Aufgabe 1

Multiple-Choice (nur die Antwort zählt; es gibt pro Frage genau eine richtige Antwort; 1 Punkt pro richtiger Antwort, 0 Punkte für eine falsche Antwort).

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ist kompakt?

(A) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^4 + 2024y^{2024} \leq 1\}$.

(B) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$.

(C) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 \leq 1\}$.

(D) $\{(\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1+t^2}) \mid t \in (-1,1)\}$.

1.MC2 [1 Punkt] Sei f eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Welche der folgenden Bedingungen ist äquivalent dazu, dass f differenzierbar ist?

(A) f ist stetig.

(B) Alle Richtungsableitungen von f existieren.

(C) Alle partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig.

(D) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine $m \times n$ Matrix A, sodass $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$.

1.MC3 [1 Punkt] Welche der folgenden Gleichungen ist eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE), die von der Funktion $y\colon (0,1) \to \mathbb{R}, y(x) = e^x$ gelöst wird?

(A) $y'(x) = \frac{1}{y(-x)}$.

(B) $y(x) \cdot y'(x) \cdot y''(x) = e^{3x}$.

1.MC4 [1 Punkt] Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung $y^{(4)} - y' = y$. Welche Dimension hat der Vektorraum der Lösungen mit $y(2) = y'(2) = 1$?

(A) die Lösungen bilden gar keinen Vektorraum.

(B) 0

(C) 2

(D) 3

1.MC5 [1 Punkt] Sei V ein Viertelsegment einer Kreisscheibe mit Radius 1 (mit anderen Worten, der Teil der Einheitskreisscheibe im ersten Quadranten). Wie weit ist der Schwerpunkt von V vom Mittelpunkt der Kreisscheibe entfernt?

(A) $\sqrt{2}/2$.

(B) $2\sqrt{2}/\pi$.

(C) $4\sqrt{2}/(3\pi)$.

(D) $\sqrt{2}/3$.

1.MC6 [1 Punkt] Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Jacobimatrix überall invertierbar ist, dann ist f injektiv.

(A) Wahr.

(B) Falsch.

1.MC7 [1 Punkt] Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$f(x,y) = (x^3 + 2xy, y^2 + x^2)$$

und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der Weg $\gamma(t) = (\sin(t\pi)e^{t^2}, 3\sin(t\pi/2)e^{t^3-t})$. Was ist der Wert des Wegintegrals von f entlang γ?

(A) 0.

(B) 3.

(C) 9.

(D) 27.

1.MC8 [1 Punkt] Das Vektorfeld $f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (\cos(1/x)\sin(1/y), \quad \sin(1/x)\cos(1/y))$$

ist konservativ.

(A) Wahr.

(B) Falsch.

1.MC9 [1 Punkt] Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$. Das uneigentliche Integral

$$\int_D \frac{1}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} dxdy \ldots$$

(A) ... divergiert.

(B) ... ist gleich π.

(C) ... ist gleich -2π.

(D) ... ist gleich $1/2$.

1.MC10 [1 Punkt] Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $r > 0$. Dann ist das Integral

$$\int_{[0,r]^n} f(x)dx$$

gleich

(A) $r^n \int_{[0,1]^n} f(rx)dx$

(B) $r^n \int_{[0,1]^n} f(x/r)dx$

(C) $r^{-n} \int_{[0,1]^n} f(rx)dx$

(D) $r^{-n} \int_{[0,1]^n} f(x/r)dx$

Aufgabe 2

Box-Aufgabe (nur die Antwort zählt, der Rechenweg wird bei der Korrektur ignoriert; 2 Punkte pro richtiger Antwort, 0 Punkte für eine fehlerhafte Antwort).

2.A1 [2 Punkte] Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

2.A2 [2 Punkte] Bestimmen Sie die Hessische der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1 + \sin(x)}{1 - y}$$

bei $(0, 0)$.

2.A3 [2 Punkte] Bestimmen Sie ein Potential des Vektorfelds $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (\cos(x + y + z) + e^{yz}, xze^{yz} + \cos(x + y + z), xye^{yz} + \cos(x + y + z)).$$

2.A4 [2 Punkte] Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfelds $V(x, y) = (4y^3, x^4)$ entlang des Weges $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

2.A5 [2 Punkte] Geben Sie eine Parametrisierung der Tangentialebene bei $(0, 0)$ des Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(1 + x + x^2)\cos(x + y)$ an.

Aufgabe 3

[6 Punkte] Sei A der Vollzylinder, der aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ besteht, die von der y–Achse Abstand höchstens r haben. Hier ist r eine reelle Konstante. Sei B der abgeschnittene Vollzylinder, der aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ besteht, die von der x–Achse Abstand höchstens r haben, und für die $x \geq 0$ gilt.
Berechnen Sie das Volumen von $A \cap B$ in Abhängigkeit von r.

Aufgabe 4

Sei $f\colon (-3,3)\times(-3,3)\to\mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x)$.

4.A1 **[1 Punkt]** Begründen Sie, warum f eine C^∞-Funktion ist.

4.A2 **[2 Punkte]** Berechnen Sie für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ den Gradienten und die Hessische von f.

4.A3 **[2 Punkte]** Finden Sie die kritischen Punkte von f im Definitionsbereich $(-3,3)\times(-3,3)$ von f.

4.A4 **[3 Punkte]** Entscheiden Sie für jeden kritischen Punkt, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x^2 + \alpha^2) + y = 0.$$

Hier ist $\alpha > 0$ ein reeller positiver Parameter, und y die gesuchte Funktion.

5.A1 [**2 Punkte**] Finden Sie, in Abhängigkeit von α, alle reellwertigen, auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen der Differentialgleichung.

5.A2 [**3 Punkte**] Finden Sie die Lösung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'(x^2 + 1) + y = \frac{2x^3 + 2x}{e^{\arctan(x)}}$$

mit $y(0) = 2024$.

5.A3 [**3 Punkte**] Finden Sie eine maximale Lösung des Anfangswertproblems $y'x^2+y = 0$, $y(1) = 1$, und geben Sie den Definitionsbereich dieser Lösung an. Ist diese Lösung eindeutig?

Aufgabe 6

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \geq y \geq x^2 - 2x\}$ und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = 5x^2 - 10x + 2y^2$. Sei ausserdem $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 > y > x^2 - 2x\}$ und

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,3] \text{ und } y = 3\} \quad \cup \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,3] \text{ und } y = x^2 - 2x\}.$$

6.A1 [**2 Punkte**] Finden Sie die kritischen Punkte von f auf D_1 und die Werte die f dort annimmt.

6.A2 [**1 Punkt**] Begründen Sie kurz, dass f auf D_2 und auf D jeweils ein globales Minimum und Maximum annimmt.

6.A3 [**4 Punkte**] Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f auf D_2.

6.A4 [**1 Punkt**] Bestimmen Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f auf D und die Werte die f dort annimmt.