

Aufgabe 1

Für jede Frage ist **nur eine Option** richtig. Es gibt **keine** negativen Punkte.

1.MC1 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Was ist die konkrete Bedeutung der folgenden Aussage?

$$\forall T \geq 1, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, a_n < -T.$$

- (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.
- (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existiert nicht.
- (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$.
- (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$.

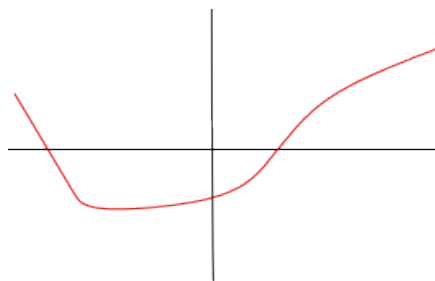
1.MC2 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche mathematische Aussage bedeutet, dass (a_n) das Cauchy-Kriterium erfüllt?

- (A) $\exists \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.
- (B) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \exists m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.
- (C) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.
- (D) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| > \varepsilon$.

1.MC3 [1 Punkt] Welche Formel ist richtig für alle Funktionen f, g differenzierbar von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ?

- (A) $(f \circ g)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.
- (B) $(f \circ g)'(x) = f(x)g'(f(x))$.
- (C) $(f \circ g)'(x) = g'(f(x))$.
- (D) $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit folgendem Graph.



Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (A) f ist konvex.
- (B) f' hat drei Nullstellen.
- (C) f hat zwei Nullstellen.
- (D) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [-1, 1]$.

1.MC5 [1 Punkt] Sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen, die das Cauchy-Kriterium erfüllt. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- (A) Die Reihe $\sum_{n \geq 1} a_n$ ist konvergent.
- (B) Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.
- (C) Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.
- (D) Die Folge (a_n) hat eine konvergente Teilfolge.

1.MC6 [1 Punkt] Sei $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (A) Es gibt ein lokales Maximum von f .
- (B) Es gilt $f(1/n) \rightarrow f(0)$, wenn $n \rightarrow +\infty$.
- (C) Es gibt eine Folge (a_n) mit $-1 < a_n < 1$, sodass $a_n \rightarrow 1$ wenn $n \rightarrow +\infty$, aber die Folge $f(a_n)$ konvergiert nicht.
- (D) f ist beschränkt.

1.MC7 [1 Punkt] Sei $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \pi.$$

- (A) $f(1/n) \rightarrow \pi$, wenn $n \rightarrow +\infty$.
- (B) $f(x/2) \rightarrow \pi/2$, wenn $x \rightarrow 0$.
- (C) $e^x f(x) \rightarrow \pi$, wenn $x \rightarrow 0$.
- (D) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]-1, 1[, |x| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \pi| < \delta$.

1.MC8 [1 Punkt] Seien f und g stetige Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Angenommen, dass $f(x) \rightarrow +\infty$ und $g(x) \rightarrow -\infty$ wenn $x \rightarrow 0$. Welche der folgenden Tatsachen ist *nicht* möglich?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = -1$.
- (B) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = +\infty$.
- (C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 0$.
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = -\infty$.

1.MC9 [1 Punkt] Sei $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbar Funktion, sodass

$$f(-1/2) = f(0) = f(1/2) = 0.$$

Welche der folgenden Tatsachen ist richtig?

- (A) f' hat genau drei Nullstellen.
- (B) f' hat mindestens zwei Nullstellen.
- (C) f' hat höchstens zwei Nullstellen.
- (D) f' hat mindestens drei Nullstellen.

Aufgabe 2

Bitte tragen Sie Ihre Antwort in das Antwortheft ein. **Es wird nur das Endergebnis bewertet.**

2.A1 [1 Punkt] Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent sind oder nicht (die Summe, wenn konvergent, ist nicht erforderlich)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n^2}}{n! + 1}$$
$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n + 12}$$

2.A2 [1 Punkt] Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(\sqrt{9n - 1} - 3\sqrt{n}).$$

2.A3 [1 Punkt] Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^4 + 2}$$
$$f(x) = \sin(\exp(x))$$

2.A4 [1 Punkt] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, oder geben Sie an, dass der Grenzwert nicht existiert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(\cos(x^2 - 1))}{x - e^x}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{x^2}}{\sin(x^2 - x)} \right)^6$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos(x).$$

2.A5 [1 Punkt] Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n.$$

2.A6 [1 Punkt] Finden Sie das Maximum und das Minimum der folgenden Funktion im Intervall $[-1, 2]$

$$f(x) = e^x / (x^2 + 1)$$

2.A7 [1 Punkt] Berechnen Sie die Taylor-Approximation der dritten Ordnung der Funktion

$$f(x) = \cos(\pi\sqrt{x}), \quad \text{bei } x = 1.$$

2.A8 [1 Punkt] Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 1},$$

definiert ist.

2.A9 [1 Punkt] Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x \log(x^2 + 1) dx.$$

Aufgabe 3

Bitte tragen Sie Ihre Antwort in das Antwortheft ein. Jede Behauptung in Ihrer Antwort muss begründet werden.

3.A1 [4 Punkte] Die reelle Folge (a_n) sei rekursiv gegeben durch

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n + 2} \text{ wenn } n \geq 1. \end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass (a_n) immer wohldefiniert ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 2$ für jedes $n \geq 1$.
- (c) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist.
- (d) Folgern Sie, dass (a_n) konvergent ist, und berechnen Sie den Grenzwert.

3.A2 [7 Punkte] Sei $f:]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) = x\sqrt{1-x},$$

- (a) Erklären Sie, warum f stetig ist.
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

- (c) Erklären Sie, warum f glatt in $] -\infty, 1[$ ist, und berechnen Sie $f'(x)$ für $x < 1$.
- (d) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x).$$

- (e) Berechnen Sie die Werte von $x < 1$, bei denen $f'(x) = 0$ ist.
- (f) Zeigen Sie, dass

$$f(x) \leq \frac{2}{3^{3/2}}$$

für jedes $x \leq 1$, mit Gleichheit, genau dann wenn $x = 2/3$.

- (g) Bestimmen Sie $f''(x)$ für $x < 1$, und zeigen Sie, dass $f''(x) < 0$ für jedes $x < 1$ ist.

3.A3 [2 Punkte] Sei $f(x) = \cos(x)^4 - \sin(x)^3$ definiert für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Drücken Sie $f(x)$ als Funktion von $\cos(ax)$, $\sin(bx)$, für geeignete Werte von a und b aus.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi f(x) dx.$$

3.A4 [2 Punkte]

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen a , b , c , sodass

$$\frac{2x-1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^5 \frac{2x-1}{x(x^2-1)} dx.$$

3.A5 [3 Punkte] Sei $f(x) = e^{x^2}$ definiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(a) Erklären Sie, warum f glatt ist.

(b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(c) Beweisen Sie durch Induktion über n , dass es für alle $n \geq 0$ ein Polynom H_n gibt, so dass

$$f^{(n)}(x) = H_n(x)f(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$.

3.A6 [5 Punkte] Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit der Eigenschaft, dass $f''(x) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sei g die Funktion, definiert durch $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $g'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Folgern Sie, dass es $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) - f'(x) = ce^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sei h die Funktion, definiert durch $h(x) = e^{-x}f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$h'(x) = -ce^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

(d) Schliessen Sie, dass es reelle Zahlen c_1 und c_2 gibt, sodass

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

(e) Berechnen Sie f'' unter Verwendung dieses letzten Ausdrucks und leiten Sie daraus ab, dass $c_2 = 0$, und somit, dass $f(x) = c_1 e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.