

# Prüfung Netzwerke und Schaltungen I

07.08.2019

Name, Vorname: , Mustermann, Max

Matrikelnummer: 18-000-000

Prüfungscode: 1995463

Berücksichtigen Sie folgende Informationen:

- Bitte legen Sie während der Prüfung Ihre ETH-Karte (Legi) gut sichtbar auf den Tisch, damit wir Ihre Anwesenheit prüfen können.
- Die Prüfung ist einseitig bedruckt, kontrollieren Sie die Vollständigkeit (26 Seiten) und die Einheitlichkeit von MC Version und Prüfungscode in der Fusszeile auf allen Blättern.
- Schreiben Sie Ihre Antworten direkt unterhalb der Aufgabenstellung, sollten Sie zu wenig Platz haben darf auch die Rückseite des jeweiligen Blattes verwendet werden. Kennzeichnen Sie dies in der jeweiligen Teilaufgabe.
- Bitte benutzen Sie keinen Bleistift – sondern blaue oder schwarze Kugelschreiber/Tinte (dokumentenecht). Auf gar keinen Fall Rot oder Grün.
- Schreiben Sie bitte leserlich. Wir können nur Punkte geben für eindeutig lesbare.
- Die Herleitung muss klar erkennbar sein. Ein numerisches Endergebnis ohne Herleitung wird nicht gewertet. Korrekte Herleitungen werden auch dann positiv berücksichtigt, wenn das numerische Endergebnis falsch sein sollte. Definieren Sie alle verwendeten Variablen und vereinfachen Sie die Resultate soweit wie möglich.
- Sie sind verantwortlich, dass alle Blätter abgegeben sind. Legen Sie diese dazu am Ende der Prüfung in den Umschlag zurück und kleben Sie diesen zu. Spätere Nachrechnungen werden nicht berücksichtigt. Die Aufgabenstellung inklusive Ihrer Antworten muss am Ende der Prüfung komplett abgegeben werden.
- erlaubte Hilfsmittel: Textbuch Albach *Elektrotechnik*, Taschenrechner ohne Kommunikationsfähigkeit und ohne Möglichkeit Dateien abzuspeichern, Wörterbücher, Formelsammlung (max. 2 Seiten A4 = 1 Blatt). ALLES ohne Notizen zu Übungen oder alten Klausuren.
- Teilaufgaben welche mit x)✓ markiert sind können unabhängig voneinander gelöst werden.

## Bemerkung

Die folgende Musterlösung wurde von David & Lukas Pahl erstellt. Zusätzlich zum Lösungsweg enthält sie ausführliche Erklärungen und Hinweise.

Kontakt: pahl0d@ethz.ch      pahl1@ethz.ch

## Materialübersicht

Theorie Skript

Begleitaufgaben

Prüfungslösungen

Methoden für  
Prüfungsaufgaben

# Prüfung Netzwerke und Schaltungen I

**07.08.2019**

Prüfungscode: 1995463

		1. Korr.	Vis.	2. Korr.	Vis.
Aufgabe 1	(20)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Aufgabe 2	(20)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Aufgabe 3	(10)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Aufgabe 4	(15)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Aufgabe 5	(15)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Aufgabe 6	(10)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Endsumme	(90)			<input type="text"/>	<input type="text"/>

Klausurnote :  Bonus :  Endnote :

**Aufgabe 1: Antwortblatt Verständnisfragen**

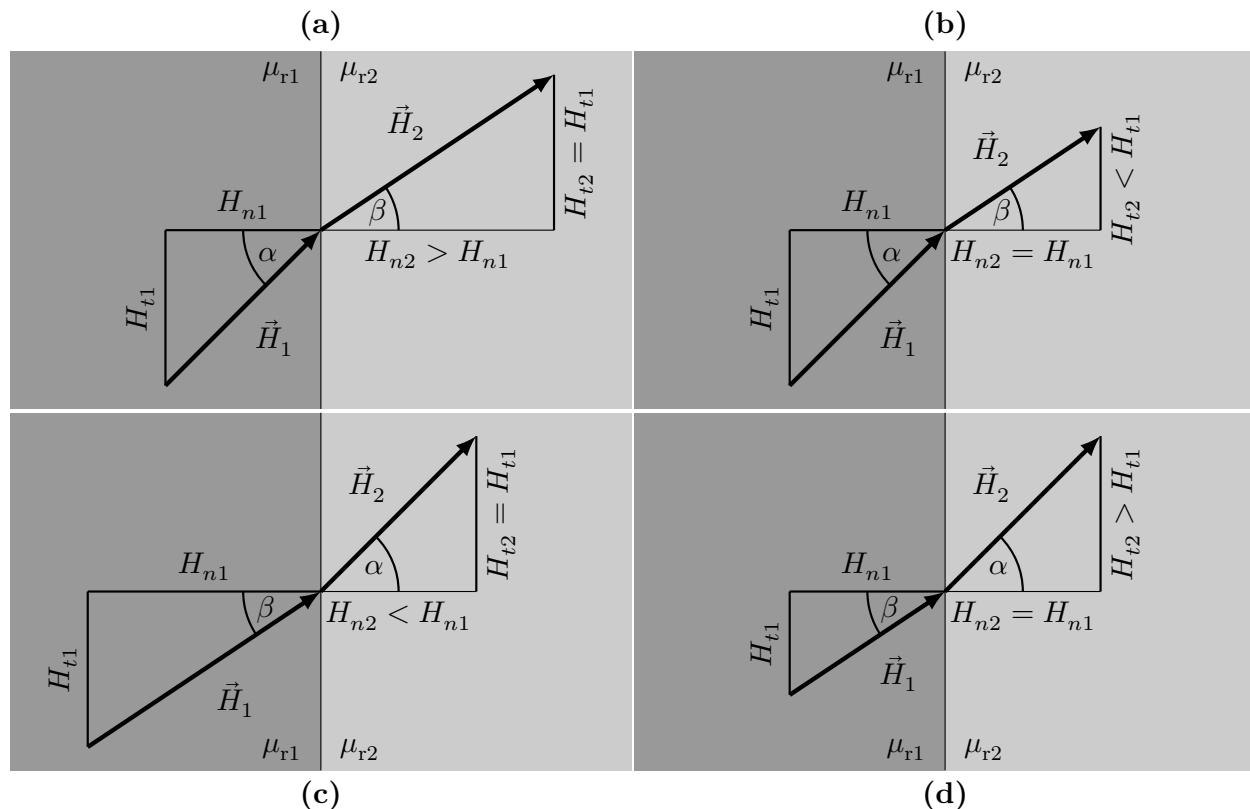
Für jede Frage ist genau **eine** Antwort richtig. Markieren Sie diese **eindeutig**.

1.  A  B  C  D
2.  A  B  C  D
3.  A  B  C  D
4.  A  B  C  D
5.  A  B  C  D
6.  A  B  C  D
7.  A  B  C  D
8.  A  B  C  D
9.  A  B  C  D
10.  A  B  C  D
11.  A  B  C  D
12.  A  B  C  D
13.  A  B  C  D
14.  A  B  C  D
15.  A  B  C  D
16.  A  B  C  D
17.  A  B  C  D

## Verständnisfragen

Für jede Teilfrage ist genau **eine** Antwort richtig. Markieren Sie diese **eindeutig** auf dem Antwortblatt. Bei Single-Choice Fragen (SC) ist genau eine Antwort richtig, ist mehr als eine oder keine Antwort markiert gibt es Null Punkte. Bei kPrime Fragen (kP) ist in jedem Fall richtig oder falsch zu markieren. Die volle Punktzahl gibt es dabei bei 4 korrekten Aussagen, bei 3 korrekten Aussagen gibt es die halbe Punktzahl und bei 2 oder weniger Null Punkte.

(2 P.) *kP* – Gegeben seien zwei Materialien mit unterschiedlichen relativen Permeabilitäten  $\mu_{r1}$  und  $\mu_{r2}$ . Auf der Grenzfäche seien keine Ströme vorhanden und es gelte  $\mu_{r1} > \mu_{r2}$ .



Bewerten Sie die folgenden Aussagen:

1. Der Feldverlauf in (a) ist korrekt gezeichnet.

A) Richtig

(B) Falsch

2. Der Feldverlauf in (b) ist korrekt gezeichnet.

(A) Richtig

B) Falsch

3. Der Feldverlauf in (c) ist korrekt gezeichnet.

(A) Richtig

B) Falsch

4. Der Feldverlauf in (d) ist korrekt gezeichnet.

(A) Richtig

B) Falsch

Bei Grenzflächen gilt:

$$H_{t1} = H_{t2}$$

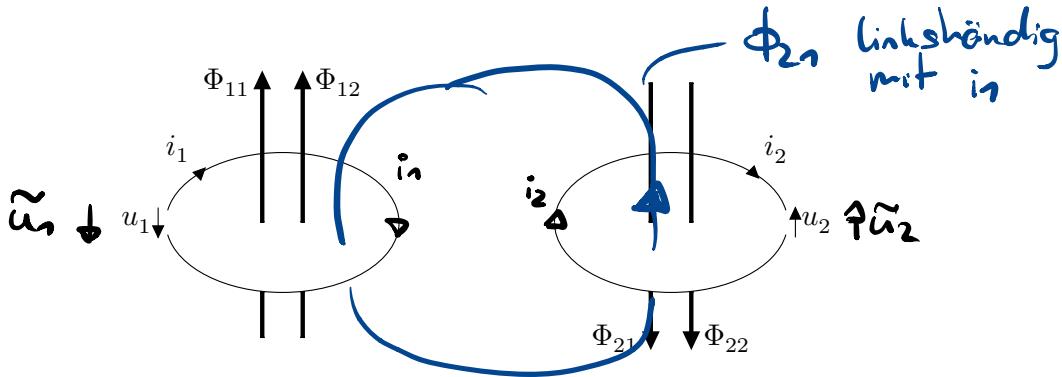
$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

$$\rightarrow H_{n1} = \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1}}_{< 1 \text{ da } \mu_1 > \mu_2} H_{n2}$$

$$\rightarrow H_{n1} < H_{n2}$$

(3 P.) SC – Gegeben seien zwei gekoppelte Stromschleifen in einer Ebene und ihre Flüsse gemäss der folgenden Abbildung. Die Stromschleifen seien dabei als widerstandslos anzunehmen.



5. Welches Gleichungssystem beschreibt die gegebene Anordnung?

- (A)  $u_1 = -L_{11} \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}$ ,  $u_2 = +L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$   
 (B)  $u_1 = -L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$ ,  $u_2 = -L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$   
 (C)  $u_1 = +L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$ ,  $u_2 = -L_{21} \frac{di_1}{dt} - L_{22} \frac{di_2}{dt}$   
 (D)  $u_1 = +L_{11} \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}$ ,  $u_2 = +L_{21} \frac{di_1}{dt} - L_{22} \frac{di_2}{dt}$

- Um die korrekte Gleichung zu finden, muss man die Vorzeichen der einzelnen Terme  $\pm L_{jk} \frac{di_k}{dt}$  bestimmen.
- Dazu muss man nur bestimmen ob  $\Phi_{jk}$  rechtshändig oder linkshändig mit dem Strom  $i_k$  verknüpft ist.

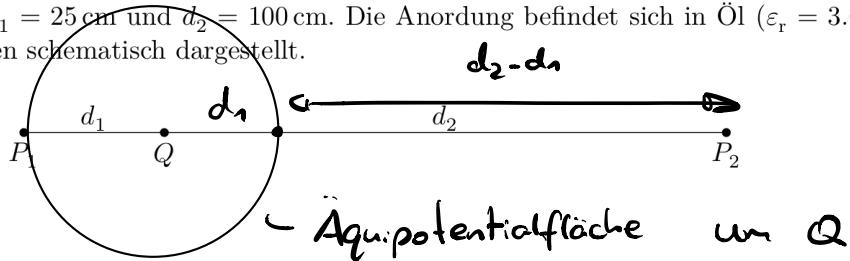
Index jk	Term	Verknüpfung	+/-	Gleichung
11	$L_{11} \frac{di_1}{dt}$	linkshändig	-	$-L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = \tilde{u}_1$
12	$L_{12} \frac{di_2}{dt}$	rechtshändig	+	
21	$L_{21} \frac{di_1}{dt}$	linkshändig	-	$-L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} = \tilde{u}_2$
22	$L_{22} \frac{di_2}{dt}$	rechtshändig	+	

- Wichtig ist schliesslich, dass die Spannungen entgegengesetzt zum Strom der jeweiligen Schleife abfallen
- Die korrekt abfallende Spannung wird hier als  $\tilde{u}_j$  definiert. Jetzt muss man nur das Vorzeichen von  $u_j$  überprüfen:

$$u_1 = \tilde{u}_1 = -L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = \tilde{u}_2 = -L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \quad \rightarrow (B)$$

(3 P.) *SC* – Gegeben sei eine Punktladung  $Q = 10^{-8}$  As, sowie zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  im Abstand von  $d_1 = 25$  cm und  $d_2 = 100$  cm. Die Anordnung befindet sich in Öl ( $\epsilon_r = 3.6$ ) und ist im Folgenden schematisch dargestellt.



6. Welche Potentialdifferenz besteht zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ ?

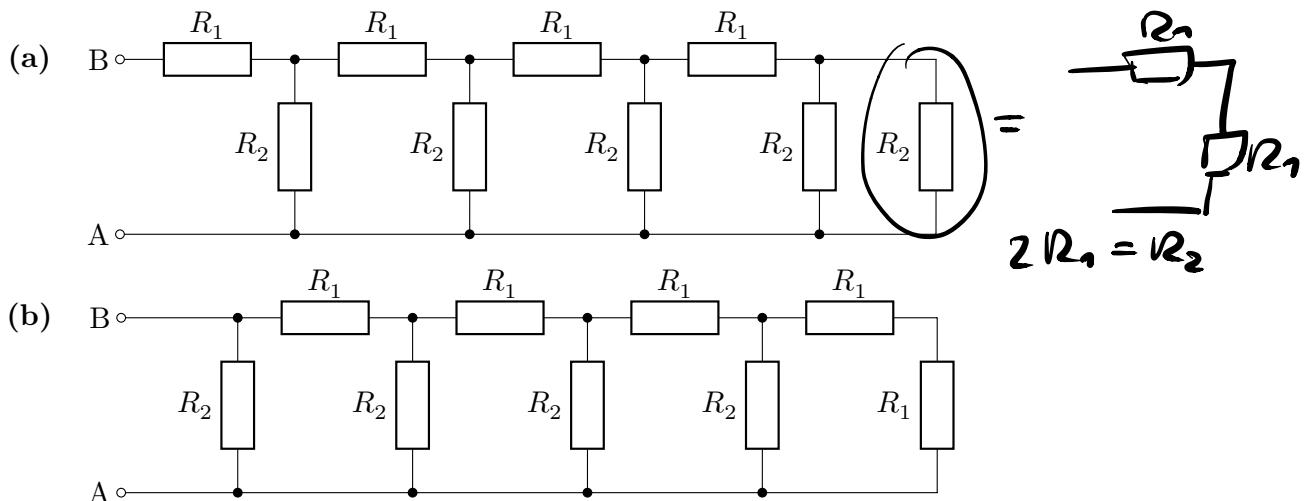
- (A)  $\Delta\varphi \approx 270$  V      (B)  $\Delta\varphi \approx 75$  V      (C)  $\Delta\varphi \approx 125$  V      (D)  $\Delta\varphi \approx 35$  V

$$\Delta\varphi = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} Q \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} Q \left[ \frac{1}{r} \right]_{d_1}^{d_2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} Q \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \approx 75V$$

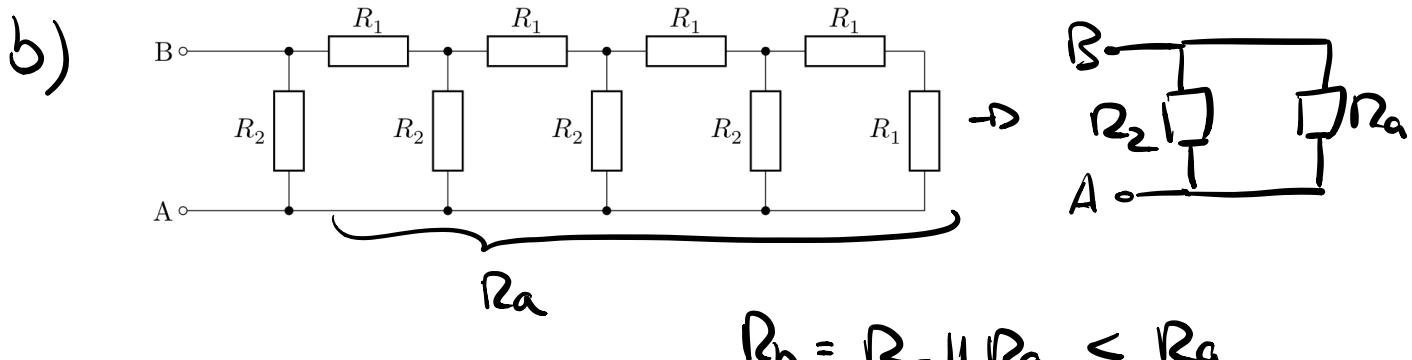
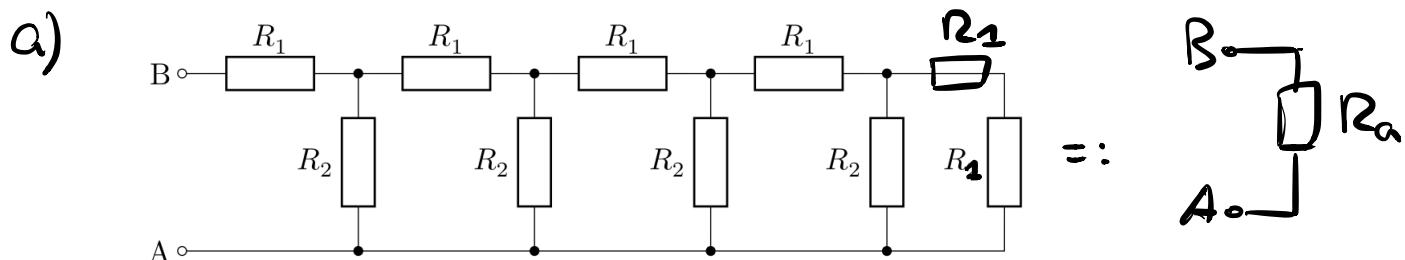
Die Potentialdifferenz der Punkte hängt nur vom Abstand von der Punktladung ab, die Punkte können beliebig auf ihren Äquipotentialflächen verschoben werden.

(3 P.) *SC* – Gegeben seien die folgenden zwei Widerstandsnetzwerke. Betrachtet wird hierbei der Gesamtwiderstand  $R_{AB}$  zwischen den Klemmen A und B, es gilt dabei  $R_2 = 2R_1$  wobei die Widerstände grösser als Null seien.



7. Der Gesamtwiderstand  $R_{AB}$  vom Widerstandsnetzwerk (a) ist:

- (A) immer kleiner als derjenige vom Netzwerk (b).
- (B) immer gleichgross wie derjenige vom Netzwerk (b).
- (C)** immer grösser als derjenige vom Netzwerk (b).
- (D) nur in Abhängigkeit von  $R_1$  und/oder  $R_2$  vergleichbar mit Netzwerk (b).



(2 P.) SC – Ein Elektron ( $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg) wird von der Ruheposition aus im Vakuum durch eine Potentialdifferenz von  $U = 1$  MV beschleunigt.

8. Welche Geschwindigkeit  $v$  erreicht das Elektron?

(A)  $v \approx 1.7 \cdot 10^8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(B)  $v \approx 6 \cdot 10^8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(C)  $v \approx 2.1 \cdot 10^9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(D) Diese Rechnung müsste relativistisch durchgeführt werden

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot e}{m_0}} \approx 600.000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 2 \cdot c$$

→ hier muss relativistisch gerechnet werden

(2 P.)  $kP$  – Gegeben sei ein Materialübergang bestehend aus zwei Materialien mit unterschiedlichen Leitfähigkeiten  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  und die jeweiligen Stromdichten  $\vec{J}_1$  und  $\vec{J}_2$ . Die Grenzfläche sei ladungsfrei. Bewerten Sie die folgenden Aussagen:



(3 P.)  $kP$  – An einem Kondensator  $C_1$  liegt die Spannung  $U_1$  an, an einem zweiten Kondensator  $C_2$  die Spannung  $U_2 = 2U_1$ . Bewerten Sie die folgenden Aussagen:

$$\text{Fall 1: } \omega_{e1} = \frac{1}{2} C_1 u_1^2 = \frac{1}{2} 2 C_2 \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} C_2 u_2^2 = \frac{1}{2} \omega_{e2}$$

→ richtig

$$\text{Fall 2: } \omega_{e1} = \frac{1}{2} C_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \frac{C_2}{2} \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} C_2 u_2^2 = \frac{1}{8} \omega_{e2}$$

→ falsch

$$\text{Fall 3: } \omega_{e1} = \frac{1}{2} C_1 u_1^2 = \frac{1}{2} 4 C_2 \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} C_2 u_2^2 = \omega_{e2}$$

→ richtig

$$\text{Fall 4: } \omega_{e1} = \frac{1}{2} C_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \frac{C_2}{4} \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{32} C_2 u_2^2 = \frac{1}{16} \omega_{e2}$$

→ falsch

(2 P.) SC – Zwei planparallele Metallplatten sind durch ein 200 µm starkes Dielektrikum ( $\varepsilon_r = 3$ ) voneinander isoliert. Die Durchschlagsfestigkeit des Dielektrikums sei 15  $\frac{kV}{mm}$  und Randeffekte seien zu vernachlässigen.

17. Welche Spannung  $U$  darf maximal an den Platten anliegen ohne einen Durchschlag zu erhalten?

- (A)  $U = 1 \text{ kV}$       (B)  $U = 3 \text{ kV}$       (C)  $U = 9 \text{ kV}$       (D)  $U = 30 \text{ kV}$

Durchschlagsfestigkeit =  $E_{max}$  ab dem, bei der vorliegenden Dicke des Dielektrikums, es zum Durchschlag kommt

$$U_{max} = E_{max} \cdot d = 15 \frac{kV}{mm} \cdot 200 \mu m = 3kV$$

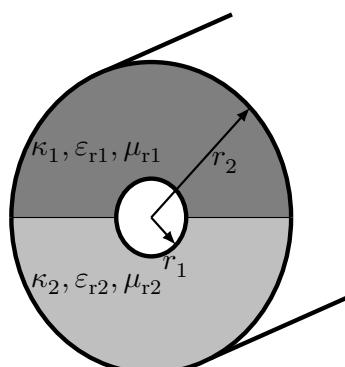
→  $\varepsilon_r$  braucht ihr hier nicht!

## Aufgabe 2: Elektrische Felder

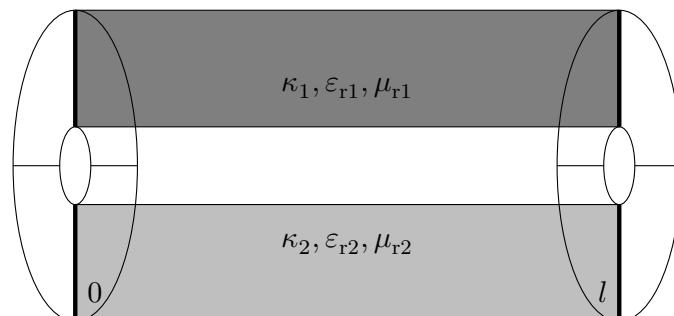
(20 P.) Zwischen zwei nach Abbildung 1.a koaxial angeordneten, dünnwandigen Metallrohren mit den Radien  $r_1 = 10 \text{ mm}$  und  $r_2 = 25 \text{ mm}$  der Länge  $l = 5 \text{ cm}$  befinden sich zwei verschiedene Materialien. Die Materialparameter sind in der Tabelle 1 definiert. Die beiden Materialien sind durch dünne Isolierschichten voneinander getrennt.

Tabelle 1: Materialparameter

Parameter	Wert
$\kappa_1$	$2.0 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\Omega \text{m}}$
$\alpha_1$	$4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$
$\mu_{r1}$	0.999 75
$\varepsilon_{r1}$	2.3
$\kappa_2$	$5.0 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\Omega \text{m}}$
$\alpha_2$	$4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$
$\mu_{r2}$	1.0001
$\varepsilon_{r2}$	5.6



1.a. Anordnung 1 - koaxial Anordnung:  
Elektroden auf den  
Stirnflächen bei  $r_1$  und  $r_2$



1.b. Anordnung 2 - Zylinder: Elektroden auf den  
Stirnflächen bei 0 und  $l$

*Hinweis:* Die Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden!

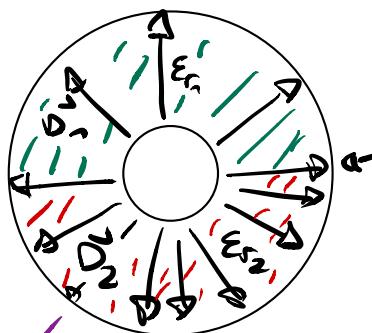
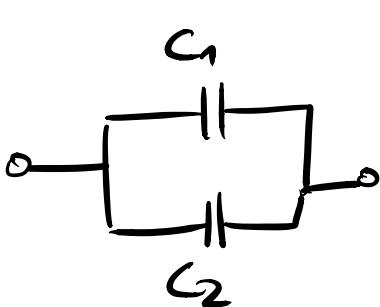
- a)✓ (2 P.) Ordnen Sie die beiden Materialien ihrer magnetischen Eigenschaft zu. Markieren Sie Ihre Antwort eindeutig mit einem Kreuz (X) in folgender Tabelle:

Materialeigenschaft:	diamagnetisch	paramagnetisch	ferromagnetisch
Material 1	X		
Material 2		X	

$$\rightarrow \mu_{r1} < 1$$

$$\rightarrow \mu_{r2} > 1$$

- b)✓ (10 P.) Berechnen Sie die Kapazität der Anordnung aus Abbildung 1.a zwischen den Elektroden  $r_1$  und  $r_2$ . Geben Sie zusätzlich ein elektrisches Ersatzschaltbild an und skizzieren Sie die elektrische Flussdichte qualitativ in einer eigenen Skizze. Gehen Sie davon aus, dass das Potential an der Elektrode  $r_1$  höher ist als das an Elektrode  $r_2$ .



Feldlinien verlaufen tangential  
zur Grenzfläche

$$E_{t1} = E_{E1} \rightarrow D_{t1} \neq D_{t2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow D_1 &= \epsilon_1 E \\ \rightarrow D_2 &= \epsilon_2 E \end{aligned}$$

R verhält sich in beiden Materialien gleich

$\epsilon_{r2} > 2 \cdot \epsilon_{r1} \rightarrow$  Dichte in Material 2  
mehr als doppelt so hoch

zylindrische  
Blattfläche

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{\iint_A \vec{D}_1 d\vec{A}}{\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}} + \frac{\iint_A \vec{D}_2 d\vec{A}}{\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

dient darüber  
nach

$$= \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U}$$

$$\iint_A \vec{D}_1 d\vec{A} = \int_0^l \int_0^{\pi} \epsilon_1 \cdot \vec{E} \cdot \vec{e}_\rho \underbrace{\rho d\varphi dz}_{=: dA \text{ für Mantelfläche}} =$$

$$= \rho l \cdot \pi \epsilon_1 \cdot E(\rho) = Q_1 \text{ Ladungen } Q:$$

$$\iint_A \vec{D}_2 d\vec{A} = \rho l \cdot \pi \cdot \epsilon_2 E(\rho) = Q_2$$

erstmal annehmen  
→ kürzen sich  
nachher heraus

$$\vec{E}(\rho) = \vec{e}_\rho \underbrace{\frac{1}{\rho L \cdot \pi \cdot \epsilon_1}}_{\textcircled{1}} = \vec{e}_\rho \underbrace{\frac{Q_2}{\rho L \cdot \pi \epsilon_2}}_{\textcircled{2}}$$

$E$  verhält sich  
in beiden Materialien  
gleich

$$\rightarrow U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\rho) d\rho = \int_{r_1}^{r_2} E(\rho) \vec{e}_\rho \vec{e}_\rho d\rho =$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{\Rightarrow} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1}{L\pi \cdot \epsilon_1} \cdot \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q_1}{L\pi \cdot \epsilon_1} \left[ \ln \rho \right]_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{Q_1}{L\pi \cdot \epsilon_1} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

oder

$$\stackrel{\textcircled{2}}{\Rightarrow} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_2}{L\pi \cdot \epsilon_2} \cdot \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q_2}{L\pi \cdot \epsilon_2} \left[ \ln \rho \right]_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{Q_2}{L\pi \epsilon_2} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

$\rightarrow$   $U$  auch  
in beiden Hälften  
gleich

$$\rightarrow U = \underbrace{\frac{Q_1}{L\pi \epsilon_1} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\frac{Q_2}{L\pi \epsilon_2} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}_{\textcircled{2}}$$

$$C_1 = Q_1 \cdot \frac{1}{U} \stackrel{\textcircled{1}}{=} Q_1 \cdot \frac{(\pi \epsilon_1)}{Q_1} \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} =$$

$$= L \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \epsilon_{r_1} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

→ nutzt die Form von U wodurch sich  $Q_1$  kürzt

$$= 5 \text{ m} \cdot \pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 2,3 \frac{1}{\ln\frac{25\text{mm}}{10\text{mm}}} = 3.49 \text{ pF}$$

$$C_2 = Q_2 \cdot \frac{1}{U} \stackrel{\textcircled{2}}{=} Q_2 \cdot \frac{(\cdot \pi \cdot \epsilon_2)}{Q_2} \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} =$$

$$= (\cdot \pi \cdot \epsilon_2) \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

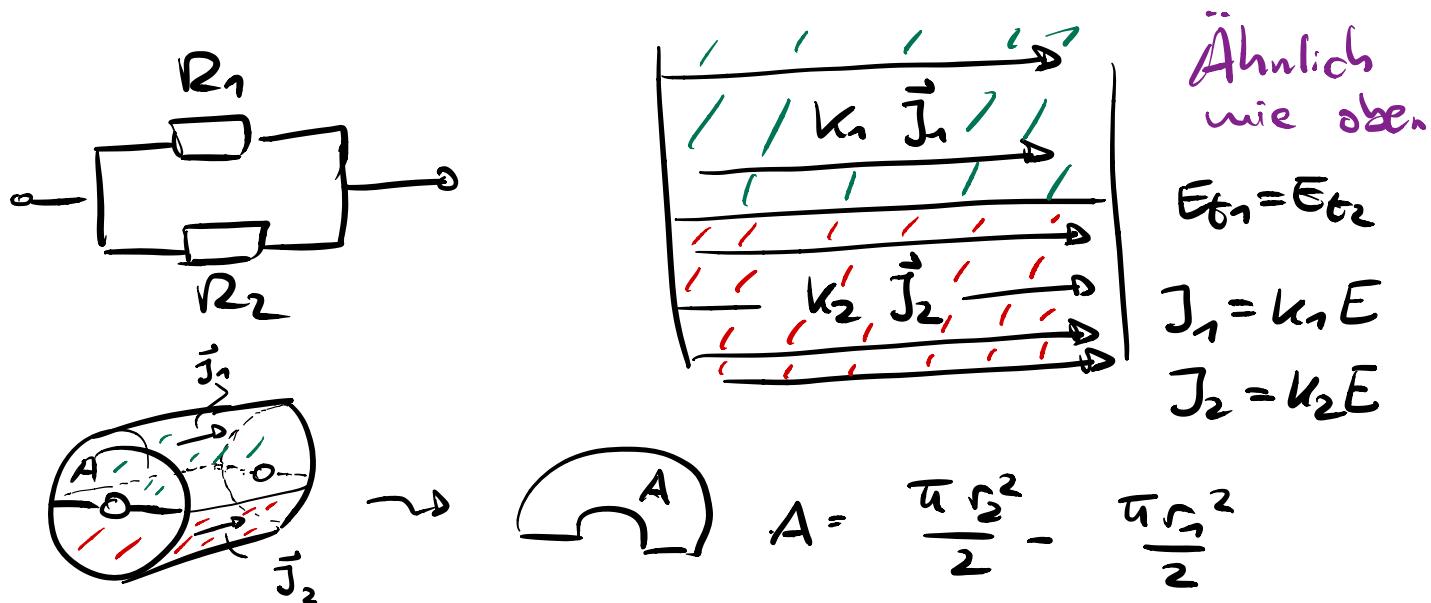
$$= 5 \text{ m} \cdot \pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 5,6 \frac{1}{\ln\frac{25\text{mm}}{10\text{mm}}} = 8.50 \text{ pF}$$

$$\underline{C = C_1 + C_2 = 3.49 \text{ pF} + 8.50 \text{ pF} = 11.99 \text{ pF}}$$

$$\underline{\underline{C_1 + C_2 = C_1 + C_2}}$$

Nun werden die Elektroden bei  $r_1$  und  $r_2$  entfernt und neue Elektroden auf die Stirnflächen des Zylinders angebracht. Eine Seitenansicht des Zylinders ist in Abbildung 1.b dargestellt.

- c)✓ (5 P.) Berechnen Sie den elektrischen Widerstand der Anordnung, welche in Abbildung 1.b dargestellt ist, zwischen den Elektroden auf den Stirnflächen. Geben Sie ein elektrisches Ersatzschaltbild an und zeichnen Sie qualitativ das elektrische Strömungsfeld in einer eigenen Skizze ein. Gehen Sie davon aus, dass die Elektrode bei Position 0 gegenüber der Elektrode bei Position  $l$  ein höheres Potential hat.



$$R_1 = \frac{U}{k_1 A} = \frac{1}{k_1} \frac{2U}{(r_2^2 - r_1^2)\pi} = 30.32 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = \frac{U}{k_2 A} = \frac{1}{k_2} \frac{2U}{(r_2^2 - r_1^2)\pi} = 12.13 \text{ k}\Omega$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 8.66 \text{ k}\Omega$$

- d)✓ (3 P.) Um welchen Faktor ändern sich die Werte der Kapazität und des elektrischen Widerstandes aus den Teilaufgaben a) und b), wenn sich die Temperatur von Zimmertemperatur ( $\theta_{Raum} = 20^\circ\text{C}$ ) auf Winteraußentemperatur ( $\theta_A = -20^\circ\text{C}$ ) verändert?

$C$ :  $\epsilon$  ist Temperaturunabhängig, somit ändert sich die Kapazität nicht

$R$ :

$$R_1' = R_1(T_{Raum}) \cdot (1 + \Delta T \cdot \alpha_r)$$

$$\frac{R_1}{R_1(T_{Raum})} = 1 + \Delta T \alpha_r =$$

$$= 1 + (T_{Aussen} - T_{Raum}) \alpha_r =$$

$$= 1 + (-20^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K} =$$

$$= 0.84$$

Da  $R_2$  den selben Temperaturkoeffizienten besitzt ist der Faktor von  $R_2$  auch 0.84.

Somit ändert sich  $R_{ges}$  auch um Faktor 0.84

### Aufgabe 3: Brückenschaltung

(10 P.) Es ist die Schaltung in Abbildung 2 gegeben. Bei jeder Teilaufgabe ist eine Begründung anzugeben.

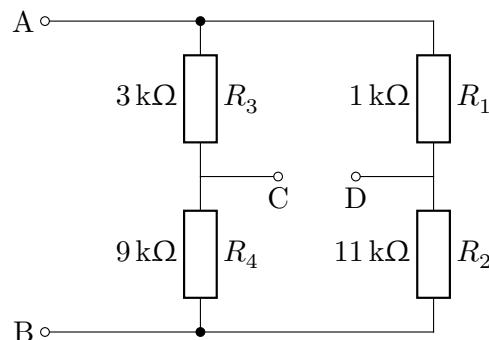
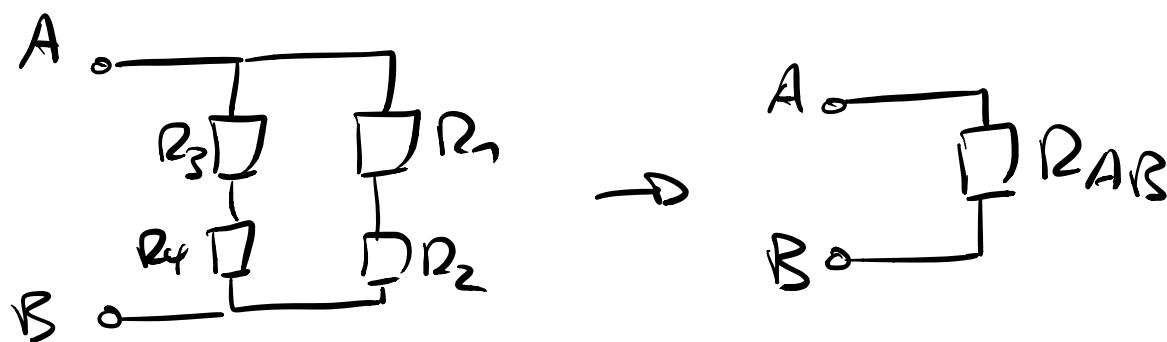


Abbildung 2: Gegebenes Netzwerk

- a)✓ (2 P.) Wie gross ist der Gesamtwiderstand der Schaltung zwischen den Klemmen A und B, wenn an den Klemmen C und D ein idealer **Spannungsmesser** angeschlossen wird?

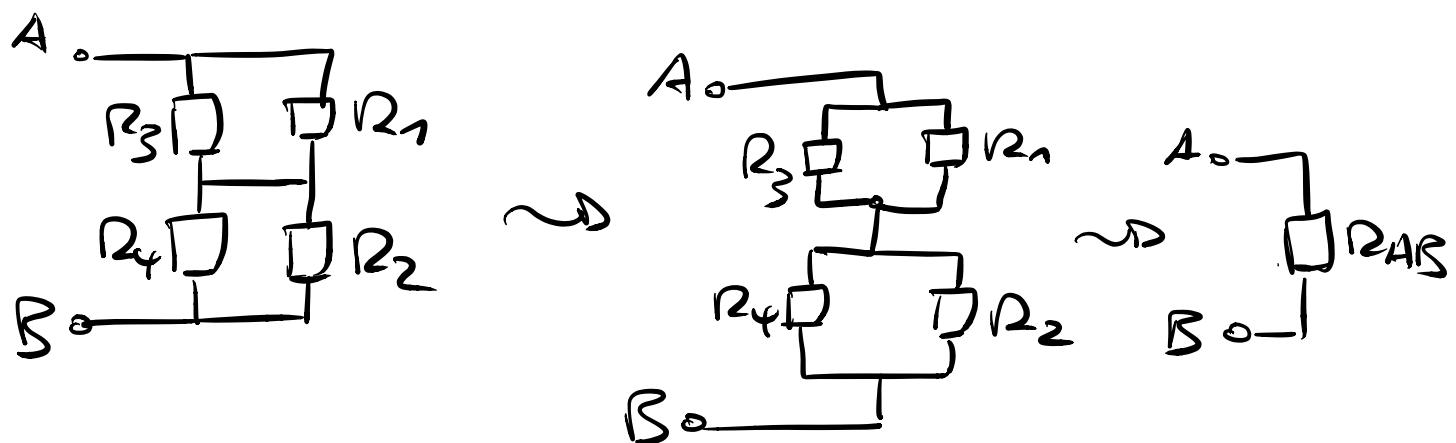
ideal Spannungsmesser hat Innenwiderstand  $R_i \rightarrow \infty$ , somit kann kein Strom von C nach D fließen



$$R_{AB} = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 6 \text{ k}\Omega$$

- b)✓ (2 P.) Wie gross ist der Gesamtwiderstand der Schaltung zwischen den Klemmen A und B, wenn an den Klemmen C und D ein idealer **Strommesser** angeschlossen wird?

ideal Strommesser hat Innenwiderstand  $R_i = 0\Omega$ , somit liegen C und D auf dem selben Potential und wir können sie mit einem Kurzschluss verbinden:



$$R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \underline{\underline{5.7 k\Omega}}$$

- c)✓ (3 P.) An die Klemmen A und B wird einen ideale Spannungsquelle (siehe Abbildung 3) angeschlossen. Ersetzen Sie **einen** beliebigen Widerstand, so dass sich eine abgeglichene Brückenschaltung ergibt.

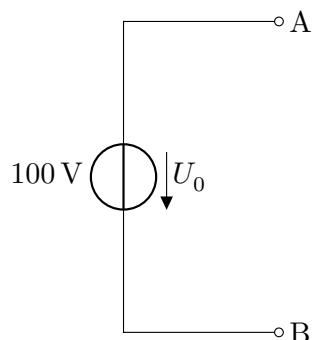


Abbildung 3: ideale Spannungsquelle

*Bedingung für abgeglichene Brückenschaltung:*

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

z.B.  $R_1$  anpassen:  $R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} = 3,67 \text{ k}\Omega$

*Weiter Lösungen:*

widerstand	wert
$R_1$	$3,67 \text{ k}\Omega$
$R_2$	$3,00 \text{ k}\Omega$
$R_3$	$0,82 \text{ k}\Omega$
$R_4$	$33,00 \text{ k}\Omega$

- d)✓ (3 P.) An die Klemmen A und B wird eine reale Spannungsquelle (siehe Abbildung 4) angeschlossen. Die Klemmen C und D sind kurzgeschlossen und es sind die ursprünglichen Widerstandswerte gewählt (siehe Abbildung 2). Bei welchem Innenwiderstand  $R_i$  ist die Leistungsabgabe der Quelle maximal und wie gross ist der ohm'sche Verlust am Widerstandsnetzwerk zwischen den Klemmen A und B in dieser Situation?

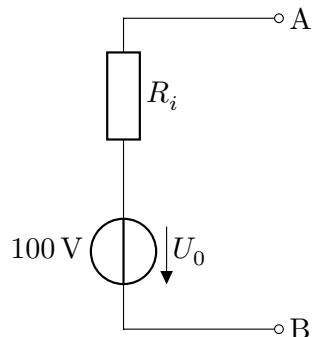


Abbildung 4: reale Spannungsquelle

$R_{AB}$  aus b) verwenden, da C,D mit einem Kurzschluss verbunden wurden.

Leistungsmaximierung:  $R_i = R_{AB} = \underline{\underline{5.7 \text{ k}\Omega}}$

$$P = \frac{\left(\frac{U_0}{2}\right)^2}{R_{AB}} = \frac{U_0^2}{4R_{AB}} = \frac{(100\text{V})^2}{4 \cdot 5.7 \text{ k}\Omega} = 0,44\text{W}$$

Bei  $R_i = R_{AB}$  fällt jeweils  $\frac{U_0}{2}$  über die beiden Widerstände ab

### Aufgabe 4: Induktivitätsberechnung im magnetischen Kreis

(15 P.) Gegeben ist die aus einem Ferritmaterial (relative Permeabilität  $\mu_r$ ) bestehende Kombination aus zwei gleichen U-Kernen und einem I-Joch. Alle Schenkel haben eine quadratischen Querschnitt mit der Seitenlänge  $a$ . Die effektive Weglänge der beiden U-Kerne  $l_A$  (inklusive Anteil bis zum „Sternpunkt“ im I-Joch aber **ohne** Luftspalt) sei bekannt, ebenso die effektive Weglänge  $l_M$  des I-Jochs. Zwischen den U-Kernen und dem I-Joch besteht jeweils ein Luftspalt der Länge  $l_g$ .

Auf dem rechten U-Kern ist eine Wicklung mit  $N$  Windungen gemäss Abbildung 5 angebracht, die vom Strom  $I_q$  in der angegebenen Richtung durchflossen wird. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte homogen über den Kernquerschnitt verteilt ist. Der Streufluss in den Luftspalten wird vernachlässigt, sodass für die Luftpalte der gleiche Querschnitt wie für die Kerne angenommen werden kann.

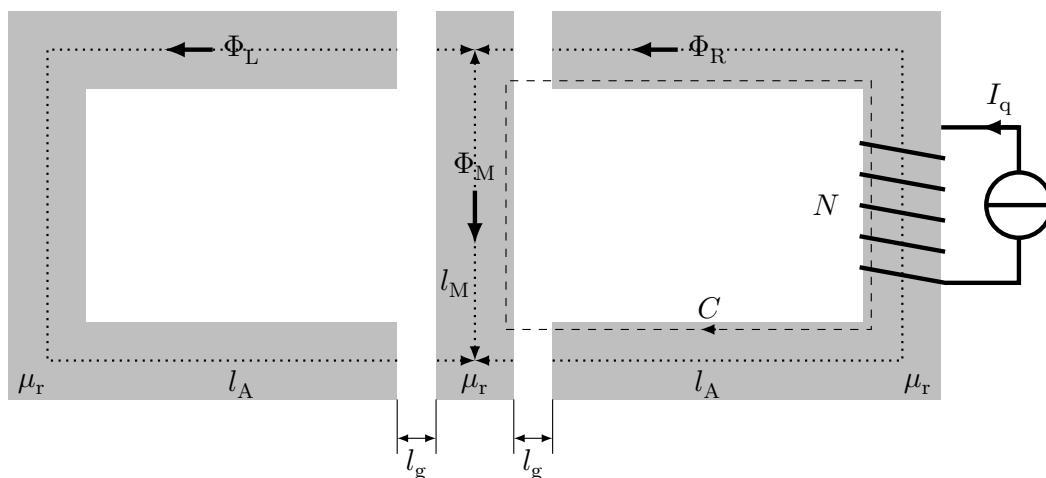


Abbildung 5: Induktivität aus zwei U-Kernen und einem I-Joch

- a)✓ (4 P.) Geben Sie die magnetischen Widerstände  $R_{mL}$  und  $R_{mR}$  des linken und rechten U-Kerns (mit Luftspalten) sowie  $R_{mM}$  des mittleren I-Jochs an.

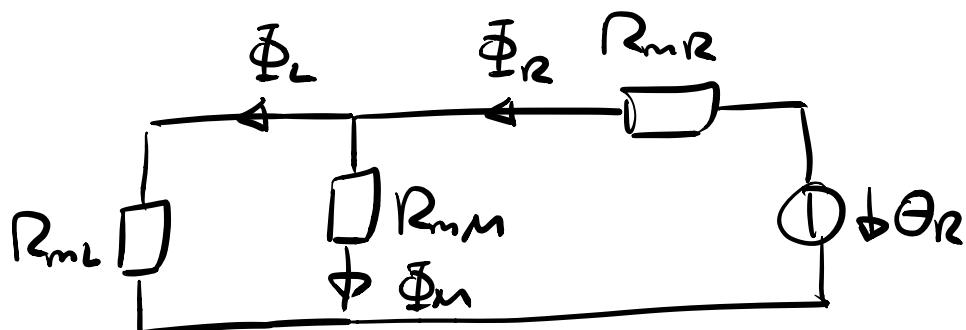
$$R_m = \frac{\mu}{\mu_0 A} \quad , \quad A = a^2$$

$$R_{mL} = R_{mR} = \frac{\mu_0 \mu_r a^2}{\mu_0 \mu_r a^2 + \frac{2 l_g}{\mu_0 a^2}} + \underbrace{\frac{2 l_g}{\mu_0 a^2}}_{\text{mit Luftspalt}}$$

$$R_{mM} = \frac{\mu_0}{\mu_0 \mu_r a^2}$$

- b)✓ (4 P.) Wie gross ist die von der Kontur C rechtshändig umfasste Durchflutung  $\Theta_R$ ? Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises inklusive den magnetischen Teilflüssen  $\Phi_L$ ,  $\Phi_M$  und  $\Phi_R$ .

$\Theta_R = N \cdot I_2$  → Kontur C wird mit  $N \cdot I_2$  durchflossen



- c) (4 P.) Berechnen Sie die magnetischen Teilflüsse  $\Phi_L$ ,  $\Phi_M$  und  $\Phi_R$  in Abhängigkeit des Stromes  $I_q$ , der Wicklungsanzahl  $N$  sowie der magnetischen Widerstände  $R_{mL}$ ,  $R_{mR}$ ,  $R_{mM}$ .

Wie in einfachen elektrischen Netzwerken mit Spannungs- / Stromteilen, Maschen-/Knotengeln, "Ohm'schen Gesetz" arbeiten.

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_R &= \frac{\Theta_R}{R_{mR} + R_{mL} \parallel R_{mM}} = \frac{\Theta_R}{R_{mR} + \frac{R_{mL} R_{mM}}{R_{mL} + R_{mM}}} = \\ &= \frac{N \cdot I_q (R_{mL} + R_{mM})}{R_{mL} R_{mM} + R_{mL} R_{mR} + R_{mM} R_{mR}}\end{aligned}$$

$\underline{\Phi}_R \hat{=} \text{Gesamtstrom, da er der Quelle entspringt}$

Anderen beiden Flüsse mit Stromteiler

$$\underline{\Phi}_M = \frac{R_{mL}}{R_{mM} + R_{mL}} \underline{\Phi}_R = \frac{N I_q R_{mL}}{R_{mL} R_{mM} + R_{mL} R_{mR} + R_{mM} R_{mR}}$$

$$\underline{\Phi}_L = \frac{R_{mM}}{R_{mM} + R_{mL}} \underline{\Phi}_R = \frac{N I_q R_{mM}}{R_{mL} R_{mM} + R_{mL} R_{mR} + R_{mM} R_{mR}}$$

d) (3 P.) Bestimmen Sie die Induktivität  $L$  und den  $A_L$ -Wert der Anordnung.

$$L = \frac{\Phi_{\text{ges}}}{I_2} = \frac{N \cdot \Phi_R}{I_2} =$$

$$= N^2 \frac{R_{mL} + R_{mm}}{R_{mL}R_{mM} + R_{mL}R_{mR} + R_{mm}R_{mR}}$$

da  $\Phi_R$  über  $\Phi_A = \frac{\Theta}{R_m}$  berechnet wurde, wissen wir, dass  $\Phi_R$  ein Fluss vom Typ  $\Phi_A$  ist.  
D.h.  $\Phi = N \cdot \Phi_A \rightarrow$  hier:  $\Phi_{\text{ges}} = N \cdot \Phi_R$

$$L = N^2 \cdot A_L \rightarrow A_L = \frac{R_{mL} + R_{mm}}{R_{mL}R_{mM} + R_{mL}R_{mR} + R_{mm}R_{mR}}$$

### Aufgabe 5: Quadratischer Drahtrahmen, Bewegungsinduktion

(15 P.) Ein geschlossener quadratischer Drahtrahmen nach Abb. 6 mit der Seitenlänge  $a = 50\text{ mm}$  soll mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v} = 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x$ , horizontal durch ein zeitlich konstantes homogenes Magnetfeld bewegt werden. Dazu wirkt an diesem die Kraft  $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_x$ . Das Magnetfeld habe eine Breite von  $b = 200\text{ mm}$  wobei in der ersten Hälfte ( $0$  bis  $\frac{b}{2}$ ) die Flussdichte  $\vec{B}_1 = -B \vec{e}_z$  nach hinten und in der zweiten Hälfte ( $\frac{b}{2}$  bis  $b$ ) die Flussdichte  $\vec{B}_2 = B \vec{e}_z$  nach vorne zeige. Der durch den Drahtrahmen gebildete Stromkreis hat den Widerstand  $R$ . Zur Zeit  $t = 0\text{ s}$  berührt die rechte Kante des Drahtrahmens die Grenze des ersten Magnetfeldes.

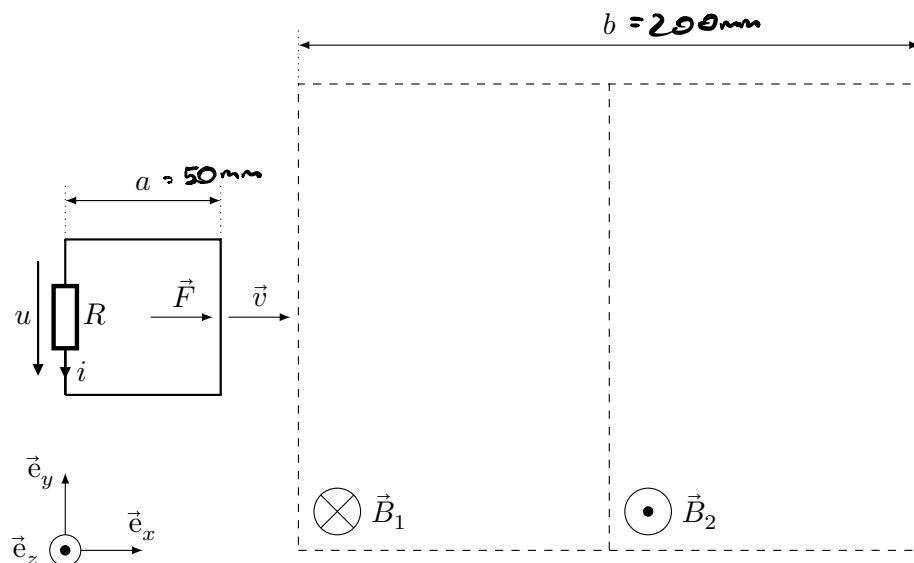


Abbildung 6: Gegebene Anordnung mit dem Drahtrahmen und magnetischen Feld zum Zeitpunkt  $t < 0\text{ s}$

*Hinweis:* Die mechanische Reibung ist in der gesammten Aufgabe **nicht** zu berücksichtigen. Jede Teilaufgabe kann unabhängig von den Anderen gelöst werden!

Alle Phasen feststellen:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

$0 < t < 5\text{ s} \rightarrow$  Eintreten in  $\vec{B}_1$

$5\text{ s} < t < 10\text{ s} \rightarrow$  Wandern zum rechten Rand von  $\vec{B}_1$

$10\text{ s} < t < 15\text{ s} \rightarrow$  Gleichzeitiges Austreten aus  $\vec{B}_1$  und Eintreten in  $\vec{B}_2$

$15\text{ s} < t < 20\text{ s} \rightarrow$  Wandern zum rechten Rand von  $\vec{B}_2$

$20\text{ s} < t < 25\text{ s} \rightarrow$  Austreten aus  $\vec{B}_2$

- a)✓ (4 P.) Skizzieren Sie die zeitlichen Abläufe der Durchflutung  $\Phi(t)$ , Spannung  $u(t)$ , Strom  $i(t)$  und Kraft  $F(t)$  in der folgenden Abbildung. Alle Werte sind hierbei auf ihr zeitliches Maximum normiert darzustellen.

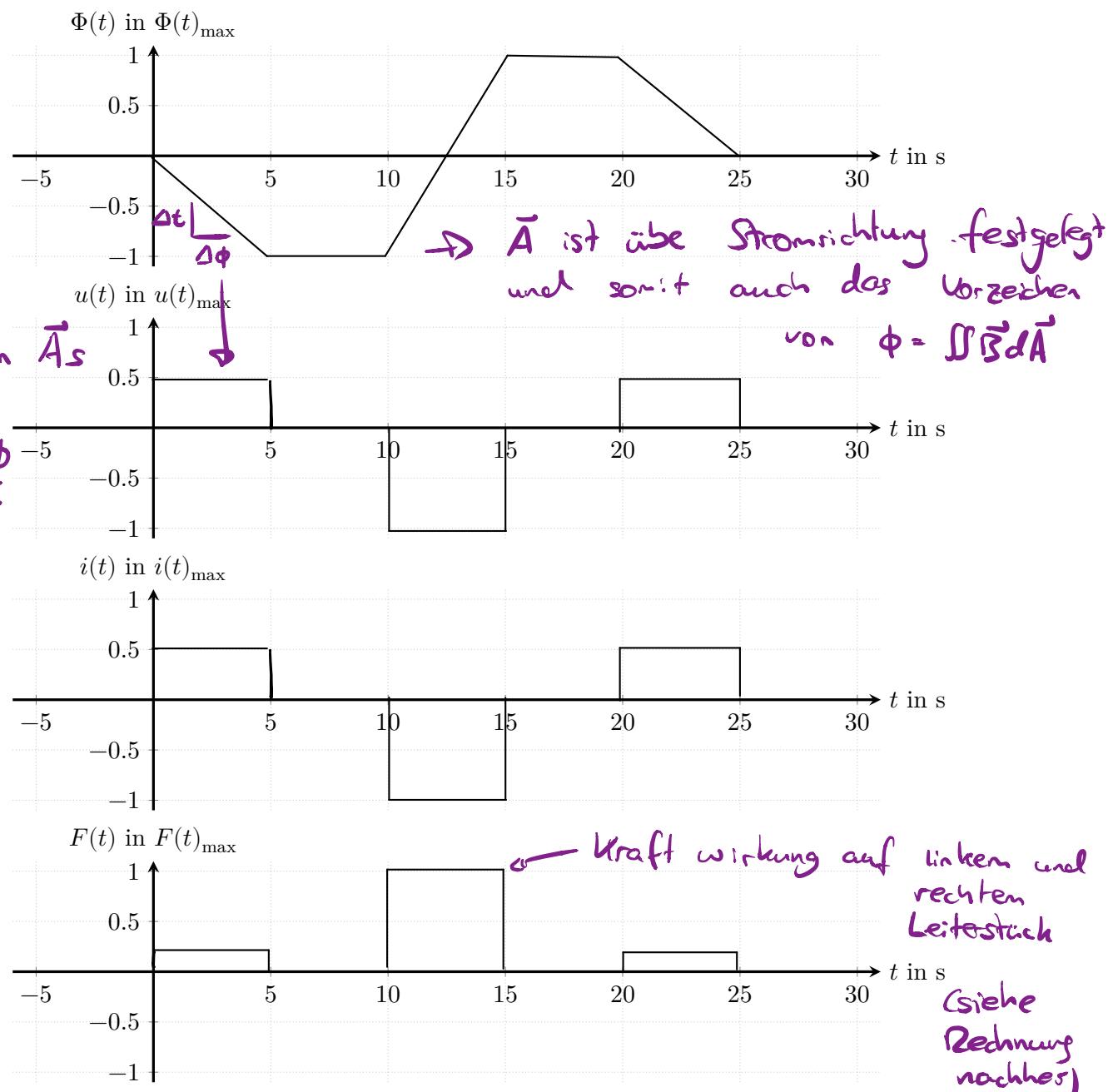


Abbildung 7: Skizze der Verläufe der Zustandsgrößen  $\Phi(t)$ ,  $u(t)$ ,  $i(t)$  und  $F(t)$ .

- b)✓ (1 P.) Der Rahmen bewege sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v} = 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x$  auf das Magnetfeld zu. Wie gross ist die induzierte Spannung  $u(t)$  und der Strom  $i(t)$  für den Fall  $t \leq 0\text{s}$ ? Wie gross ist in diesem Fall die Kraft  $\vec{F}(t)$  zu wählen um die konstante Geschwindigkeit  $v$  beizubehalten?

Ohne  $\vec{B}$ -Feld gibt es weder Spannung noch Strom.  $i(t) = 0A, u(t) = 0V \quad t \leq 0s$

$$\rightarrow \vec{F}(t) = i(t) \cdot \vec{L} \times \vec{B} = 0N \quad \text{für } t \leq 0s$$

- c)✓ (5 P.) Wie gross ist die induzierte Spannung  $u(t)$  und der Strom  $i(t)$  für den Fall  $0s < t \leq 10s$ ? Wie gross ist in diesem Fall die Kraft  $\vec{F}(t)$  zu wählen um die konstante Geschwindigkeit  $v$  beizubehalten?

$$A(t) = a \cdot v \cdot t$$

$$u(t) = - \frac{d\phi(t)}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}(t)$$

$$= - B \frac{d}{dt} \iint_A \underbrace{(-\vec{e}_z)(\vec{e}_z)}_{-1} dA(t) =$$

$$= B \frac{d}{dt} A(t) = B \cdot a \cdot v > 0$$

$$\vec{F}(t) = -\vec{F}_B(t) = -\underbrace{Q \vec{v} \times \vec{B}_0}_{i(t) \cdot \vec{a}} = -i(t) a B (\vec{e}_y) \times (-\vec{e}_z) =$$

$$= i(t) a B \vec{e}_x$$

$$u(t) = \begin{cases} Bva & 0s \leq t \leq 5s \\ 0 & 5s \leq t \leq 10s \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} Bva & 0s \leq t \leq 5s \\ R & 5s \leq t \leq 10s \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} \frac{B^2 v a^2}{R} \vec{e}_x & 0s \leq t \leq 5s \\ 0 \cdot \vec{e}_x & 5s \leq t \leq 10s \end{cases}$$

- d)✓ (5 P.) Wie gross ist die induzierte Spannung  $u(t)$  und der Strom  $i(t)$  für den Fall  $10\text{ s} < t \leq 20\text{ s}$ ? Wie gross ist in diesem Fall die Kraft  $\vec{F}(t)$  zu wählen um die konstante Geschwindigkeit  $v$  beizubehalten?

$$\begin{aligned}
 u(t) &= - \frac{d\Phi(t)}{dt} = - \frac{d}{dt} \left( \iint_A \vec{B}_1 d\vec{A}(t) + \iint_A \vec{B}_2 d\vec{A}(t) \right) = \\
 &= - \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\iint_A B(-\vec{e}_z \vec{e}_z) dA(t)}_{=0} + \iint_A B(\vec{e}_z \vec{e}_z) dA(t) \right) \\
 &= -B \left[ -\frac{d}{dt} (a^2 - avt) + \frac{d}{dt} (at) \right] = \\
 &= -B (2va) = -2Bva
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(t) &= - (\vec{F}_{B\text{links}}(t) + \vec{F}_{B\text{rechts}}(t)) = - i(t) (\vec{a}_l \times \vec{B}_1 + \vec{a}_r \times \vec{B}_2) \\
 &= - i(t) a B \underbrace{((-\vec{e}_y) \times (-\vec{e}_z) + (\vec{e}_y) \times (\vec{e}_z))}_{\vec{e}_x} = \\
 &= - 2i(t) a B \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

$$u(t) = \begin{cases} -2Bva & 10s < t \leq 15s \\ 0 & 15s < t \leq 20s \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} -2Bva & 10s < t \leq 15s \\ R & 15s < t \leq 20s \end{cases}$$

$$\tilde{F}(t) = \begin{cases} \frac{4B^2va^2}{R} \tilde{e}_x & 10s < t \leq 15s \\ 0 & 15s < t \leq 20s \end{cases}$$

## Aufgabe 6: Kräfte auf Punktladungen

(10 P.) Zwei Punktladungen  $Q$  und  $Q_1$  sind abwechselnd so angeordnet, dass sie die Eckpunkte eines gleichseitigen Sechsecks der Seitenlänge  $s$  bilden (Abbildung 8). Diese Anordnung befindet sich in einem Medium mit  $\epsilon_r = 1$ .

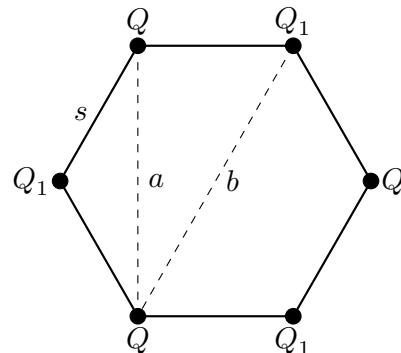


Abbildung 8: Anordnung der sechs Punktladungen

- a)✓ (2 P.) Bestimmen Sie die Kraft die auf **eine** der Ladungen  $Q$  wirkt. Wählen Sie hierzu zuerst ein geeignetes (kartesisches) Koordinatensystem und zeichnen Sie dies in die Abbildung 9 ein. Zeichnen Sie allgemein alle Kräfte, welche auf die gewählte Ladung  $Q$  wirken in die Abbildung 9 ein. Berechnen Sie in dieser Teilaufgabe noch nichts!

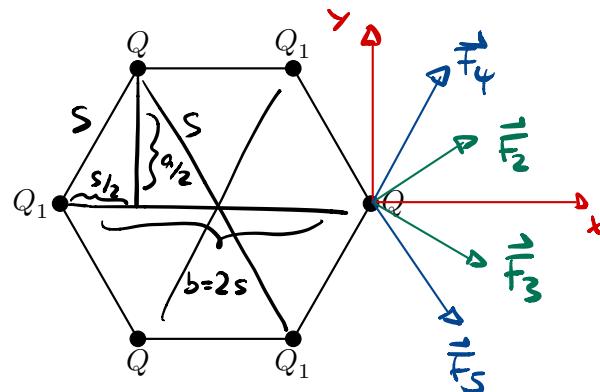


Abbildung 9: Koordinatensystem und Kräfte auf eine Punktladung

- b)✓ (1 P.) Berechnen Sie nun die Längen  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $s$ .

Ein gleichseitiges Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken.

$$a = 2 \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}s^2} = s\sqrt{3} \approx 1.73s$$

$$b = 2s$$

- c)✓ (5 P.) Berechnen Sie die **Vektoren** der einzelnen Kräfte **und** der resultierenden wirkenden Kraft auf die gewählte Ladung  $Q$ .

*Hinweis:* Falls Sie Teilaufgabe b) nicht lösen konnten, verwenden Sie  $a = s\sqrt{2}$  und  $b = 2s$ .

Allgemein gilt bei Punktladungen:

$$\vec{F} = \frac{Q_b Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r$$

→ Wir können die Einheitsvektoren der Kräfte in  $x$ - und  $y$ -Komponenten zerlegen.

$$\vec{F}_1 = \frac{Q Q_1}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot \hat{e}_x = \frac{Q Q_1}{16\pi\epsilon_0 s^2} \hat{e}_x$$

$$\vec{F}_2 = \frac{Q Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\hat{e}_x \cdot \cos(30^\circ) + \hat{e}_y \sin(30^\circ)) =$$

$$= \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 s^2} (\sqrt{3} \hat{e}_x + \hat{e}_y)$$

$$\vec{F}_3 = \frac{Q Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\hat{e}_x \cdot \cos(30^\circ) - \hat{e}_y \sin(30^\circ)) =$$

$$= \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 s^2} (\sqrt{3} \hat{e}_x - \hat{e}_y)$$

$$\vec{F}_4 = \frac{Q Q_1}{4\pi\epsilon_0 s^2} (\vec{e}_x \cdot \cos(60^\circ) + \vec{e}_y \sin(60^\circ)) =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 s^2} (\sqrt{3} \vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_5 = \frac{Q Q_1}{4\pi\epsilon_0 s^2} (\vec{e}_x \cdot \cos(60^\circ) - \vec{e}_y \sin(60^\circ)) =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 s^2} (\sqrt{3} \vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

Aus Symmetriegründen heben sich die  
Y-Komponenten auf.

$$F_{\text{ges}} = \frac{QQ_1}{16\pi\epsilon_0 s^2} + 2 \cdot \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 s^2} \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{QQ_1}{8\pi\epsilon_0 s^2}$$

$$= \frac{5QQ_1}{16\pi\epsilon_0 s^2} + \frac{\sqrt{3}Q^2}{12\pi\epsilon_0 s^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 s^2} \left( \frac{5Q_1}{4} + \frac{Q}{\sqrt{3}} \right)$$

- d) (2 P.) Wie gross muss  $Q_1$  gewählt werden, damit die Kraft auf die Ladung  $Q$  verschwindet? ( $Q_1, Q \neq 0$ )

$$F_{\text{ges}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{5Q_1}{4} + \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{5Q_1}{4} = -\frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$Q_1 = -\frac{4}{5\sqrt{3}} Q \approx -0.46Q$$