



**Aufgabe 1.**

**[8 Punkte]**

- (a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}.$$

- (b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \geq 1 + n.$$

- (c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 + 3^n} z^n.$$

- (d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktionenfolge  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n)$$

für  $n \rightarrow \infty$  und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

---

**Aufgabe 2.**

**[10 Punkte]**

- (a) Zeigen Sie, dass folgende Funktion  $f$  streng monoton wachsend und bijektiv ist.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

Sei  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Umkehrfunktion von  $f$ . Berechnen Sie die Werte

$$f^{-1}(1) \quad \text{und} \quad (f^{-1})'(1).$$

- (b) Für welche  $q \in \mathbb{N}$  konvergiert das folgende uneigentliche Integral?

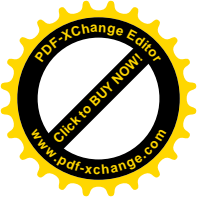
$$\int_0^1 \frac{1 - t^q}{1 - t} dt$$

- (c) Finden Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von  $g(x) = \log(\cosh x)$  um  $x_0 = 0$ .

- (d) Bestimmen Sie alle Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichung

$$z^4 = i$$

und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.



**Aufgabe 3.** Gegeben sei die Funktion

[6 Punkte]

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und -werte von  $f$  unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

---

**Aufgabe 4.**

[11 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Lösungen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des Systems

$$\begin{cases} f'(x) = 4f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 8f(x) - 4g(x) \end{cases}$$

zu den Anfangsdaten  $f(0) = 3$  und  $g(0) = 5$ .

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2 \cos(x^2)$$

für  $x > 0$  zum Beispiel durch „Variation der Konstanten“.

---

**Aufgabe 5.**

[6 Punkte]

(a) Sei  $\lambda = ye^x dx + e^x dy$  eine 1-Form. Sei  $\gamma$  ein Weg in  $\mathbb{R}^2$ , der die Teilmenge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [-1, 1], y^3 = x\}$  von  $(-1, -1)$  nach  $(1, 1)$  durchläuft. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \lambda.$$

(b) An welchen Punkten im  $\mathbb{R}^2$  hat der Gradient der Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

den grössten Betrag?

**Aufgabe 6.**

[6 Punkte]

Seien  $b > a > 0$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  das Gebiet, das von den drei Kurven mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= bx, \\ xy &= 1, \quad (x > 0) \\ y &= ax \end{aligned}$$

beschränkt wird. Skizzieren Sie das Gebiet  $\Omega$  und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} xy \, d\mu.$$

**Aufgabe 7.**

[6 Punkte]

Gegeben sind das Gebiet  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 1], y \in [0, 2]\}$ , die Funktion

$$\begin{aligned} f: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin(xy) \end{aligned}$$

und das Vektorfeld  $w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds  $w$  von unten nach oben durch den Graphen  $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$  der Funktion  $f$ .

**Aufgabe 8.** Berechnen Sie

[6 Punkte]

$$\int_{\gamma} v \cdot d\vec{s}$$

für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x - 2yz \\ e^x - 9z \\ y^2 - 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entlang des eingezeichneten Wegs  $\gamma$ .

