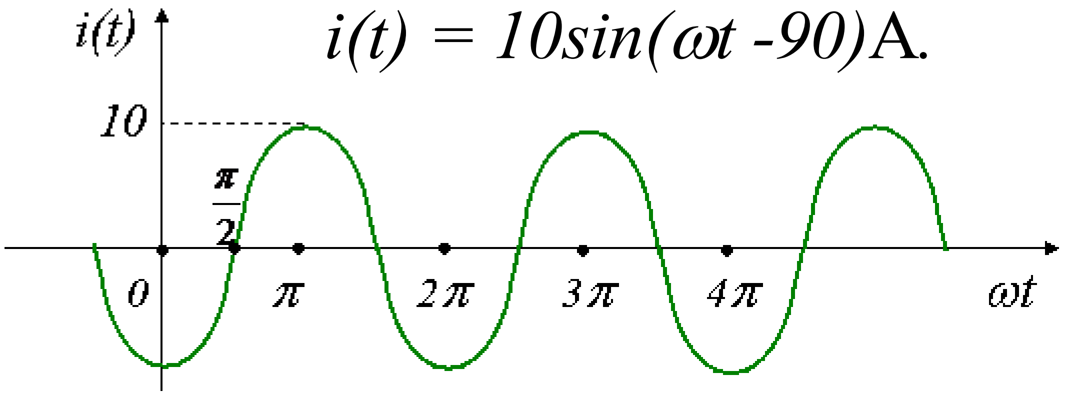
Комплексната ефективна стойност (комплекса) се определя като: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

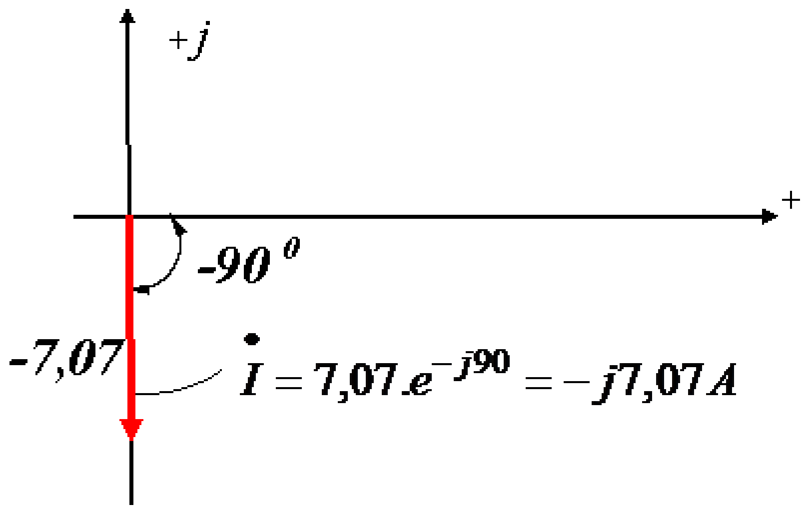
Ефективната стойност е $I = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$, а началната фаза $\boldsymbol{\psi_i} = -90^0$

$$\Rightarrow \quad \dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j90} = 7{,}07.e^{-j90} =$$

$$= 7{,}07[\cos(-90) + j\sin(-90)] = 7{,}07(0 - j) = -j7{,}07A$$

Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина:





Обратно преобразуване от **комплексен образ** в **синусоидална величина**:

Ако за токът $i(t)$ е известно, че неговата комплексна ефективна стойност

може да се запише като: $\dot{I} = a + jb$

1. Определяме ефективната стойност и началната фаза на тока :

$$\dot{I} = a + jb = \sqrt{(a^2 + b^2)}.e^{j\,arctg\frac{b}{a}} = I.e^{j\psi_i},$$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\psi_i = arctg\frac{b}{a}$$

2. Тогава синусоидалният ток $i(t)$ се определя като:

$$i(t) = \sqrt{2}.I \sin(\omega t + \psi_i) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

<u>Пример 1:</u> Да се определи синусоидално изменящия се ток $i(t)$, ако комплекса на този ток има вида:

$$\dot{I} = (3 + j4)A$$

За да определим синусоидално изменящия се ток $i(t)$ трябва да намерим <u>амплитудната стойност i_m и началната фаза ψ_i</u> на тока.

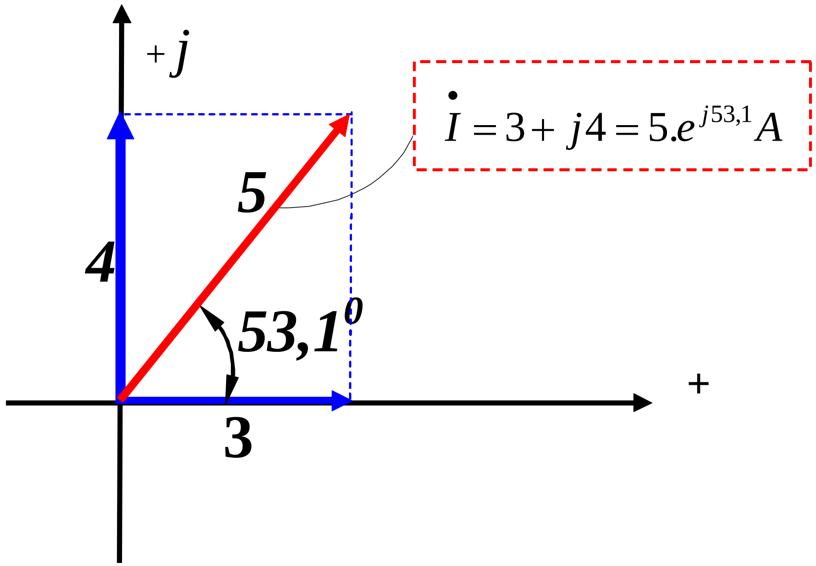
$$\dot{I} = 3 + j4 = \sqrt{3^2 + 4^2}.e^{jarctg\frac{4}{3}} = 5.e^{j53,1}A$$

Следователно **<u>ефективната стойност на тока е I=5A, а началната фаза ψ_i =53,1^0</u>**

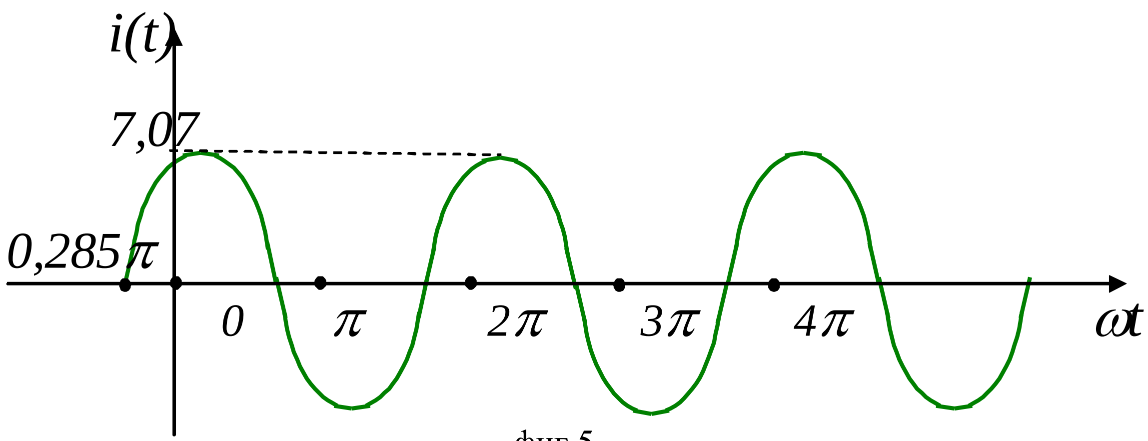
Тогава амплитудата $i_m = 5\sqrt{2} = 7,07A$

$$\boxed{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = 7,07\sin(\omega t + 53,1^0)A}$$

Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина:



Синусоидално изменящият се ток е представен на фиг.5. (Ъгълът ψ_i в радиани се определя като $\psi_i = 51{,}3.\frac{\pi}{180} = 0.285\pi\ rad$)



фиг.5

Пример 2: Да се определи синусоидално изменящия се ток *i(t),* ако комплекса на този ток има вида:

$$\dot{I} = (3 - j3)A$$

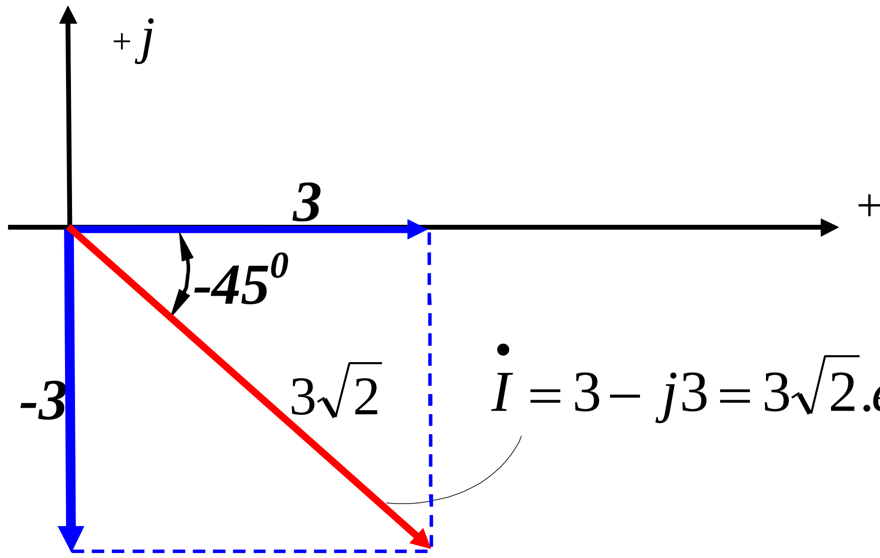
Решение

$$\dot{I} = 3 - j3 = \sqrt{3^2 + 3^2}.e^{jarctg\frac{-3}{3}} = 3\sqrt{2}.e^{-j45}A$$

Следователно ефективната стойност на тока е $I = 3\sqrt{2}A$, а началната фаза $\psi_i - 45^0$

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = 6\sin(\omega t - 45^0)A$$

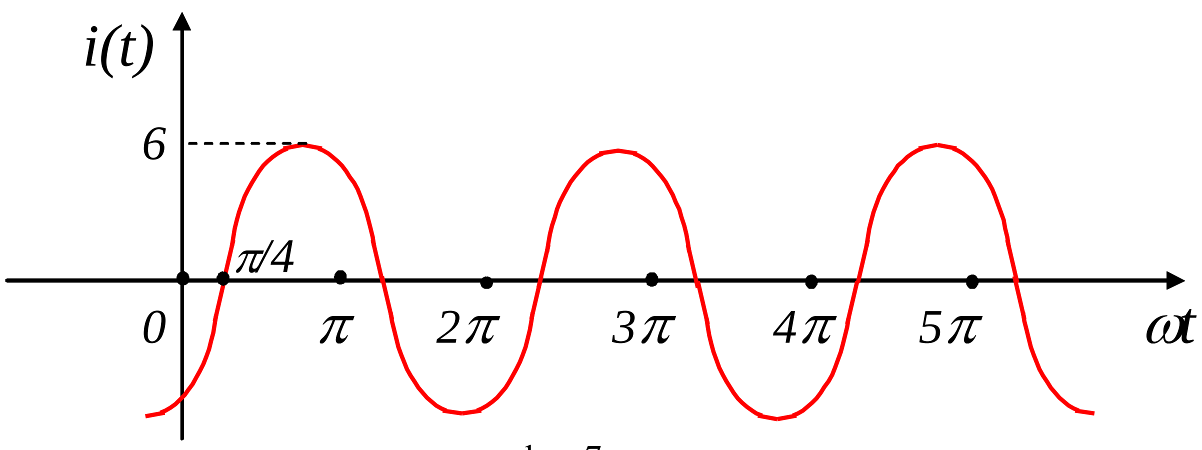
Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина (фиг.6):



$$\dot{I} = 3 - j3 = 3\sqrt{2}.e^{-j45} A$$

фиг.6

Синусоидално изменящият се ток е представен на фиг.7. (Ъгълът ψ_i в радиани се определя като $\psi_i = -45\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{4}\ rad$)



фиг.7

<u>Пример 3:</u> Да се определи синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$, ако комплекса на това напрежение има вида:

$$\dot{U} = j100V$$

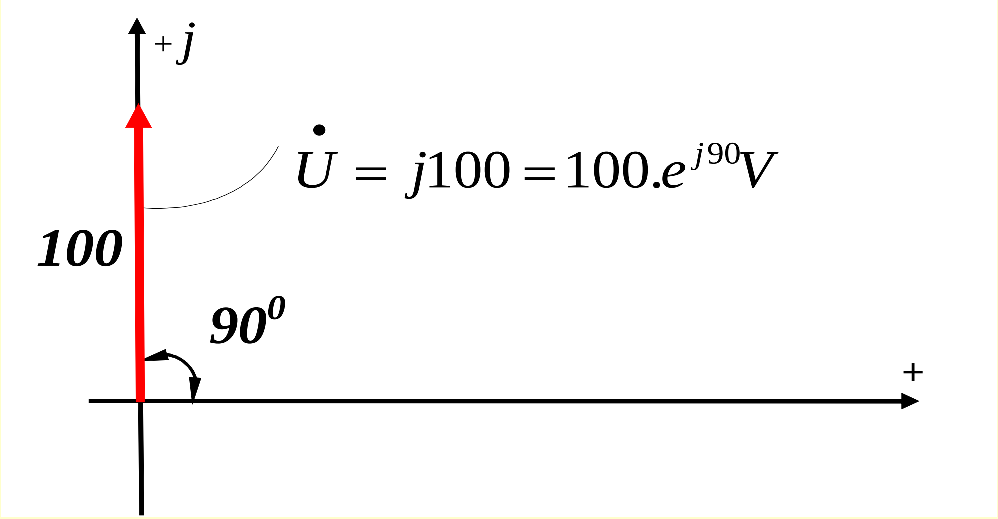
<u>Решение</u>

Комплексната ефективна стойност, записана в експоненциален вид позволява да се определят **ефективната стойност и началната фаза:**

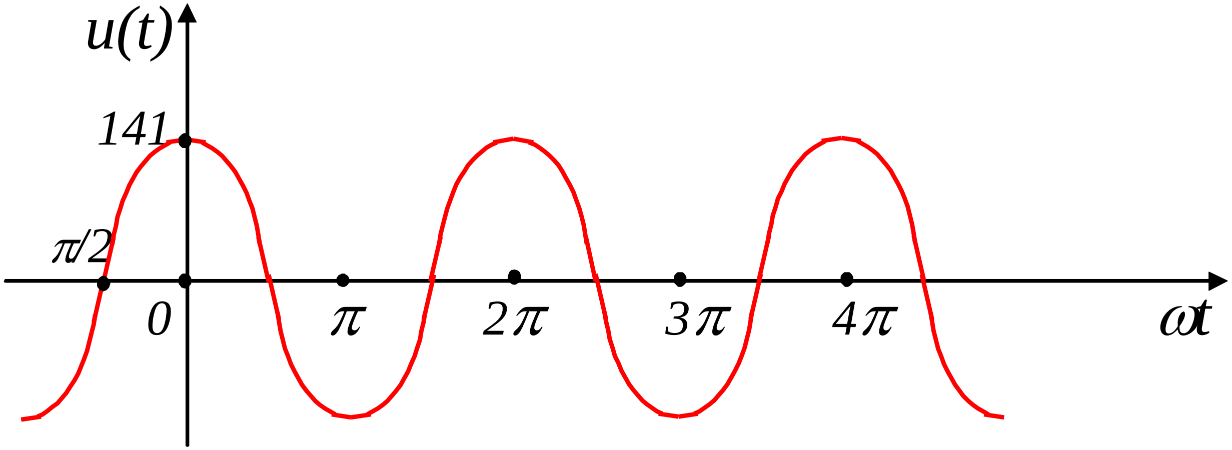
$$\dot{U} = j100 = \sqrt{100^2}.e^{jarctg\frac{100}{0}} = 100.e^{j90}V$$

Следователно <u>ефективната стойност на напрежението</u> е $U = 100V$, а <u>началната фаза</u> $\psi_u = 90^0$. Тогава <u>амплитудата</u> $u_m = U\sqrt{2} = 100\sqrt{2} = 141V$

$$\boxed{u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u) = 141\sin(\omega t + 90^0)V}$$



Синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$ е представено на фиг.9. (Ъгълът ψ_u в радиани се определя като $\psi_u = 90\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\, rad$)



фиг.9

Умножение на комплексна величина **с имагинерната единица**

Ако умножим комплексно число с имагинерната единица j, това е равносилно на завъртане на величината на ъгъл 90^0 в комплексната равнина.

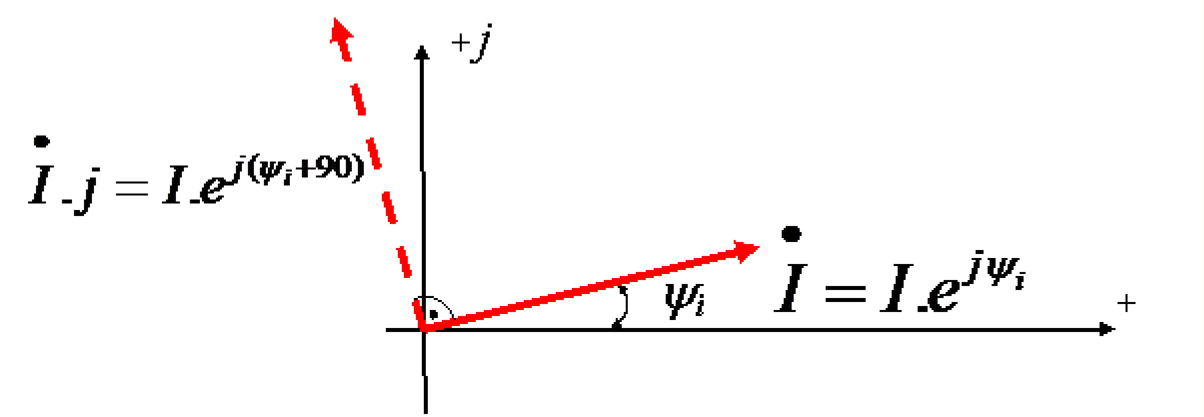
Доказателство:

Имагинерната единица j, записана в експоненциален вид се представя като:

$$j = 0 + j.1 = \sqrt{0^2 + 1^2}\, e^{jarctg\frac{1}{0}} = 1e^{j90}.$$

Ако умножим $\dot{I} = I.e^{j\psi_i}$ с имагинерната единица, получаваме:

$$\dot{I}.j = I.e^{j\psi_i}.1.e^{j90} = I.e^{j(\psi_i+90)}.$$

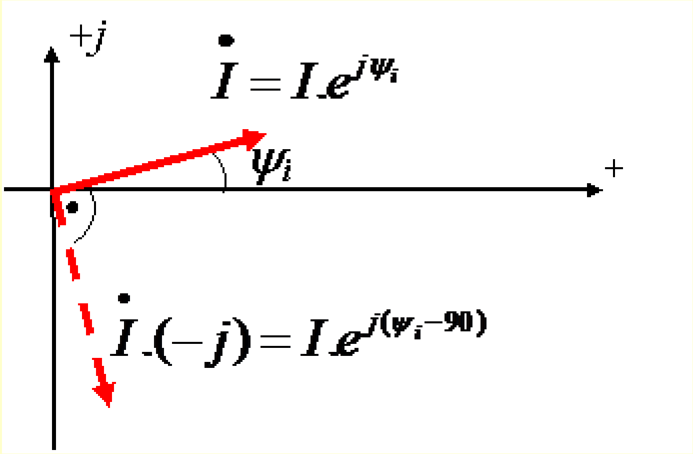


Аналогично, ако умножим комплексно число с $(-j)$, това е равносилно на **завъртане на величината на ъгъл -90^0** в комплексната равнина.

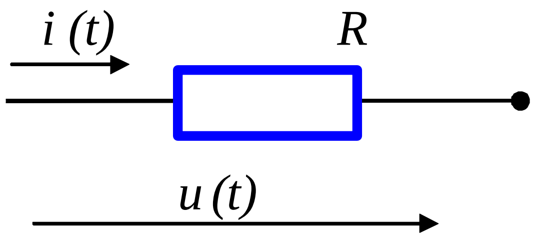
Доказателство:

$$-j = 0 - j.1 = \sqrt{0^2+1^2}\,e^{jarctg\frac{-1}{0}} = 1e^{j-90}.$$

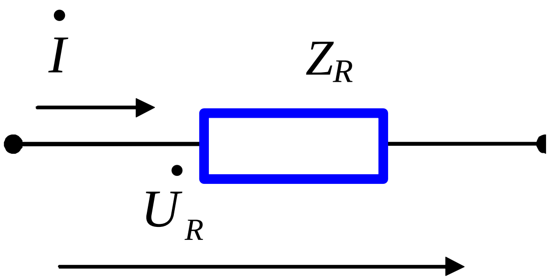
$$\Rightarrow \dot{I}.(-j) = I.e^{j\psi_i}.1.e^{-j90} = I.e^{j(\psi_i-90)}.$$

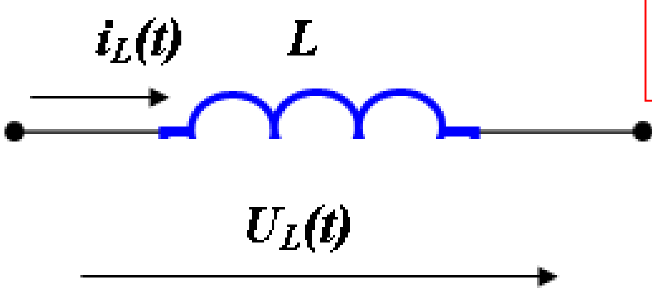


Комплексни съпротивления

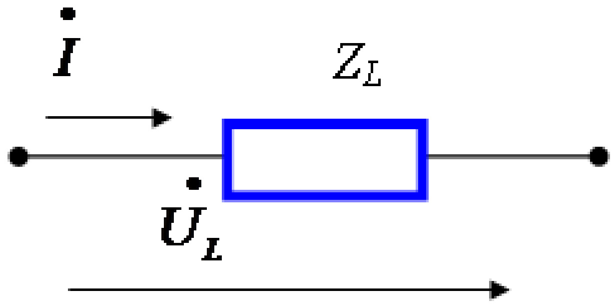


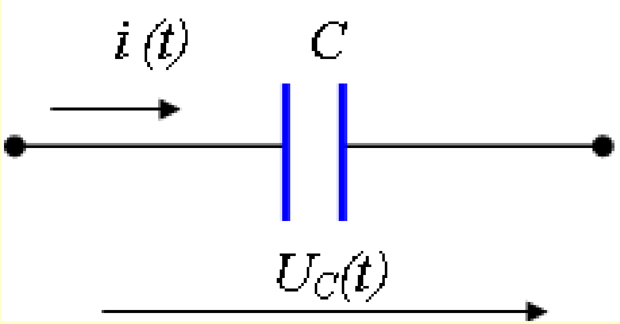
$$Z_R = R$$



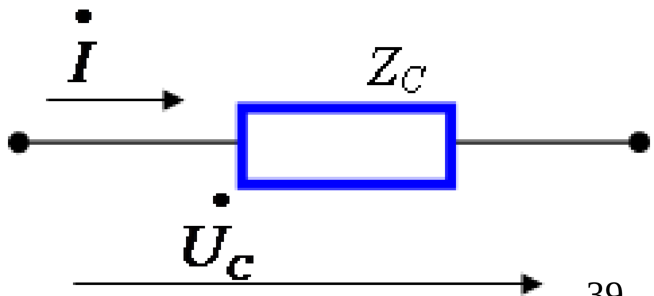


$$Z_L = j\omega L$$

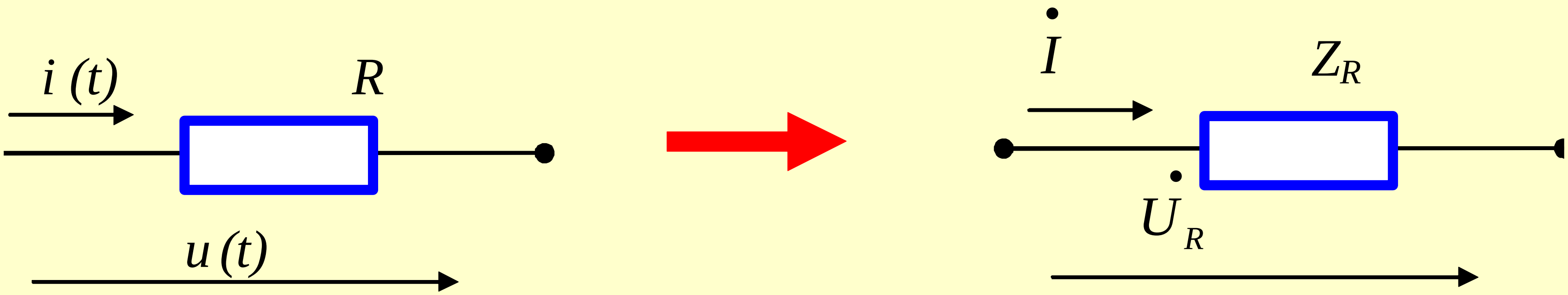




$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C}$$



1. Комплексно съпротивление на резистор **$\underline{Z_R = R}$**



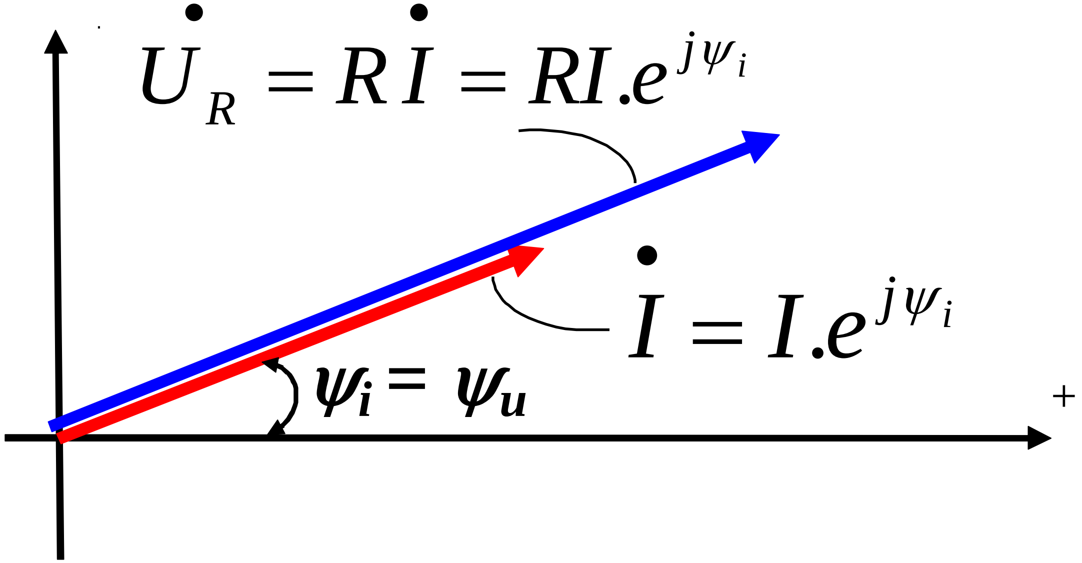
$$i(t) = i_m \sin \omega t \longrightarrow \dot{I} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

$$u(t) = R.\ i(t) = R\ i_m \sin \omega t \longrightarrow \dot{U}_R = \frac{R i_m}{\sqrt{2}} e^{j0} = R.\dot{I}$$

$$\dot{U}_R = R.\dot{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_R = R}$$

Векторна диаграма

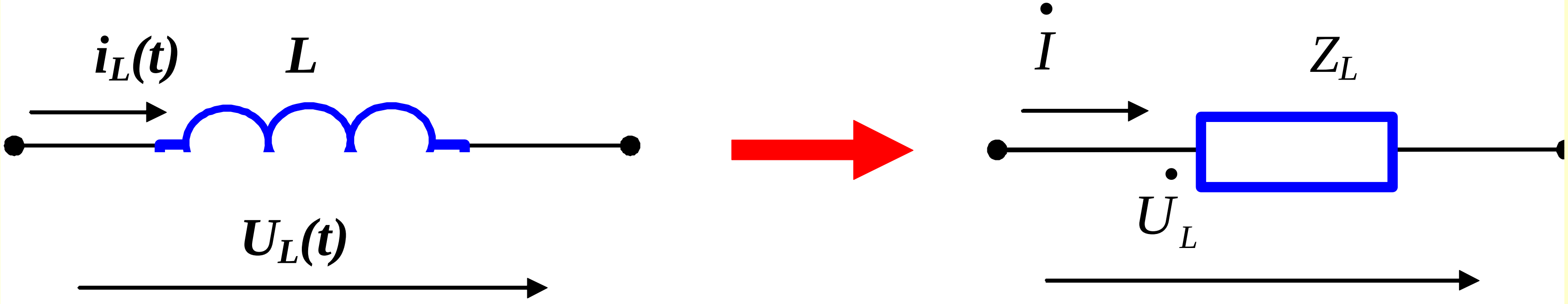


$$Z_R = R$$

$$\dot{U}_R = R.\dot{I}$$

$$\psi_i = \psi_u$$

2. Комплексно съпротивление на бобина $\underline{Z_L = jX_L = j\omega L}$



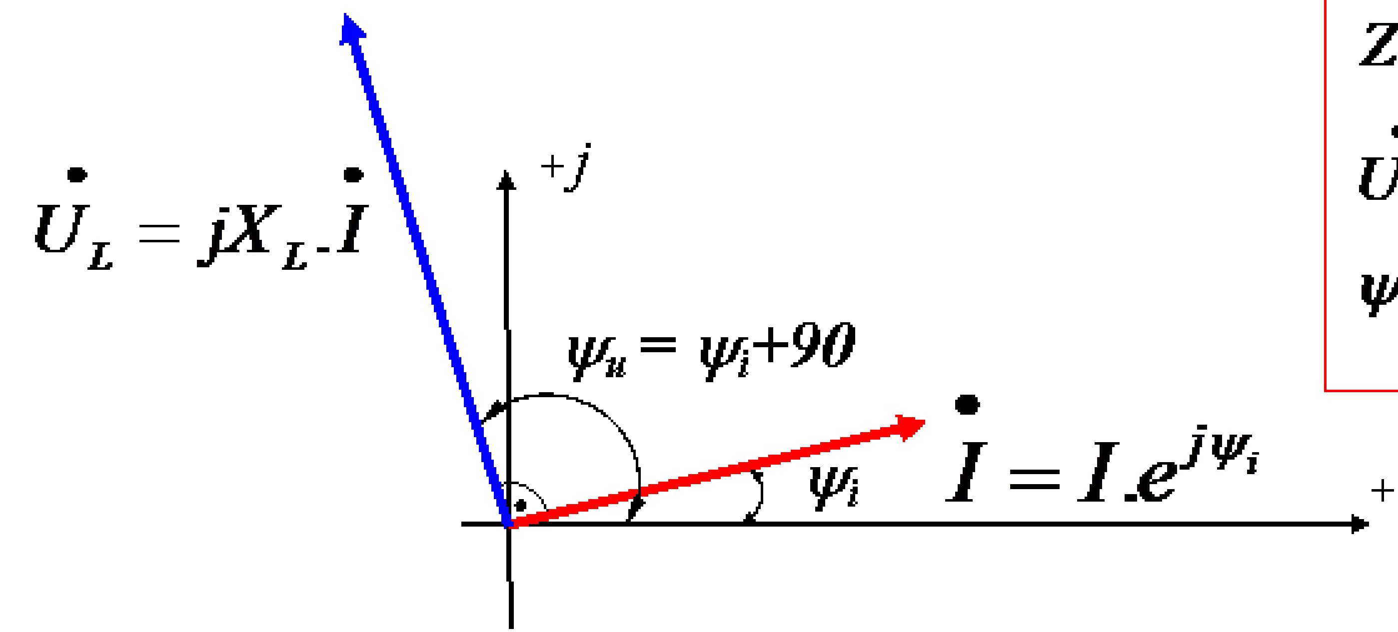
$i(t) = i_m \sin \omega t \longrightarrow \dot{I} = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$

$u_L(t) = \omega L\, i_m \sin(\omega t + 90) \longrightarrow \dot{U}_L = \dfrac{\omega L i_m}{\sqrt{2}} e^{j90} = \omega L . \dot{I} . j$

$$\dot{U}_L = j\omega L . \dot{I} = jX_L . \dot{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L = jX_L}$$

Векторна диаграма

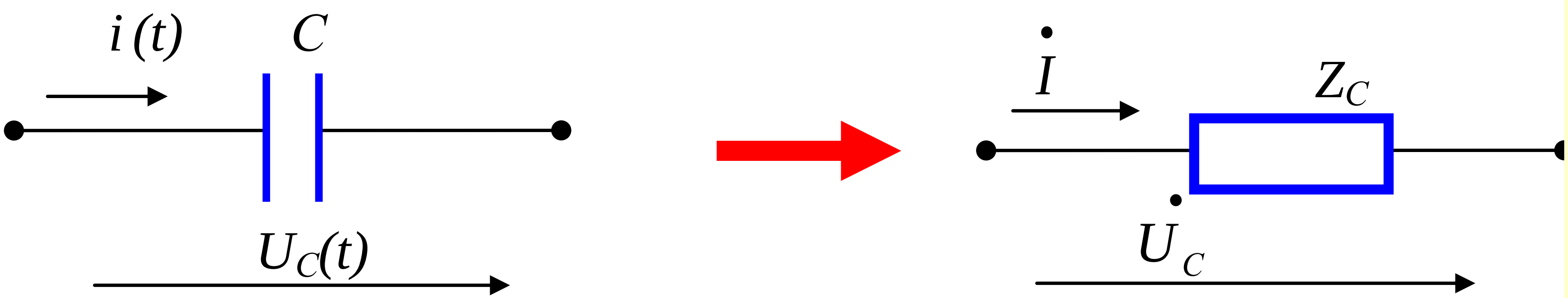


$$Z_L = jX_L = j\omega L$$

$$\dot{U}_L = jX_L\,\dot{I}$$

$$\psi_u = \psi_i + 90^0$$

3. Комплексно съпротивление на кондензатор $\boxed{Z_C = -jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}}$



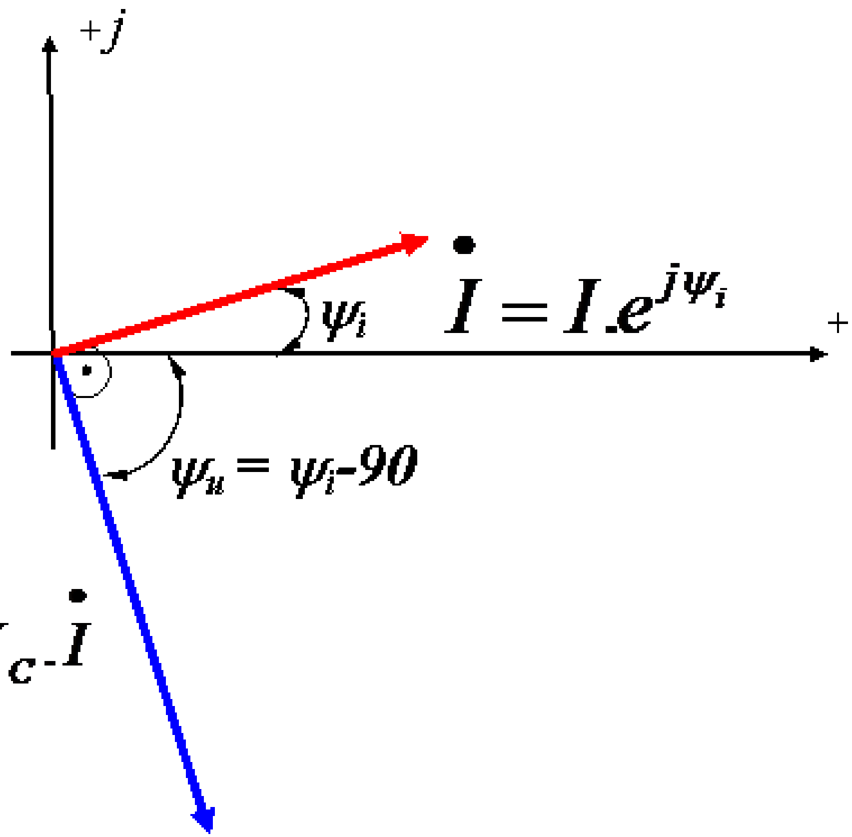
$i(t) = i_m \sin\omega t$ $\longrightarrow$ $\boxed{\dot{I} = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}}$

$u_C(t) = i_m \dfrac{1}{\omega C}\sin(\omega t - 90)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\dot{U}_C = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} . \dfrac{1}{\omega C} e^{-j90} = -j\dfrac{1}{\omega C} . \dot{I}.}$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}.\dot{I} = -jX_C.I$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C}$$

Векторна диаграма



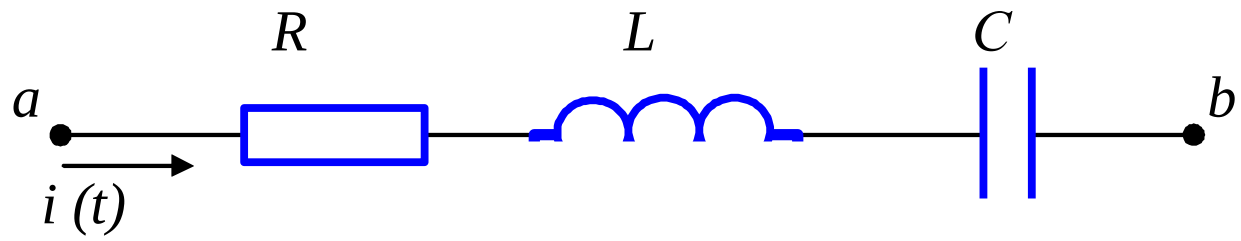
$$\dot{U}_C = -jX_C.\dot{I}$$

$$Z_L = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$\dot{U}_C = -jX_C\dot{I}$$

$$\psi_u = \psi_i - 90^0$$

Пример 1: Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.10), ако е известно: R = 10Ω, L=30 mH, C=50μF, f=160Hz.



$$\boxed{Z_{ab} = Z_R + Z_L + Z_C} \boxed{= 10 + j30 - j20 = (10 + j10)\Omega}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 10^3 rad/s$$

$$\boxed{Z_R = R = 10\Omega}$$

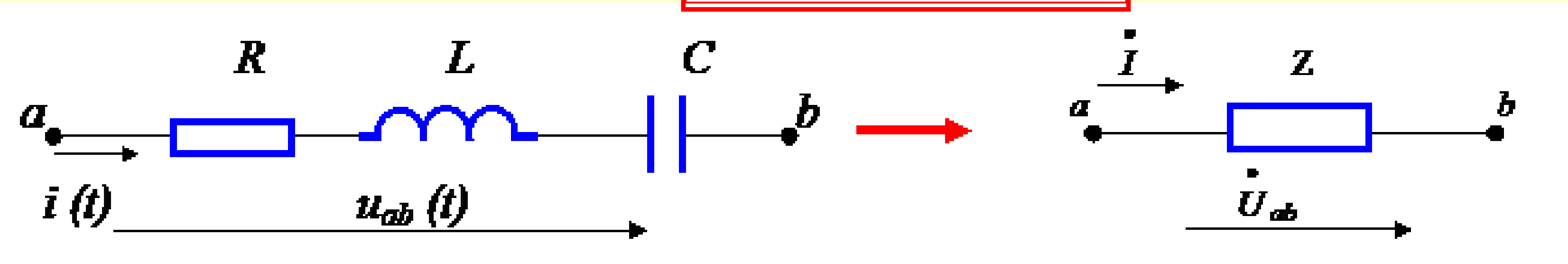
$$\boxed{Z_L = j\omega L = j.10^3.30.10^{-3} = j30\Omega}$$

$$\boxed{Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^3.50.10^{-6}} = -j20\Omega}$$

Комплексна форма на основните закони за електрически вериги.

Закон на Ом

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z}$$



$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$u_m = z.i_m; \quad \psi_u = \psi_i + \varphi;$$

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2};$$

$$\varphi = arctg \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$$

$$\dot{I} = I.e^{j\psi_i};$$

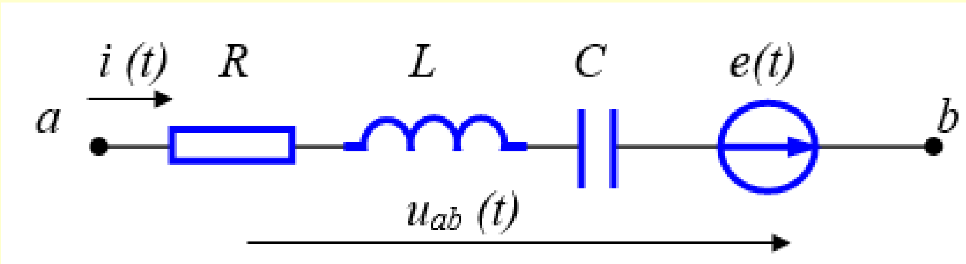
$$\dot{U} = U.e^{j\psi_u};$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}; \qquad Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

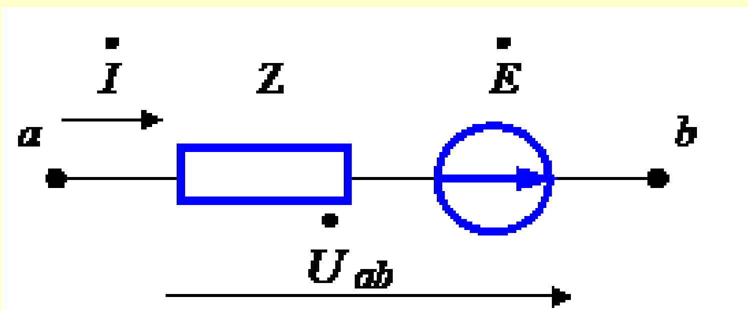
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U.e^{j\psi_u}}{I.e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}.e^{j(\psi_u - \psi_i)} = z.e^{j\varphi};$$

$$\boxed{Z = z.e^{j\varphi};}$$

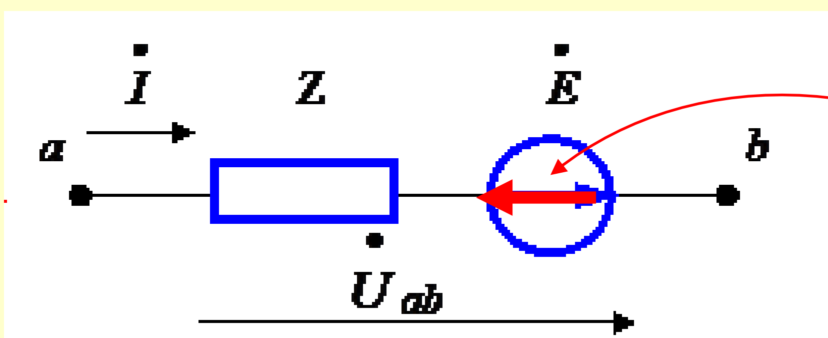
Обобщен закон на Ом



$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab} + \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b + \dot{E}}{Z}$$

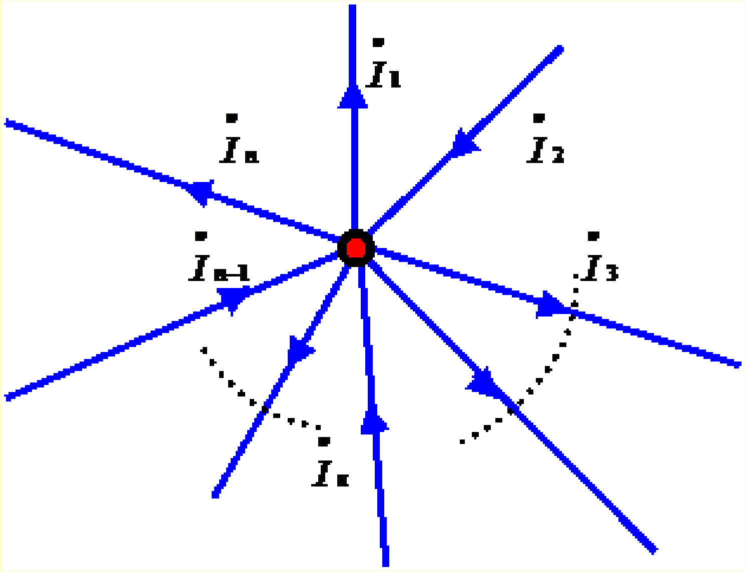


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab} + \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b + \dot{E}}{Z}$$

Закони на Кирхоф

I Закон на Кирхоф

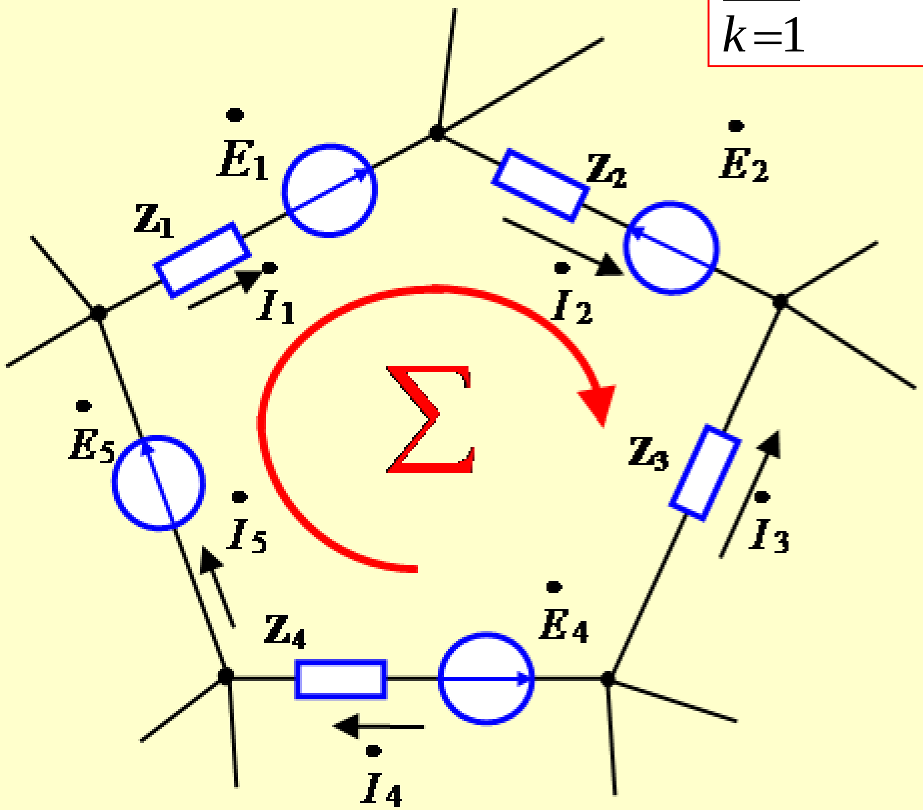
$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$$



$$\boxed{-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \ldots + \dot{I}_k + \ldots + \dot{I}_{n-1} - \dot{I}_n = 0}$$

II Закон на Кирхоф

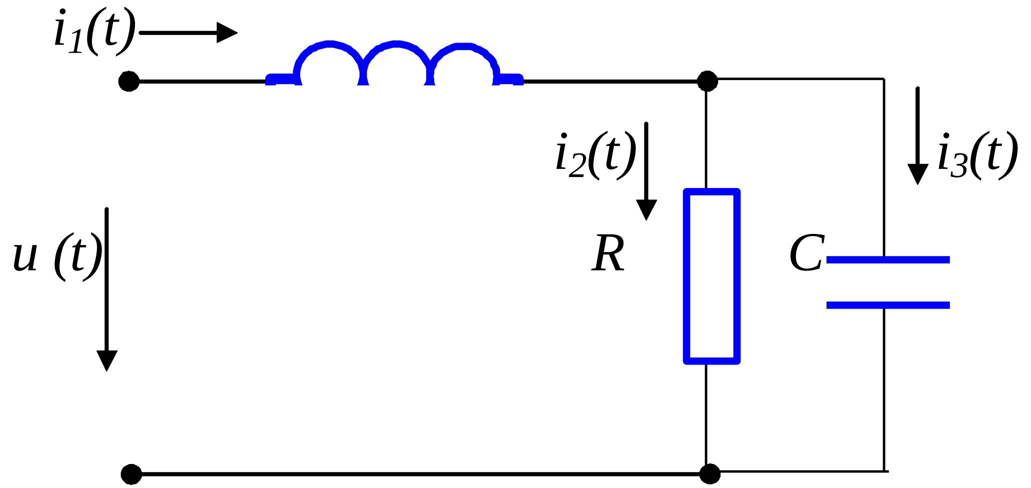
$$\sum_{k=1}^{m} \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^{m} \dot{E}_k$$

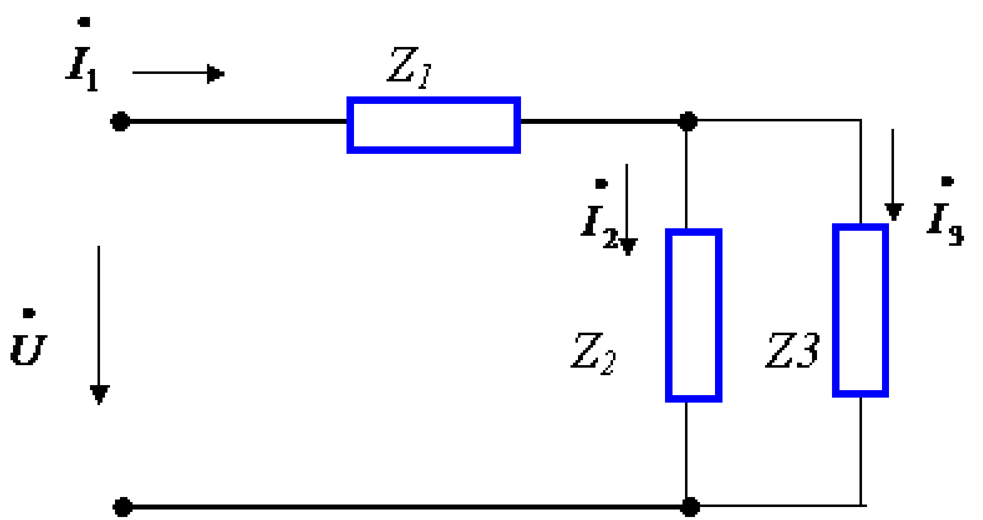


$$\dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_3 Z_3 + \dot{I}_4 Z_4 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_4 + \dot{E}_5$$

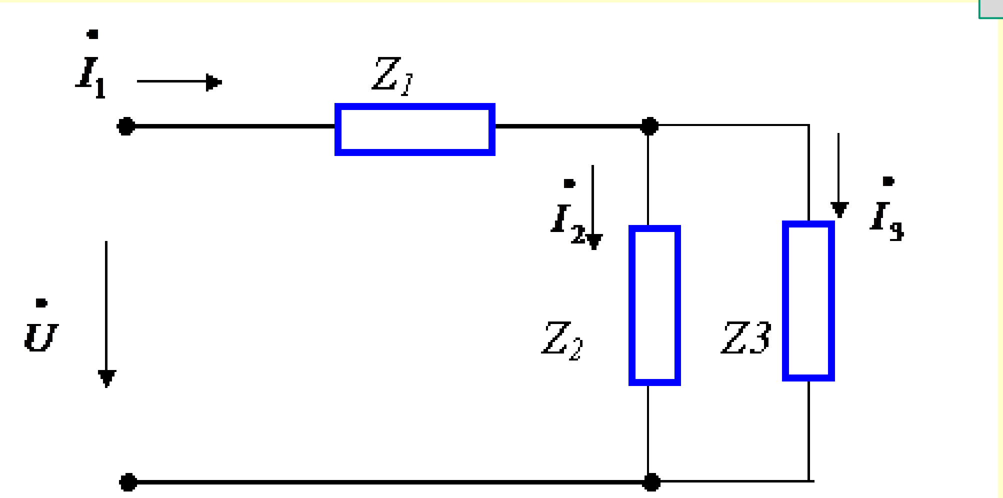
Пример 3: Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.12) и токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ако е известно:

$u(t)=200\sin(\omega t+45)V$
$f=80Hz$,
$R = 10\Omega$, $L=20\ mH$,
$C=100\mu F$,.





$u(t)=200\sin(\omega t+45)V$
$f=80Hz$,
$R = 10\Omega$, $L=20\ mH$,
$C=100\mu F$,.



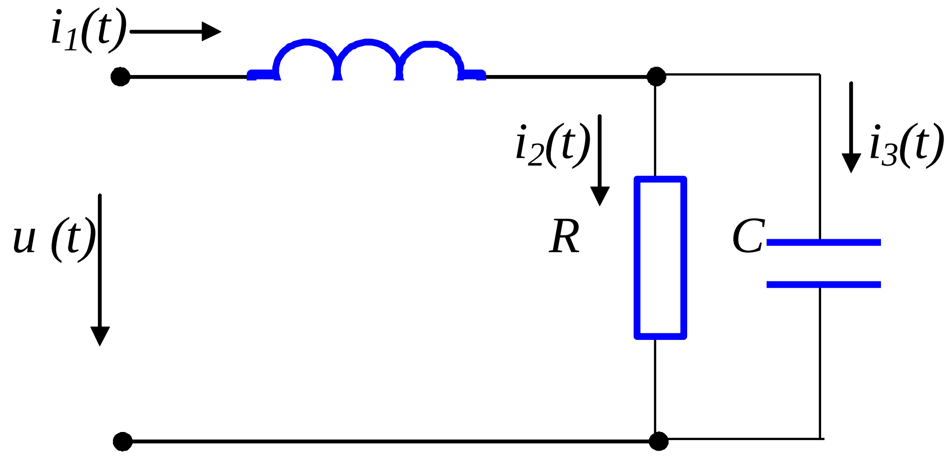
Определяме комплексното входно напрежение

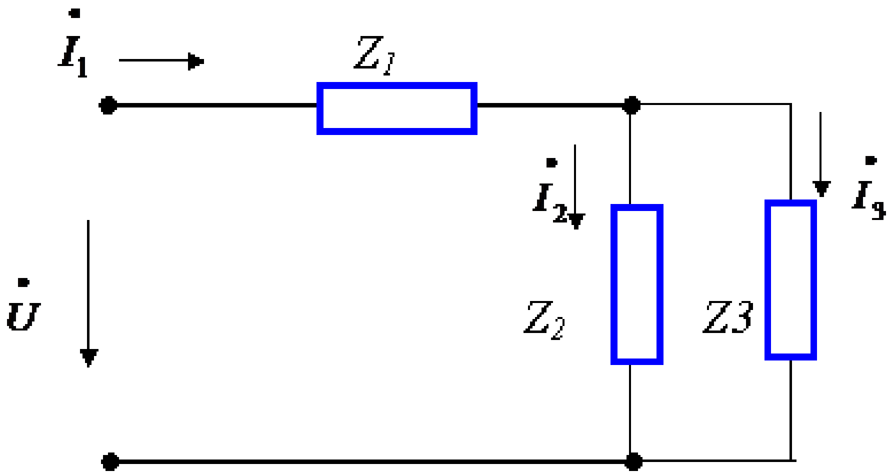
$$u(t)=200\sin(\omega t+45)V$$

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{200}{\sqrt{2}}e^{j45} =$$

$$100\sqrt{2}.(\cos 45 + j\sin 45) = 100\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = (100 + j100)V$$

$u(t)=200\sin(\omega t+45)V$
$f=80Hz,$
$R = 10\Omega, L=20\ mH,$
$C=100\mu F,.$





$$\dot{U}=\frac{200}{\sqrt{2}}e^{j45}=(100+j100)V$$

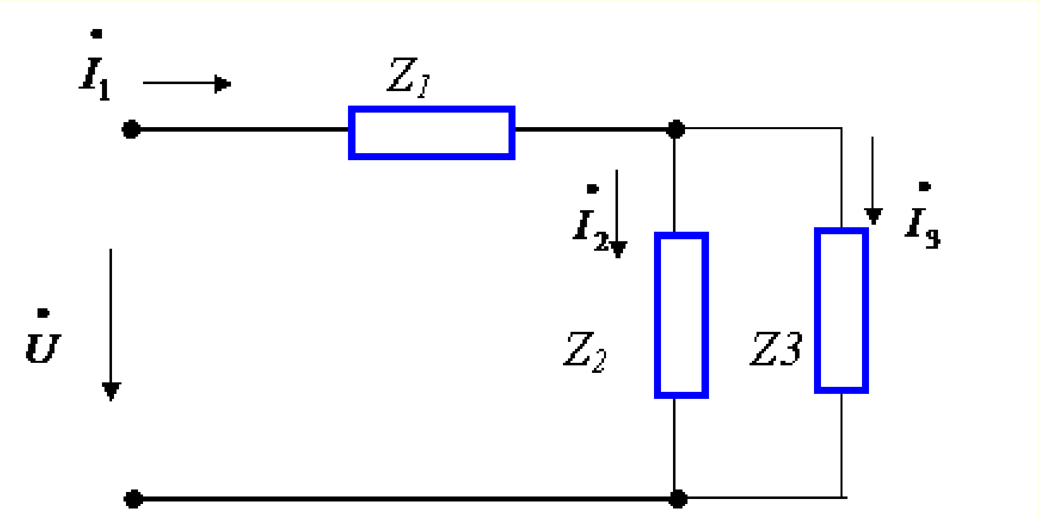
$$\omega=2\pi f\approx 500rad/s$$

$$Z_1=j\omega L=j.5.10^2.20.10^{-3}=j10\Omega$$

$$Z_2=R=10\Omega$$

$$Z_3=-j\frac{1}{\omega C}=-j\frac{1}{5.10^2.100.10^{-6}}=-j20\Omega$$

2. Определяме еквивалентното съпротивление



$$Z_1 = j\omega L == j10\Omega$$

$$Z_2 = R = 10\Omega$$

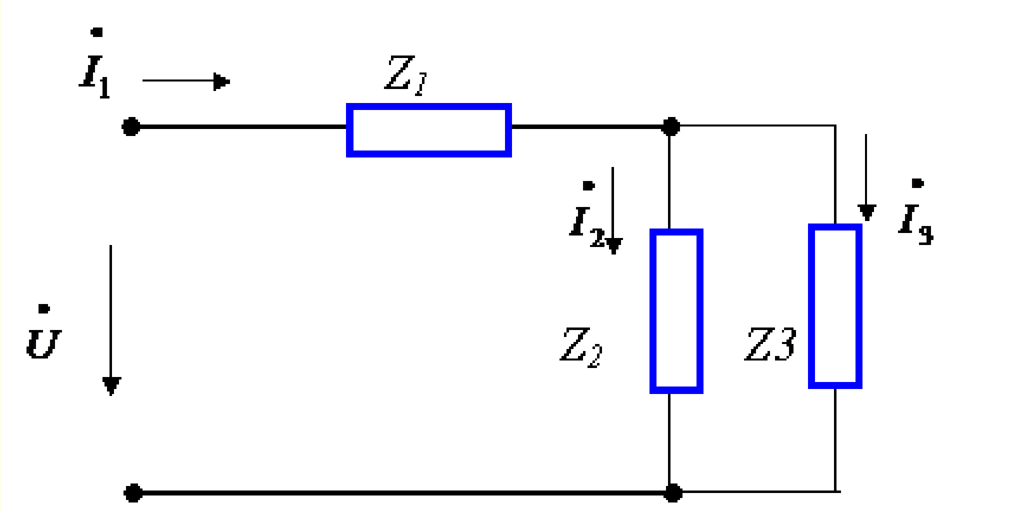
$$Z_3 = -j\frac{1}{\omega C} = -j20\Omega$$

$$Z_{eke} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = j10 + \frac{10.(-j20)}{10 - j20} =$$

$$= j10 + \frac{20.(-j)}{1-2j} = j10 + \frac{20.(-j)(1+2j)}{(1-2j)(1+2j)} = j10 + \frac{20.(-j+2)}{1^2+2^2} =$$

$$= j10 + \frac{20.(-j+2)}{5} = j10 - j4 + 8 = (8 + j6)\Omega$$

Определяме комплекса на входния ток $\dot{I}_1$.



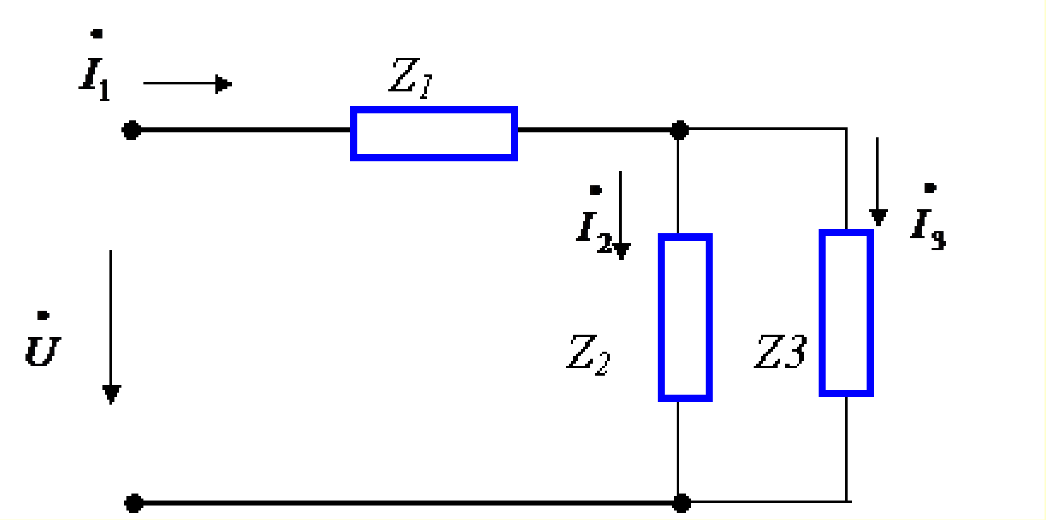
$$\dot{U} = (100 + j100)V$$

$$Z_{ek} = (8 + j6)\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ek}} = \frac{100 + j100}{8 + j6} = \frac{100(1 + j)}{2(4 + j3)} = \frac{50(1 + j)}{(4 + j3)} = \frac{50(1 + j)(4 - j3)}{(4 + j3)(4 - j3)} =$$

$$\frac{50(1 + j)(4 - j3)}{4^2 + 3^2} = \frac{50(4 + 4j - j3 + 3)}{25} = 2(7 + j)A = (14 + 2j)A$$

Определяме комплексите на токовете в двата паралелни клона $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$.



$$\dot{I}_1 = (14 + 2j)A$$

$$Z_1 = j10\Omega$$

$$Z_2 = 10\Omega$$

$$Z_3 = -j20\Omega$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 2(7 + j)\frac{-j20}{10 - j20} = \frac{40(7 + j)(-j)}{10 - j20} = \frac{4(7 + j)(-j)}{1 - j2} =$$

$$= \frac{4(7 + j)(-j)}{1 - j2} = \frac{4(-7j + 1)}{1 - j2} = \frac{4(-7j + 1)(1 + j2)}{(1 - j2)(1 + j2)} = \frac{4(-7j + 1 + 14 + 2j)}{1^2 + 2^2}$$

$$= 0{,}8(15 - j5) = (12 - j4)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 14 + 2j - 12 + 4j = (2 + 6j)A$$

Определяне на моментните стойности на токовете във веригата

Получени са: $\dot{I}_1 = (14+2j)A$ $\dot{I}_2 = (12-j4)A$ $\dot{I}_3 = (2+6j)A$

$$\dot{I}_1 = 14+2j = \sqrt{14^2+2^2}e^{jarctg\frac{2}{14}} = \sqrt{200}e^{j8,13} = 10\sqrt{2}.e^{j8,13} = I_1 e^{j\psi_1}$$

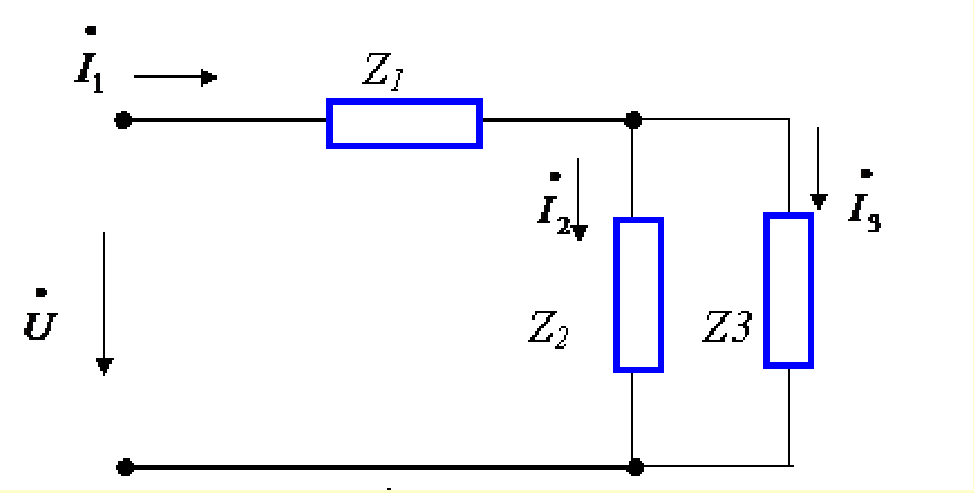
$$\Rightarrow i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_1) = 20\sin(\omega t + 8,13^0)A$$

$$\dot{I}_2 = 12-4j = \sqrt{12^2+4^2}e^{jarctg\frac{-4}{12}} = \sqrt{160}e^{-j18,43} = 4\sqrt{10}.e^{-j18,43} = I_2 e^{j\psi_2}$$

$$\Rightarrow i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_2) = 17,9\sin(\omega t - 18,43^0)A$$

$$\dot{I}_3 = 2+6j = \sqrt{2^2+6^2}e^{jarctg\frac{6}{2}} = \sqrt{40}e^{j71,56} = 2\sqrt{10}.e^{j71,56} = I_3 e^{j\psi_3}$$

$$\Rightarrow i_3(t) = I_3\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_3) = 8,94\sin(\omega t + 71,56^0)A$$



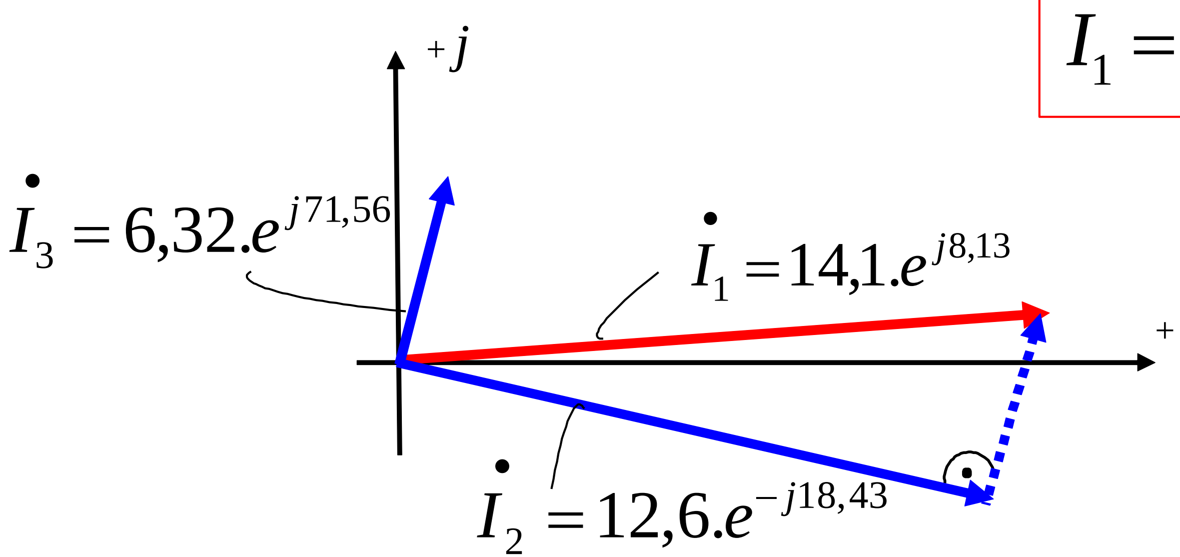
$$\dot{I}_1 = 14 + 2j = 14.1.e^{j8,13} A$$

$$\dot{I}_2 = 12 - 4j = 12.6.e^{-j18,43} A$$

$$\dot{I}_3 = 2 + 6j = 6.32.e^{j71,56} A$$

Векторна диаграма

$$\boxed{\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3}$$




Благодаря за вниманието
проф. д-р Илона Ячева