

# Методи за анализ на синусоидален режим в линейни електрически вериги 2.

(лекция 08.11.2022г.)

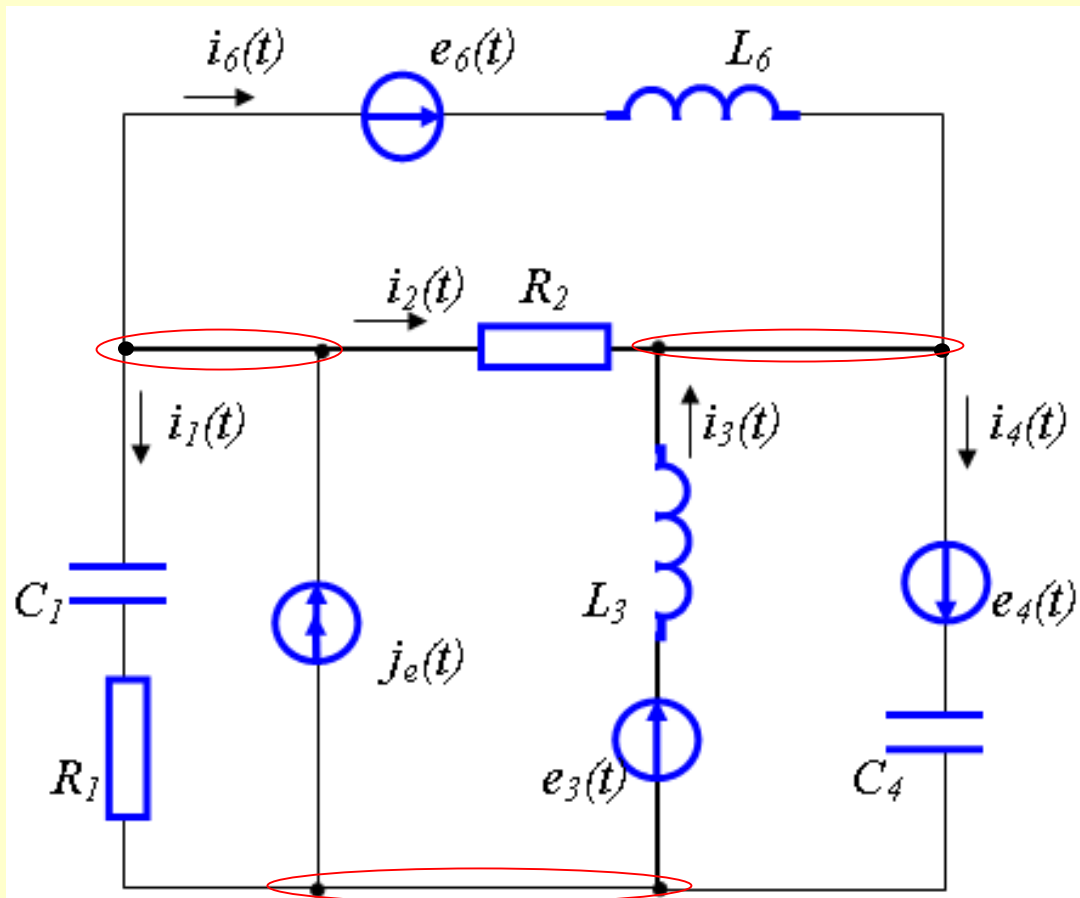
Преподавател: проф. д-р Илона Ячева

кат. “Теоретична Електротехника”,  
Технически университет - София



# Методи за анализ на стационарни режими в линейни електрически вериги

- При анализ на вериги с повече от един източник и по-голям брой клонове се използват различни методи за анализ на стационарни режими



При използването им се достига до решаване на линейни системи уравнения относно неизвестни токове или потенциали.

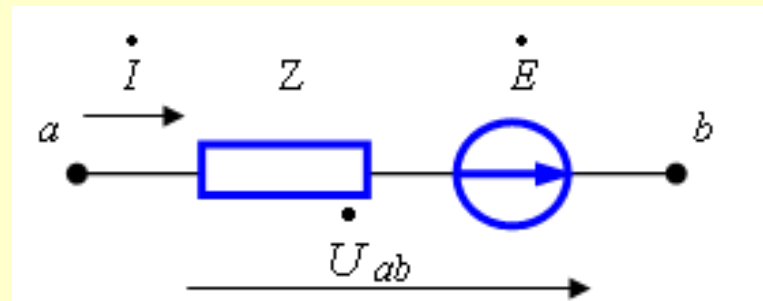
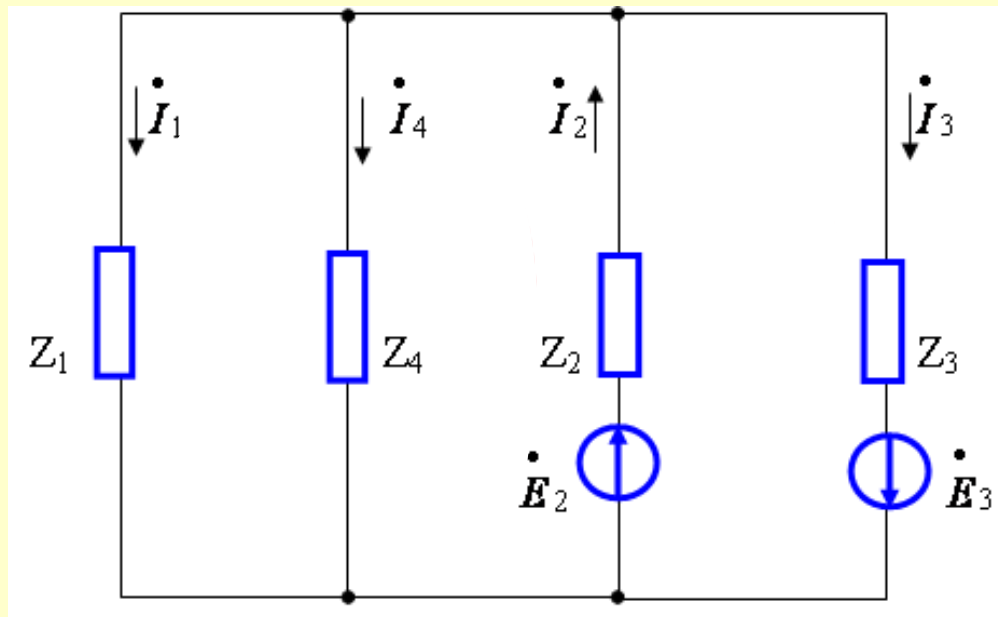
Важно е правилно да определим броя възли и клонове във веригата

брой възли  **$n=3$** ,

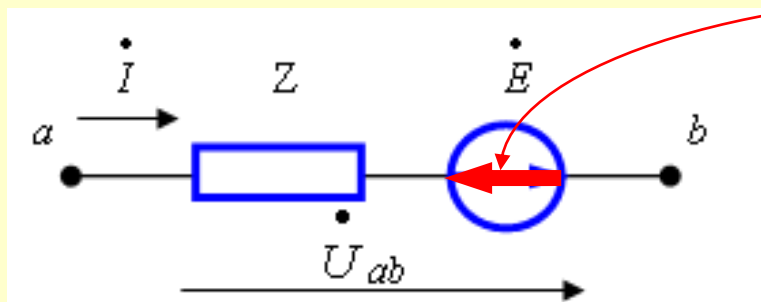
брой клонове  **$m=6$**

# Метод с възлови потенциали

Идеята на метода е предложена от Максвел



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab} + \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b + \dot{E}}{Z}$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab} + \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b - \dot{E}}{Z}$$

# Метод с възлови потенциали

## Алгоритъм на метода

1. Определяме брой възли във веригата:

брой възли - ***n***

2. Избираме възел с нулев потенциал

$$\dot{V}_n = 0$$

3. Записваме система от *n-1* уравнения относно неизвестните потенциали

# Система от $n - 1$ уравнения относно неизвестните потенциали

$$\begin{aligned}
 +\dot{V}_1 Y_{11} - \dot{V}_2 Y_{12} - \dot{V}_3 Y_{13} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 1} \\
 -\dot{V}_1 Y_{21} + \dot{V}_2 Y_{22} - \dot{V}_3 Y_{23} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{2,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 2} \\
 -\dot{V}_1 Y_{31} - \dot{V}_2 Y_{32} + \dot{V}_3 Y_{33} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{3,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 3} \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 -\dot{V}_1 Y_{n-1,1} - \dot{V}_2 Y_{n-1,2} - \dot{V}_3 Y_{n-1,3} \pm \dots + \dot{V}_{n-1} Y_{n-1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } n-1}
 \end{aligned}$$

$$\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3, \dots, \dot{V}_{n-1}$$

- са търсените потенциали

# Система от $n-1$ уравнения относно неизвестните потенциали

$$\begin{aligned}
 +\dot{V}_1 Y_{11} - \dot{V}_2 Y_{12} - \dot{V}_3 Y_{13} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 1} \\
 -\dot{V}_1 Y_{21} + \dot{V}_2 Y_{22} - \dot{V}_3 Y_{23} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{2,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 2} \\
 -\dot{V}_1 Y_{31} - \dot{V}_2 Y_{32} + \dot{V}_3 Y_{33} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{3,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 3} \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 -\dot{V}_1 Y_{n-1,1} - \dot{V}_2 Y_{n-1,2} - \dot{V}_3 Y_{n-1,3} \pm \dots + \dot{V}_{n-1} Y_{n-1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } n-1}
 \end{aligned}$$

$$Y_{ii} = Y_{11}, Y_{22}, Y_{33}, \dots, Y_{n-1,n-1}$$

---СОБСТВЕНИ ВЪЗЛОВИ ПРОВОДИМОСТИ

# Система от $n - 1$ уравнения относно неизвестните потенциали

$$\begin{aligned}
 +\dot{V}_1 Y_{11} - \dot{V}_2 Y_{12} - \dot{V}_3 Y_{13} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 1} \\
 -\dot{V}_1 Y_{21} + \dot{V}_2 Y_{22} - \dot{V}_3 Y_{23} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{2,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 2} \\
 -\dot{V}_1 Y_{31} - \dot{V}_2 Y_{32} + \dot{V}_3 Y_{33} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{3,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 3} \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 -\dot{V}_1 Y_{n-1,1} - \dot{V}_2 Y_{n-1,2} - \dot{V}_3 Y_{n-1,3} \pm \dots + \dot{V}_{n-1} Y_{n-1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } n-1}
 \end{aligned}$$

$Y_{ij}$

взаимни възлови проводимости  
за възел " $i$ " и за възел " $j$ ".

$$Y_{ij} = Y_{ji}$$

# Система от $n - 1$ уравнения относно неизвестните потенциали

$$\begin{aligned}
 +\dot{V}_1 Y_{11} - \dot{V}_2 Y_{12} - \dot{V}_3 Y_{13} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 1} \\
 -\dot{V}_1 Y_{21} + \dot{V}_2 Y_{22} - \dot{V}_3 Y_{23} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{2,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 2} \\
 -\dot{V}_1 Y_{31} - \dot{V}_2 Y_{32} + \dot{V}_3 Y_{33} - \dots - \dot{V}_{n-1} Y_{3,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } 3} \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 -\dot{V}_1 Y_{n-1,1} - \dot{V}_2 Y_{n-1,2} - \dot{V}_3 Y_{n-1,3} \pm \dots + \dot{V}_{n-1} Y_{n-1,n-1} &= \dot{J}_{\text{възел } n-1}
 \end{aligned}$$

$$\dot{J}_{\text{възел } 1}, \dot{J}_{\text{възел } 2}, \dot{J}_{\text{възел } 3}, \dots, \dot{J}_{\text{възел } n-1}$$

----- ВЪЗЛОВИ  
електродвижещи токове



## Метод с възлови потенциали

### Алгоритъм на метода

4. Решаваме системата уравнения и определяме неизвестните потенциали:

$$\dot{V}_1 = \dots\dots\dots$$

$$\dot{V}_2 = \dots\dots\dots$$

$$\dot{V}_3 = \dots\dots\dots$$

.....

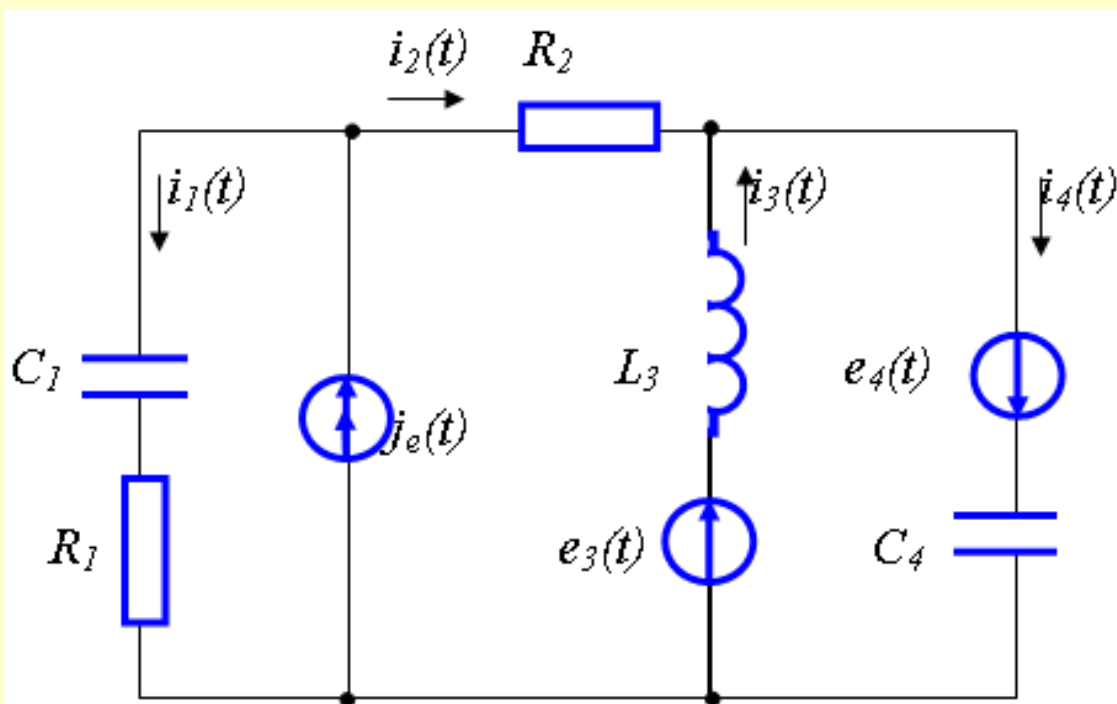
$$\dot{V}_{n-1} = \dots\dots\dots$$

5. Определяме клоновите токове по закона на Ом.

## Пример:

Анализ на верига по метода с възлови потенциали.

Да се определят клоновите токове за веригата показана на фигурата, като се използва метода с възлови потенциали



$$f=160\text{Hz},$$

$$R_1 = R_2 = 10\Omega,$$

$$L_3 = 10\text{ mH},$$

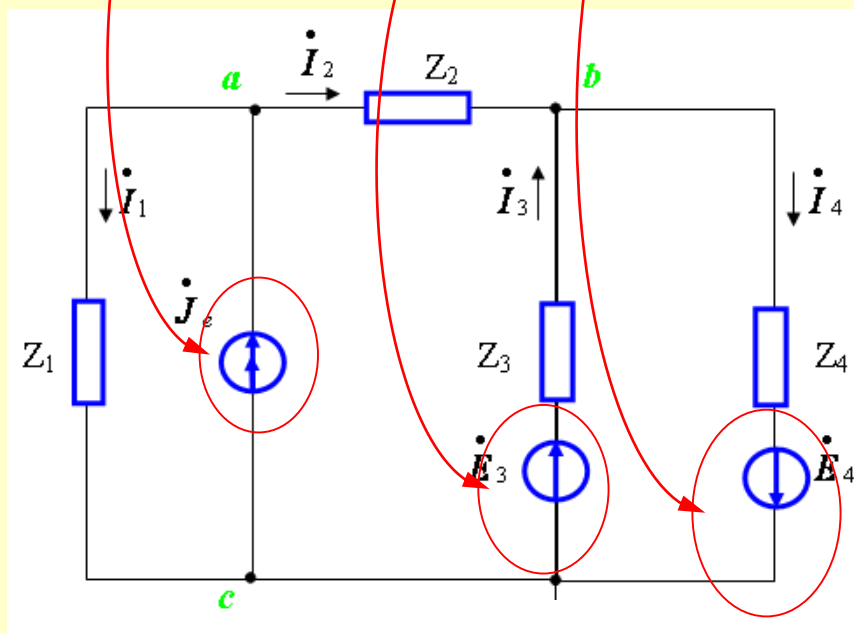
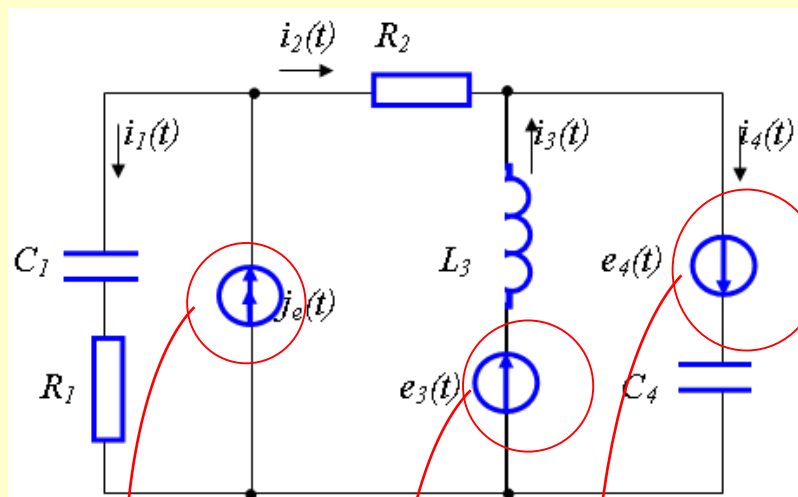
$$C_1 = C_4 = 100\mu\text{F},$$

$$e_3(t) = 200\sin(\omega t + 45^\circ)\text{V}$$

$$e_4(t) = 141\sin(\omega t + 90^\circ)\text{V}$$

$$j_e(t) = 14,1\sin(\omega t - 90^\circ)\text{V}$$

## Определяме комплексните съпротивления и източници във веригата



$$f=160\text{Hz},$$

$$R_1 = R_2 = 10\Omega$$

$$L_3 = 10\text{ mH},$$

$$C_1 = C_4 = 100\mu\text{F},$$

$$e_3(t) = 200\sin(\omega t + 45^\circ)\text{V}$$

$$e_4(t) = 141\sin(\omega t + 90^\circ)\text{V}$$

$$j_e(t) = 14,1\sin(\omega t - 90^\circ)\text{V}$$

$$\dot{E}_3 = E_3 e^{j\psi_{e_3}} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j45}$$

$$= \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = (100 + j100)\text{V}$$

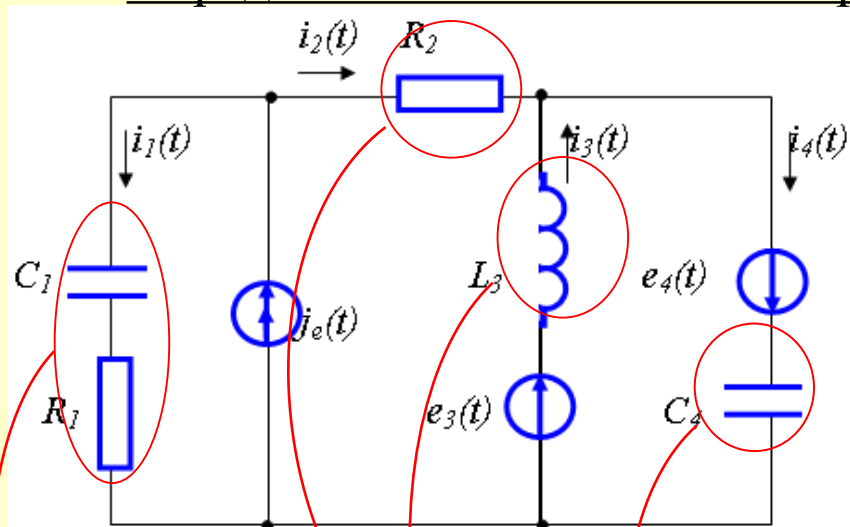
$$\dot{E}_4 = E_4 e^{j\psi_{e_4}} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j90}$$

$$= 100 \cdot (\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) = j100\text{V}$$

$$\dot{J}_e = J_e e^{j\psi_{j_e}} = \frac{14,1}{\sqrt{2}} e^{-j90}$$

$$= 10 \cdot [\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)] = -j10\text{A}$$

## Определяме комплексните съпротивления и източници във веригата



$$f = 160 \text{ Hz},$$

$$R_1 = R_2 = 10 \Omega,$$

$$L_3 = 10 \text{ mH},$$

$$C_1 = C_4 = 100 \mu\text{F},$$

$$e_3(t) = 200 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$e_4(t) = 141 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$j_e(t) = 14,1 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ V}$$

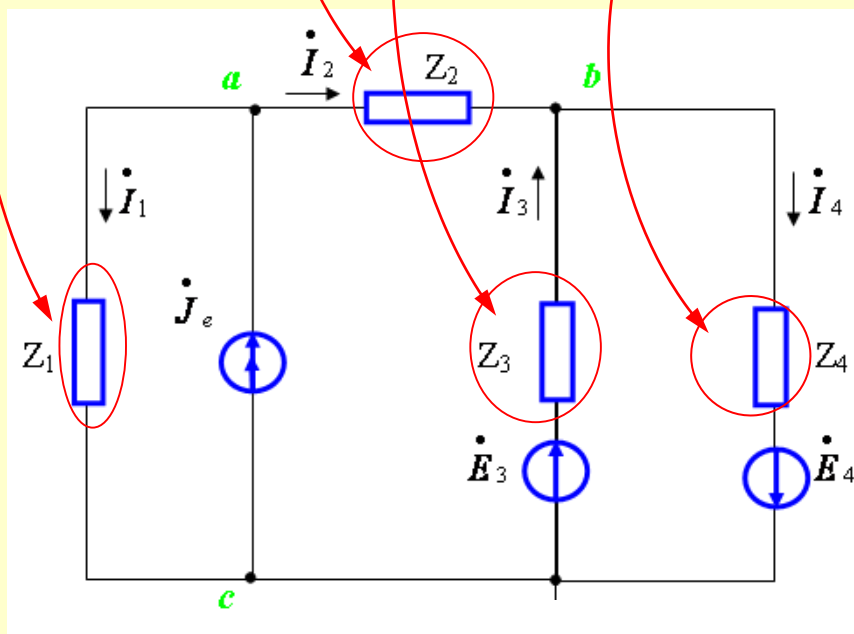
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 160 \approx 1000 = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$Z_1 = R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = (10 - j10) \Omega$$

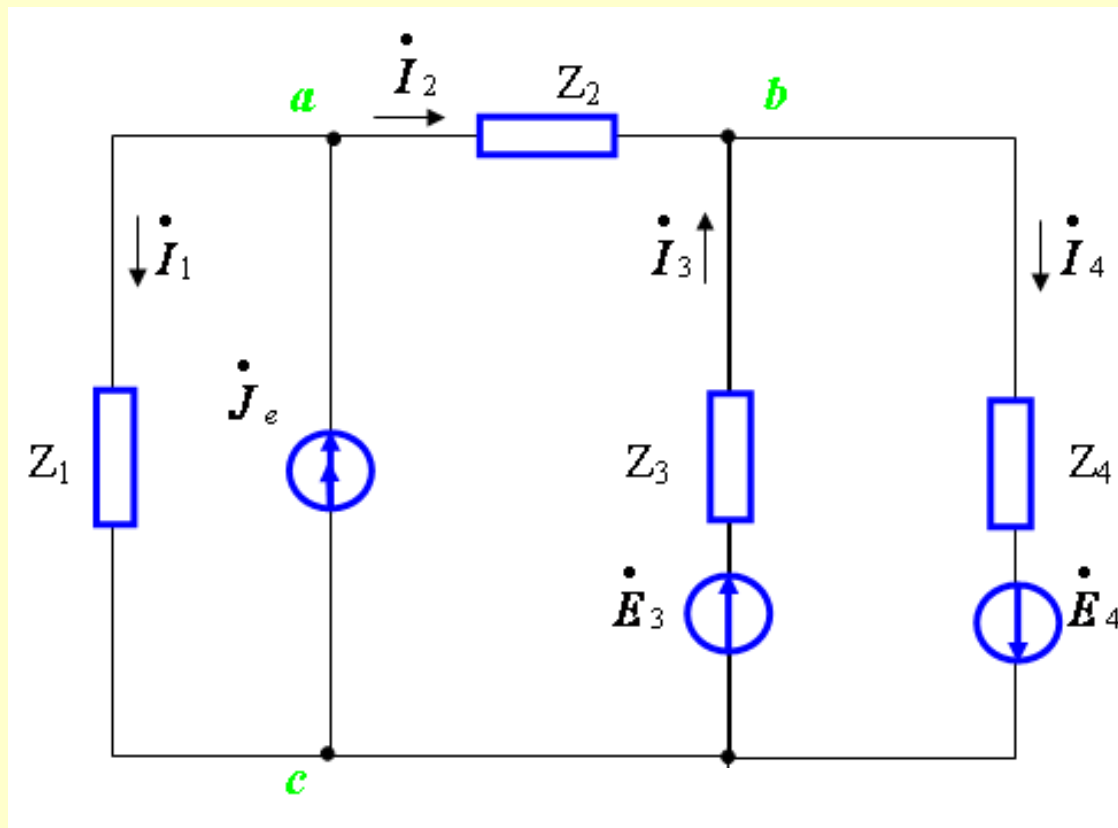
$$Z_2 = R_2 = 10 \Omega$$

$$Z_3 = j\omega L_3 = j10 \Omega$$

$$Z_4 = -j \frac{1}{\omega C_4} = -j10 \Omega$$



## Комплексни съпротивления и източници във веригата



$$\dot{E}_3 = (100 + j100)V$$

$$\dot{E}_4 = j100V$$

$$\dot{J}_e = -j10A$$

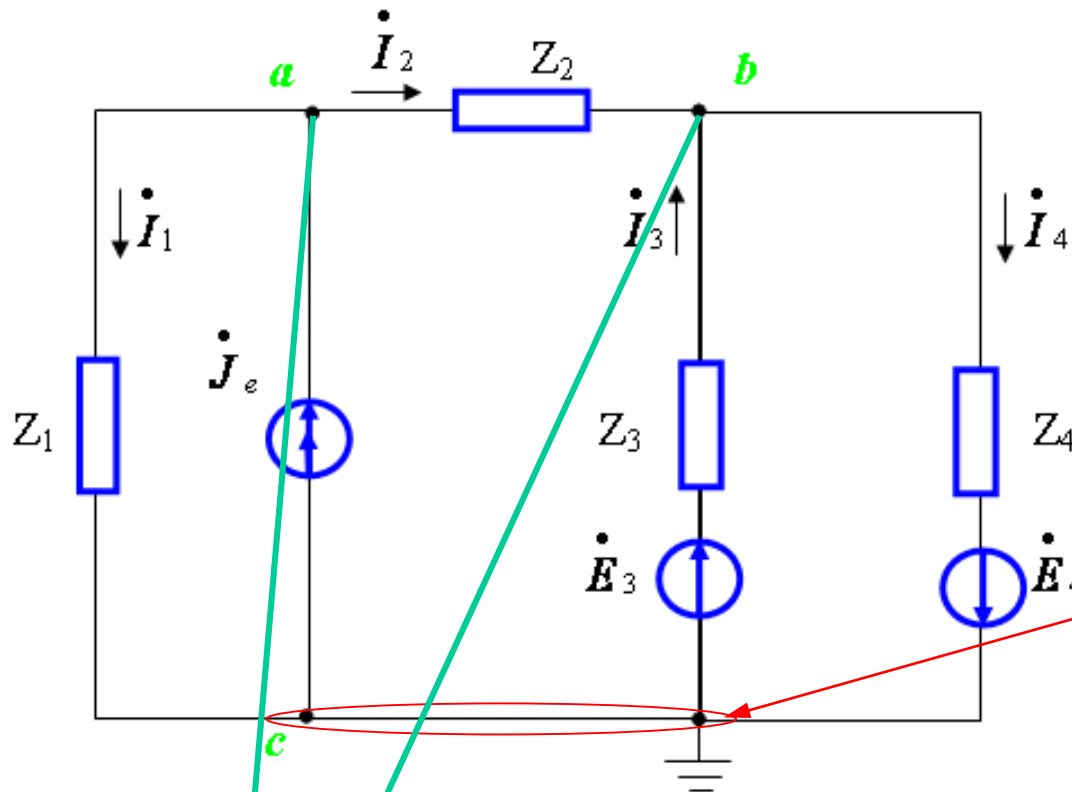
$$Z_1 = (10 - j10)\Omega$$

$$Z_2 = 10\Omega$$

$$Z_3 = j10\Omega$$

$$Z_4 = -j10\Omega$$

## Решение по МВП



1. Определяме :  
брой възли  $n=3$

2. Избираме възел с  
нулев потенциал :

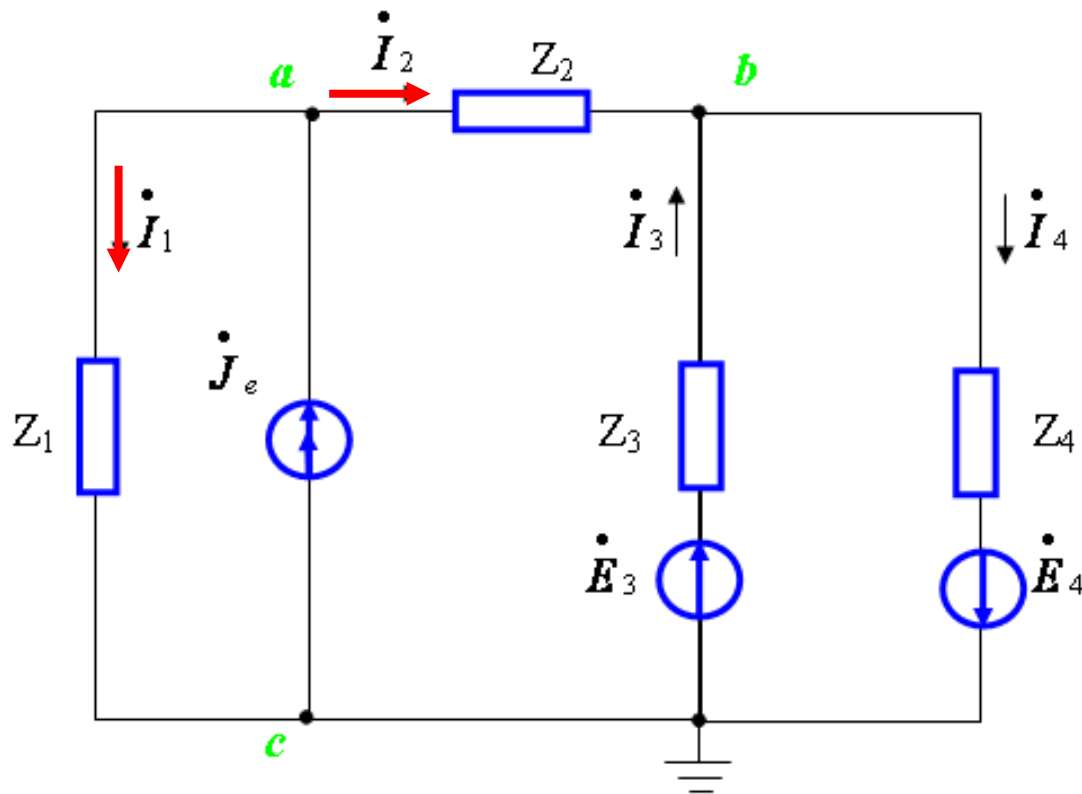
$$\dot{V}_c = 0$$

3. Записваме системата  
уравнения по МВП

$$\dot{V}_c \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) - \dot{V}_b \frac{1}{Z_2} = \dot{j}_e$$

$$\dot{V}_b \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) - \dot{V}_a \frac{1}{Z_2} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3} - \frac{\dot{E}_4}{Z_4}$$

## Решение по МВП



4. Решаваме системата

$$\dot{V}_a = -j400V$$

$$\dot{V}_b = (200 - j500)V$$

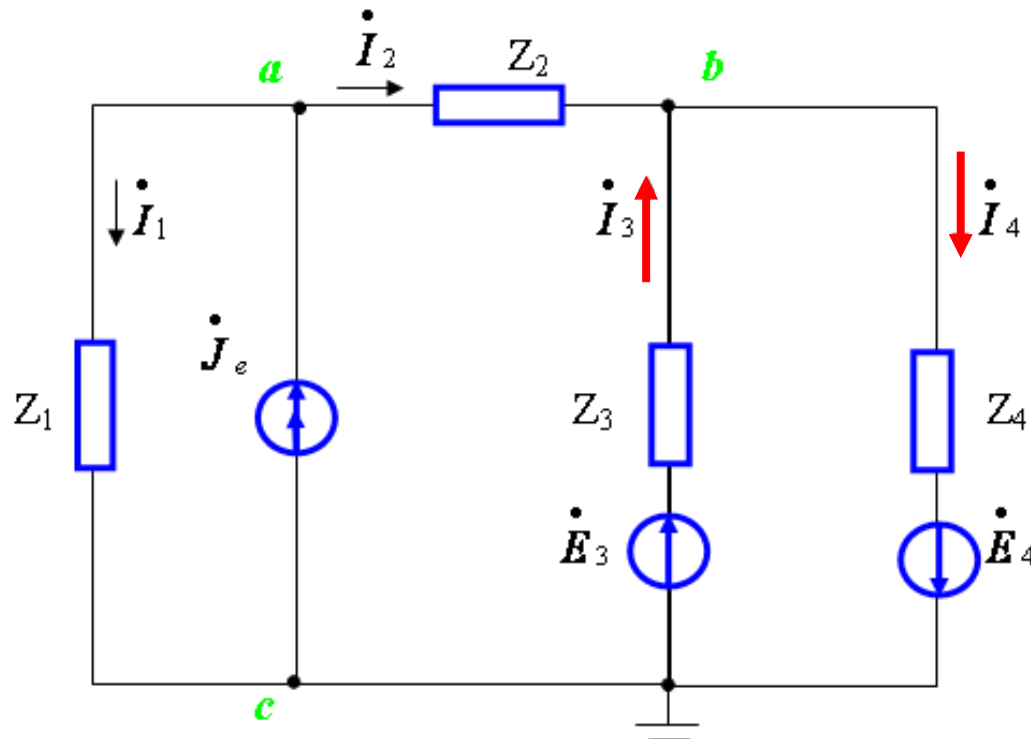
$$\dot{V}_c = 0V$$

5. Определяме клоновите  
токове по закона на Ом:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_c}{Z_1} = \frac{-j400}{10 - j10} = \frac{-j40}{1 - j1} = \frac{-j40(1 + j)}{2} = (20 - j20)A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_2} = \frac{-j400 - 200 + j500}{10} = \frac{-20 + j10}{1 - j1} = (-20 + j10)A$$

# Решение по МВП



4. Решаваме системата

$$\dot{V}_a = -j400V$$

$$\dot{V}_b = (200 - j500)V$$

$$\dot{V}_c = 0V$$

5. Определяме клоновите токове по закона на Ом:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_c - \dot{V}_b + \dot{E}_3}{Z_3} = \frac{-200 + j500 + 100 + j100}{j10} = (60 + j10)A$$

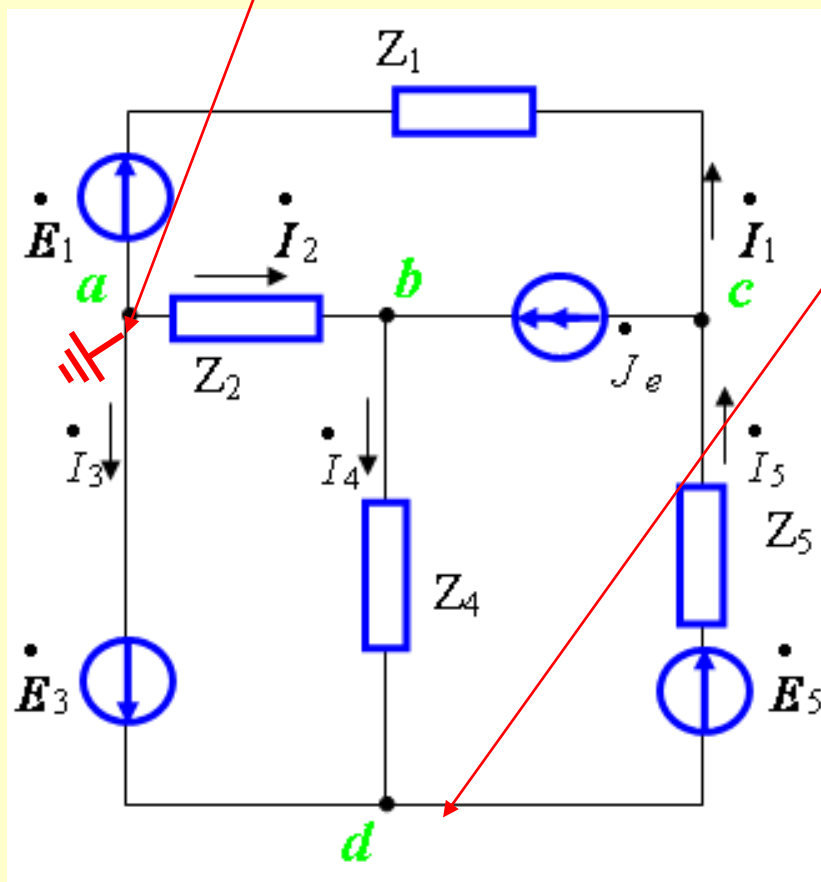
$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_b - \dot{V}_c + \dot{E}_4}{Z_4} = \frac{200 - j500 + j100}{-j10} = (40 + j20)A$$



## Особеност при МВП

МВП има особеност, ако във веригата има клон с идеален източник на е.д.н.

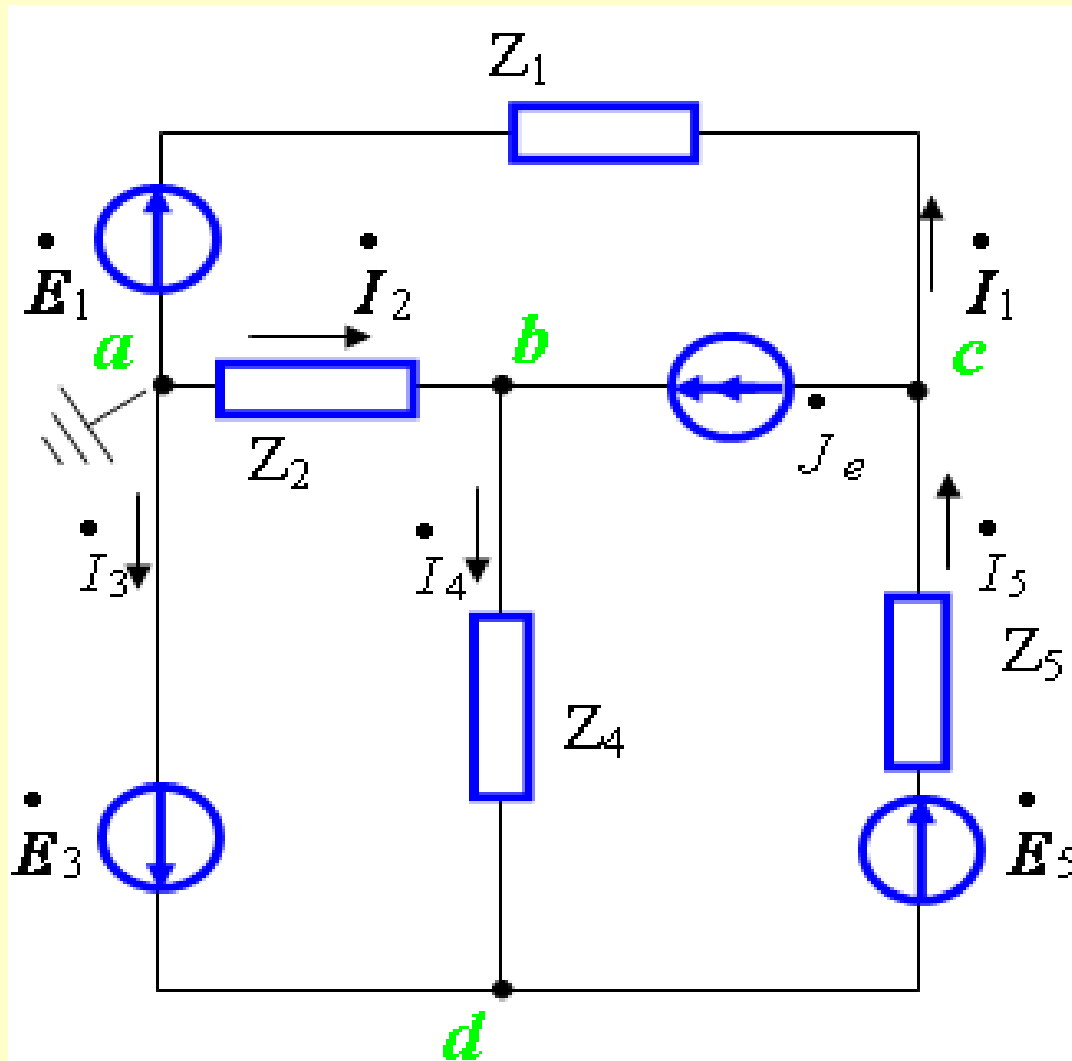
- Възел с нулев потенциал- единият от възлите, на клона с идеален източник на е.д.н.



- Потенциалът на втория възел е известен и за него не се пише уравнение.
- Токът в клона с идеален източник на е.д.н. не може да се определи по закона на Ом.  
Той се определя последен по първия закон на Кирхоф.

## Пример:

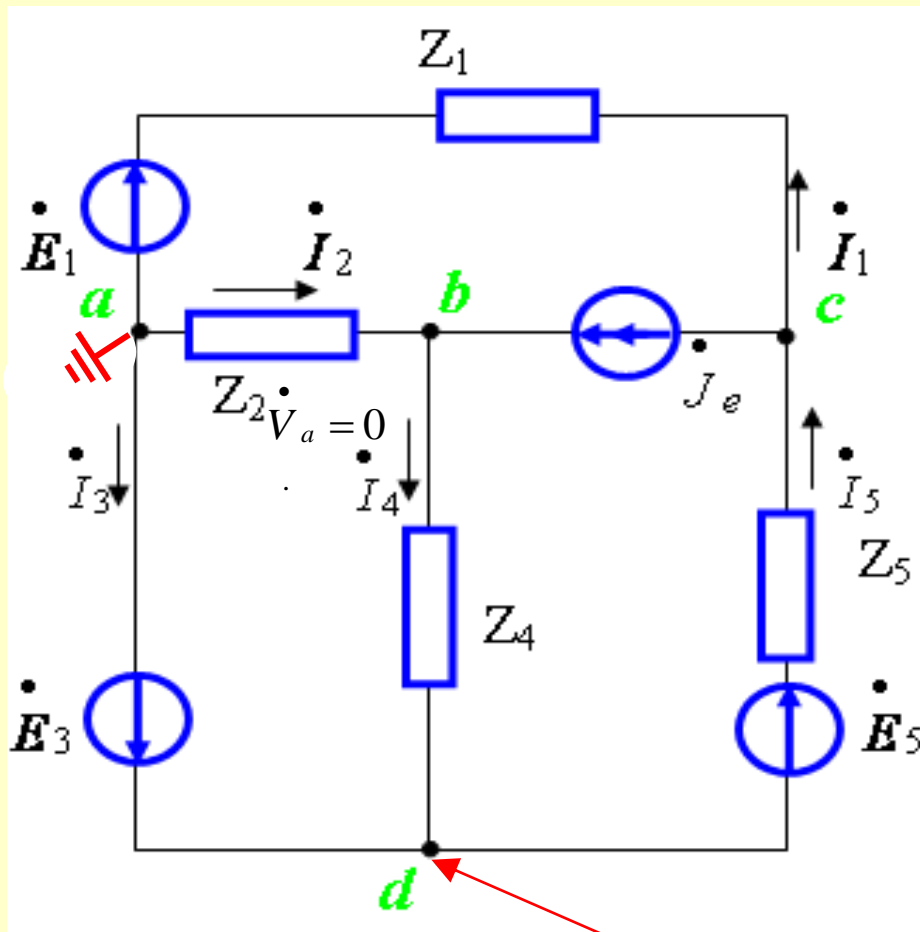
## Анализ на верига с особеност по МВП



- $\dot{E}_1 = j30 V$
- $\dot{E}_3 = j100 V$
- $\dot{E}_5 = 50 V$
- $J_e = j2 A$

$$\begin{aligned} Z_1 &= -j10\Omega \\ Z_2 &= (5 + j10)\Omega \\ Z_4 &= 5\Omega \\ Z_5 &= 10\Omega \end{aligned}$$

## Решение на задачата по метод с възлови потенциали



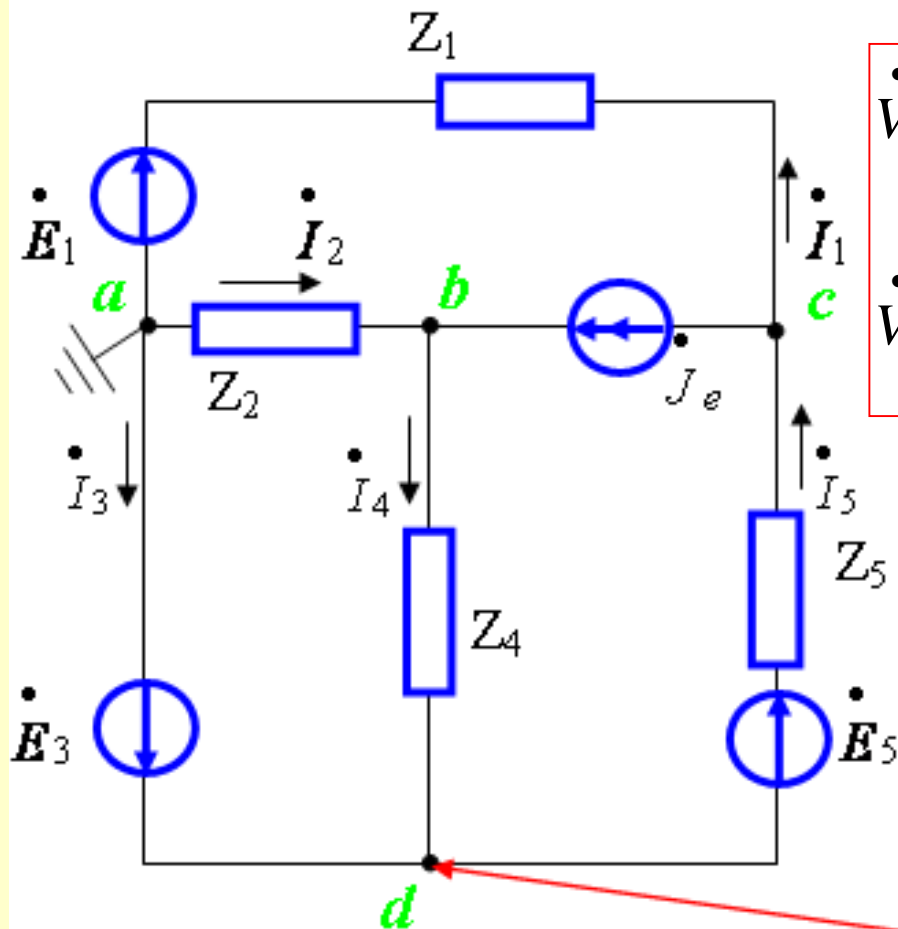
1. Определяме :  
брой възли  $n=4$

2. Избираме  $\dot{V}_a = 0$

$$\dot{V}_a = 0 \Rightarrow \dot{V}_d = \dot{E}_3$$

за възел «d» не пишем уравнение

## Решение на задачата по метод с възлови потенциали



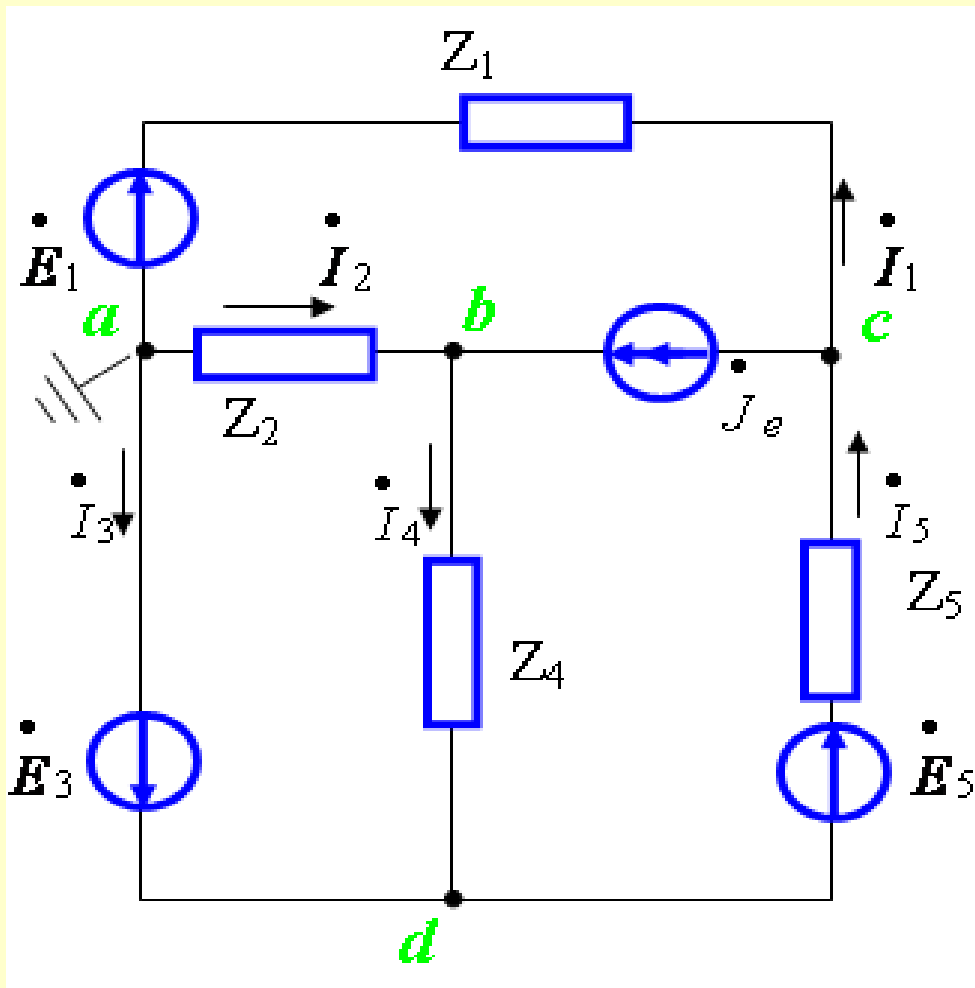
$$\dot{V}_b \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} \right) - \dot{V}_d \frac{1}{Z_4} = \dot{J}_e$$

$$\dot{V}_c \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_5} \right) - \dot{V}_d \frac{1}{Z_5} = -\dot{J}_e + \frac{\dot{E}_5}{Z_5} + \frac{\dot{E}_1}{Z_1}$$

За този възел не се пише уравнение

$$\dot{V}_a = 0 \Rightarrow \dot{V}_d = \dot{E}_3 = j100V$$

## Решение на задачата по метод с възлови потенциали



$$\dot{V}_a = 0$$

$$\dot{V}_b = (-22,5 + j67,5)V$$

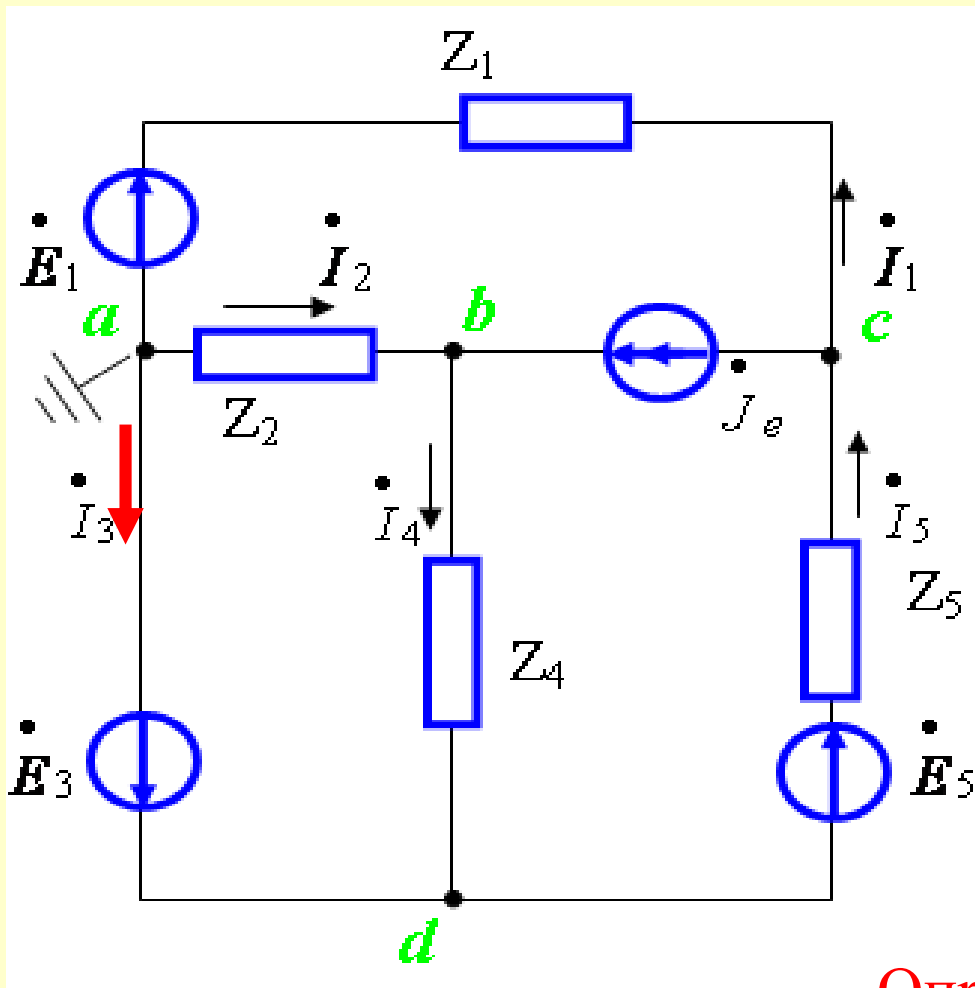
$$\dot{V}_c = (50 + j30)V$$

$$\dot{V}_d = j100V$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_c - \dot{V}_a - \dot{E}_1}{Z_1} = j5A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_2} = (-5,5 + j5,5)A$$

## Решение на задачата по метод с възлови потенциали



$$\dot{V}_a = 0$$

$$\dot{V}_b = (-22,5 + j67,5)V$$

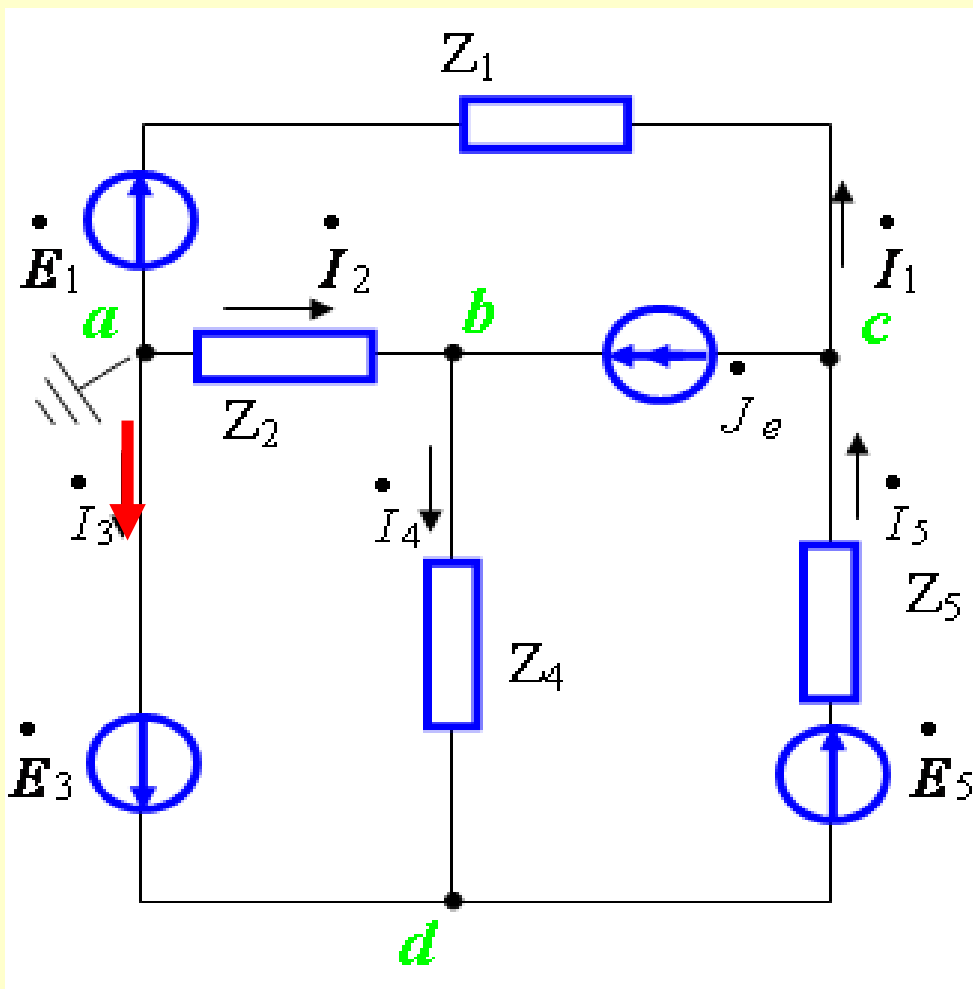
$$\dot{V}_c = (50 + j30)V$$

$$\dot{V}_d = j100V$$

~~$$I_3 = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_d + \dot{E}_3}{Z_2} =$$~~

Определя се последен по Кирхоф

## Решение на задачата по метод с възлови потенциали



$$\dot{V}_a = 0$$

$$\dot{V}_b = (-22,5 + j67,5)V$$

$$\dot{V}_c = (50 + j30)V$$

$$\dot{V}_d = j100V$$

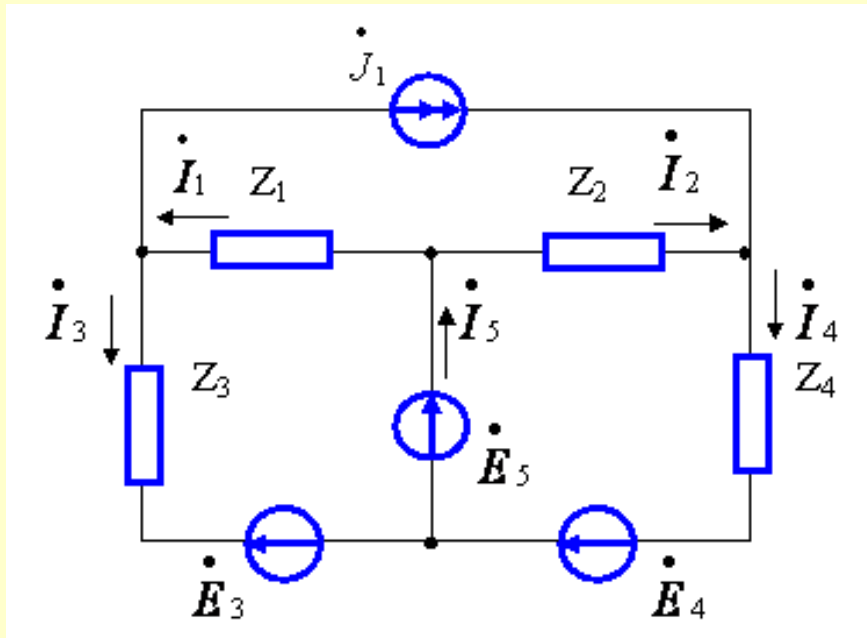
$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_b - \dot{V}_d}{Z_4} = (-5,5 + j7,5)A$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{V}_d - \dot{V}_c + \dot{E}_5}{Z_5} = j5 + j2 = j7A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_5 - \dot{I}_4 = (5,5 - j5,5)A$$

## Принцип на наслагването

- Прилага се за анализ на вериги с повече от един източник



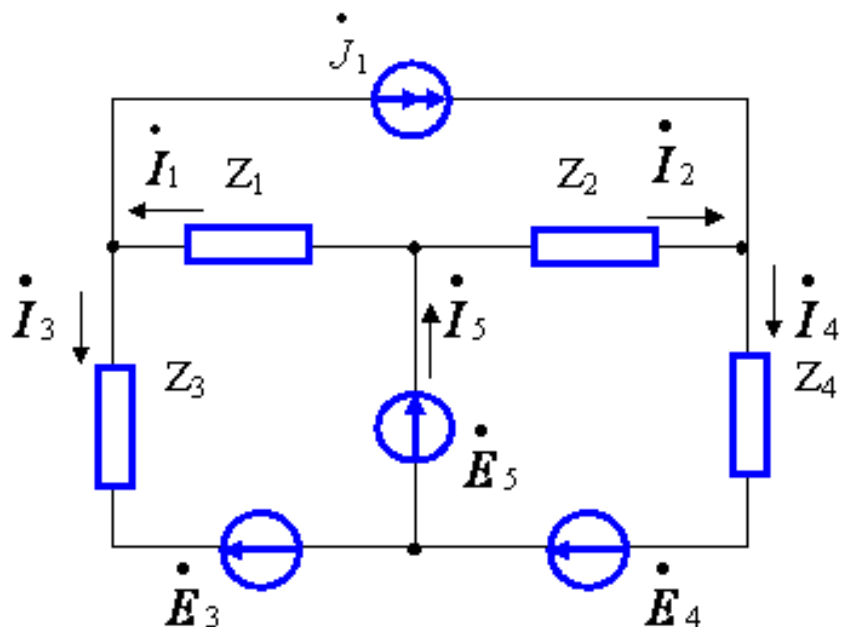
- Този метод се прилага само за линейни вериги!



## Принцип на наслагването- Алгоритъм на метода

Разглеждаме верига с  $m$  клона и съответно  $m$  неизвестни тока  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_m$ , която има:

- $p$  източника на напрежение  $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_p$
- $q$  източника на ток  $\dot{J}_1, \dot{J}_2, \dots, \dot{J}_q$



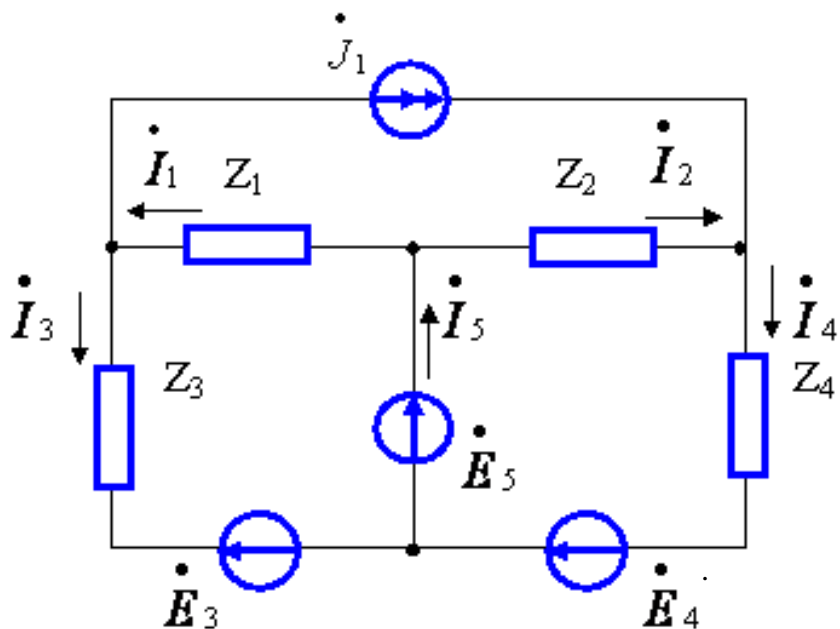
1. Приемаме, че във веригата действат последователно само по един от източниците.

останалите се отстраняват



## Принцип на наслагването- Алгоритъм на метода

2. Определяме клоновите токове, като приемаме, че във веригата действа **само един** от източниците.



- Токове, определени при наличие на източник на напрежение:

$$\dot{I}_k(\dot{E}_r) = f(\dot{E}_r) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

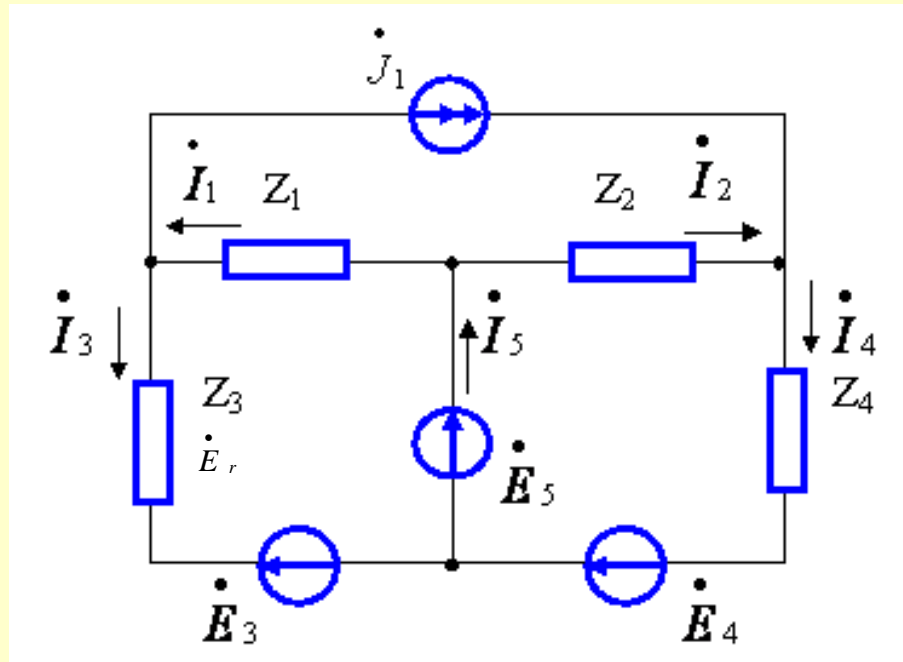
-Токове, определени при наличие на източник на ток :

$$\dot{I}_k(\dot{J}_r) = f(\dot{J}_r) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

3. Определяме клоновите токове  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_m$  като алгебрична сума на токовете протичащи в клона под влияние на всеки от източниците:

$$\dot{I}_k = \dot{I}_k(\dot{E}_1) + \dot{I}_k(\dot{E}_2) + \dots + \dot{I}_k(\dot{E}_p) + \dot{I}_k(\dot{J}_1) + \dot{I}_k(\dot{J}_2) + \dots + \dot{I}_k(\dot{J}_q)$$

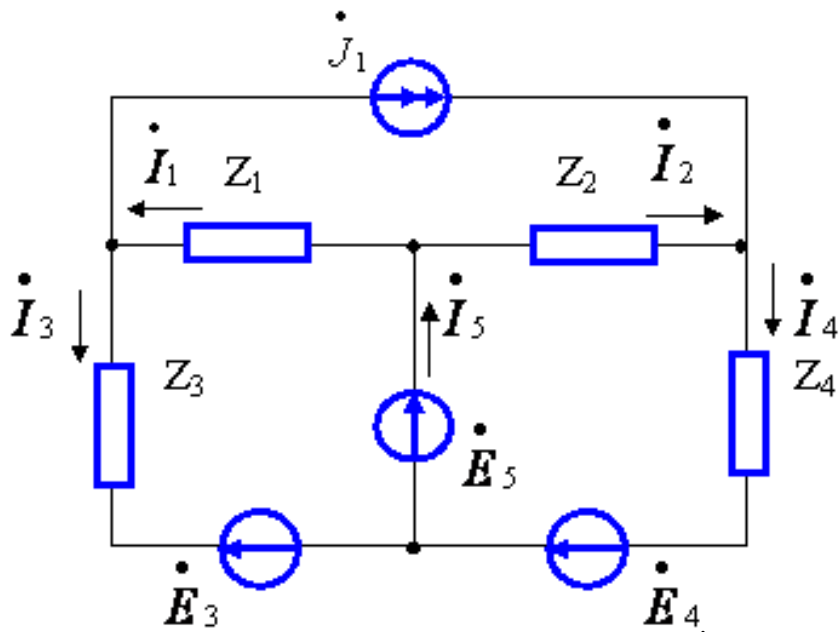
## Принцип на наслагването



$$\dot{I}_k = \dot{I}_k(\dot{E}_3) + \dot{I}_k(\dot{E}_4) + \dot{I}_k(\dot{E}_5) + \dot{I}_k(\dot{J}_1)$$

## Принцип на наслагването- Алгоритъм на метода

Аналогично може да се определи напрежението в даден участък



при наличие на източник на напрежение

$$\dot{U}_{ab}(\dot{E}_r) = f(\dot{E}_r), r = 1, \dots, p$$

при наличие на източник на ток

$$\dot{U}_{ab}(\dot{J}_r) = f(\dot{J}_r), r = 1, \dots, q$$

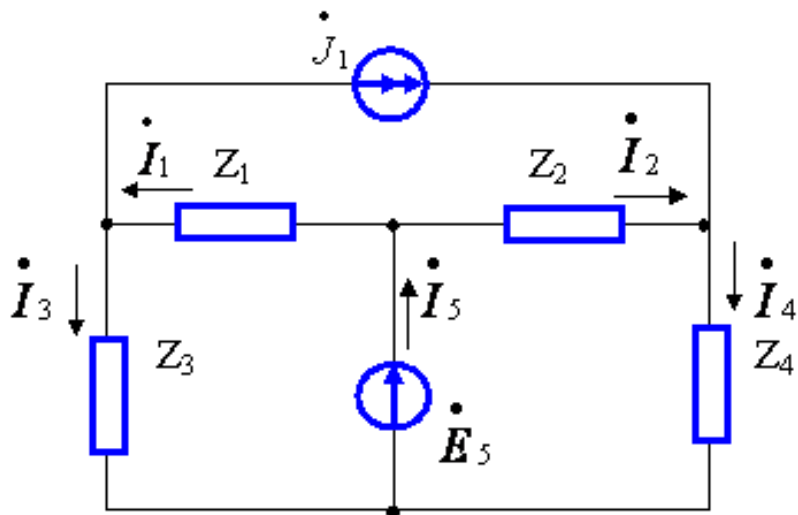
$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ab}(\dot{E}_1) + \dot{U}_{ab}(\dot{E}_3) + \dot{U}_{ab}(\dot{E}_4) + \dot{U}_{ab}(\dot{E}_5) + \dot{U}_{ab}(\dot{J}_1) + \dots + \dot{U}_{ab}(\dot{J}_q)$$

**Забележка** - Принципът с наслагване е **неприложим при определяне на мощности.**

$$I_k^2 = [I_k(E_1) + \dots I_k(E_p) + I_k(J_1) + \dots I_k(J_q)]^2 \neq I_k^2(E_1) + \dots I_k^2(E_p) + I_k^2(J_1) + \dots I_k^2(J_q)$$

**Пример:** за анализ на верига с използване на принципа на наслагването:

Да се определят токовете във веригата като се използва принцип с наслагване



$$\dot{E}_5 = 100 \text{ V}$$

$$\dot{J}_1 = j20 \text{ A}$$

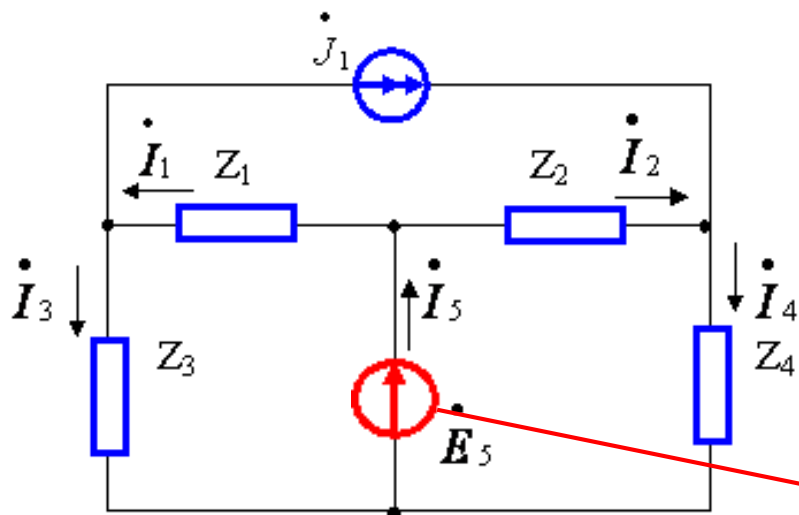
$$Z_1 = j10\Omega$$

$$Z_2 = 10\Omega$$

$$Z_3 = j10\Omega$$

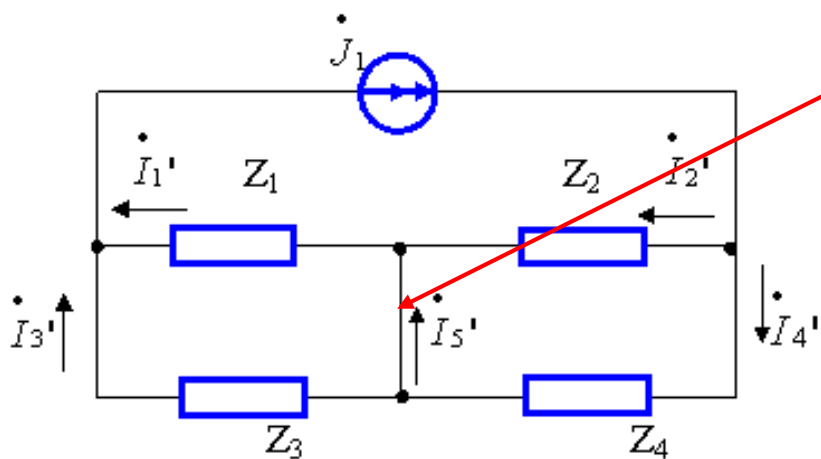
$$Z_4 = -j10\Omega$$

**Решение** с използване на принципа на наслагването:



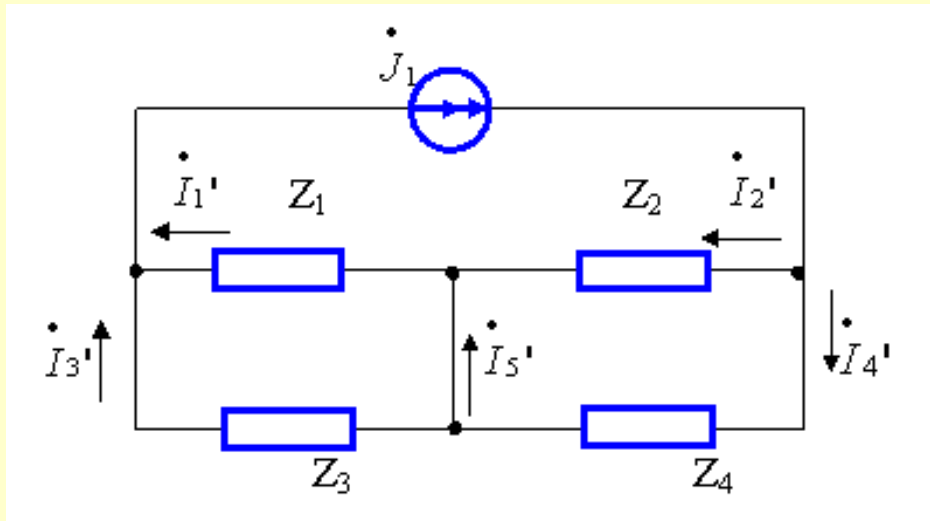
1. Приемаме, че във веригата действа само източникът на ток  $\dot{J}_1$

отстраняваме източника  $\dot{E}_5$



**Решение** с използване на принципа на наслагването:

1. Във веригата действа само източникът на ток



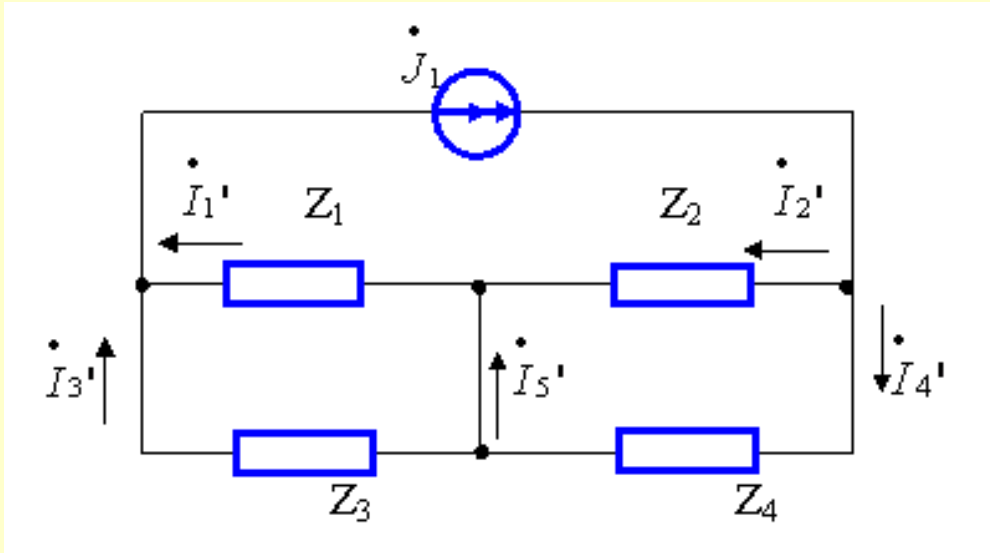
$$\dot{I}_1' = \dot{J}_1 \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = j20 \frac{j10}{j20} = j10A;$$

$$\dot{I}_3' = \dot{J}_1 - \dot{I}_1' = j20 - j10 = j10A$$



## Решение с използване на принципа на наслагването:

1. Във веригата действа само източникът на ток



$$\dot{I}_2' = \dot{J}_1 \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} = j20 \frac{-j10}{10 - j10} = \frac{20}{1 - j} = \frac{20(1 + j)}{2} = (10 + j10)A$$

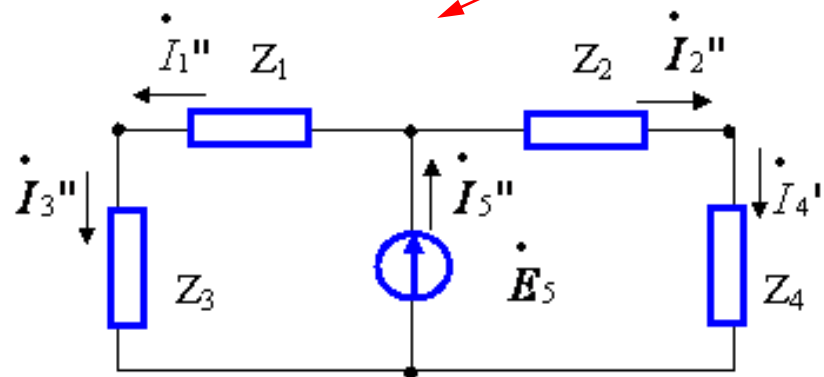
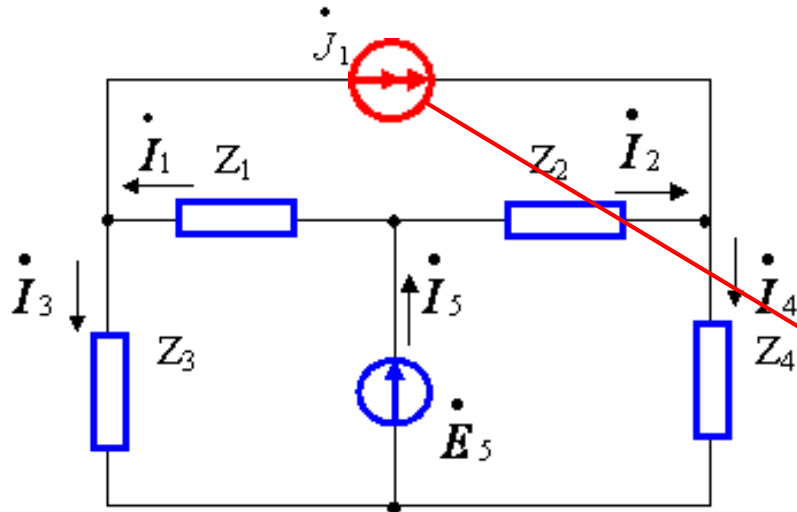
$$\dot{I}_4' = \dot{J}_1 - \dot{I}_2' = j20 - 10 - j10 = (-10 + j10)A$$

$$\dot{I}_5' = \dot{I}_4' - \dot{I}_3' = -10 + j10 = -10 + j10 - j10 = -10A$$

**Решение** с използване на принципа на наслагването:

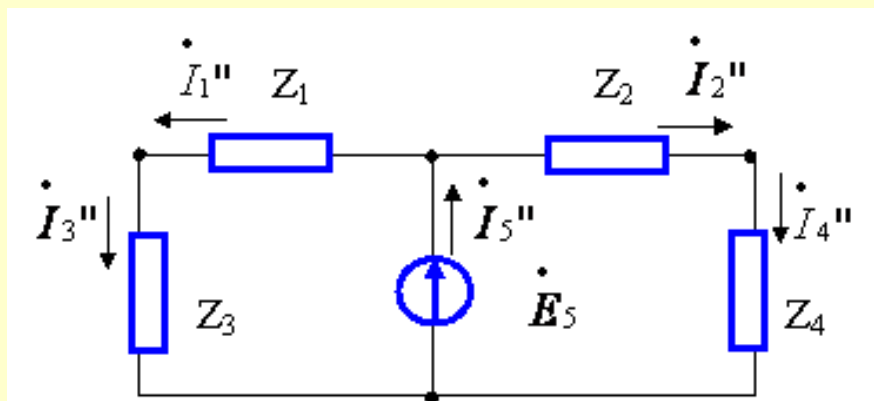
2. Приемаме, че във веригата действа само източникът на напрежение  $\dot{E}_5$

отстраняваме източника  $\dot{J}_1$



**Решение** с използване на принципа на наслагването:

2. Във веригата действа само източникът на напрежение

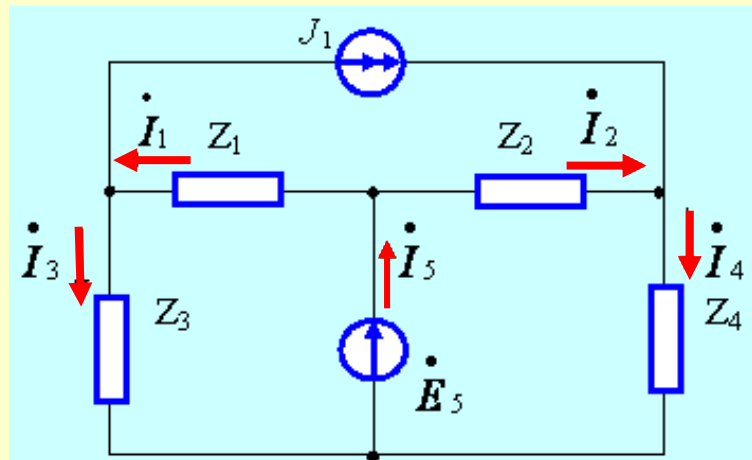
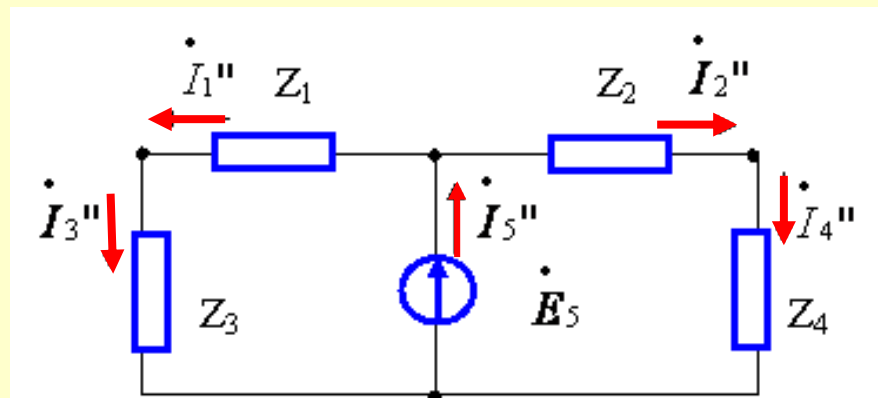
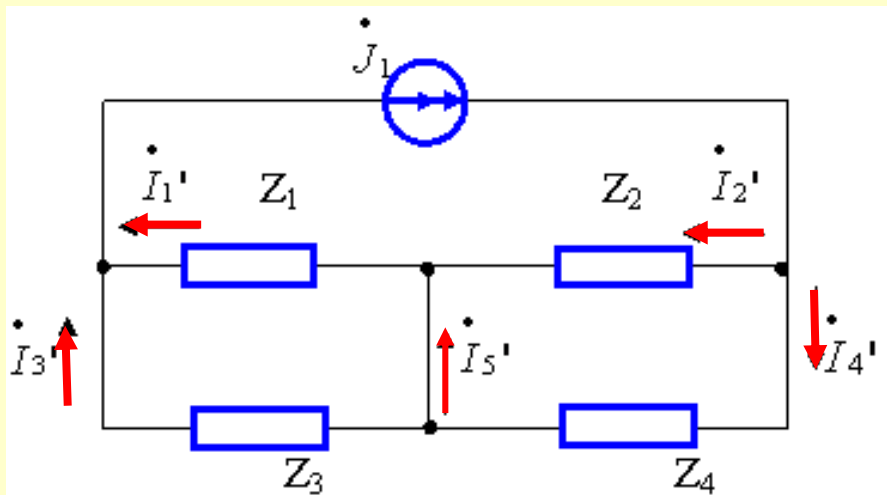


$$\dot{I}_1'' = \dot{I}_3'' = \frac{\dot{E}_5}{Z_1 + Z_3} = \frac{100}{j20} = -j5A;$$

$$\dot{I}_2'' = \dot{I}_4'' = \frac{\dot{E}_5}{Z_2 + Z_4} = \frac{100}{10 - j10} = \frac{10}{1 - j} = \frac{10(1 + j)}{2} = (5 + j5)A$$

$$\dot{I}_5'' = \dot{I}_1'' + \dot{I}_2'' = -j5 + 5 + j5 = 5A$$

### 3. Определяме токовете във веригата като се използва принцип с наслагване



$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' + \dot{I}_1'' = j10 - j5 = j5A$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_2' + \dot{I}_2'' = -10 - j10 + 5 + j5 = (-5 - j5)A$$

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_3' + \dot{I}_3'' = -j10 - j5 = -j15A$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_4' + \dot{I}_4'' = -10 + j10 + 5 + j5 = (-5 + j15)A$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_5' + \dot{I}_5'' = -10 + 5 = -5A$$

*Благодаря за вниманието*

*проф. д-р Илона Ячева*

