PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 1. **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}.$$

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 2^n \geq 1+n.$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1+3^n} z^n.$$

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktionenfolge $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n)$$

für $n \to \infty$ und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

Aufgabe 2. **[10 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass folgende Funktion f streng monoton wachsend und bijektiv ist.

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

Sei $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie die Werte

$$f^{-1}(1) \quad \text{und} \quad (f^{-1})'(1).$$

(b) Für welche $q \in \mathbb{N}$ konvergiert das folgende uneigentliche Integral?

$$\int_0^1 \frac{1-t^q}{1-t}\, dt$$

(c) Finden Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g(x) = \log(\cosh x)$ um $x_0 = 0$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = i$$

und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.

Click to BUY NOW! PDF-XChange Editor www.pdf-xchange.com

Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion **[6 Punkte]**

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und -werte von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Aufgabe 4. **[11 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Lösungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Systems

$$\begin{cases} f'(x) = 4f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 8f(x) - 4g(x) \end{cases}$$

zu den Anfangsdaten $f(0) = 3$ und $g(0) = 5$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2\cos(x^2)$$

für $x > 0$ zum Beispiel durch „Variation der Konstanten".

Aufgabe 5. **[6 Punkte]**

(a) Sei $\lambda = ye^x\,dx + e^x\,dy$ eine 1-Form. Sei γ ein Weg in $\mathbb{R}^2$, der die Teilmenge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in [-1,1],\ y^3 = x\}$ von $(-1,-1)$ nach $(1,1)$ durchläuft. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \lambda.$$

(b) An welchen Punkten im $\mathbb{R}^2$ hat der Gradient der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{aligned}$$

den grössten Betrag?

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Aufgabe 6. **[6 Punkte]**

Seien $b > a > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, das von den drei Kurven mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= bx, \\ xy &= 1, \quad (x > 0) \\ y &= ax \end{aligned}$$

beschränkt wird. Skizzieren Sie das Gebiet Ω und berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega xy \, d\mu.$$

Aufgabe 7. **[6 Punkte]**

Gegeben sind das Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x \in [0, 1],\; y \in [0, 2]\}$, die Funktion

$$\begin{aligned} f \colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin(xy) \end{aligned}$$

und das Vektorfeld $w \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds w von unten nach oben durch den Graphen $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3\,;\; (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$ der Funktion f.

Aufgabe 8. Berechnen Sie **[6 Punkte]**

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$$

für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} v \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x - 2yz \\ e^x - 9z \\ y^2 - 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entlang des eingezeichneten Wegs γ.