PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

**Aufgabe 1: Multiple Choice** [*Für jede Multiple-Choice-Frage gibt es für die richtige Antwort **3 Punkte**, für die falsche Antwort **-1 Punkt** und für keine Antwort **keine Punkte**. Es ist erlaubt, mehr als eine Antwort auszuwählen, und die Gesamtpunktzahl wird als Summe der Punkte für jede ausgewählte Antwort berechnet.*]

1) Was ist eine Polarform von $\sqrt{3}-\imath$?

   a) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
   b) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
   c) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
   d) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2) Welche der folgenden Mengen ist nicht wegzusammenhängend?

   a) $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}z<0 \wedge |z|>5\}$.
   b) $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<5 \wedge |z-1|>1\}$.
   c) $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-3|<2 \vee |z+2|<1\}$.
   d) $\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z|<4\}$.

3) Gegeben sei die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$
mit $c_{3n}=n$, $c_{3n+1}=n^2$ und $c_{3n+2}=n^3$, $n\geq 0$. Dann ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe

   a) $R=0$.
   b) $R=1$.
   c) $R=\infty$.
   d) nicht bestimmbar.

4) Die Funktion
$$f(z):=\frac{1}{\cos(z)-1}$$
hat in $z_0=0$ ...

   a) eine hebbare Singularität.
   b) einen Pol erster Ordnung.
   c) einen Pol zweiter Ordnung.
   d) eine wesentlichen Singularität.

5) Sei
$$f(t):=\begin{cases}0, & \text{für } t\in(-\pi,0],\\ \sin t, & \text{für } t\in(0,\pi]\end{cases}$$
die $2\pi$-periodische Funktion. Finden Sie den Koeffizienten $a_4$ der Fourier-Reihe
$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)$$
der Funktion $f(t)$:

   a) $0$.
   b) $-\frac{1}{5\pi}$.
   c) $-\frac{1}{15\pi}$.
   d) $-\frac{2}{15\pi}$.

6) Die Fourier-Transformation der Funktion $h(t):=\frac{1}{t^2+k^2}$ ist $\widehat{h}(\xi)=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-k|\xi|}$. Ferner sei $g$ eine absolut integrierbare Funktion mit Fourier-Transformation $\widehat{g}$. Verwenden Sie den Faltungssatz, um die Fourier-Transformation der Funktion
$$f(t):=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)}{(t-s)^2+4}\mathrm{d}s$$
durch $\widehat{g}$ auszudrücken.

a) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4}\widehat{g}(\xi)\mathrm{e}^{-4|\xi|}$.

b) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2}\widehat{g}(\xi)\mathrm{e}^{-2|\xi|}$.

c) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi^2+4}$.

d) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi+2}$.

7) Finden Sie die Laplace-Transformation $\mathcal{L}[y(t)](s)$ der Lösung $y(t)$ der folgenden Differentialgleichung:

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) - 5y(t) = t, \qquad t > 0,$$
$$\dot{y}(0) = -1, \qquad y(0) = 0.$$

a) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1+s^2}{s(s-5)(s+1)}$.

b) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1+s^2}{s^2(s-5)(s+1)}$.

c) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1-s}{s(s-5)}$.

d) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1-s}{s^2(s-5)}$.

8) Finden Sie die Inverse der folgenden Laplace-Transfromation

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = 6 \cdot \left(\frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s+1)^4}\right).$$

a) $y(t) = 2t^5 \cosh(t)\, H(t)$.

b) $y(t) = 2t^3 \cosh(t)\, H(t)$.

c) $y(t) = 2t^5 \sinh(t)\, H(t)$.

d) $y(t) = 2t^3 \sinh(t)\, H(t)$.

**Aufgabe 2** [*10 Punkte*]

a) [*2 Punkte*] Sei $f(x+\imath y) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \imath(4x^3y - 4xy^3)$. Zeigen Sie, dass $f$ holomorph ist.

b) [*4 Punkte*] Berechnen Sie folgendes Wegintegral

$$I := \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

entlang der Kurve $\gamma_1$, welche in Abbildung 1 dargestellt ist.

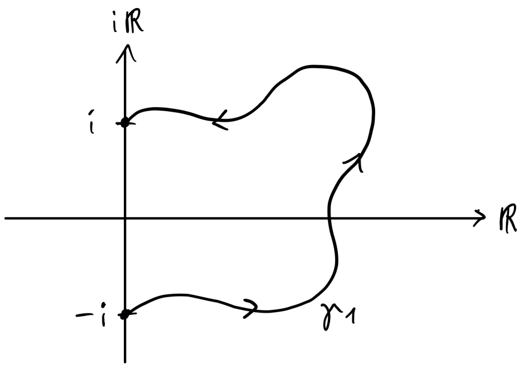


Figure 1: Die Kurve $\gamma_1$ startet im Punkt $-\imath$ und endet im Punkt $\imath$.

c) [*4 Punkte*] Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$

**Aufgabe 3** [*12 Punkte*]

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-4x+13)^2}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.