PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com
PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Aufgaben:

1. *Wahr oder Falsch* [**10 Punkt(e)**]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **2 Punkte**, falsch gesetzte Kreuzchen geben *keine* negative Punkte.

Bitte wenden!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

		wahr	falsch
1)	Das folgende Anfangswertproblem (AWP) $$\dot{y}(t) = 2\sqrt{\lvert y \rvert},\ y(0) = 0$$ für $t \in [0, \infty)$ besitzt die beiden Lösungen $y(t) = 0$ und $y(t) = t\lvert t \rvert$. Deshalb genügt das AWP dem Satz von Picard-Lindelöf.		
2)	Das explizite Euler Verfahren gehört zur Familie der Runge-Kutta Einschrittverfahren und das zugehörige Butcher-Tableau ist $$\begin{array}{c\|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$		
3)	Nur lineare Anfangswertprobleme können steif sein.		
4)	Wir approximieren das Integral $$I[\sqrt{x}] = \int_0^1 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$$ mit der summierten Simpson-Regel mit N Teilintervallen $Q_2^N[\sqrt{x}]$. Da die Simpson-Regel Genauigkeitsgrad $q = 3$ hat, erwarten wir einen Fehler der Form $$E^N[\sqrt{x}] = \lvert I[\sqrt{x}] - Q_2^N[\sqrt{x}] \rvert = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right)$$ für N gross genug.		
5)	Falls das Bisektion-Verfahren gegen eine Nullstelle konvergiert, tut es dies mit linearer Konvergenzordnung.		

Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com
PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

2. *Fragen aus den Übungen* **[15 Punkt(e)]**

a) [4 Punkt(e)] *(Serie 1, Aufgabe 2)*
Gegeben ist die Quadraturregel

$$Q[f] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx = I[f],$$

mit Knoten

$$x_0 = a, \qquad x_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x_2 = b.$$

i) Berechnen Sie die Lagrange-Polynome $L_0^2(x)$, $L_1^2(x)$ und $L_2^2(x)$ passend zu den Knoten x_0, x_1 und x_2.

ii) Berechnen Sie mit **i)** die Quadratur Gewichte ω_0, ω_1 und ω_2.

b) [2 Punkt(e)] *(Serie 5, Aufgabe 4)*
Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) + \cos(t)e^{-t}, \\ y(0) &= 7. \end{aligned}$$

c) [4 Punkt(e)] *(Serie 7, Aufgabe 3)*
Geben Sie für das folgende Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j), \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f(t_j + h, y_j + hk_2), \\ k_4 &= f(t_j + h, y_j + hk_3), \\ y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_4\right). \end{aligned}$$

Schreiben Sie Ihre Antworten direkt hier:

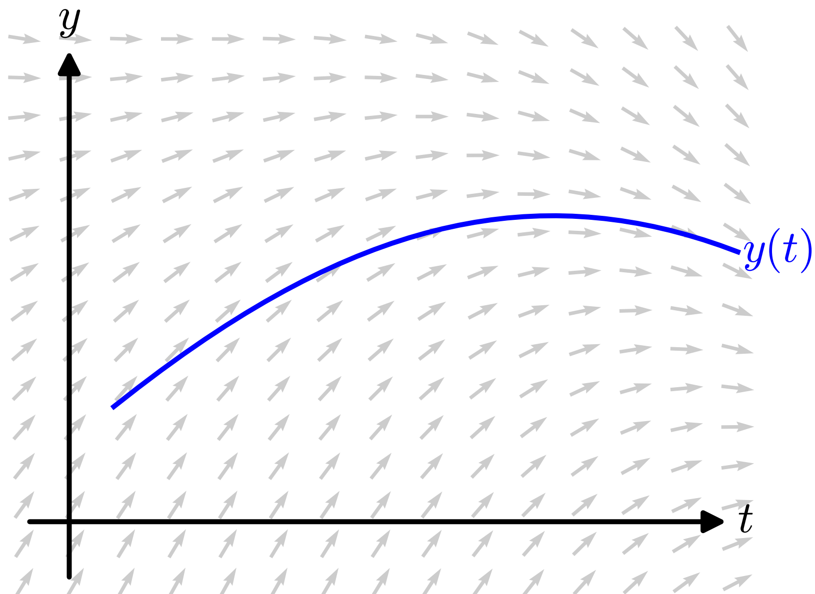
(i)

(ii)

(iii) Richtungsfeld:

Bitte wenden!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com



d) [**2 Punkt(e)**] *(Serie 8, Aufgabe 3)*
Ist das folgende Verfahren autonomisierungsinvariant?

$$
\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{3} & & \\
\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

e) [**3 Punkt(e)**] *(Serie 12, Aufgabe 1)*
Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens von Heun

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com
PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

3. *Konsistenzordnung* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten folgendes Butcher-Tableau eines zweistufigen Runge-Kutta Einschrittverfahrens (ESV), wobei a, b_1 und b_2 Parameter sind.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ a & a & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \qquad (1)$$

a) **[1 Punkt(e)]** Schreiben Sie das gegebene ESV (1) in Stufenform um.

b) **[6 Punkt(e)]** Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des ESVs (1) als Funktion der Parameter a, b_1 und b_2.

Hinweis: Ein zweistufiges explizites ESV hat höchstens Konsistenzordnung $p = 2$.

c) **[3 Punkt(e)]** Bestimmen Sie alle möglichen Parameter a, b_1 und b_2, damit das ESV Konsistenzordnung $p = 2$ hat.

Bitte wenden!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

4. *Stabilität und Steifigkeit* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) bestehend aus den gekoppelten Differentialgleichungen (DGL)

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\varepsilon y_1 + \frac{1}{\varepsilon} y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} y_2\end{aligned} \tag{2}$$

und den Anfangswerten (AW)

$$y_1(0) = \sqrt{2} \quad , \quad y_2(0) = \pi. \tag{3}$$

Hier ist $\varepsilon > 0$ ein positiver Parameter und das AWP soll im Zeitintervall $t \in [0, 1000]$ gelöst werden.

Zur numerischen Lösung des AWPs (2)-(3) soll folgendes Einschrittverfahren (ESV) verwendet werden

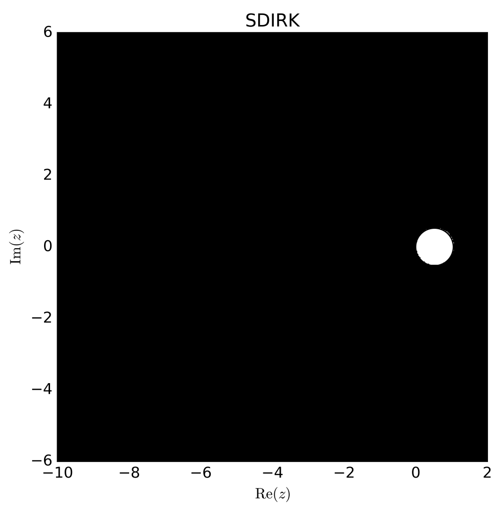
$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{4}$$

Hier ist γ ein Parameter der nicht relevant für die folgenden Teilfaufgaben ist.

a) **[3 Punkt(e)]** Ist das AWP (2)-(3) global steif für beliebig kleine Parameter $\varepsilon > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) **[5 Punkt(e)]** Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des ESV (4).

c) **[2 Punkt(e)]** Das Stabilitätsgebiet (schwarzes Gebiet) des ESVs (4) ist in der folgenden Abbildung skizziert:



Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Ist das ESV (4) geeignet um das AWP (2)-(3) mit $\varepsilon = 10^{-2}$ für $t \in [0, 1000]$ und mit einer Schrittweite von $h = \frac{1}{20}$ zu lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Falls Sie **a)** nicht gelöst haben: Ist das ESVs (4) geeignet um das folgende AWP

$$\dot{y} = -1000y(t),$$
$$y(0) = 1$$

für $t \in [0, 1]$ mit einer Schrittweite von $h = 10^{-3}$ zu lösen?

Bitte wenden!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

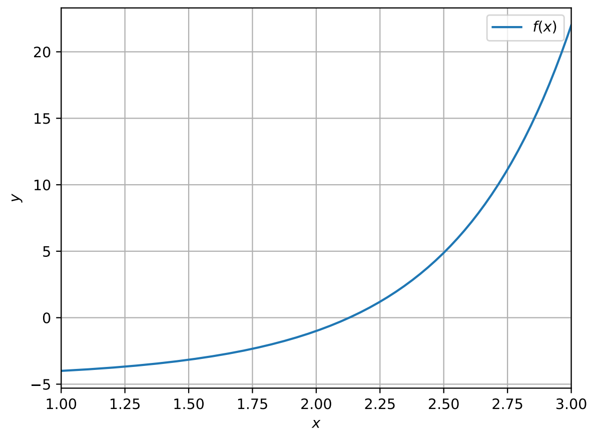
PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

5. *Nullstellensuche* **[5 Punkt(e)]**

Wir betrachten folgende skalare nicht-lineare Gleichung

$$f(x) = x^x - 5 = 0. \tag{5}$$

Aus dem folgenden Graphen schliessen wir, dass eine Lösung im Interval $[1, 3]$ existiert:



a) **[2 Punkt(e)]** Schlagen Sie eine zwecksmässige Methode vor um (5) näherungsweise zu lösen. Geben Sie alle nötigen Komponenten der von Ihnen gewählten Methode an.

b) **[3 Punkt(e)]** Implementieren Sie Ihre in **a)** vorgeschlagene Methode in MATLAB. Als Abbruchkriterium soll ein absolutes Kriterium $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \text{atol}$ verwendet werden. Die Iteration soll abgebrochen werden falls das Abbruchkriterium innert `Nmax = 100` noch nicht erreicht wurde.
Verwenden Sie folgendes Template für die Implementierung.

Siehe nächstes Blatt!

```
% Die Funktion deren Nullstelle wir suchen
f = @(x) x^x - 5;

% Abbruchkriterium Toleranz und maximale Anzahl Iterationen
atol = 1.e-6;
Nmax = 100;
```