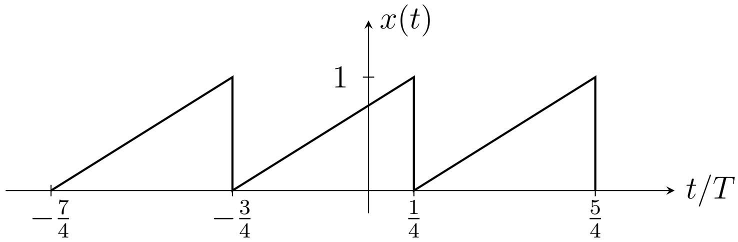
Aufgabe 1 (25 Punkte)

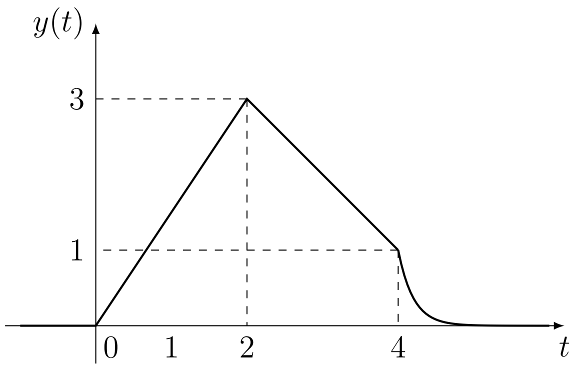
★ (a) (7 Punkte) Gegeben sei das T-periodische Signal $x(t)$.



★ i. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $x(t)$ im Intervall $-3T \leq t \leq -2T$ in Abhängigkeit von T.

★ ii. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe von $x(t)$.

★ (b) (6 Punkte) Gegeben sei das Signal $y(t)$



$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{3}{2}t, & 0 < t \leq 2 \\ -t+5, & 2 < t \leq 4 \\ e^{-5(t-4)}, & t > 4 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die zugehörige Fouriertransformierte $\widehat{y}(f)$.

Click to BUY NOW! PDF-XChange Editor www.pdf-xchange.com

★ (c) (12 Punkte) Gegeben sei das Tiefpassfilter H mit dem Frequenzgang

$$\widehat{h}(f) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi f}{8 f_0}\right), & |f| \leq 4 f_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Am Eingang des Systems H liegt das Signal $x_1(t)$ mit der Fourierreihe

$$x_1(t) = \sum_{-\infty<k<\infty,\ k\neq 0} \frac{4\sin^2(k\pi/2)}{k^2\pi^2} e^{2\pi i k f_0 t}.$$

★ i. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe des zum Eingangssignal $x_1(t)$ gehörigen Ausgangssignals $y_1(t)$.

★ ii. (7 Punkte) Am Eingang des Systems H liegt nun das Signal $x_2(t)$, mit der Fouriertransformierten $\widehat{x}_2(f) = \max(0, |f| - 4f_0)$. Skizzieren Sie $\widehat{x}_2(f)$. Beschriften Sie die Achsen in Ihrer Skizze. Bestimmen Sie das zum Eingangssignal $x_2(t)$ gehörige Ausgangssignal $y_2(t)$.

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \frac{\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}{\pi t} + i\,\frac{\sin^2(2\pi t)}{\pi t}. \tag{1}$$

★ (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$ gegeben ist durch

$$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & \text{für } f \in [0,2] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

★ (b) (8 Punkte) Es sei für jedes $\lambda \in (0,\infty)$ das zeitkontinuierliche Signal $z_\lambda(t)$ gegeben durch

$$z_\lambda(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \lambda k).$$

Des Weiteren sei $g_\lambda(t) = x(t) z_\lambda(t)$ für alle $\lambda \in (0,\infty)$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{g}_\lambda(f)$ des zeitkontinuierlichen Signals $g_\lambda(t)$ für allgemeines $\lambda \in (0,\infty)$. Erläutern Sie sorgfältig die einzelnen Schritte der Ableitung. Betrachten Sie nun den Spezialfall $\lambda = 2/3$. Berechnen Sie explizit die Werte von $\hat{g}_{2/3}(f)$, für alle $f \in [0,3)$, und zeichnen Sie den Graphen von $\hat{g}_{2/3}(f)$ für den Wertebereich $f \in [0,3)$. Achten Sie auf die korrekte Beschriftung der Achsen!

Hinweis: Sie dürfen das Resultat (2) *zur Lösung dieser Teilaufgabe verwenden.*

★ (c) (3 Punkte) Was besagt das Abtasttheorem?

Sie dürfen für die restlichen Teilaufgaben das Resultat

$$\hat{g}_{2/3}(f) = \frac{3}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{3k}{2}\right)$$

aus Teilaufgabe (b) für $\lambda = 2/3$ mit $\hat{x}(f)$ wie in (2) verwenden.

★ (d) (3 Punkte) Erklären Sie anschaulich anhand des Graphen des Signals $\hat{g}_{2/3}(f)$, ob eine Rekonstruktion des Signals $x(t)$ aus den Abtastwerten $x(2k/3)$, $k \in \mathbb{Z}$, möglich ist.

★ (e) (7 Punkte) Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe von $\hat{g}_{2/3}(f)$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) (18 Punkte) Sei

$$H(z) = \frac{z^2+1}{\left(z - \frac{3}{4}i + \frac{3}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \tag{3}$$

die Übertragungsfunktion des zeitdiskreten, kausalen LTI-Systems H.

★ i. (5 Punkte) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellendiagramm von $H(z)$ und tragen Sie das Konvergenzgebiet ein. Achten Sie auf die Achsenbeschriftung.

ii. (2 Punkte) Ist das System BIBO stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ iii. (5 Punkte) Betrachten Sie das Eingangssignal

$$x[n] = i^n \sigma[n] - \left(\frac{3}{4} i - \frac{3}{4}\right) i^{n-1} \sigma[n-1]$$

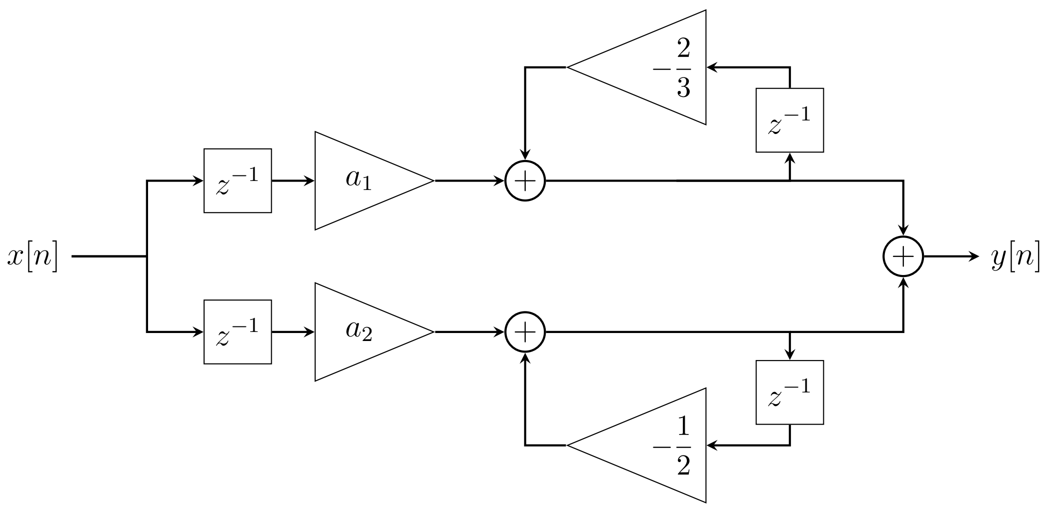
und bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y[n] = (Hx)[n]$.

★ iv. (6 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Impulsantwort des zeitdiskreten LTI-Systems G sei gegeben durch $g[n] = a^n h[n]$, wobei $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ die Impulsantwort des zeitdiskreten, kausalen LTI-Systems H mit Übertragungsfunktion gemäss (3) ist. Für welche Werte von a ist das System G BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (b) (7 Punkte) Wir betrachten nun ein weiteres zeitdiskretes, kausales LTI-System mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z+1}{\left(z + \frac{2}{3}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)}.$$

Zeigen Sie, dass dieses System durch folgendes Blockschaltbild dargestellt werden kann und bestimmen Sie die zugehörigen Werte von $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.



Aufgabe 4 (25 Punkte)

★(a) (11 Punkte) Für $N \in \mathbb{N}$ sei die N-Punkt DFT

$$\hat{s}[k] = \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - \frac{1}{2}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\},$$

gegeben.

★ i. (6 Punkte) Skizzieren Sie $\hat{s}[k]$ für $N = 4$ und berechnen Sie die inverse N-Punkt DFT $s[n]$ für allgemeines $N \in \mathbb{N}$.

ii. (5 Punkte) Wir betrachten nun die N-Punkt DFT $\hat{h}_a[k] = ae^{-2\pi ik/N}$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$, des Signals $h_a[n]$, wobei $a \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{s}[\ell]\hat{h}_a[k-\ell] = e^{-2\pi ik/N}, \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, N-1\}. \tag{4}$$

★(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie ein 4-periodisches *reellwertiges* Signal $x[n]$, welches die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $x[3] = 0$,
- $\mathfrak{Re}\{\hat{x}[k]\} = \delta[k] + 2\delta[k-1] + 2\delta[k-3]$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$,

wobei $\mathfrak{Re}\{\hat{x}[k]\}$ den Realteil der 4-Punkt DFT $\hat{x}[k]$ von $x[n]$ bezeichnet und

$$\delta[\ell] := \begin{cases} 1, & \text{für } \ell = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

★(c) (4 Punkte) Für $N \in \mathbb{N}$ sei $x[n]$ ein N-periodisches Signal mit N-Punkt DFT $\hat{x}[k]$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{\hat{x}}[\ell] = Nx[-\ell], \quad \ell \in \{0, \dots, N-1\}.$$

★(d) (5 Punkte) Sei $u[n]$ ein N-periodisches Signal mit N-Punkt DFT $\hat{u}[k]$, wobei $N \in \mathbb{N}$. Wir definieren das N-periodische Signal $v[n]$ gemäss $v[n] = u[-n]$, für $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{circ}(v) = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N \operatorname{diag}(\hat{u})\, \mathbf{F}_N^H,$$

wobei

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

$$\mathbf{F}_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N},$$

mit $\omega_N := e^{-2\pi i/N}$,

$$\operatorname{circ}(v) := \begin{pmatrix} v[0] & v[N-1] & \cdots & v[1] \\ v[1] & v[0] & \cdots & v[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v[N-1] & v[N-2] & \cdots & v[0] \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N},$$

und

$$\operatorname{diag}(\hat{u}) := \begin{pmatrix} \hat{u}[0] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{u}[1] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{u}[N-1] \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N}.$$