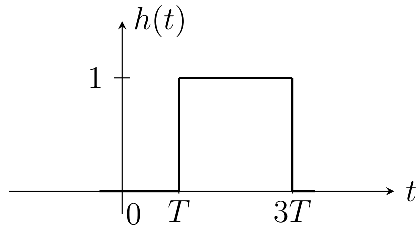
Aufgabe 1 (25 Punkte)

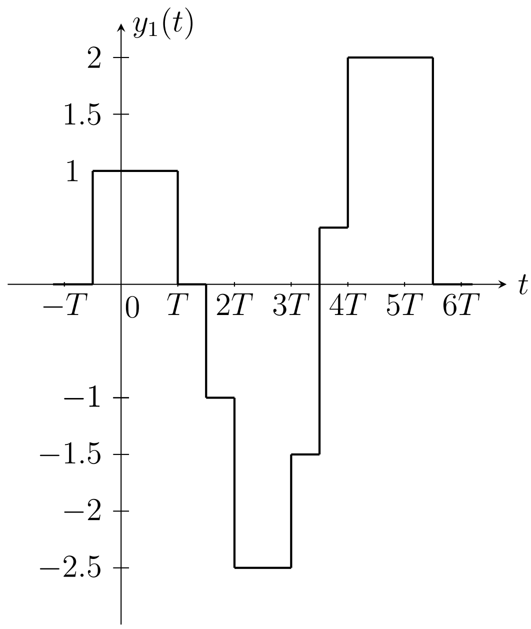
(a) (17 Punkte) Gegeben ist das LTI-System H mit der Impulsantwort

$$h(t) = \begin{cases} 1, & T \le t \le 3T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{mit} \quad T > 0.$$



★ i. (2 Punkte) Ist das System H kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ ii. (4 Punkte) Am Ausgang des Systems H wird das Signal $y_1(t)$ gemessen, wobei $y_1(t) = 0$ für $t < -T/2$ und $t > 11{\cdot}T/2$.



Bestimmen Sie das zu $y_1(t)$ gehörige Eingangssignal $x_1(t)$ in Abhängigkeit von T.

★ iii. (5 Punkte) Am Eingang des Systems H liegt das Signal $x_2(t)$ gemäss

$$x_2(t) = Ae^{\pi i(t-t_0)/T} + c, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{mit} \quad t_0, c \in \mathbb{R} \text{ und } A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Das zu $x_2(t)$ gehörige Ausgangssignal wird mit $y_2(t)$ bezeichnet. Bestimmen Sie die Wertebereiche von A, t_0, und c, sodass $y_2(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt.

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

★ iv. (6 Punkte) Am Eingang des Systems H liegt das Signal

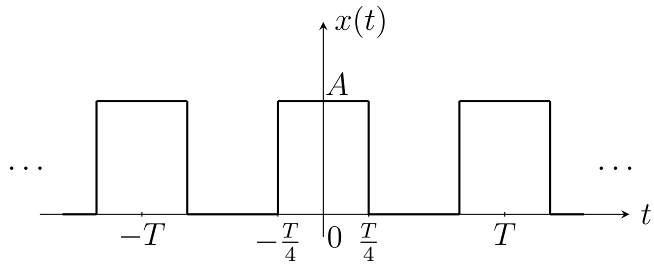
$$x_3(t) = \frac{1}{2T} r_T(t) - \delta(t+T) - \delta(t-T)$$

an, wobei

$$r_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}.$$

Bestimmen und skizzieren Sie das zugehörige Ausgangssignal $y_3(t)$ in Abhängigkeit von T. Bitte beschriften Sie die Achsen in Ihrer Skizze.

(b) (8 Punkte) Gegeben ist das periodische Signal $x(t)$:

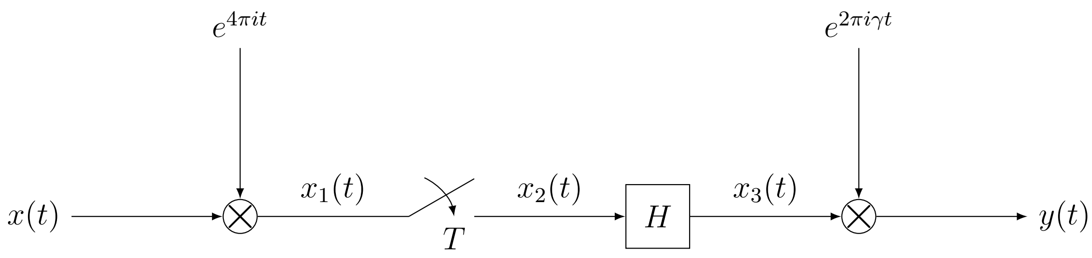


★ i. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t/T}$ in Abhängigkeit von A.

ii. (4 Punkte) Vereinfachen Sie den Ausdruck für c_k in Punkt i. dieser Teilaufgabe für ungerades k ($k = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$) und für gerades k ($k = 2m, m \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) so weit wie möglich.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Gegeben sei folgendes System, wobei $T, \alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.



$x_2(t)$ ist ein zeitkontinuierliches Signal gegeben durch

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(kT)\delta(t - kT)$$

und das Tiefpassfilter H ist ein LTI-System mit Frequenzgang

$$\widehat{h}(f) = \begin{cases} \beta, & \text{für} \quad |f| \leq \alpha \\ 0, & \text{für} \quad |f| > \alpha \end{cases}, \qquad \text{für } f \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten in der gesamten Aufgabe nur Eingangssignale $x(t)$ die auf $(-1, 1)$ bandbegrenzt sind, d.h.

$$\widehat{x}(f) = 0, \text{ für } |f| \geq 1. \tag{1}$$

★ (a) (2 Punkte) Geben Sie das kleinste f_0 an, sodass $\widehat{x}_1(f) = 0$, für $|f| \geq f_0$ gilt, für alle Eingangssignale $x(t)$ die (1) erfüllen.

★ (b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{x}_2(f)$ von $x_2(t)$ und stellen Sie diese als Funktion von $\widehat{x}(f)$ dar.

★ (c) (3 Punkte) Wir definieren die Funktion $v(t) := \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{v}(f)$ von $v(t)$.

(d) Sei nun $T = \frac{1}{8}$.

i. (4 Punkte) Skizzieren Sie $\widehat{x}_2(f)$ im Bereich $f \in [-7, 7]$ für das spezielle Eingangssignal $x(t) = v(t)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in der Skizze.

ii. (4 Punkte) Gibt es Werte $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass $y(t) = x(t)$ gilt für alle Eingangssignale $x(t)$ die (1) erfüllen? Falls ja, geben Sie alle diese Werte an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Sei nun $T = \frac{1}{2}$.

i. (4 Punkte) Skizzieren Sie $\widehat{x}_2(f)$ im Bereich $f \in [-7, 7]$ für das spezielle Eingangssignal $x(t) = v(t)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in der Skizze.

ii. (4 Punkte) Gibt es Werte $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass $y(t) = x(t)$ gilt für alle Eingangssignale $x(t)$ die (1) erfüllen? Falls ja, geben Sie alle diese Werte an. Begründen Sie Ihre Antwort.

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Aufgabe 3 (25 Punkte)

★ (a) (2 Punkte) Berechnen Sie die inverse $\mathcal{Z}$-Transformierte von $\exp\left(az^{-1}\right)$, mit ROC gegeben durch $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Hinweis: Die Taylorreihenentwicklung von e^z ($z \in \mathbb{C}$) lautet $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

★ (b) (23 Punkte) Sei $a > 0$ und $H(z) = \frac{z-a}{z^4 - a^4} = \frac{1}{(z-ia)(z+a)(z+ia)}$.

★ i. (3 Punkte) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellendiagramm von $H(z)$.

★ ii. (2 Punkte) Für welche Werte von $a > 0$ ist $H(z)$ ein IIR-Filter? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ iii. (3 Punkte) Für welche Werte von $a > 0$ ist $H(z)$ zugleich kausal und stabil? Geben Sie die entsprechende ROC an und begründen Sie Ihre Antwort.

★ iv. (4 Punkte) Geben Sie die zum System mit Übertragungsfunktion $H(z)$ gehörige Differenzengleichung an.

v. (3 Punkte) Zeichnen Sie das zu $H(z)$ entsprechende Schaltbild unter Verwendung von Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.

★ vi. (8 Punkte) Berechnen Sie das antikausale Ausgangssignal $y[n]$ (d.h. $y[n] = 0$, für $n > 0$) des Systems mit Transferfunktion $H(z)$ für das Eingangssignal $x[n] = ia\delta[n] + \delta[n+1]$.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst $Y(z)$ und transformieren Sie dann in den Zeitbereich um $y[n]$ zu erhalten.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

★(a) (11 Punkte) Sei N eine gerade natürliche Zahl und $x = (x[0], \ldots, x[N-1])^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^N$ ein N-periodisches Signal. Für ein beliebiges $\zeta \in \mathbb{C}$ betrachten wir das Signal $y = (y[0], \ldots, y[N-1])^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^N$, wobei

$$y[n] := \begin{cases} \zeta x[n], & \text{falls } n \in \{0, N/2\}, \\ x[n], & \text{falls } n \notin \{0, N/2\}, \end{cases} \quad n \in \{0, \ldots, N-1\}. \tag{2}$$

★ i. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die N-Punkt DFT des Signals y folgende Beziehung erfüllt:

$$\hat{y}[k] = \hat{x}[k] + (\zeta - 1)\left(x[0] + (-1)^k x[N/2]\right), \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}, \tag{3}$$

wobei $\hat{x} = (\hat{x}[0], \ldots, \hat{x}[N-1])^\mathsf{T}$ die N-Punkt DFT von x bezeichnet.

★ ii. (3 Punkte) Verwenden Sie (3), um $\|\hat{x} - \hat{y}\|_2$ zu berechnen. Hier bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm.

★ iii. (2 Punkte) Berechnen Sie $\|x - y\|_2$ anhand von (2).

★(b) (7 Punkte) Seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N := N_1 N_2$ und $x = (x[0], \ldots, x[N-1])^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^N$ ein N-periodisches Signal, dessen N-Punkt DFT mit $\hat{x} \in \mathbb{C}^N$ bezeichnet wird. Für ein festes $m \in \{0, \ldots, N_1 - 1\}$ definieren wir das Signal $u_m = (u_m[0], \ldots, u_m[N_2 - 1])^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^{N_2}$ gemäss

$$u_m[n] := x[nN_1 + m], \quad n \in \{0, \ldots, N_2 - 1\}.$$

Wir bezeichnen mit $\hat{u}_m$ die N_2-Punkt DFT von u_m. Des Weiteren definieren wir für ein festes $j \in \{0, \ldots, N_2 - 1\}$ das Signal $v_j = (v_j[0], \ldots, v_j[N_1 - 1])^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^{N_1}$ wie folgt:

$$v_j[n] := \hat{u}_n[j] e^{-i2\pi nj/N}, \quad n \in \{0, \ldots, N_1 - 1\},$$

dessen N_1-Punkt DFT wir mit $\hat{v}_j$ bezeichnen. Zeigen Sie, dass

$$\hat{x}[k_1 N_2 + k_2] = \hat{v}_{k_2}[k_1], \tag{4}$$

wobei $k_1 \in \{0, \ldots, N_1 - 1\}$ und $k_2 \in \{0, \ldots, N_2 - 1\}$.

★(c) (7 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : x \mapsto T(x \bmod 2\pi)$, $x \in \mathbb{R}$, wobei

$$T(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{\pi}, & \text{für } 0 \le x < \pi, \\ 2 - \dfrac{x}{\pi}, & \text{für } \pi \le x < 2\pi, \end{cases}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Hierbei bezeichnet $x \bmod 2\pi$, für $x \in \mathbb{R}$, die eindeutige Zahl $r \in [0, 2\pi)$, sodass $x = r + 2\pi m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie ein trigonometrisches Polynom der Form

$$p(x) := \sum_{n=0}^{3} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, sodass $p(x_k) = f(x_k)$ für alle $x_k = \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$.