1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. [6 Punkte]

a) Finden Sie die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G} = \operatorname{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & x(t) & \longmapsto & t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2\,,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3\,.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c**) beschrieben wird?

5. **[6 Punkte]** Seien $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ beliebig, und $I_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $I_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Identitätsmatrizen.

a) Berechnen Sie

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}.$$

b) Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe **a**) und Determinanten, um zu zeigen, dass AB und BA dieselben nicht-nullen Eigenwerte mit <u>derselben Multiplizität</u> haben.