



Aufgaben:

1. Wahr oder Falsch [10 Points]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **2 Punkte**, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt **-2 Punkte**. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
1) Das Newton-Verfahren angewendet auf das Nullstellenproblem $3x - 2y = -1$ $12x + 3y = 18$ konvergiert nach nur einer Iteration.		
2) Sei f eine skalare Funktion und es gebe zwei Punkte $a < b$ in denen f gemäss $f(a)f(b) < 0$ verschiedene Vorzeichen aufweist. Dann gibt es immer mindestens eine Nullstelle im Intervall $[a, b]$.		
3) Die Simpson-Regel integriert $\int_0^2 x^2 + x^{3/2} + x + x^{1/2} dx$ exakt weil sie Genauigkeitsgrad $q = 3$ hat.		
4) Sei \mathbb{P}_n der Vektorraum aller Polynome von Grad kleiner gleich n auf dem Intervall $[a, b]$. Dann integriert eine $(n+1)$ -Punkte Gauss-Legendre Quadraffregel folgendes Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) \cdot q(x) dx,$ für alle $p, q \in \mathbb{P}_n$ exakt.		
5) Das folgende Anfangswertproblem genügt den Voraussetzungen von Picard-Lindelöf $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{(y(t) - 1)^2}, \quad y(0) = -1.$		

Bitte wenden!

2. Verbesserte Polygonzugmethode von Euler [10 Punkt(e)]

In dieser Aufgabe wollen wir eine Verbesserung gegenüber der Euler Methode implementieren. Die verbesserte Polygonzugmethode von Euler ist gegeben durch

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_k, y_k), \\k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\y_{k+1} &= y_k + hk_2.\end{aligned}$$

- a) [3 Punkt(e)] Skizzieren Sie dieses Verfahren in folgenden Richtungsfeld, d.h. skizzieren Sie direkt Abbildung 1.

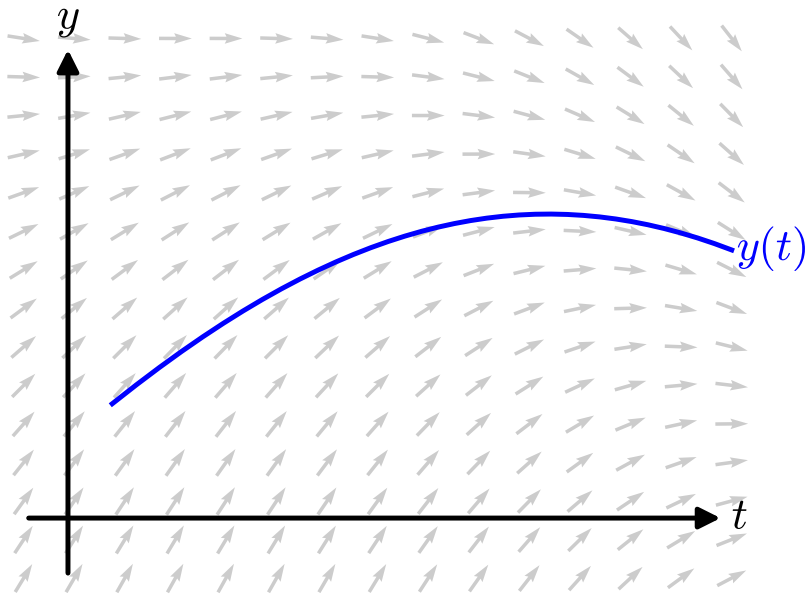


Abbildung 1



b) [7 Punkt(e)] Implementieren Sie dieses Verfahren in folgendem Matlab Template.

```
function [t,y] = verbEuler(f,t0,T,y0,N)

% Zweck: integriere eine gewoehnliche Diff.-Gleichung erster
%        Ordnung mit der verbesserten Polygonzugmethode von
%        Euler.
%
% Parameters:
% f         rechte Seite f(t,y(t)) der gew. Diff.-Gl.
% t0,T      Start- und End-Zeit
% y0        Anfangswert
% N         Anzahl Schritte
%
% Returns:
% t         Zeiten
% y         approx. Loesung zu Zeiten t

end
```

Bitte wenden!



3. Quadratur [10 Punkt(e)]

Gegeben seien folgende zwei Stützstellen

$$x_0 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6},$$

zugehörige Stützwerte y_0, y_1 , und das Polynom ersten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1x.$$

- a) [1 Punkt(e)] Stellen Sie die Interpolationsbedingungen auf.
- b) [1 Punkt(e)] Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ passend zu obigen Stützstellen und Stützwerte.
- c) [2 Punkt(e)] Konstruieren Sie eine Quadraturregel auf dem Intervall $[0, 1]$ mit obigen Stützstellen:

$$Q[f] = \sum_{j=0}^1 w_j \cdot f(x_j) \approx \int_0^1 f(x) dx.$$

- d) [1.5 Punkt(e)] Bestimmen Sie den Genauigkeitsgrad q Ihrer Quadraturregel aus c).
- e) [0.5 Punkt(e)] Transformieren Sie Ihre Quadraturregel aus c) auf ein beliebiges Intervall $[a, b]$.
- f) [2 Punkt(e)] Bestimmen Sie die auf Ihre Quadraturregel aus c) basierende Quadraturregel Q_{2D} zur Annäherung des Integrals

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \approx Q_{2D}[f].$$

- g) [2 Punkt(e)] Für welche $q_1 \geq 0$ und $q_2 \geq 0$ gilt

$$Q_{2D}[x^{q_1} \cdot y^{q_2}] = \int_0^1 \int_0^1 x^{q_1} \cdot y^{q_2} dx dy.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Siehe nächstes Blatt!



4. *Konsistenzordnung und Stabilitätsfunktion* [10 Punkt(e)]

Wir betrachten das durch folgendes Butcher Tableau definierte Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ -1 & 2 & \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

- a) [1 Punkt(e)] Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).
- b) [5 Punkt(e)] Zeigen Sie, dass dieses Verfahren eine Konsistenzordnung von mindestens zwei hat.
- c) [2 Punkt(e)] Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion dieses Verfahren.
- d) [2 Punkt(e)] Bestimmen Sie das Stabilitätsintervall dieses Verfahren.

Bitte wenden!



5. DGL zweiter Ordnung und Steifigkeit [5 Punkt(e)]

Gegeben ist folgendes Anfangswertproblem (AWP) zweiter Ordnung

$$\ddot{y}(t) = -1001\dot{y}(t) - 1000y(t),$$

mit

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 1.$$

- a) [2 Punkt(e)] Schreiben Sie obiges AWP um in ein AWP erster Ordnung.
- b) [3 Punkt(e)] Geben Sie eine präzise Schranke für die Schrittweite h an, wenn obiges AWP mit dem Verfahren von Heun stabil berechnet werden soll.

Zur Erinnerung: Das Verfahren von Heun ist gegeben durch

0		
1	1	
<hr/>		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$