PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Für die ersten zwei Fragen sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, und wir bezeichnen mit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ das Laplace-Modell auf Ω.

1.MC1 [1 Punkt] Wie viele Mengen gibt es in $\mathcal{F}$?

(A) $|\mathcal{F}| = 3$.

(B) $|\mathcal{F}| = 4$.

(C) $|\mathcal{F}| = 8$.

(D) $|\mathcal{F}| = 10$.

1.MC2 [1 Punkt] Wir definieren eine Zufallsvariable X auf Ω durch $X(\omega_1) = 0$, $X(\omega_2) = 1$ und $X(\omega_3) = 1$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) X hat eine Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p = 1/2$.

(B) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$.

(C) $F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ 1/3, & a \in [0,1), \\ 1, & a \in [1, \infty). \end{cases}$

(D) $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{3}$.

Für die nächsten zwei Fragen sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{3}, & a \in [0,1), \\ \frac{1}{2}, & a \in [1,3), \\ 1, & a \in [3, \infty). \end{cases}$$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von X?

(A) $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{3}$.

(B) $\mathbb{E}[X] = 1$.

(C) $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4}$.

(D) $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{2}$.

1.MC4 [1 Punkt] Was ist die Varianz von X?

(A) $\mathrm{Var}[X] = \frac{25}{9}$.

(B) $\mathrm{Var}[X] = \frac{17}{9}$.

(C) $\mathrm{Var}[X] = \frac{17}{19}$.

(D) $\mathrm{Var}[X] = \frac{5}{9}$.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe liegt für jede Frage die Anzahl der richtigen Antworten zwischen 0 und 4. (Multiple choice)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_N$, wobei $N \geq 4$, unabhängige Zufallsvariablen mit wohldefinierten Erwartungswerten und Varianzen.

2.MC1 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(A) $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i]$.

(B) $\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^N X_i] = \sum_{i=1}^N \mathrm{Var}[X_i]$.

(C) $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(X_3, X_4)$.

(D) $\mathrm{Var}[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathrm{Var}[X_i]$.

2.MC2 [2 Punkte] Nehmen wir an, dass $X_1, X_2, \ldots, X_N$ zusätzlich identisch verteilt sind. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(A) $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \mathbb{E}[X_1]$.

(B) $\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^N X_i] = N\mathrm{Var}[X_1]$.

(C) $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

(D) $\mathrm{Var}[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i] = \frac{1}{N}\mathrm{Var}[X_1]$.

Für die nächste Frage sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \sin(a), & a \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 1, & a \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2.MC3 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) Die Zufallsvariable X hat keine Dichte.

(B) Die Dichte von X ist gegeben durch $f_X(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(C) $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(D) $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\cos(X)}\right] = \pi/2$.

Für die nächste Frage sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

2.MC4 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) Wenn $A, B \in \mathcal{F}$ so sind, dass $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 0.5$, dann ist $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$.

(B) Wenn $A, B \in \mathcal{F}$ unabhängig sind, dann ist $\mathbb{P}[A^c \cap B] = (1 - \mathbb{P}[A])\mathbb{P}[B]$.

(C) Für jedes $A \in \mathcal{F}$ sind die Ereignisse A und $\emptyset$ unabhängig.

(D) Wenn $A, B \in \mathcal{F}$ disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$, dann sind A und B nur dann unabhängig, wenn $\mathbb{P}[A] = 0$ oder $\mathbb{P}[B] = 0$.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Wir haben zwei identische Schubladen mit Münzen. Schublade Nummer 1 enthält drei Münzen im Wert von jeweils 1 CHF, 2 CHF und 5 CHF. Schublade Nummer 2 enthält vier Münzen im Wert von jeweils 1 CHF, 2 CHF, 5 CHF und 5 CHF.

Wir wählen zufällig (mit gleichen Wahrscheinlichkeiten) eine Schublade aus, und aus dieser Schublade wählen wir dann zufällig eine Münze aus (was bedeutet, dass alle Münzen in der gewählten Schublade mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden).

3.MC1 [1 Punkt] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine 5-CHF-Münze erhalten?

(A) $\frac{5}{12}$.
(B) $\frac{3}{7}$.
(C) $\frac{2}{7}$.
(D) $\frac{1}{2}$.

3.MC2 [1 Punkt] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine 2-CHF-Münze erhalten?

(A) $\frac{7}{24}$.
(B) $\frac{5}{12}$.
(C) $\frac{2}{7}$.
(D) $\frac{3}{7}$.

3.MC3 [1 Punkt] Angenommen, wir wissen, dass wir eine Münze im Wert von 2 CHF oder mehr erhalten haben. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Münze aus Schublade Nummer 1 ausgewählt haben?

(A) $\frac{8}{17}$.
(B) $\frac{7}{13}$.
(C) $\frac{1}{2}$.
(D) $\frac{7}{12}$.

3.MC4 [1 Punkt] Wir definieren die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{\text{“die ausgewählte Münze hat den Wert 2 CHF”}\}, \\ B &= \{\text{“wir wählen Schublade Nummer 1”}\}, \\ C &= \{\text{“wir wählen Schublade Nummer 2”}\}. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, welche Paare dieser Ereignisse unabhängig sind.

(A) Keines der Paare ist unabhängig.

(B) Nur B und C sind unabhängig.

(C) Nur die Paare A, B und A, C sind unabhängig.

(D) Alle Paare sind unabhängig.

3.MC5 [1 Punkt] Was ist der erwartete Geldbetrag, den wir erhalten?

(A) $\frac{71}{24}$.

(B) $\frac{27}{12}$.

(C) $\frac{3}{5}$.

(D) $\frac{31}{12}$.

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\mathbf{1}_{[0,y]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } 0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.A1 [**1.5 Punkte**] Finden Sie die Randdichten von X und Y.

4.A2 [**2 Punkte**] Berechnen Sie $\mathbb{E}[XY^2]$.

4.A3 [**1.5 Punkte**] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\alpha X \leq Y]$ für $\alpha \geq 1$.

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 5

Seien $X_1, \ldots, X_{100}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i^2)$. Dabei ist $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt, aber $\sigma_i^2 > 0$ für $i \in \{1, \ldots, 100\}$ sind bekannte Parameter.

5.A1 [**2.5 Punkte**] Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für μ. Sie müssen **nicht** überprüfen, ob der gefundene Punkt tatsächlich ein Maximum ist.

In den restlichen Teilen dieser Aufgabe möchten wir testen, ob μ von Null verschieden ist.

5.A2 [**0.5 Punkte**] Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese.

5.A3 [**2 Punkte**] Finden Sie eine geeignete Teststatistik und deren Verteilung unter der Nullhypothese. “Geeignet” bedeutet hier, dass die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese bekannt ist und von keinem Parameter abhängt.

5.A4 [**3 Punkte**] Finden Sie den kritischen Bereich (d.h. beschreiben Sie das Testverfahren) für das Signifikanzniveau 5%.

Quantiltabelle der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung

0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
0	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

Zum Beispiel ist $\Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$.