Aufgabe 1

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Für die ersten zwei Fragen sei $\Omega = \{0,1\}^2$, d.h. $\Omega = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$, und wir betrachten das Laplace-Modell auf Ω. Definieren Sie die Zufallsvariablen X und Y durch $X(\omega_1,\omega_2) = \omega_1$ und $Y(\omega_1,\omega_2) = \omega_2$ für $\omega = (\omega_1,\omega_2) \in \Omega$.

1.MC1 [1 Punkt] Berechnen Sie $\mathbb{P}[X = Y]$.

(A) $\mathbb{P}[X = Y] = \frac{1}{2}$.
(B) $\mathbb{P}[X = Y] = 1$.
(C) $\mathbb{P}[X = Y] = \frac{1}{3}$.
(D) $\mathbb{P}[X = Y] = \frac{1}{4}$.

1.MC2 [1 Punkt] Berechnen Sie $\mathbb{E}[XY]$.

(A) $\mathbb{E}[XY] = 0$.
(B) $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{2}$.
(C) $\mathbb{E}[XY] = 1$.
(D) $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{4}$.

Für die nächsten zwei Fragen seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-2x-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) = \begin{cases} 2e^{-2x-y}, & \text{wenn } x \geq 0 \text{ und } y \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist die Randdichte f_X von X?

(A) $f_X(x) = e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$.
(B) $f_X(x) = 2e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$.
(C) $f_X(x) = 2e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$.
(D) $f_X(x) = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

1.MC4 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von e^{-Y}?

(A) $\mathbb{E}[e^{-Y}] = e^{-1}$.
(B) $\mathbb{E}[e^{-Y}] = 2$.
(C) $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{2}$.
(D) $\mathbb{E}[e^{-Y}] = 1$.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe liegt für jede Frage die Anzahl der richtigen Antworten zwischen 0 und 4. (Multiple choice)

Wir haben ein Kartendeck mit 10 Karten, nummeriert von 1 bis 10. Für jede Zahl in $\{1, \dots, 10\}$ gibt es also genau eine Karte mit dieser Zahl. Wir ziehen nacheinander drei Karten, ohne die Karten zurückzulegen. Seien X, Y, Z Zufallsvariablen, die die jeweiligen Zahlen der gezogenen Karten darstellen.

2.MC1 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) X und Y sind unabhängig.

(B) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.

(C) X und Y haben die gleiche Verteilung.

(D) Die Verteilungsfunktion von Z ist stetig.

2.MC2 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) $\mathbb{E}[XY] \geq 0$.

(B) $\mathrm{Cov}(2X - Y, 2Y) = 4\mathrm{Cov}(X, Y) - 2\mathrm{Var}[Y]$.

(C) $\mathbb{P}[Y = 2 \,|\, X = 1] > \mathbb{P}[Y = 2]$.

(D) $\mathbb{E}[X + Y + Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z]$.

Für die nächste Frage sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, und wir bezeichnen mit Φ die Verteilungsfunktion von X.

2.MC3 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) $\mathbb{P}[X \leq 34] = 1 - \Phi(-34)$.

(B) Für jedes $a < b$ gilt $\mathbb{P}[X \in (a, b]] > 0$.

(C) Für jedes $a < b$ gilt $\mathbb{P}[X \in (a, b]] = \Phi(b) - \Phi(a)$.

(D) Die Zufallsvariable $Z := 2X - 3$ hat die Verteilung $\mathcal{N}(-3, 2)$.

Für die nächste Frage seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$.

2.MC4 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(A) $\mathbb{P}[\Omega \setminus (A \cap B)] \leq \mathbb{P}[A^c] + \mathbb{P}[B^c]$.

(B) Wenn $A \subseteq B$ und $\mathbb{P}[B] > 0$ ist, dann gilt $\mathbb{P}[A|B] \geq \mathbb{P}[A]$.

(C) Wenn $\mathbb{P}[A] > 0$ und $0 < \mathbb{P}[B] < 1$ ist, dann gilt $\mathbb{P}[B|A] = \dfrac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A|B] + \mathbb{P}[A|B^c]}$.

(D) $\mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]$.

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Seien X und Y zwei unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, die Werte in $\{1, 2\}$ annehmen, wobei

$$\mathbb{P}[X = i] = \mathbb{P}[Y = i] = \frac{1}{2}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Definieren Sie $Z := X + Y$.

3.MC1 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathbb{P}[Z = 3]$?

(A) $\mathbb{P}[Z = 3] = \frac{1}{4}$.

(B) $\mathbb{P}[Z = 3] = 0$.

(C) $\mathbb{P}[Z = 3] = \frac{1}{2}$.

(D) $\mathbb{P}[Z = 3] = \frac{1}{3}$.

3.MC2 [1 Punkt] Was ist die Verteilungsfunktion von Z?

(A) $F_Z(a) = \begin{cases} 0, & a < 2, \\ 1/4, & 2 \leq a < 3, \\ 5/6, & 3 \leq a < 4, \\ 1, & 4 \leq a. \end{cases}$

(B) $F_Z(a) = \begin{cases} 0, & a < 2, \\ 1/3, & 2 \leq a < 3, \\ 3/4, & 3 \leq a < 4, \\ 1, & 4 \leq a. \end{cases}$

(C) $F_Z(a) = \begin{cases} 0, & a < 2, \\ 1/4, & 2 \leq a < 3, \\ 1/2, & 3 \leq a < 4, \\ 1, & 4 \leq a. \end{cases}$

(D) $F_Z(a) = \begin{cases} 0, & a < 2, \\ 1/4, & 2 \leq a < 3, \\ 3/4, & 3 \leq a < 4, \\ 1, & 4 \leq a. \end{cases}$

3.MC3 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathrm{Var}[Y]$?

(A) $\mathrm{Var}[Y] = \frac{19}{4}$.

(B) $\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{2}$.

(C) $\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{4}$.

(D) $\mathrm{Var}[Y] = 0$.

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

3.MC4 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathrm{Cov}(X, Z)$?

(A) $\mathrm{Cov}(X, Z) = \frac{1}{4}$.
(B) $\mathrm{Cov}(X, Z) = \frac{19}{4}$.
(C) $\mathrm{Cov}(X, Z) = 0$.
(D) $\mathrm{Cov}(X, Z) = \frac{1}{2}$.

3.MC5 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathbb{P}[X = 1 \mid Z \in \{2, 3\}]$?

(A) $\mathbb{P}[X = 1 \mid Z \in \{2, 3\}] = \frac{5}{6}$.
(B) $\mathbb{P}[X = 1 \mid Z \in \{2, 3\}] = \frac{2}{3}$.
(C) $\mathbb{P}[X = 1 \mid Z \in \{2, 3\}] = \frac{1}{2}$.
(D) $\mathbb{P}[X = 1 \mid Z \in \{2, 3\}] = 1$.

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = cxye^{-y}\mathbf{1}_{[0,y]}(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) = \begin{cases} cxye^{-y}, & \text{wenn } 0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq y, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

4.A1 [**2 Punkte**] Finden Sie den Wert von c.

Hinweis: Sie können die Identität $\int_0^\infty y^n e^{-y} \mathrm{d}y = n!$ für $n \in \mathbb{N}$ benutzen.

4.A2 [**1 Punkt**] Finden Sie die Randdichte f_Y von Y.

4.A3 [**1 Punkt**] Finden Sie eine Formel für die Dichte der Zufallsvariablen $T \coloneqq 2Y$ ausgedrückt mit f_Y.

4.A4 [**1 Punkt**] Berechnen Sie den Erwartungswert von X^2/Y.

Aufgabe 5

Seien $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_i = -1] = p$ für ein $p \in (0,1)$.

5.A1 [2.5 Punkte] Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p. Sie müssen **nicht** überprüfen, ob der gefundene Punkt tatsächlich ein Maximum ist.

Wir interpretieren nun X_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ als Ergebnisse von Spielen in einem Casino. Konkret bedeutet

$$\begin{aligned} \{X_i = -1\} &= \text{“das Casino gewinnt das } i\text{-te Spiel”}, \\ \{X_i = 1\} &= \text{“der Spieler gewinnt das } i\text{-te Spiel”}. \end{aligned}$$

Das Casino behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, mindestens 0.5 ist. Als Spieler haben wir jedoch Zweifel an dieser Behauptung und möchten sie mit einem statistischen Test auf Basis der beobachteten Werte von $X_1, \dots, X_n$ widerlegen.

5.A2 [0.5 Punkte] Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese für diese Situation.

5.A3 [2 Punkte] Finden Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes eine geeignete Teststatistik und deren approximative Verteilung für einen geeigneten Wert von p unter der Nullhypothese. “Geeignet” bedeutet hier, dass die approximative Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese bekannt ist und von keinen Parametern abhängt.

5.A4 [3 Punkte] Finden Sie den approximativen kritischen Bereich (d.h. beschreiben Sie das Testverfahren) für das Signifikanzniveau 5%.

Quantiltabelle der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung

0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
0	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

Zum Beispiel ist $\Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$.