Теореми на Тевенен и Нортън
Вериги с индуктивни връзки

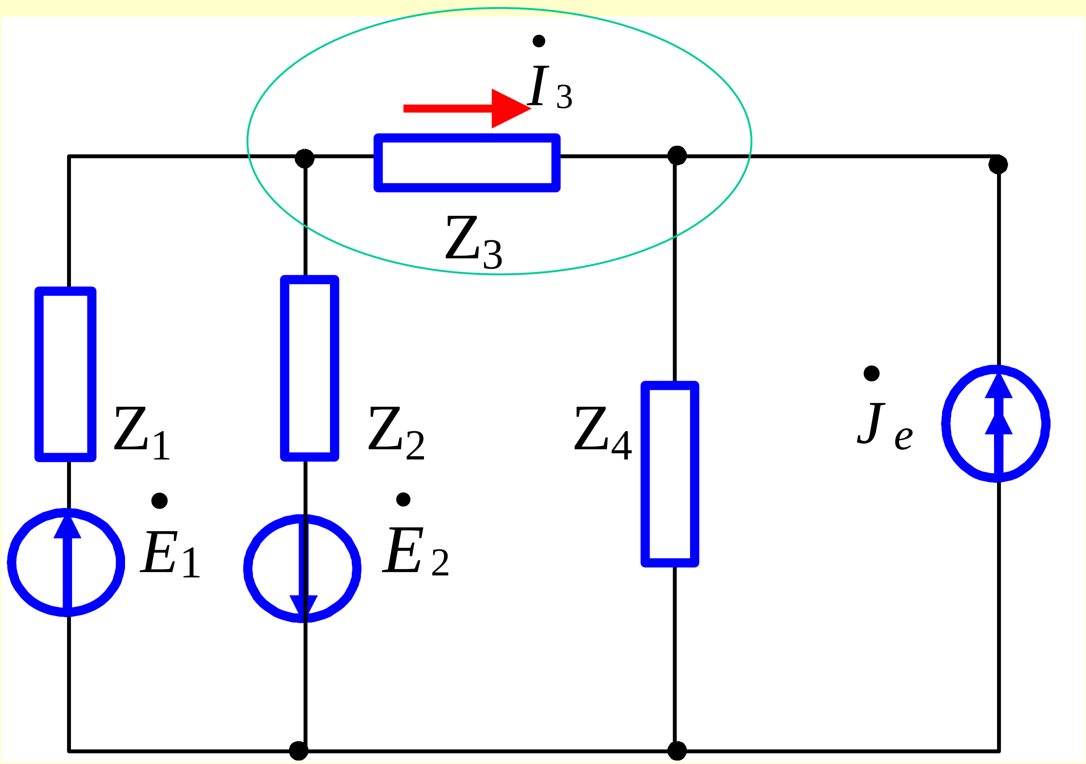
(лекция **15.11.2022г.***)*

Преподавател: **проф. д-р Илона Ячева**

кат. "Теоретична Електротехника",
Технически университет - София

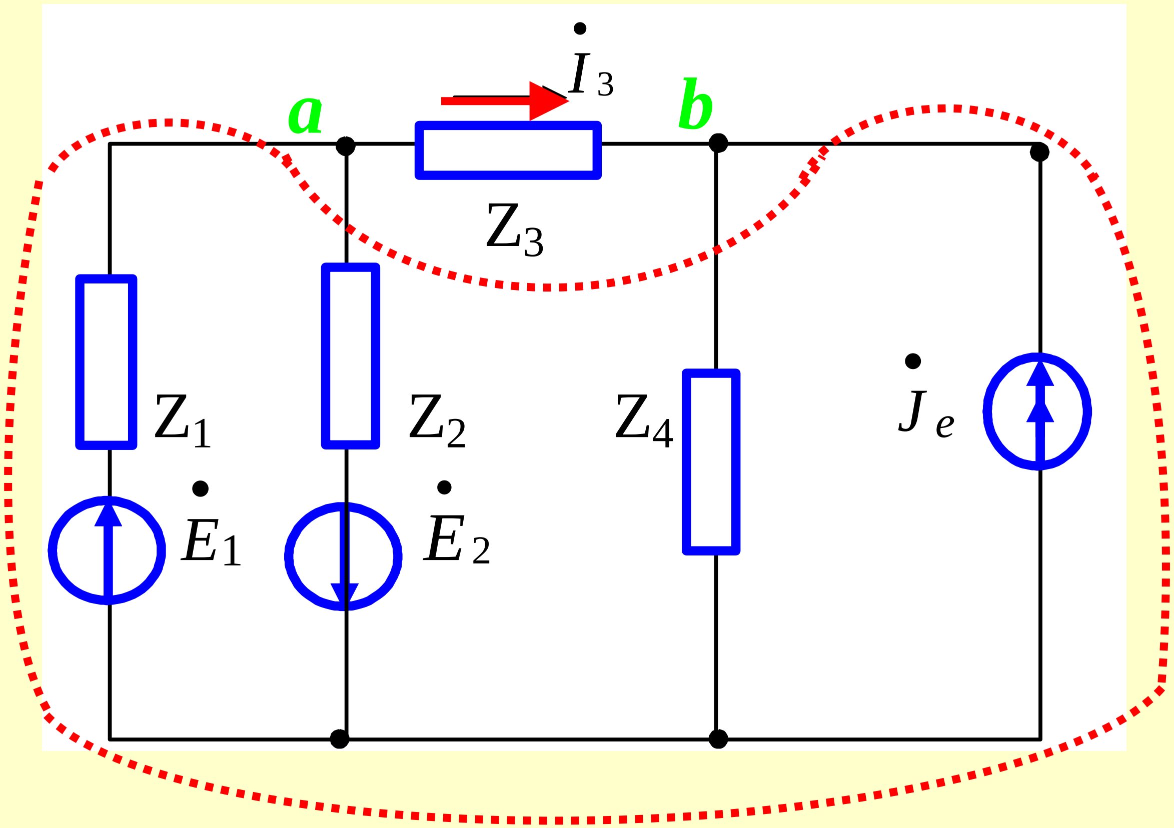
Теореми на Тевенен и Нортън

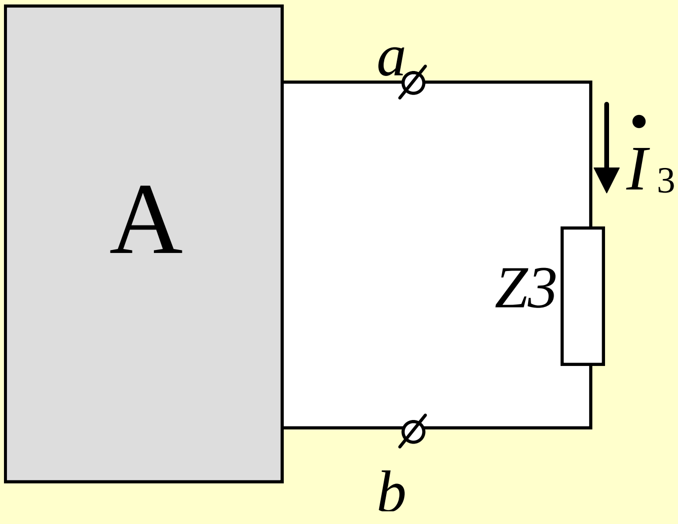
Тези теореми се използват при анализ на сложни вериги, в които е **необходимо да се определи тока само в един от клоновете** на веригата, а разпределението на токовете и напреженията в останалата част от веригата не представлява интерес.



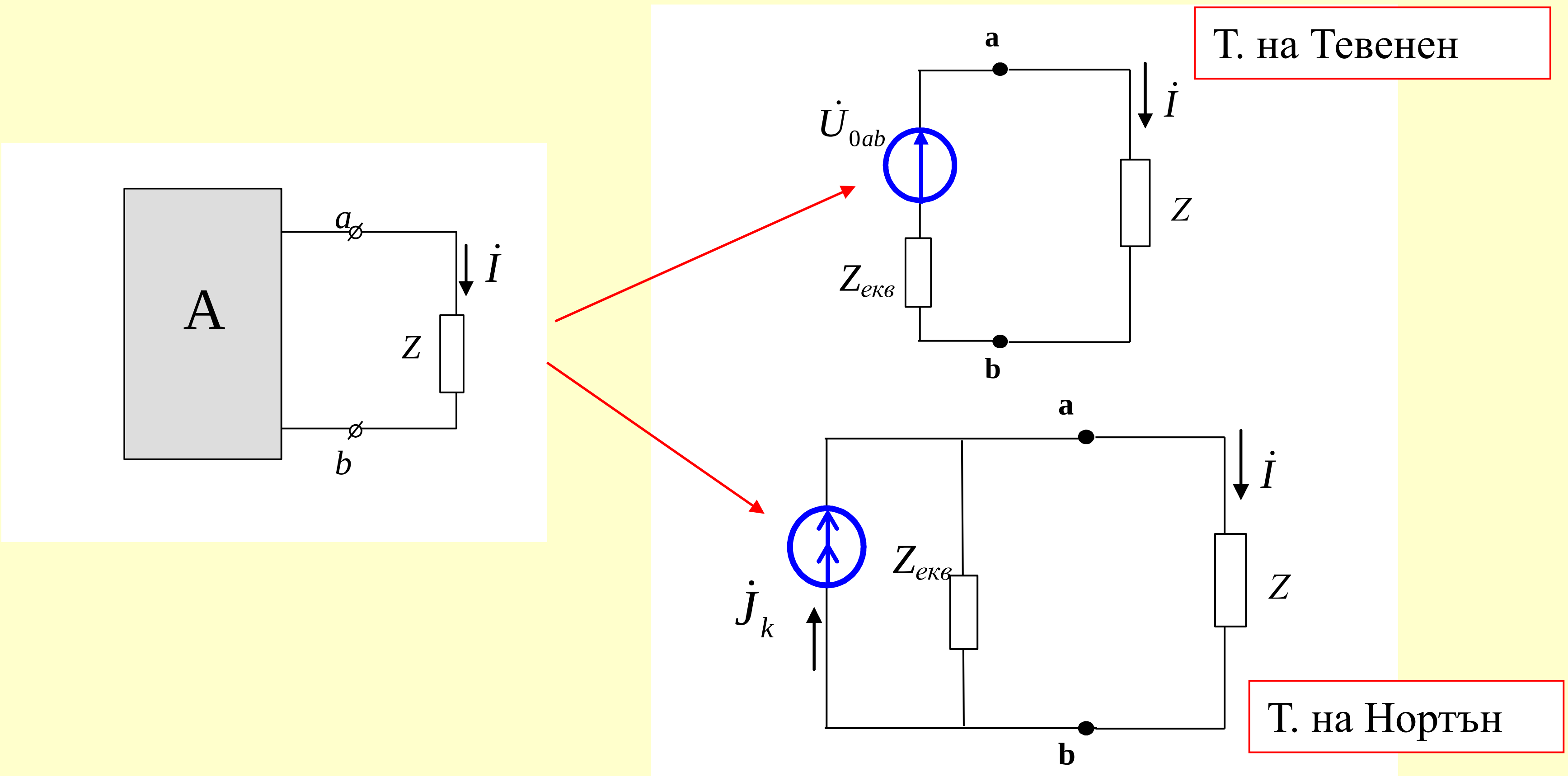
Теореми на Тевенен и Нортън

В този случай веригата се представя като активен двуполюсник на изводите ***a*** и ***b***, на който е включен клонът със съпротивление Z, чийто ток търсим.



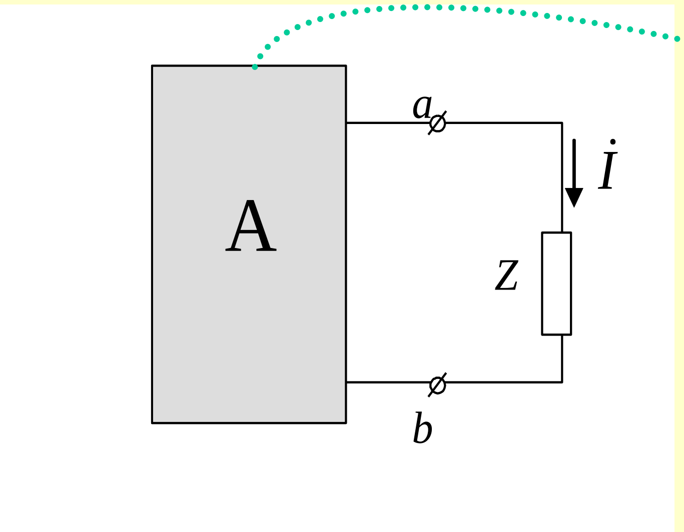


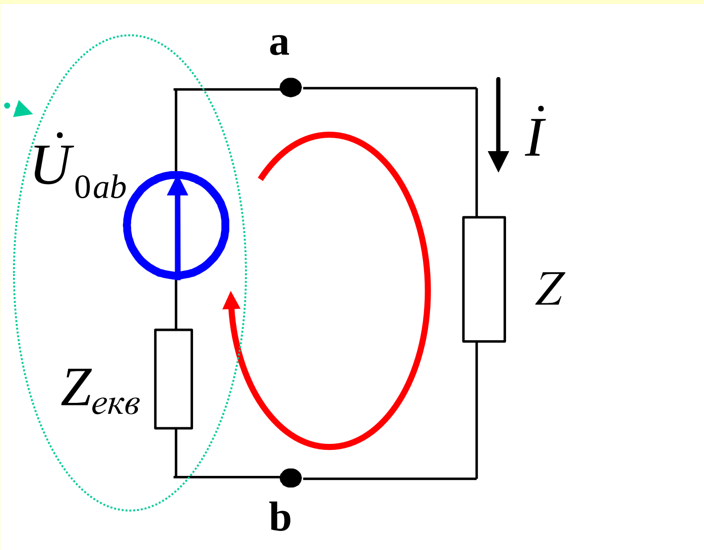
<u>Теореми на Тевенен и Нортън</u>



Теорема на Тевенен

$$\boxed{\dot{I} = ?}$$





$$\dot{I}.(Z + Z_{екв}) = \dot{U}_{0ab}$$

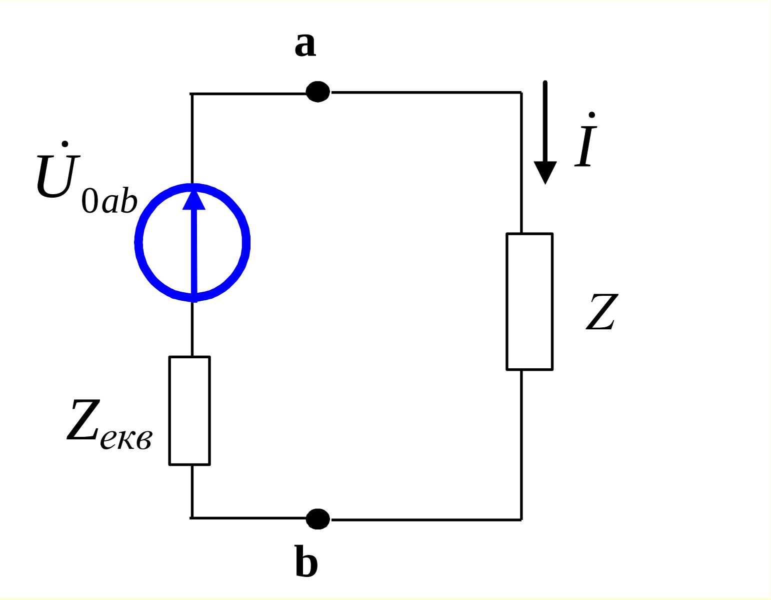
$$\boxed{\dot{I} = \frac{\dot{U}_{0ab}}{Z + Z_{екв}}}$$

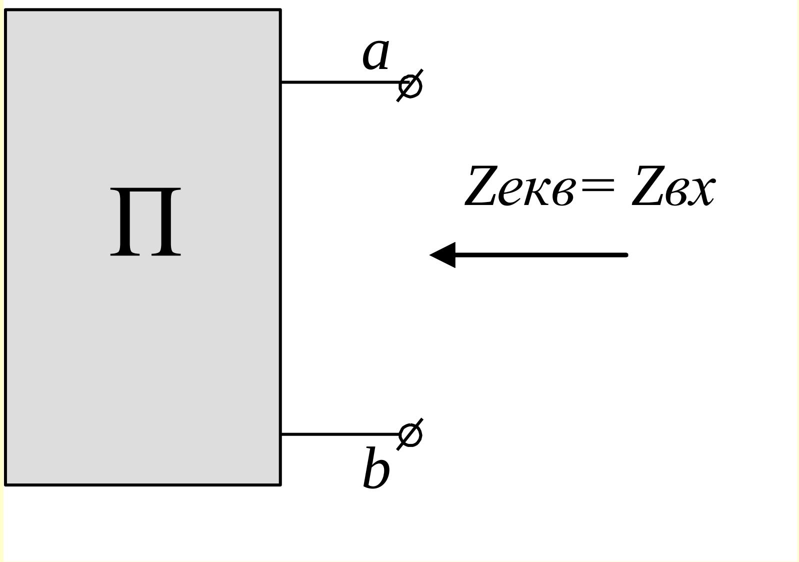
Определяне на параметрите на двуполюсника

$\mathbf{Z}$*екв* =?

$\mathbf{U}_0 ab$=?

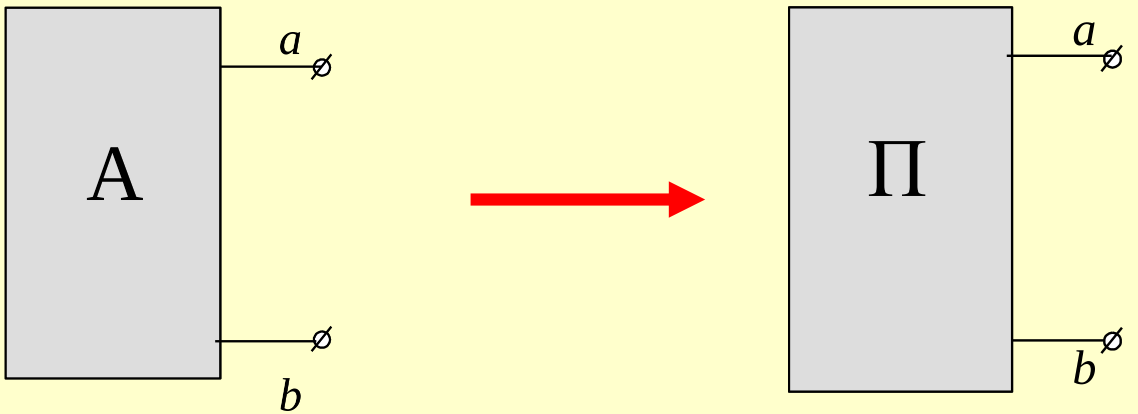
$\mathbf{Z}$*екв* =?

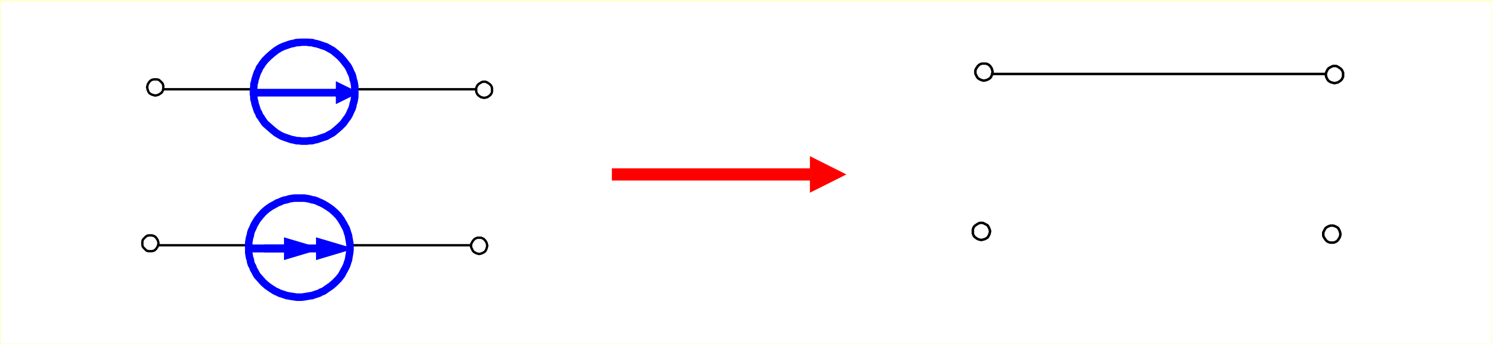




Двуполюсника се преобразува **от активен в пасивен** като се отстраняват източниците на енергия

- източникът на напрежение се дава на късо
- източникът на ток се прекъсва



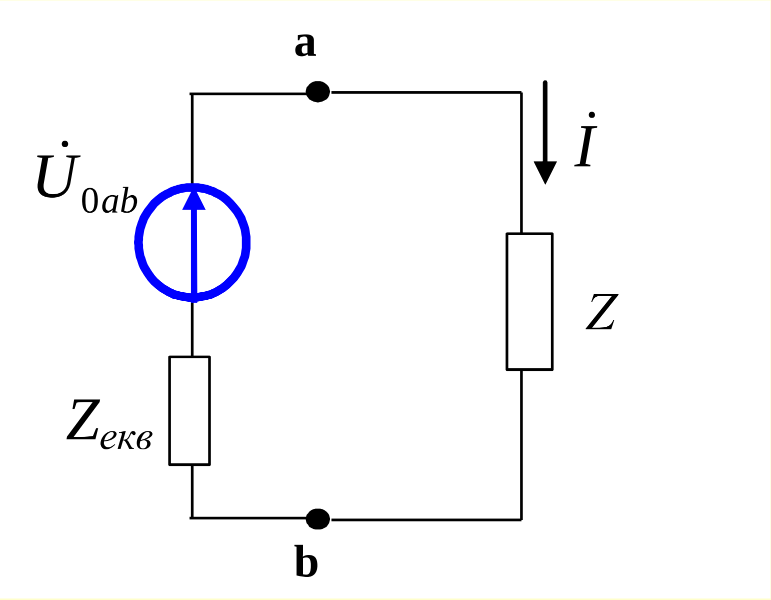


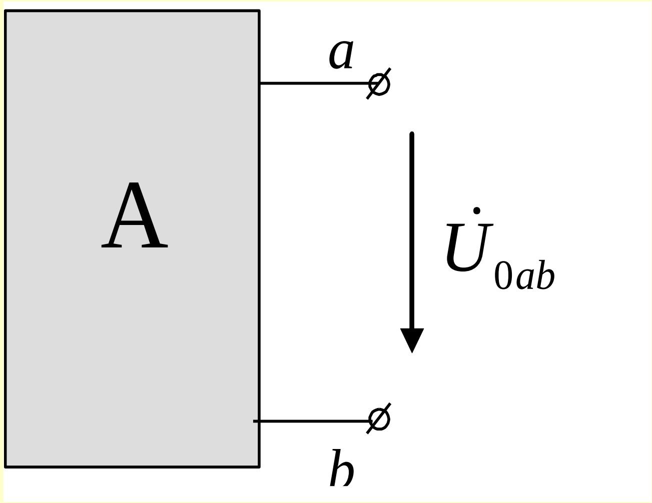
Определяне на параметрите на двуполюсника

$\boldsymbol{Z}екв$ =?

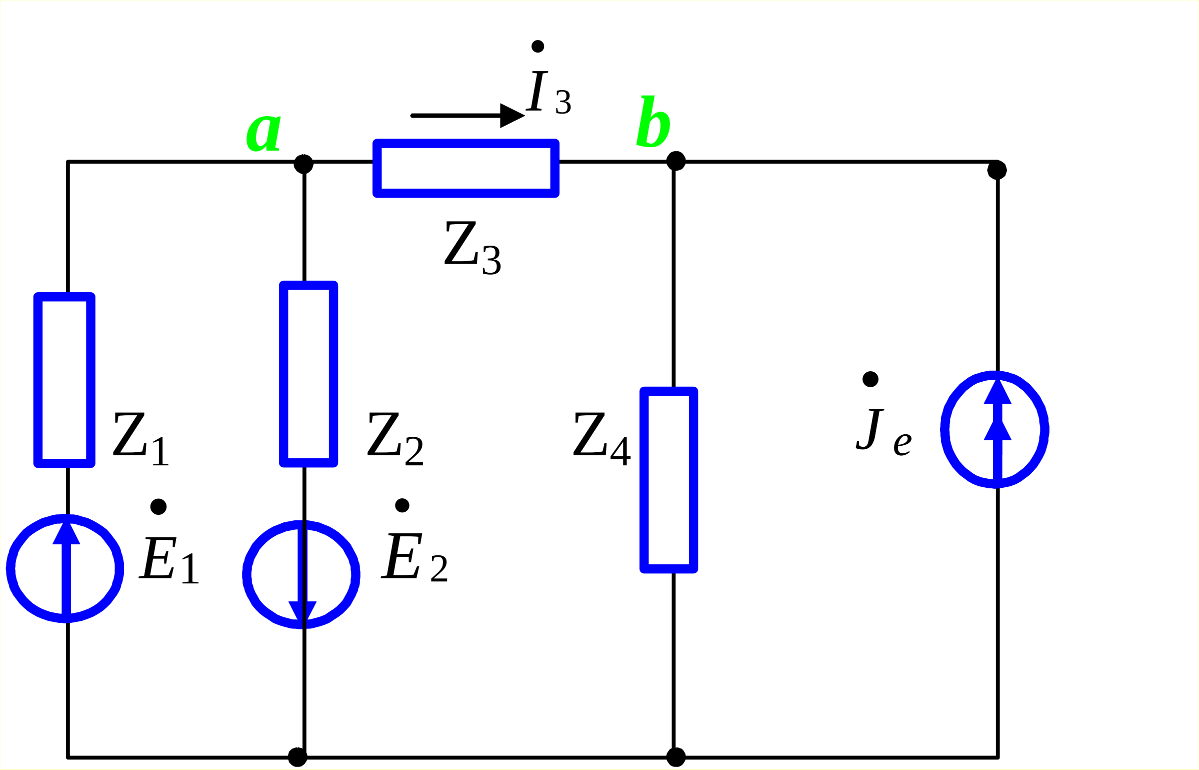
$\boldsymbol{U}_0ab$=?

$\boldsymbol{U}_0ab$=?





Пример: Да се определи *I3* по теоремата на Тевенен



$$Z_1 = -j10\Omega$$

$$Z_2 = (10 + j10)\Omega$$

$$Z_3 = 10\,\Omega$$

$$Z_4 = 10\,\Omega$$

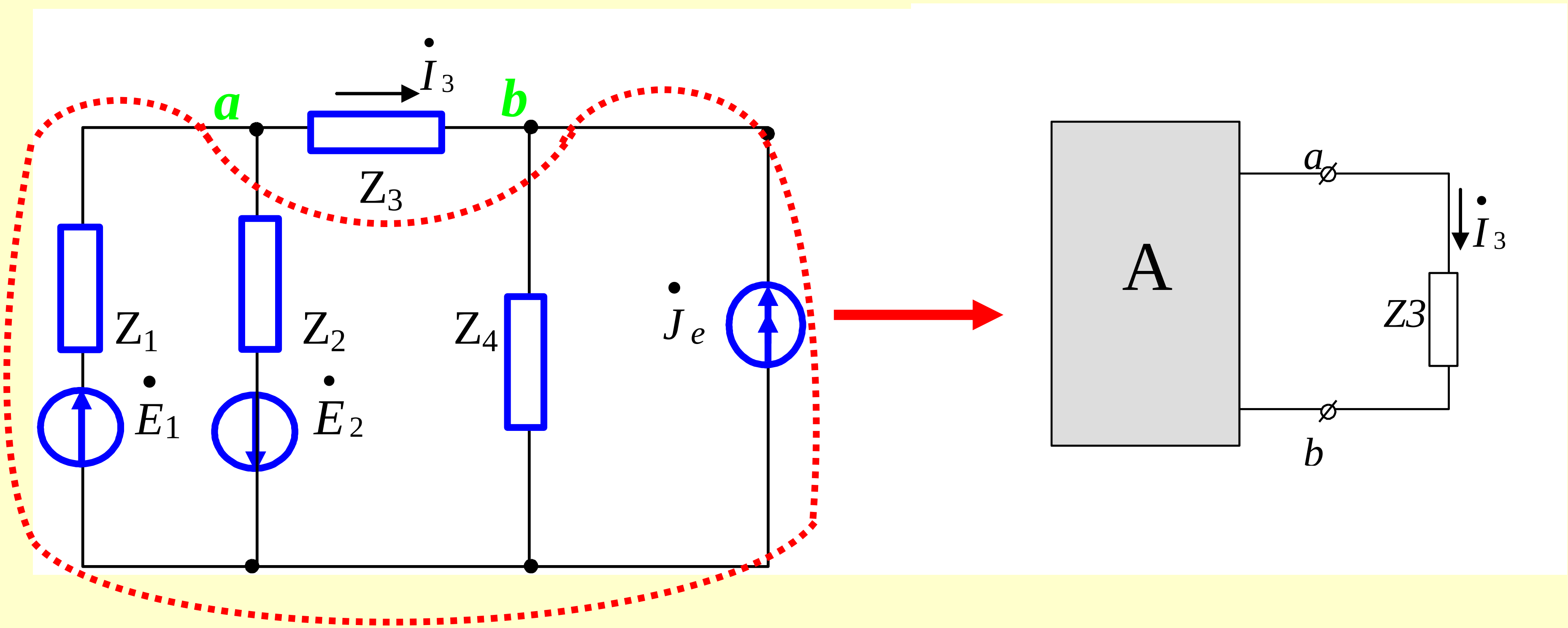
$$\dot{E}_1 = j50\,V$$

$$\dot{E}_2 = j100\,V$$

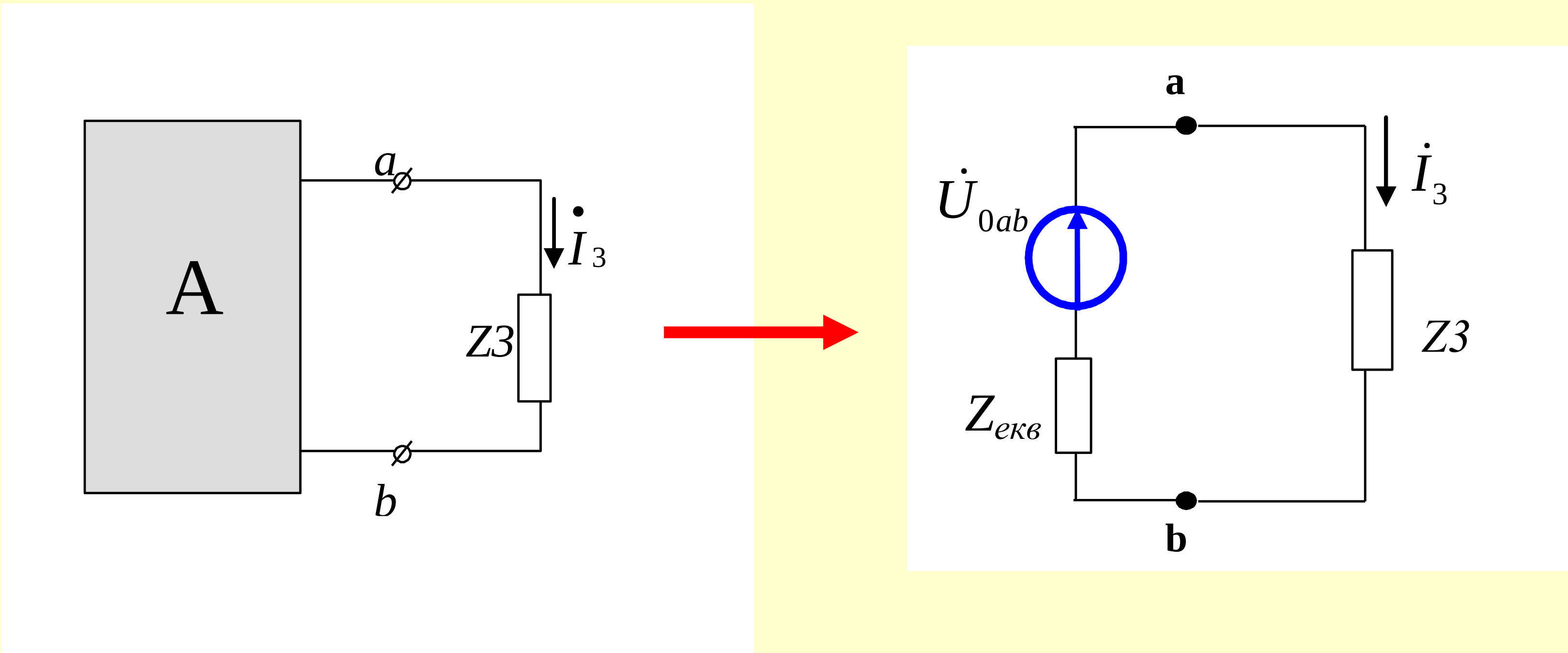
$$\dot{J}_e = j20\ A$$

Решение

1.Веригата извън клона с търсения ток се представя като активен двуполюсник



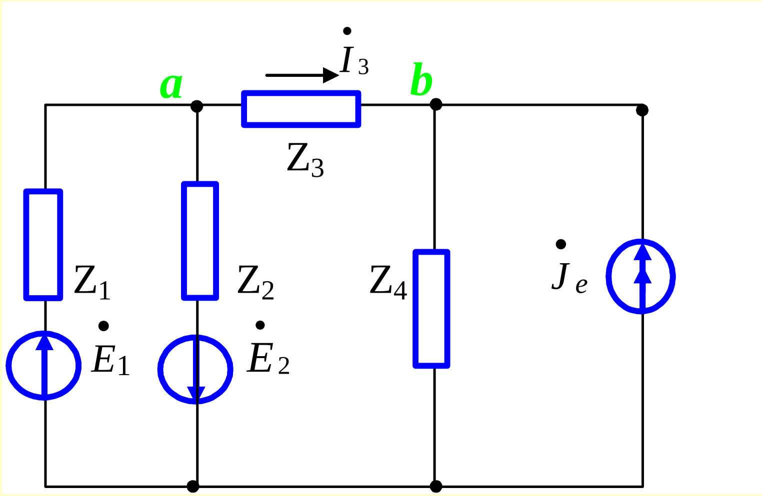
2. Двуполюсникът се представя със заместваща схема
от последователен тип.

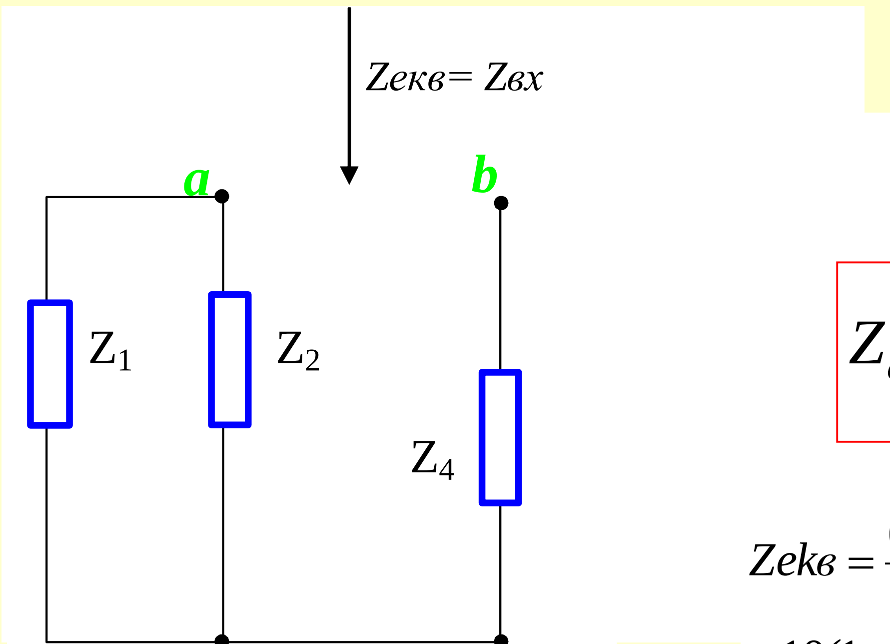


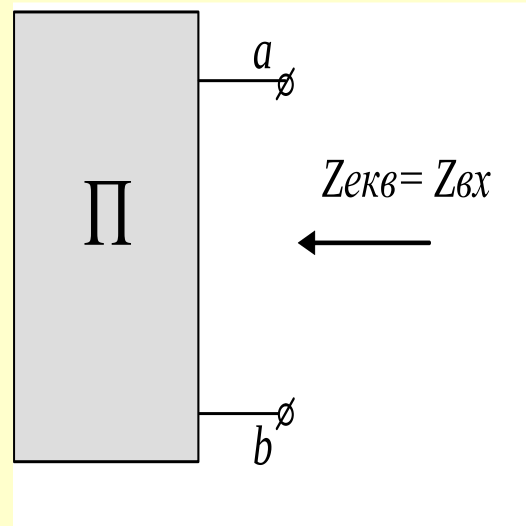
Така търсеният ток може да се определи по Тевенен:

$$\boxed{\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{0ab}}{Z_3 + Z_{екв}}}$$

Zекв=?





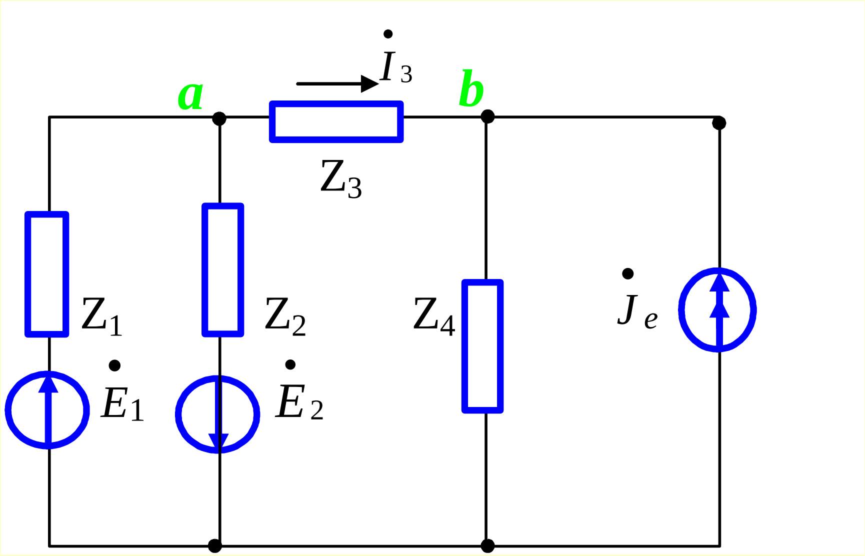


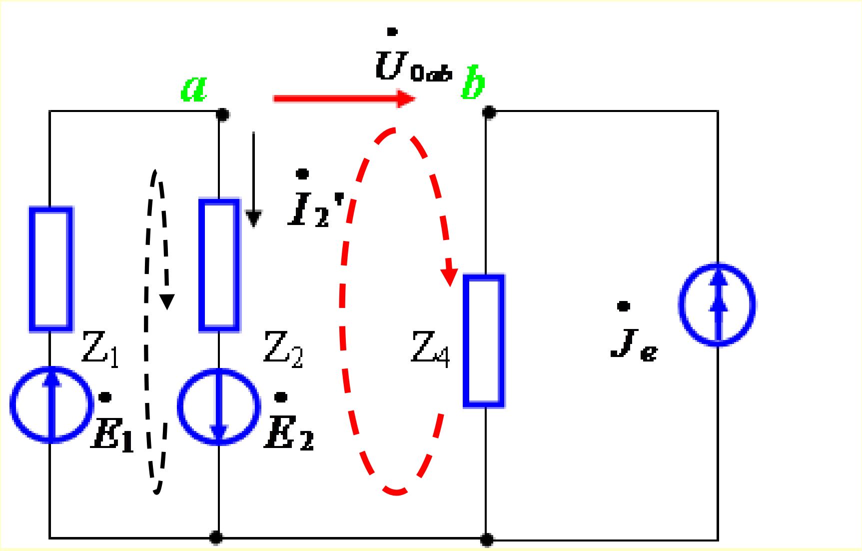
$$\boxed{Z_{ек} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_4}$$

$$Zекв = \frac{(-j10).(10+j10)}{10} + 10 = \frac{100(-j).(1+j)}{10} + 10$$

$$= 10(1-j) + 10 = 10(2-j)\Omega$$

$\dot{U}_{0ab}$ =?



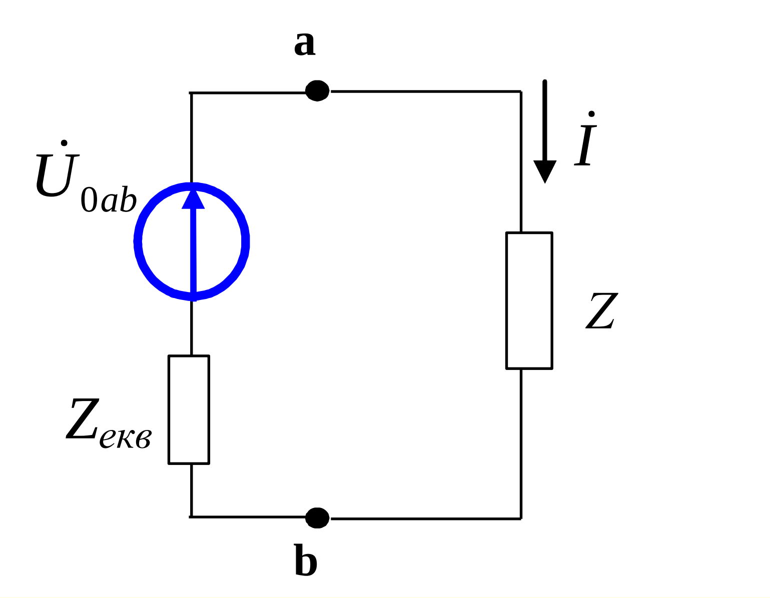


$$\dot{U}_{0ab} + \dot{J}_e Z_4 - \dot{I}_2' Z_2 = -\dot{E}_2$$

$$\dot{I}_2'(Z_1 + Z_2) = \dot{E}_1 + \dot{E}_2$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2' = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j50 + j100}{10} = j15A$$

$$\dot{U}_{0ab} = -\dot{J}_e Z_4 + \dot{I}_2' Z_2 - \dot{E}_2 =$$
$$-j20.10 + j15.(10 + j10) - j100 =$$
$$= -j200 + j150 - 150 - j100 = (-150 - j150)V$$



$$\dot{U}_{0ab} = (-150 - j150)V$$
$$Z_{ек} = (20 - 10j).\Omega$$

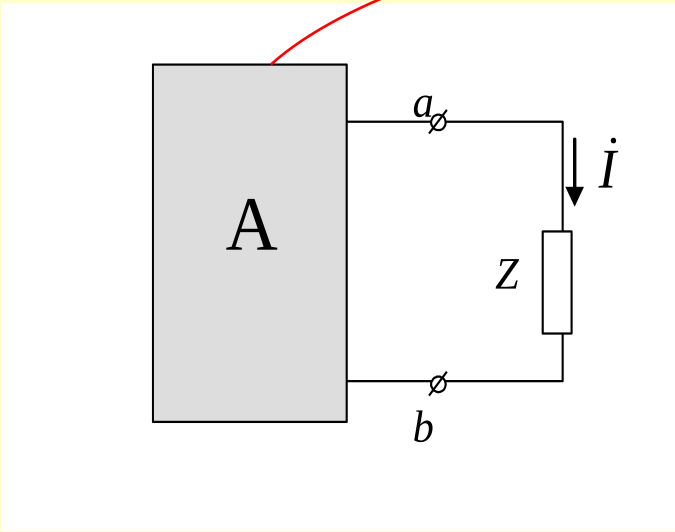
$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{0ab}}{Z_3 + Z_{екв}} =$$

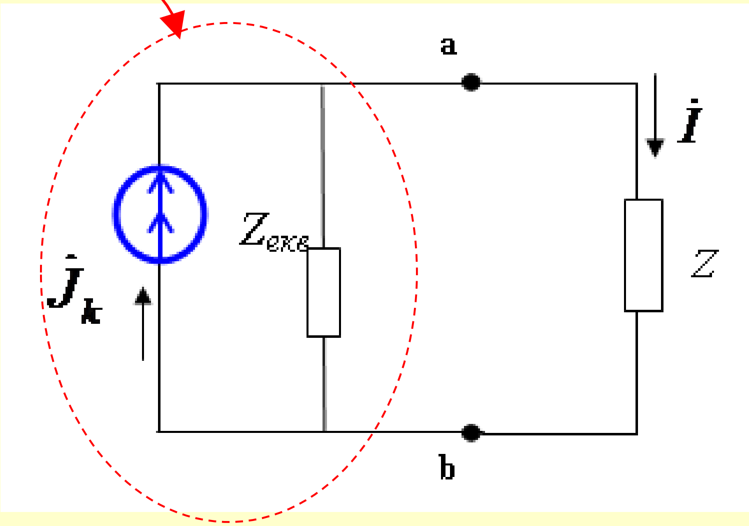
$$= \frac{-150 - j150}{10 + 20 - j10} = \frac{150(-1 - j)}{10(3 - j)} = \frac{15(-1 - j)(3 + j)}{(3 - j).(3 + j)} =$$

$$\frac{15(-3 - 3j - j + 1)}{10} = \frac{15.(-2 - 4j)}{10} = (-3 - 6j)A$$

Теорема на Нортън

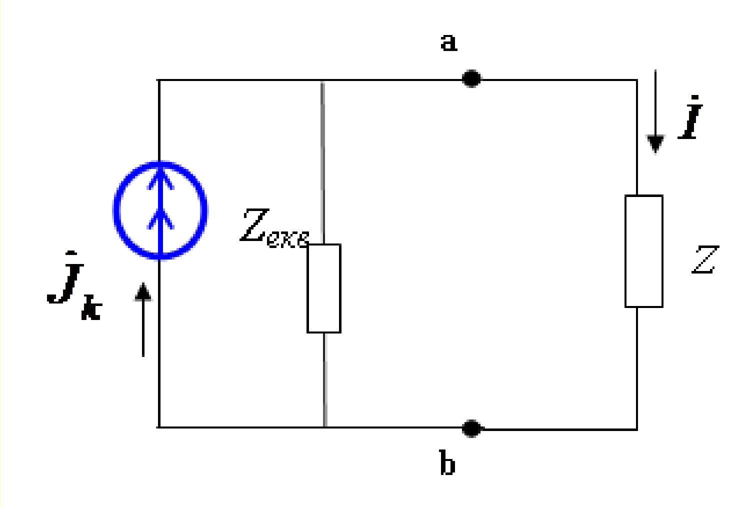
$$\dot{I} = \frac{\dot{J}_k . Z_{екв}}{Z + Z_{екв}}$$





Теорема на Нортън

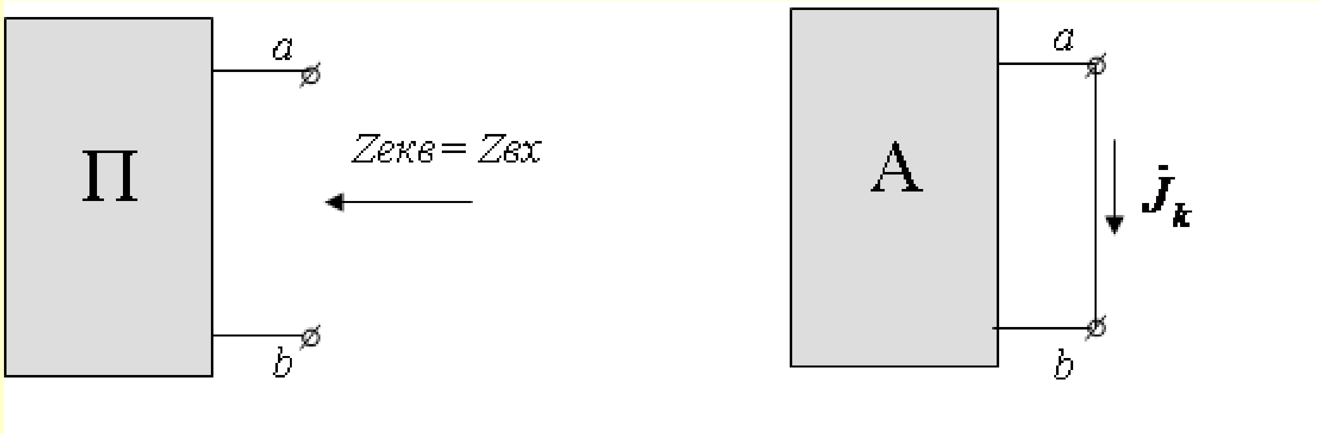
$$\dot{I} = \frac{\dot{J}_k . Z_{екв}}{Z + Z_{екв}}$$



Определяне на параметрите

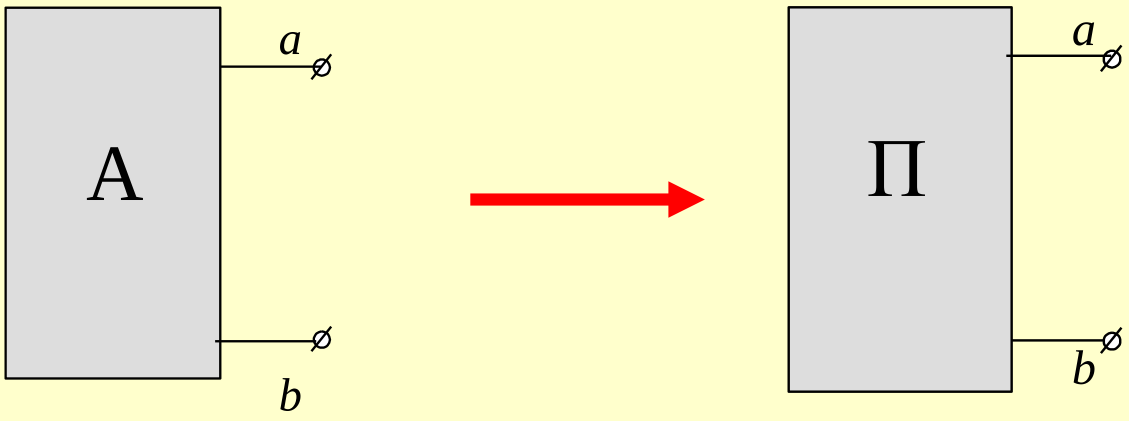
$\boldsymbol{Z}екв = ?$

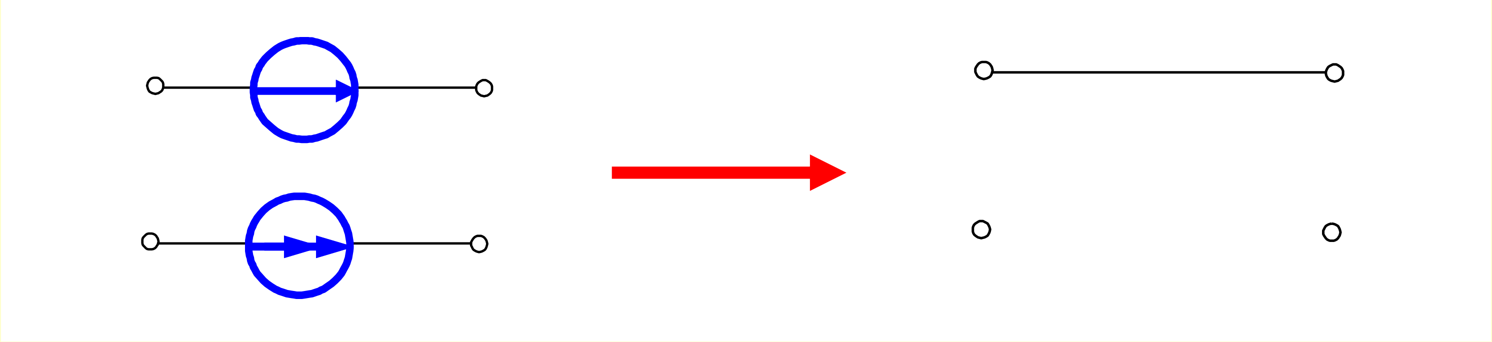
$\boldsymbol{J}_k = ?$



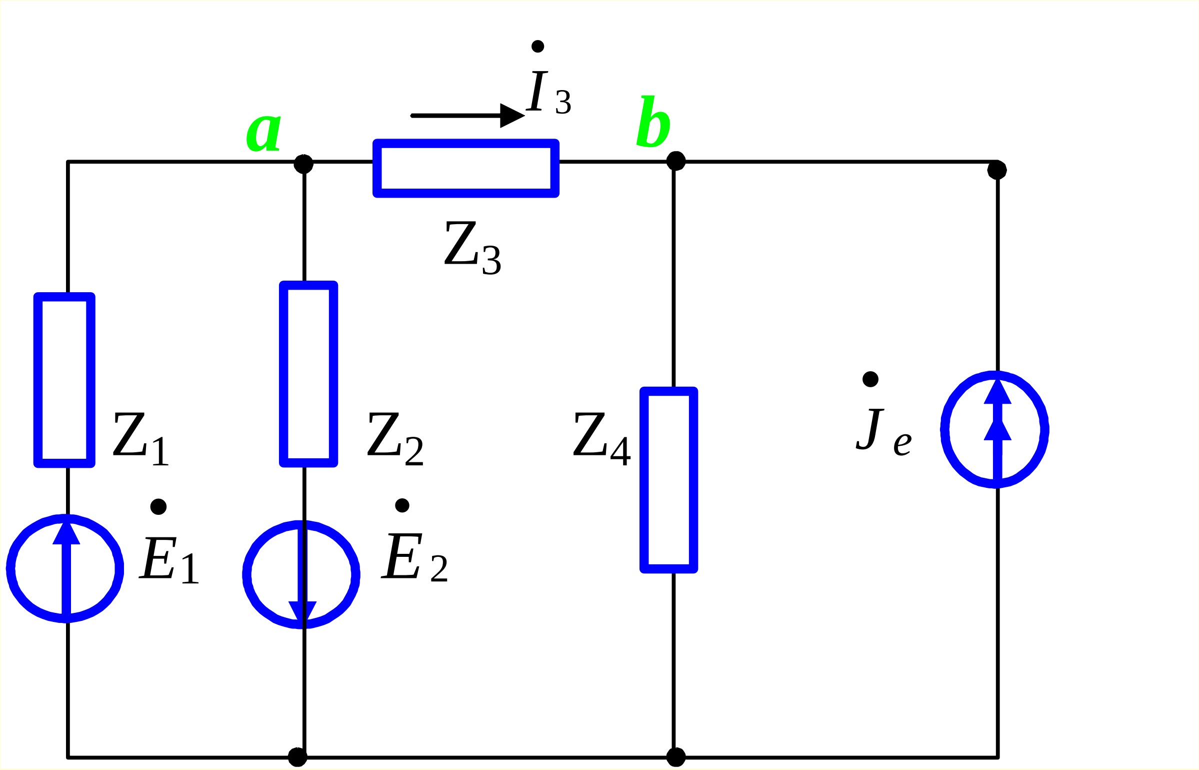
Двуполюсника се преобразува **от активен в пасивен** като се отстраняват източниците

- източникът на напрежение се дава на късо
- източникът на ток се прекъсва





Пример: Да се определи I_3 по теоремата на Нортън



$$Z_1 = -j10\Omega$$

$$Z_2 = (10 + j10)\Omega$$

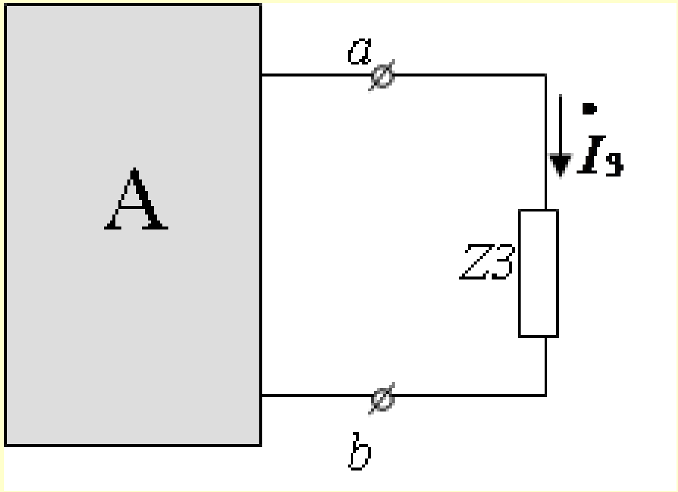
$$Z_3 = 10\,\Omega$$

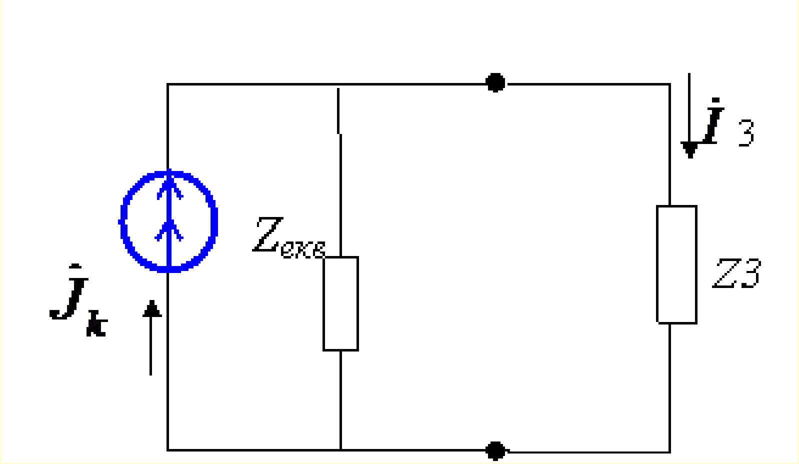
$$Z_4 = 10\,\Omega$$

$$\dot{E}_1 = j50\,V$$

$$\dot{E}_2 = j100\,V$$

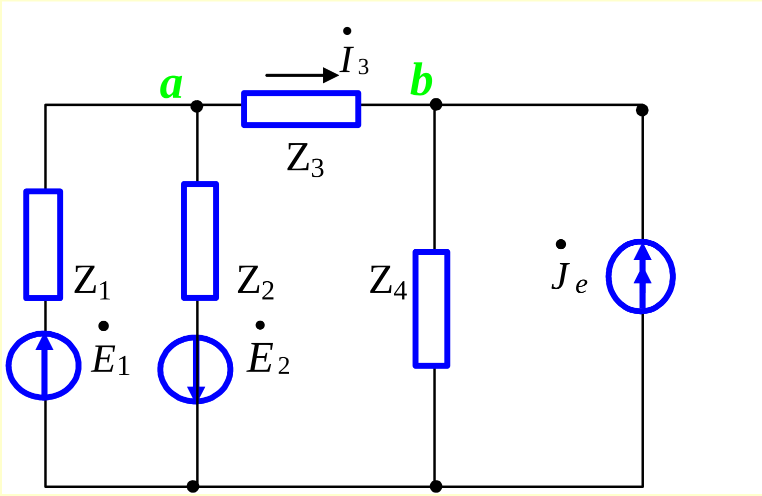
$$\dot{J}_e = j20\;A$$

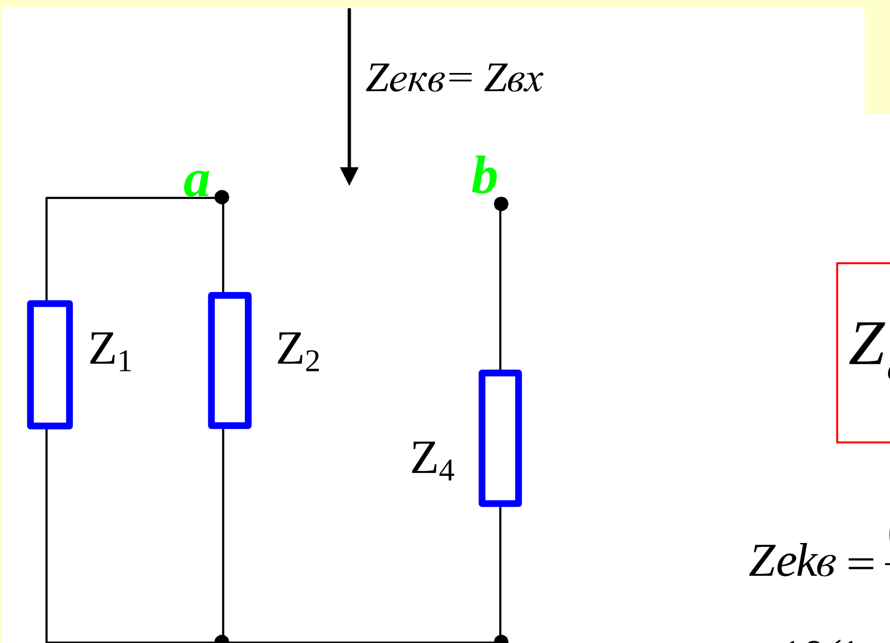


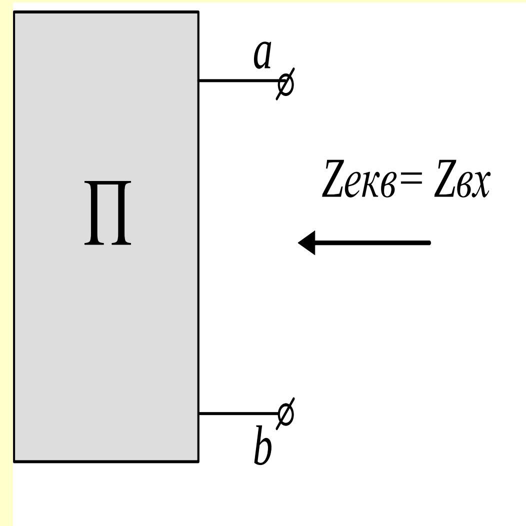


$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{J}_k . Z_{екв}}{Z3 + Z_{екв}}$$

<u>**Zекв=?**</u>





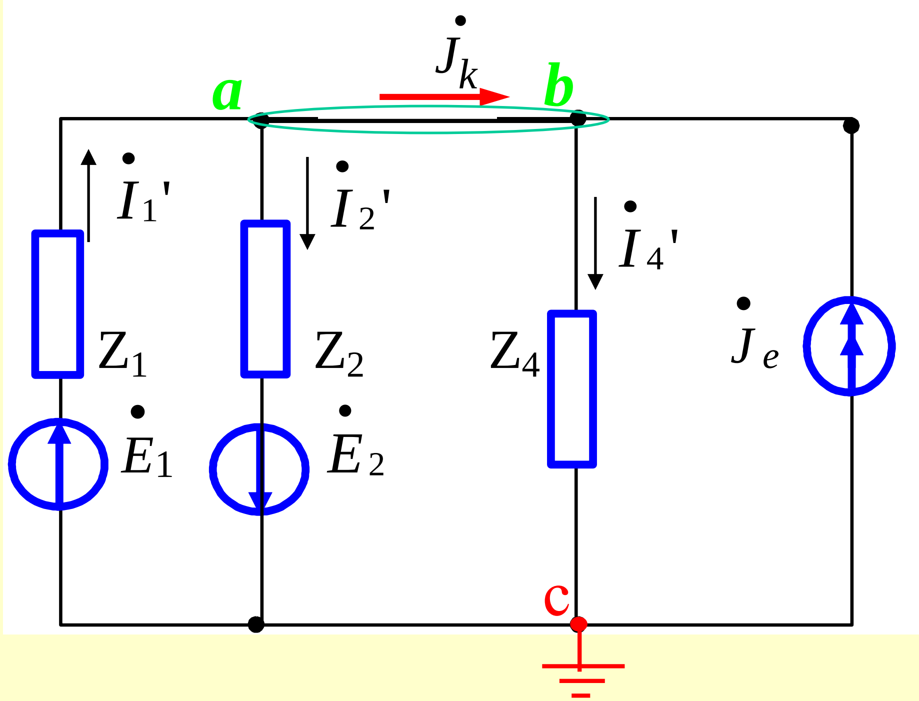


$$\boxed{Z_{ек} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_4}$$

$$Zекв = \frac{(-j10).(10+j10)}{10} + 10 = \frac{100(-j).(1+j)}{10} + 10$$

$$= 10(1-j) + 10 = 10(2-j)\Omega$$

$$J_k = ?$$



Анализ по **МВП** $\dot V_c = 0$

$$\dot V_a\left(\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z4}\right)=\frac{\dot E_1}{Z1}-\frac{\dot E_2}{Z2}+\dot J_e$$

$$\dot V_a = (-30 + j110)V$$

$$\dot J_k = \dot I_4' - \dot J_e$$

$$\dot I_4' = \frac{\dot V_a}{Z4} = \frac{-30 + j110}{10} = (-3 + j11)A$$

$$\dot J_k = \dot I_4' - \dot J_e = -3 + j11 - j20 = (-3 - j9)A$$

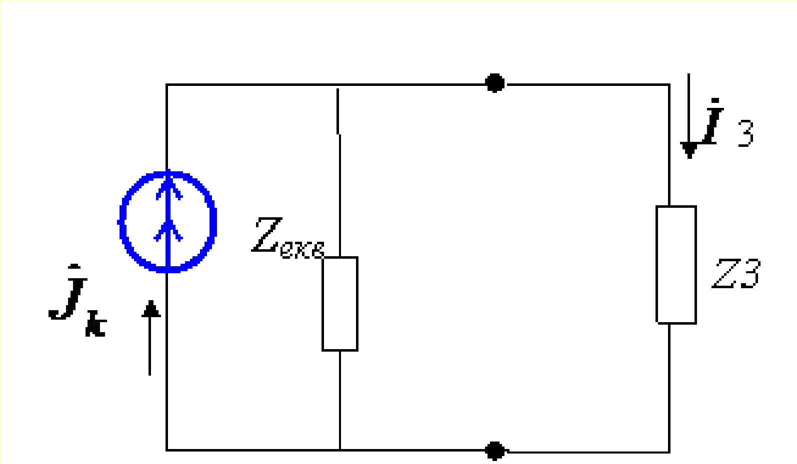
Тогава търсеният ток се определя по теоремата на Нортън

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{J}_k . Z_{екв}}{Z_3 + Z_{екв}}$$

$\dot{J}_k = (-3 - j9)A$

$Zekв = 10(2 - j)\Omega$

$Z_3 = 10\,\Omega$



$$\dot{I}_3 = \frac{(-3 - j9)(20 - j10)}{10 + 20 - j10} = \frac{-30(1 + 3j)(2 - j)}{10(3 - j)}$$

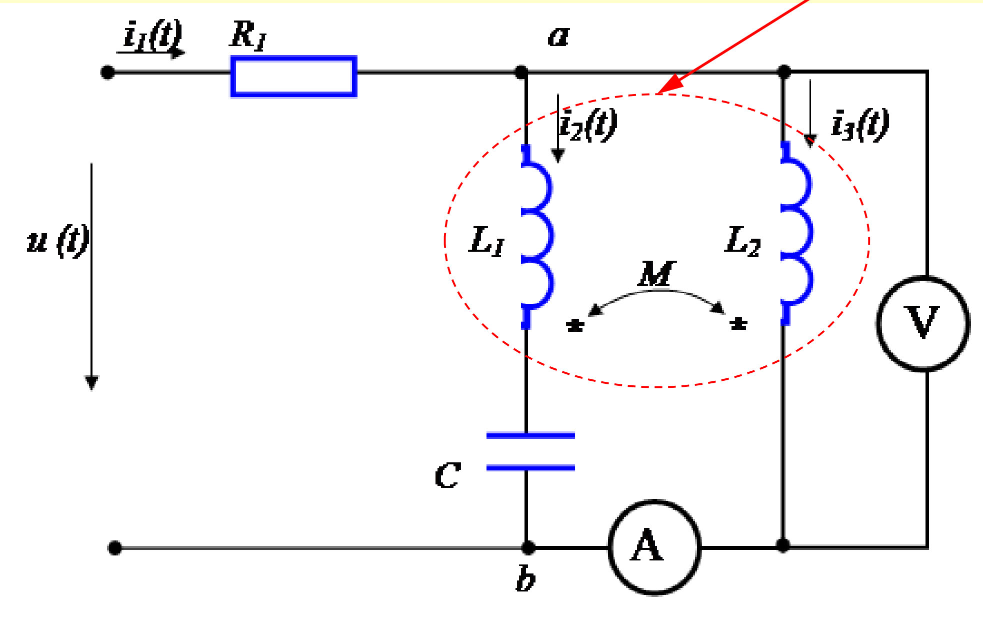
$$= \frac{-3(2 + j6 - j + 3)}{(3 - j)(3 + j)} = \frac{-3(5 + j5)(3 + j)}{10} =$$

$$\frac{-15(1 + j)(3 + j)}{10} = \frac{-15(3 + j3 + j - 1)}{10} = -1.5(2 + j4) = (-3 - j6)A$$

Вериги с индуктивни връзки

В някои случаи между отделните части на ел.верига може да има не само електрическа, но и **магнитна връзка**.

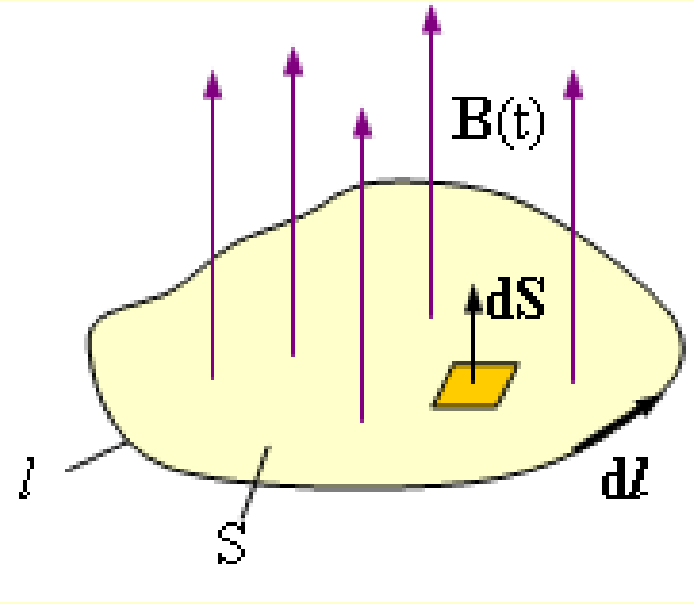
Това означава, че във веригата са включени **магнитносвързани бобини**, т.е. преминаването на ток през едната създава магнитно поле, което обхваща навивките на другата и съгласно закона за електромагнитната индукция **индуктира** в нея **напрежение**.



- В този случай приемаме, че между бобините има индуктивна връзка, а преминаването на **ток през едната** води до появата на **напрежение в другата** и обратно

- при анализа на вериги с индуктивни връзки се **отчитат** и тези **допълнителни напрежения**

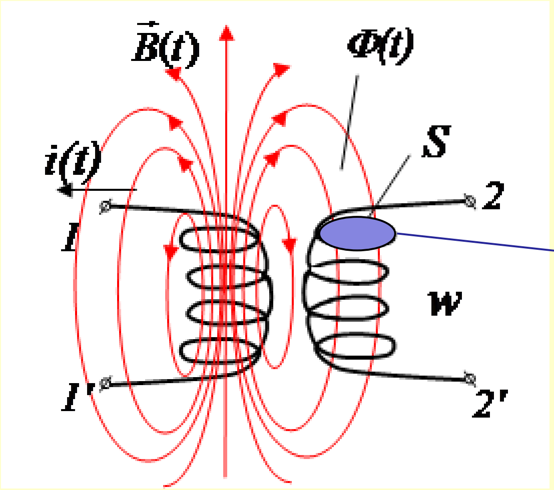
Закон за електромагнитната индукция: Промяната на потока на вектора на магнитното поле **B** през площа ***S***, обхваната от контура ***l*** води до появата на електродвижещо напрежение ***e*** в контура.



$$e = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{dS}}$$

<u>**Вериги с индуктивни връзки**</u>

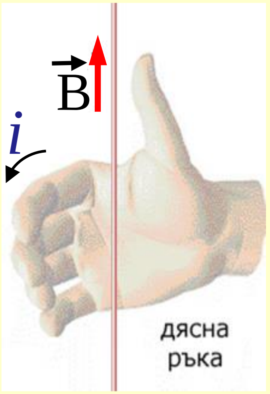
Във веригата са включени <u>**магнитносвързани бобини**</u>, т.е. <u>преминаването на ток през едната</u> създава магнитно поле, което обхваща навивките на другата и съгласно закона за електромагнитната индукция <u>**индуктира**</u> в нея <u>**напрежение**</u>.



$$i(t) \longrightarrow \vec{B}(t)$$

$$\Phi(t) = \oiint_S \vec{B}(t)\,d\vec{S}$$

$$\Psi(t) = w.\Phi(t)$$



$$\boxed{e(t) = -\frac{d\Psi}{dt}}$$

ЕДН на самоиндукция

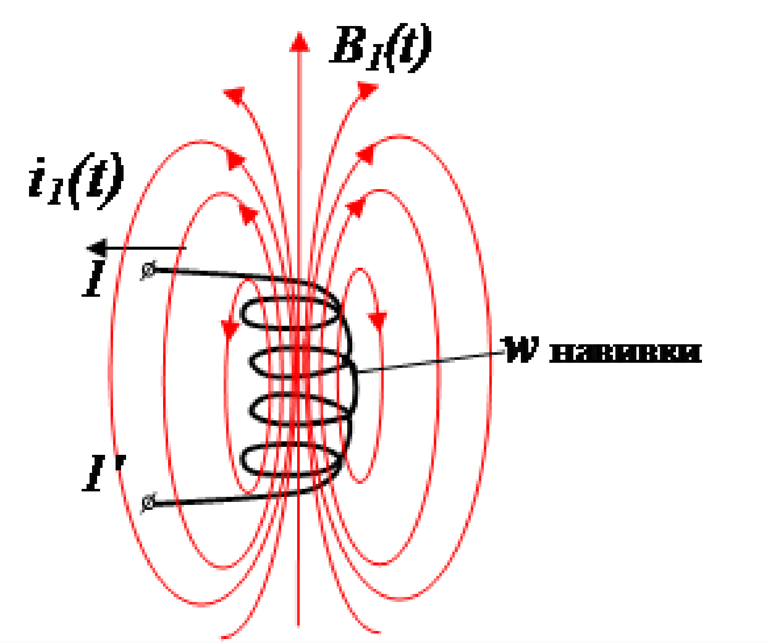
през бобината ***"1"*** преминава променлив ток

$i_1(t) \longrightarrow B_1(t)$

$$\Phi_1(t) = \oiint_S B_1(t)dS$$

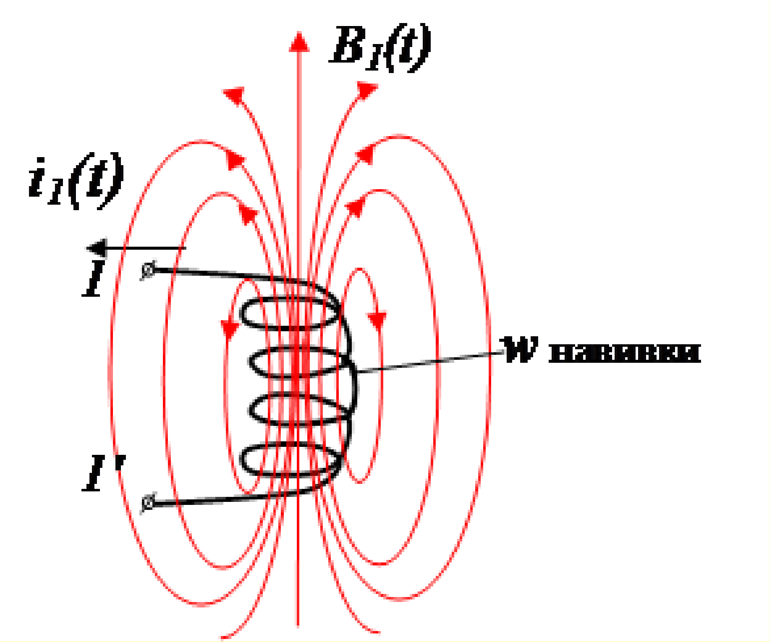
$$\Psi_1(t) = w.\Phi_1(t)$$

$$\boxed{e_1(t) = -\frac{d\Psi_1}{dt}}$$



- *е.д.н.* на самоиндукция е <u>пропорционално на скоростта на изменение на тока</u>
- <u>Знакът "-" *е.д.н.* на самоиндукция се противопоставя на изменението на тока</u>

ЕДН на самоиндукция



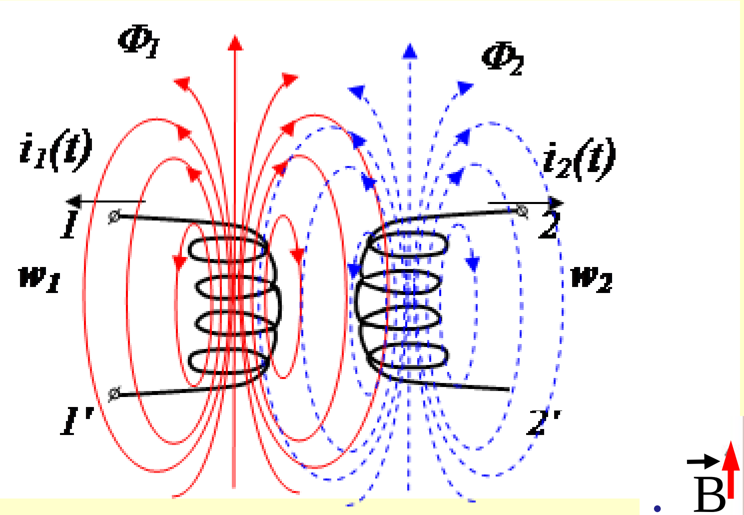
Връзката между потока $\Psi(t)$ и тока $i(t)$, се определя с параметъра L - ***собствена индуктивност***.

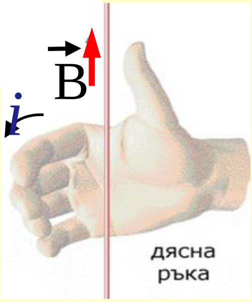
$$\Psi_1 = L_1 i_1$$

- L зависи от геометрията и характеристиките на средата
- L **не зависи от големината на тока**

$$e_1(t) = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_1.i) \Rightarrow \boxed{e_1(t) = -L_1\frac{di}{dt}}$$

ЕДН на взаимоиндукция

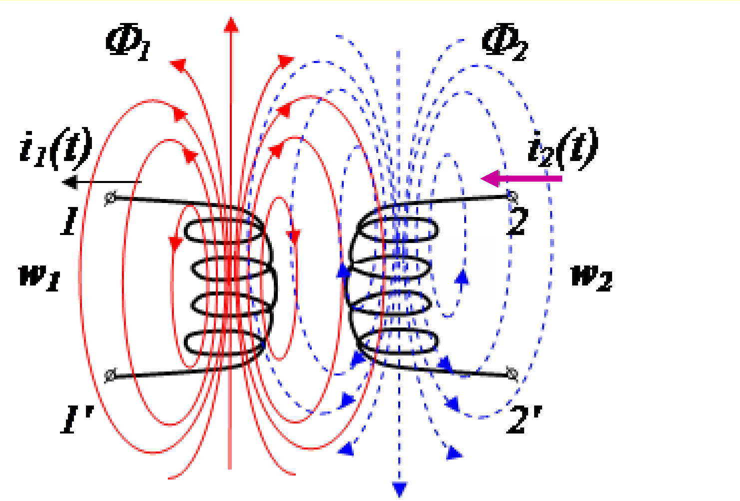




$$i_1(t) \longrightarrow \Phi_1(t) = \Phi_{11}(t) + \Phi_{21}(t)$$
$$i_2(t) \longrightarrow \Phi_2(t) = \Phi_{22}(t) + \Phi_{12}(t)$$

Собствен поток   Взаимен поток

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = w_1 . \Phi_{11} + w_1 . \Phi_{12}$$
$$\Psi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{21} = w_2 . \Phi_{22} + w_2 . \Phi_{21}$$

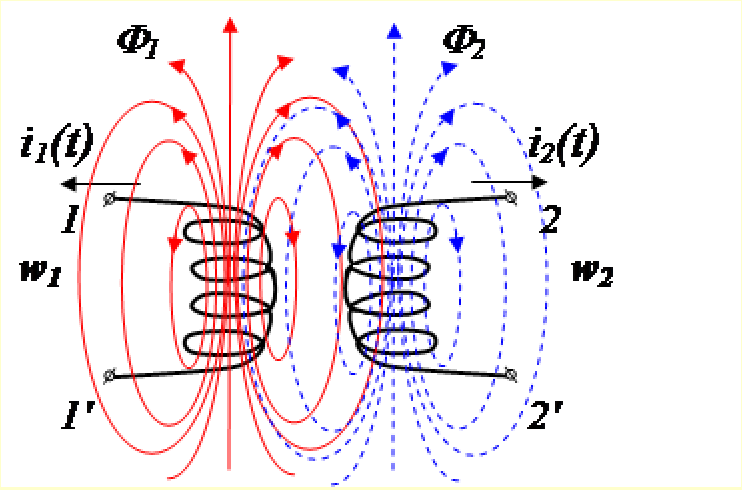


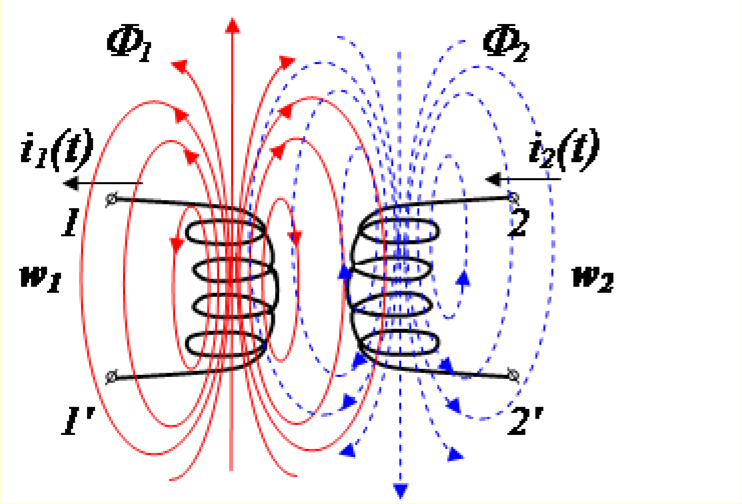
$$i_1(t) \longrightarrow \Phi_1(t) = \Phi_{11}(t) + \Phi_{21}(t)$$
$$i_2(t) \longrightarrow \Phi_2(t) = \Phi_{22}(t) + \Phi_{12}(t)$$

$$\Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{12} = w_1 . \Phi_{11} - w_1 . \Phi_{12}$$
$$\Psi_2 = \Psi_{22} - \Psi_{21} = w_2 . \Phi_{22} - w_2 . \Phi_{21}$$

Собствен поток   Взаимен поток

ЕДН на взаимоиндукция





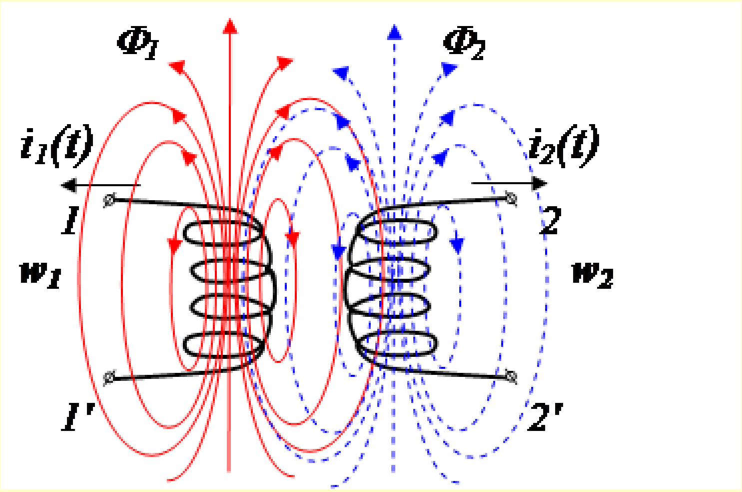
$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = w_1.\Phi_{11} \pm w_1.\Phi_{12}$$

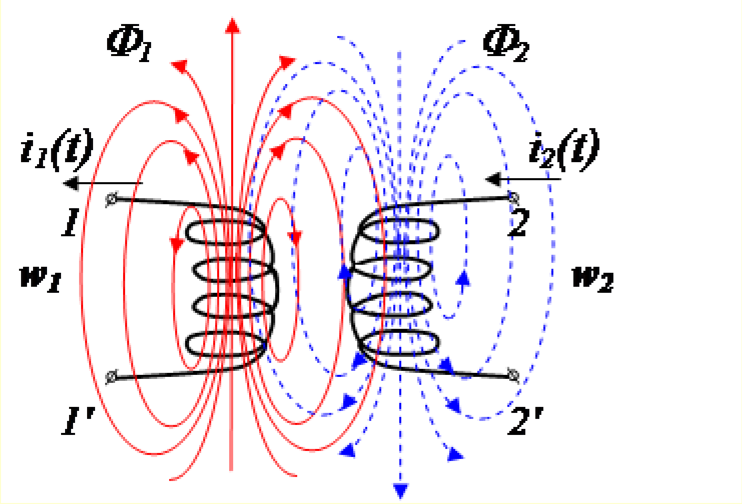
$$e_1(t) = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Psi_{11} \pm \Psi_{12}) = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 \pm M_{12} i_2) = -(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12}\frac{di_2}{dt})$$

$$\boxed{e_{L_1}(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt}}$$

$$\boxed{e_{M_1}(t) = \pm M_{12}\frac{di_2}{dt}}$$

ЕДН на взаимоиндукция





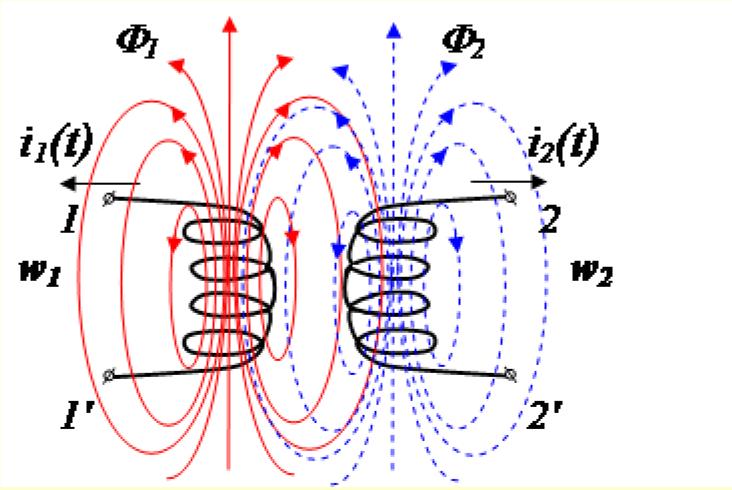
$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = w_2.\Phi_{22} \pm w_2.\Phi_{21}$$

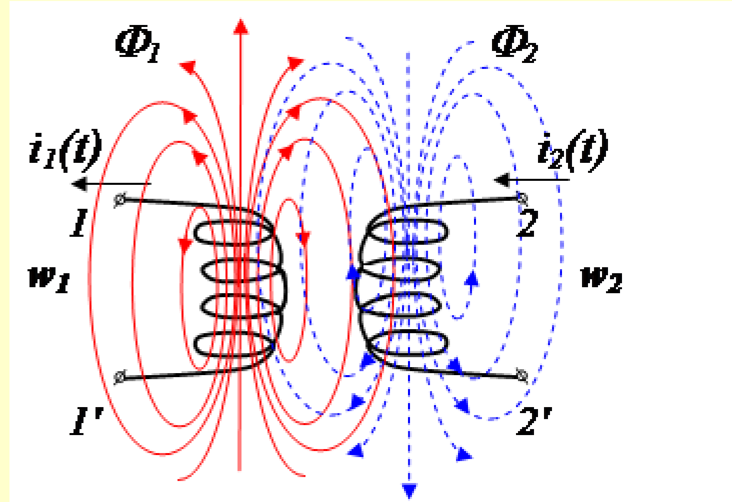
$$e_2(t) = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Psi_{22} \pm \Psi_{21}) = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2 \pm M_{21} i_1) = -(L_2\frac{di_2}{dt} \pm M_{21}\frac{di_1}{dt})$$

$$e_{L_2}(t) = -L_2\frac{di_2}{dt}$$

$$e_{M_2}(t) = \pm M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

ЕДН на взаимоиндукция





За бобина "1"

$$e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

За бобина "2"

$$e_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

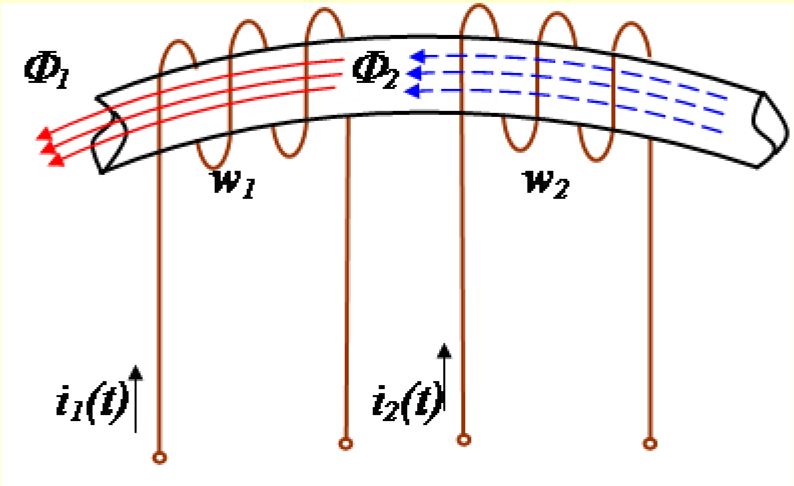
е.д.н. на самоиндукция

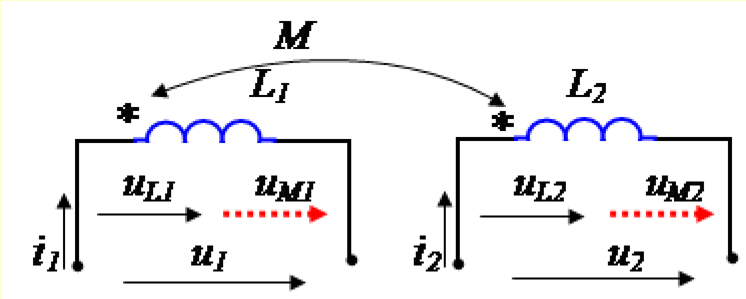
***е.д.н.* на взаимоиндукция**

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

Едноименни изводи.
Определяне знака на напрежението от взаимна индукция

$$u_1 = u_{L_1} + u_{M_1}$$
$$u_2 = u_{L_2} + u_{M_2}$$





Съгласувано свързване

Собственият и взаимният магн.поток имат една и съща посока

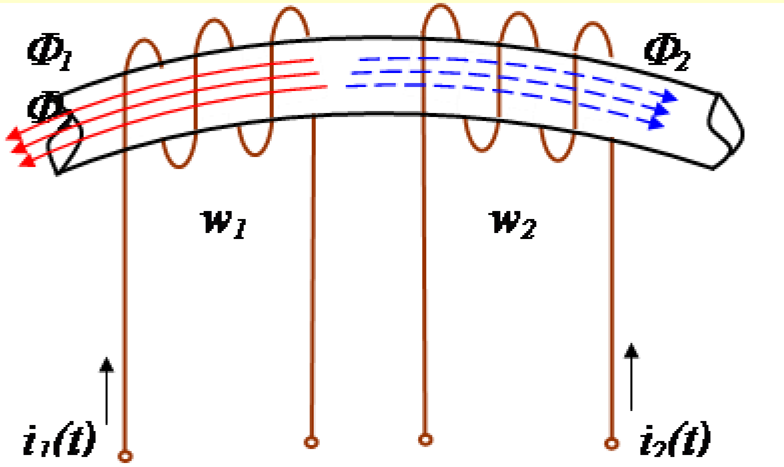
Токовете са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи

Напрежението е сума от *е.д.н.* на самоиндукция и *е.д.н.* на взаимоиндукция

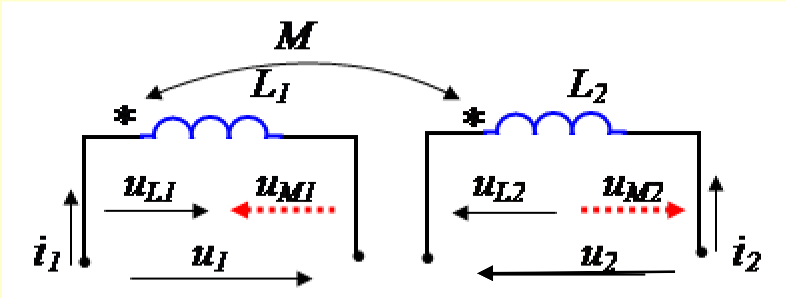
$$u_1 = u_{L_1} + u_{M_1}; \qquad u_2 = u_{L_2} + u_{M_2}$$

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \qquad u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Определяне знака на напрежението от взаимна индукция



$$u_1 = u_{L_1} - u_{M1}$$
$$u_2 = u_{L_2} - u_{M2}$$



Несъгласувано свързване

Собственият и взаимният магн.поток имат противоположни посоки

Токовете са различно ориентирани спрямо едноименните изводи

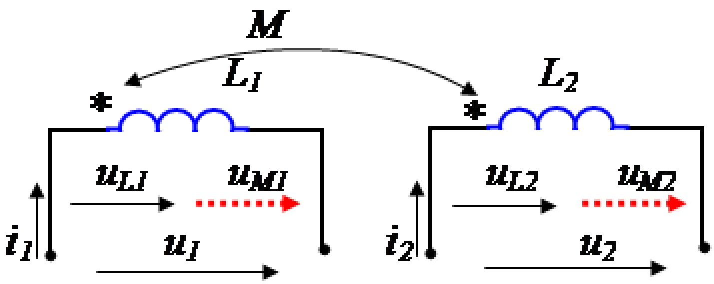
Напрежението е разлика от *е.д.н.* на самоиндукция и *е.д.н.* на взаимоиндукция

$u_1 = u_{L_1} - u_{M_1}$; $\qquad u_2 = u_{L_2} - u_{M_2}$

$u_1(t) = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt}$; $\qquad u_2(t) = L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt}$

При синусоидално изменение на тока – запис в комплексен вид

$$\boxed{Z_M = j\omega M}$$

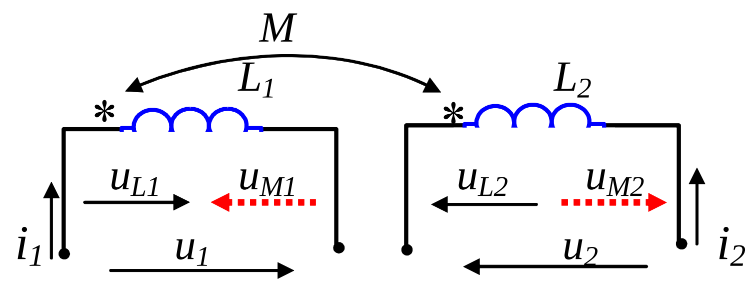


$$u_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1.\dot{I}_1 + j\omega M.\dot{I}_2 = Z_{L_1}.\dot{I}_1 + Z_M.\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2.\dot{I}_2 + j\omega M.\dot{I}_1 = Z_{L_2}.\dot{I}_2 + Z_M.\dot{I}_1$$



$$u_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

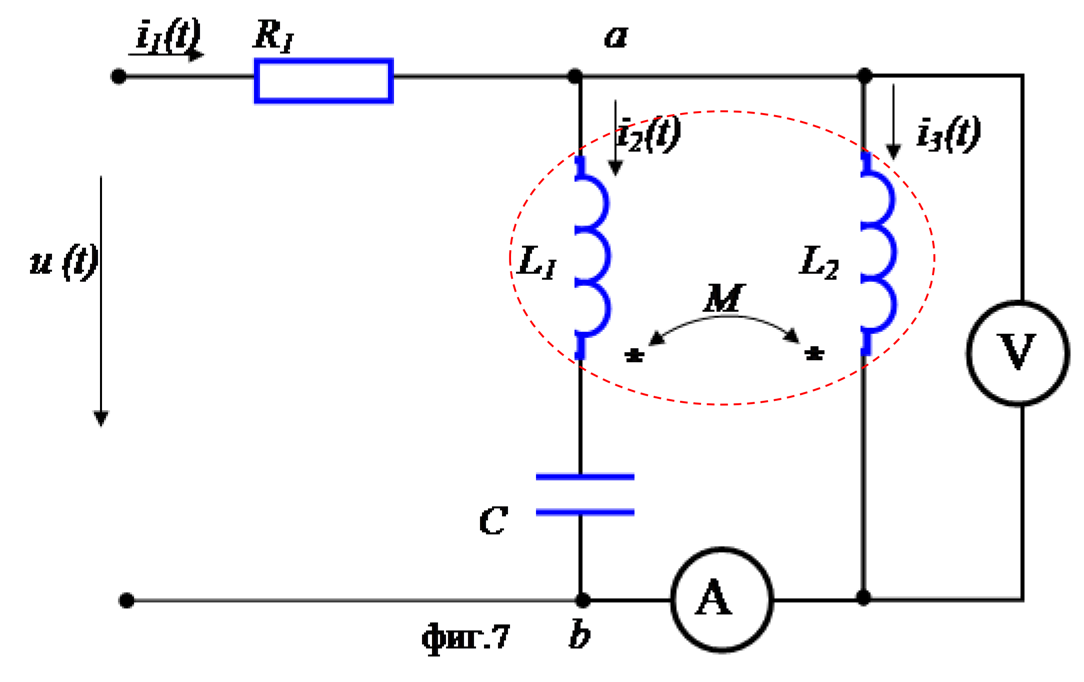
$$u_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1.\dot{I}_1 - j\omega M.\dot{I}_2 = Z_{L_1}.\dot{I}_1 - Z_M.\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2.\dot{I}_2 - j\omega M.\dot{I}_1 = Z_{L_2}.\dot{I}_2 - Z_M.\dot{I}_1$$

Пример за анализ на верига с индуктивни връзки:

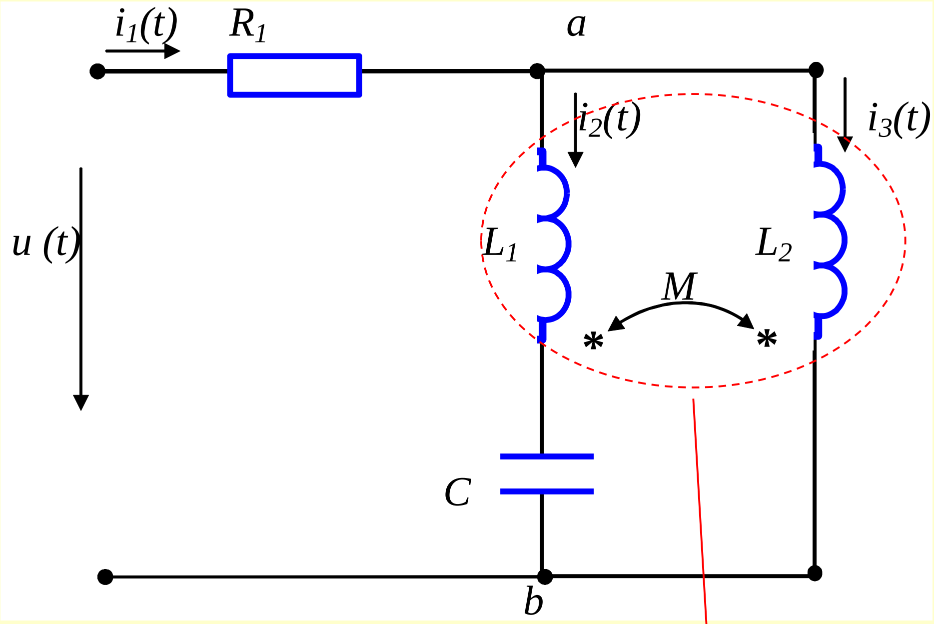
Да се определят токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ и показанията на уредите.



$u(t) = 141\sin(\omega t+90)V$

$f=160Hz$,
$L_1=40\ mH$,
$L_2=30\ mH$,
$M=10\ mH$,
$C=100\ \mu F$
$R_1 = 10\Omega$,

Решение

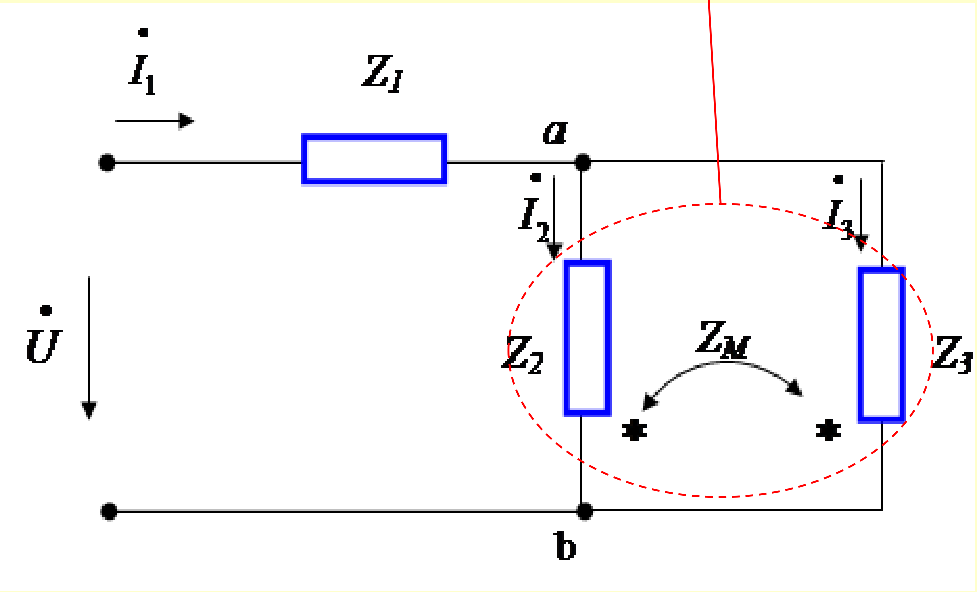


$$u(t) = 141\sin(\omega t+90)V$$

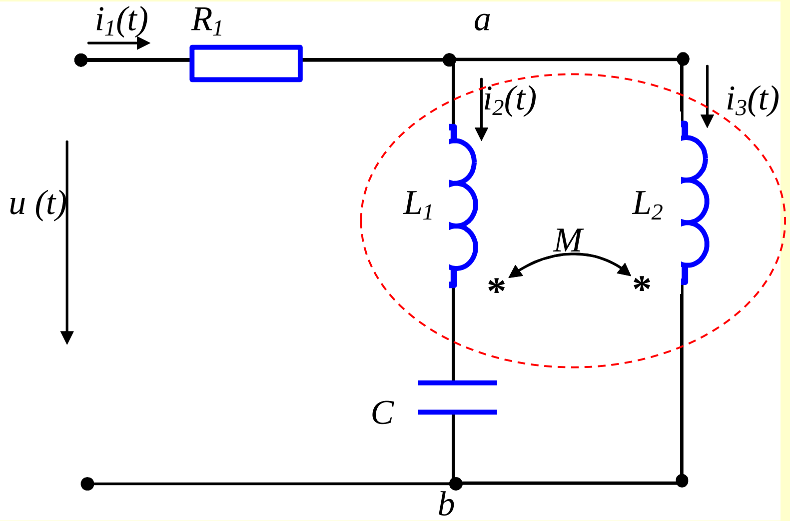
$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{141}{\sqrt{2}}e^{j90}$$

$$= 100.[\cos(90) + j\sin(90)]$$

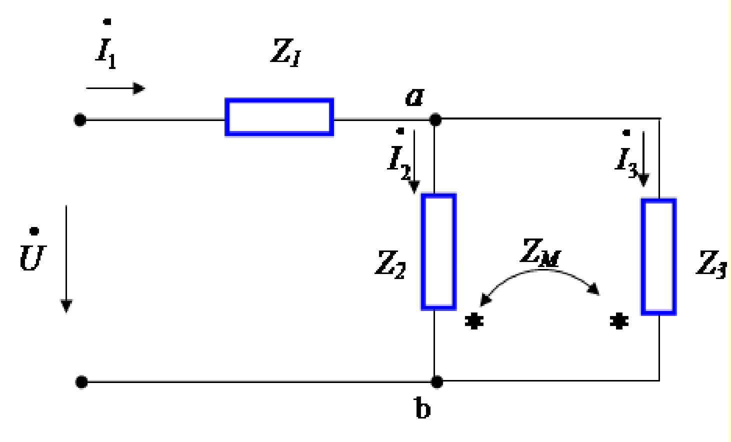
$$= 100.(0 + j) = j100V$$



Решение



$f=160Hz,$
$L_1=40\ mH,$
$L_2=30\ mH,$
$M=10\ mH,$
$C=100\ \mu F$
$R_1 = 10\Omega,$



$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 1000 = 10^3 rad/s$$

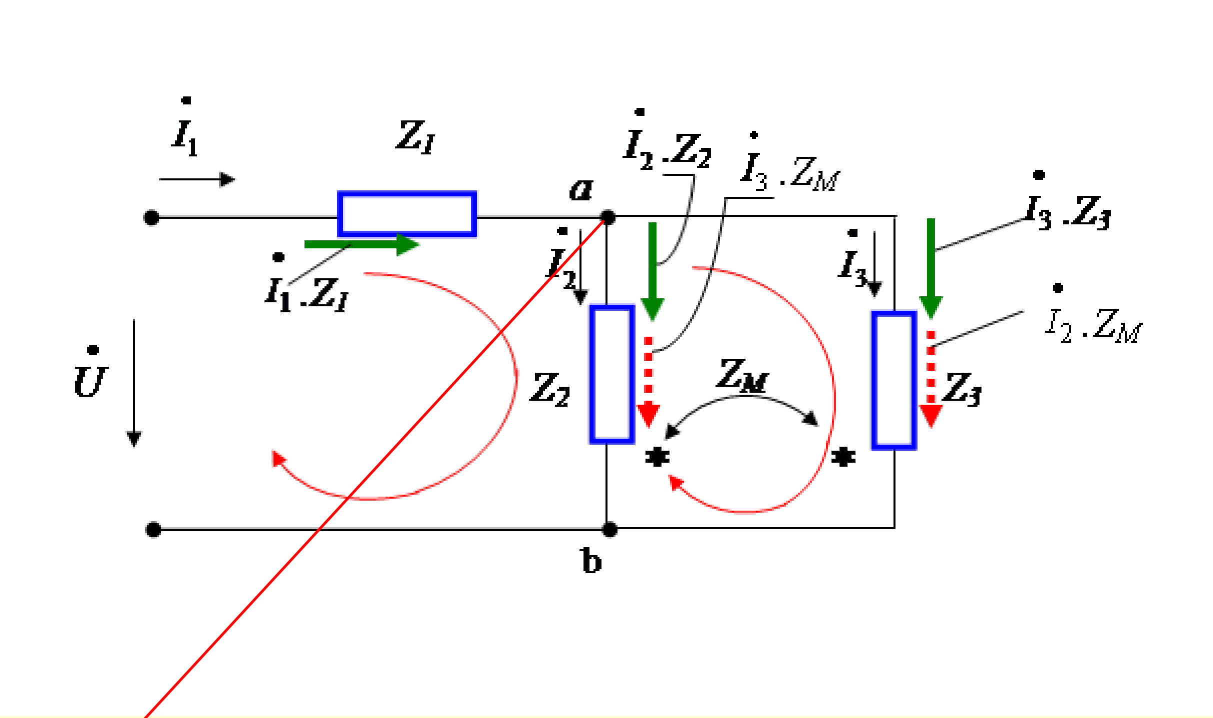
$$Z_1 = R_1 = 10\Omega$$

$$Z_2 = j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C} = j.10^3.40.10^{-3} - j\frac{1}{10^3.100.10^{-6}} = j(40-10) = j30\ \Omega$$

$$Z_3 = j\omega L_2 = j.10^3 30.10^{-3} = j30\ \Omega$$

$$Z_M = j\omega M = j.10^3 10.10^{-3} = j10\ \Omega$$

Решение- система уравнения по метод с клонови токове



$n=2$

$m=3$

"a"

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_3 Z_M = \dot{U} \\ \dot{I}_3 Z_3 - \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_2 Z_M - \dot{I}_3 Z_M = 0 \end{cases}$$

Решение

$$\left|\begin{array}{l} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{I}_1 10 + \dot{I}_2\, j30 + \dot{I}_3\, j10 = j100 \\ \dot{I}_3 .j30 - \dot{I}_2\, j30 + \dot{I}_2\, j10 - \dot{I}_3\, j10 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2\, j3 + \dot{I}_3\, j = j10 \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 \end{array}\right.$$

Решение

5. Получаваме комплексите на трите тока:

$$\dot{I}_1 = (4 + j2) = 4{,}47e^{j26{,}56} A$$

$$\dot{I}_2 = (2 + j) = 2{,}24e^{j26{,}56} A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 = (2 + j) = 2{,}24e^{j26{,}56} A$$

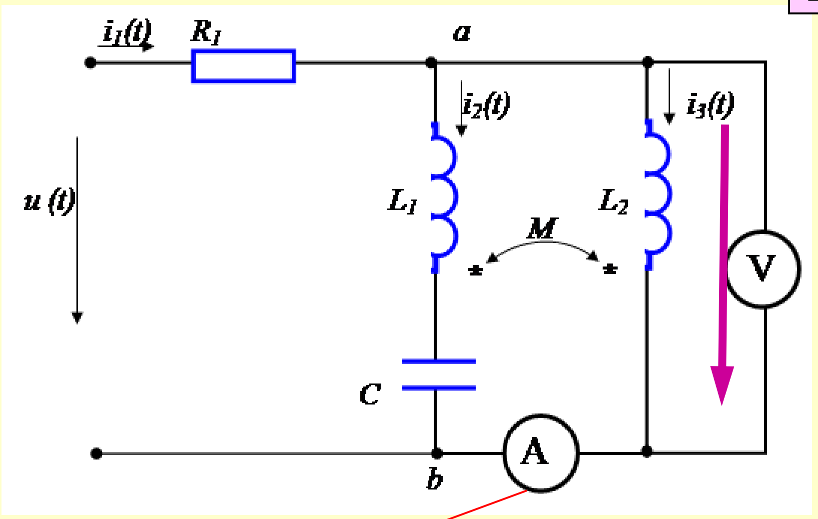
6. Тогава моментните стойности на токовете са:

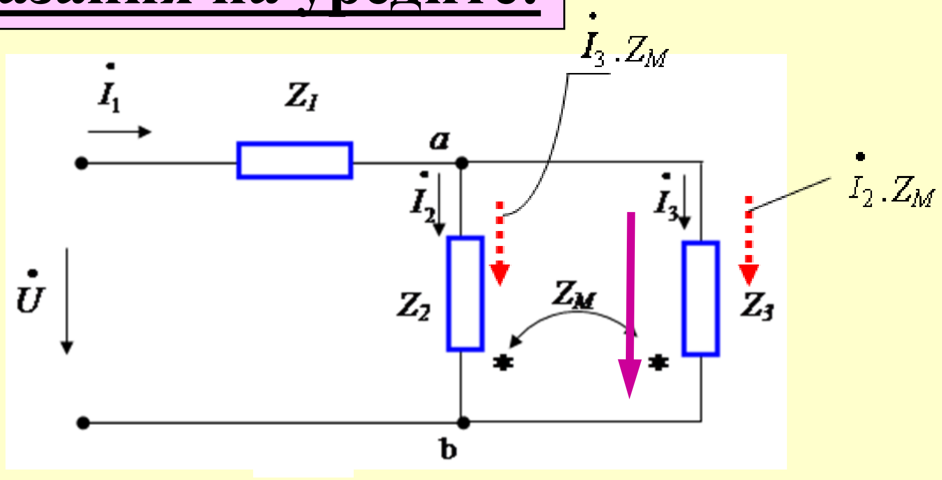
$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) = 4{,}47\sqrt{2}\sin(1000t + 26{,}56^0)A$$

$$i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2) = 2{,}24\sqrt{2}\sin(1000t + 26{,}56^0)A$$

$$i_3(t) = I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_3) = 2{,}24\sqrt{2}\sin(1000t + 26{,}56^0)A$$

Показания на уредите:





$$\boxed{I_A = I_3 = 2{,}24 A}$$

$$\dot{I}_1 = (4 + j2) = 4{,}47e^{j26{,}56} A$$

$$\dot{I}_2 = (2 + j) = 2{,}24e^{j26{,}56} A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 = (2 + j) = 2{,}24e^{j26{,}56} A$$

$$U_V = U_{ab}$$

$$\dot{U}_{ab} = Z_3 .\dot{I}_3 + Z_M .\dot{I}_2 = j\omega L_2 .\dot{I}_3 + j\omega M .\dot{I}_2 = (2 + j) j30 + (2 + j) j10 = (-40 + j80)V$$

$$\Rightarrow U_V = U_{ab} = \sqrt{(-40)^2 + 80^2} = 40\sqrt{5} = 89{,}44V$$

Благодаря за вниманието

проф. д-р Илона Ячева