



Aufgabe 1. [8 Punkte]

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}.$$

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 2^n \ge 1 + n.$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 + 3^n} z^n.$$

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktionenfolge $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n)$$

für $n \to \infty$ und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

Aufgabe 2. [10 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass folgende Funktion f streng monoton wachsend und bijektiv ist.

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

 $x \mapsto e^x - e^{-x} + 1$

Sei $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f.Berechnen Sie die Werte

$$f^{-1}(1)$$
 und $(f^{-1})'(1)$.

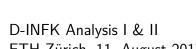
(b) Für welche $q \in \mathbb{N}$ konvergiert das folgende uneigentliche Integral?

$$\int_0^1 \frac{1-t^q}{1-t} \, dt$$

- (c) Finden Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g(x) = \log(\cosh x)$ um $x_0 = 0$.
- (d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z\in\mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = i$$

und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.





ETH Zürich, 11. August 2017

Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion

[6 Punkte]

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

 $(x,y) \mapsto xy.$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und -werte von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Aufgabe 4. [11 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Lösungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Systems

$$\begin{cases} f'(x) = 4f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 8f(x) - 4g(x) \end{cases}$$

zu den Anfangsdaten f(0) = 3 und g(0) = 5.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2\cos(x^2)$$

für x > 0 zum Beispiel durch "Variation der Konstanten".

Aufgabe 5. [6 Punkte]

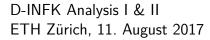
(a) Sei $\lambda = ye^x dx + e^x dy$ eine 1-Form. Sei γ ein Weg in \mathbb{R}^2 , der die Teilmenge $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\in[-1,1],\ y^3=x\}$ von (-1,-1) nach (1,1) durchläuft. Berechnen Sie $\int_{\alpha} \lambda$.

(b) An welchen Punkten im \mathbb{R}^2 hat der Gradient der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

den grössten Betrag?







Aufgabe 6. [6 Punkte]

Seien b>a>0. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ das Gebiet, das von den drei Kurven mit den Gleichungen

$$y = bx,$$

$$xy = 1, \quad (x > 0)$$

$$y = ax$$

beschränkt wird. Skizzieren Sie das Gebiet Ω und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} xy \, d\mu.$$

Aufgabe 7. [6 Punkte]

Gegeben sind das Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 2]\},$ die Funktion

$$f \colon \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \sin(xy)$$

und das Vektorfeld $w \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds w von unten nach oben durch den Graphen $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ der Funktion } f.$

Aufgabe 8. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} v \cdot d\vec{s}$$

für das Vektorfeld

$$v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x - 2yz \\ e^x - 9z \\ y^2 - 3z \end{pmatrix}$$

entlang des eingezeichneten Wegs γ .



