PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 1: Multiple-Choice [*16 Punkte*]

(1.a) [*2 Punkte*] Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp\left(\frac{3}{4}\pi \mathrm{i}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \mathrm{i}b\right)$$

reell?

i. $b = 1$ ii. $b = 2$ iii. $b = 0$ iv. $b = \sqrt{2}$

(1.b) [*2 Punkte*] Seien $z = 2(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4))$ und $w = 4(\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6))$. Was ist dann der Wert von zw^{-1}?

i. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

iii. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

ii. $8\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

iv. $8\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

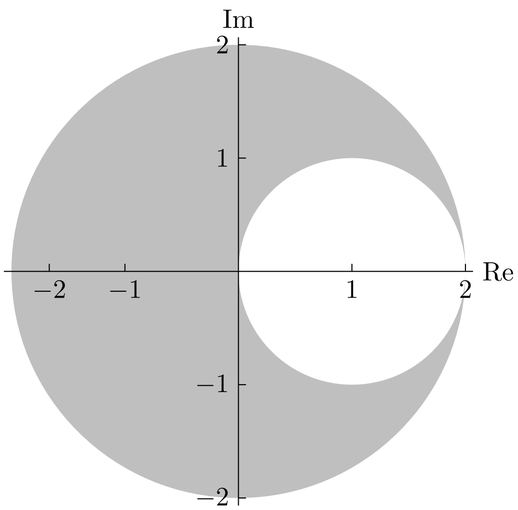
(1.c) [*2 Punkte*] Welche Menge ist in der Abbildung unten grau gefärbt?

i. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 1\}$

iii. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 4\}$

ii. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 1\}$

iv. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 2\}$



(1.d) [*2 Punkte*] Welche der folgenden Funktionen ist holomorph?

i. $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - 2\mathrm{i}xy + y^2$

iii. $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2$

ii. $f(x + \mathrm{i}y) = y + \mathrm{i}x$

iv. $f(x + \mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$

(1.e) [*2 Punkte*] Was ist der Wert des Integrals

$$\int_\gamma \exp(z^3)\,\mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ den Einheitskreis mit negativer mathematischer Orientierung parametrisiert?

i. 1 ii. 0 iii. $-\mathrm{e}$ iv. $-3\mathrm{e}$

(1.f) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Polstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ an $z_0 \in \mathbb{C}$. Was ist dann die Ordnung der Polstelle z_0 von f'?

i. $n+1$ ii. $n-1$ iii. n iv. $2n$

(1.g) [*2 Punkte*] Sei

$$f(t) := \begin{cases} \sin(t) & \text{wenn } t \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

i. $(f * f)(0) < 0$

ii. $(f * f)(0) > 0$

iii. $(f * f)(0) = 0$

iv. $(f * f)(0)$ konvergiert nicht

(1.h) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante, gerade Funktion mit kontinuierlicher Fouriertransformation $\widehat{f}$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

i. $\widehat{f}(s) \in \mathbb{R}$, $(f')\widehat{\ }(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

ii. $\widehat{f}(s), (f')\widehat{\ }(s) \in \mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

iii. $\widehat{f}(s), (f')\widehat{\ }(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

iv. $\widehat{f}(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $(f')\widehat{\ }(s) \in \mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Aufgabe 2: Residuensatz [*16 Punkte*] Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 6x + 10)^2} \, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Sollte ein Kurvenintegral gegen Null konvergieren in Ihrer Berechnung, so argumentieren Sie warum dies der Fall ist.

Lösung.

Click to BUY NOW! PDF-XChange Editor www.pdf-xchange.com

Aufgabe 3: Fourierreihe [*16 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **gerade 2π-periodische Funktion**, die durch

$$f(t) = \sinh(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

für $t \in [0, \pi]$, gegeben ist.

(3.a) [*4 Punkte*] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f auf $[-3\pi, 3\pi]$.

(3.b) [*10 Punkte*] Weisen Sie nach, dass die Koeffizienten a_n der reellen Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

von f gegeben sind durch

$$a_n = \frac{2(-1)^n \cosh(\pi) - 2}{\pi(n^2+1)}, \qquad n \geq 0.$$

Hinweis: Es gilt

$$\cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(3.c) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie nun auch die Koeffizienten b_n, $n \geq 1$.

Lösung.

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 4: Laplacetransformation [*16 Punkte*] Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = 1 - t^2, \qquad t > 0,$$
$$\dot{y}(0) = -1, \qquad y(0) = 1.$$

Hinweis: Sind $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > 0$, und

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > a$.

Lösung.