

Aufgabe 1: Multiple Choice [Für jede Multiple-Choice-Frage gibt es für die richtige Antwort **3 Punkte**, für die falsche Antwort **-1 Punkt** und für keine Antwort **keine Punkte**. Es ist erlaubt, mehr als eine Antwort auszuwählen, und die Gesamtpunktzahl wird als Summe der Punkte für jede ausgewählte Antwort berechnet.]

1) Was ist eine Polarform von $\sqrt{3} - i$?

- a) $2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$.
b) $2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$.
c) $2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$.
d) $2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$.

2) Welche der folgenden Mengen ist nicht wegzusammenhängend?

- a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0 \wedge |z| > 5\}$.
b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 5 \wedge |z - 1| > 1\}$.
c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| < 2 \vee |z + 2| < 1\}$.
d) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 4\}$.

3) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

mit $c_{3n} = n$, $c_{3n+1} = n^2$ und $c_{3n+2} = n^3$, $n \geq 0$. Dann ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe

- a) $R = 0$.
b) $R = 1$.
c) $R = \infty$.
d) nicht bestimmbar.

4) Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{\cos(z) - 1}$$

hat in $z_0 = 0$...

- a) eine hebbare Singularität.
b) einen Pol erster Ordnung.
c) einen Pol zweiter Ordnung.
d) eine wesentlichen Singularität.

5) Sei

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \in (-\pi, 0], \\ \sin t, & \text{für } t \in (0, \pi] \end{cases}$$

die 2π -periodische Funktion. Finden Sie den Koeffizienten a_4 der Fourier-Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{L}t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{L}t \right) \right)$$

der Funktion $f(t)$:

- a) 0.
b) $-\frac{1}{5\pi}$.
c) $-\frac{1}{15\pi}$.
d) $-\frac{2}{15\pi}$.

6) Die Fourier-Transformation der Funktion $h(t) := \frac{1}{t^2 + k^2}$ ist $\hat{h}(\xi) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k|\xi|}$. Ferner sei g eine absolut integrierbare Funktion mit Fourier-Transformation \hat{g} . Verwenden Sie den Faltungssatz, um die Fourier-Transformation der Funktion

$$f(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{(t-s)^2 + 4} ds$$

durch \hat{g} auszudrücken.

a) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4}\widehat{g}(\xi)e^{-4|\xi|}$.

c) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi^2+4}$.

b) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2}\widehat{g}(\xi)e^{-2|\xi|}$.

d) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi+2}$.

7) Finden Sie die Laplace-Transformation $\mathcal{L}[y(t)](s)$ der Lösung $y(t)$ der folgenden Differentialgleichung:

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) - 5y(t) = t, \quad t > 0,$$

$$\dot{y}(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

a) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1+s^2}{s(s-5)(s+1)}$.

c) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1-s}{s(s-5)}$.

b) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1+s^2}{s^2(s-5)(s+1)}$.

d) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1-s}{s^2(s-5)}$.

8) Finden Sie die Inverse der folgenden Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = 6 \cdot \left(\frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s+1)^4} \right).$$

a) $y(t) = 2t^5 \cosh(t) H(t)$.

c) $y(t) = 2t^5 \sinh(t) H(t)$.

b) $y(t) = 2t^3 \cosh(t) H(t)$.

d) $y(t) = 2t^3 \sinh(t) H(t)$.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

a) [2 Punkte] Sei $f(x + iy) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3)$. Zeigen Sie, dass f holomorph ist.

b) [4 Punkte] Berechnen Sie folgendes Wegintegral

$$I := \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

entlang der Kurve γ_1 , welche in Abbildung 1 dargestellt ist.

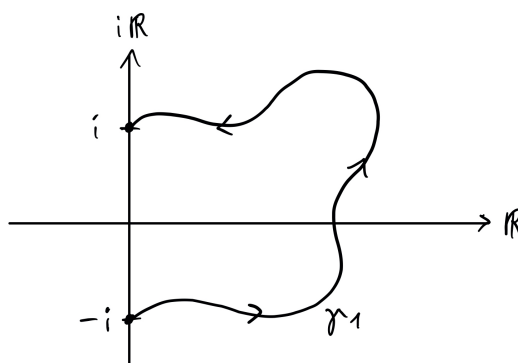


Figure 1: Die Kurve γ_1 startet im Punkt $-i$ und endet im Punkt i .

c) [4 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz.$$

Aufgabe 3 [12 Punkte]

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 4x + 13)^2} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.