Prüfung Komplexe Analysis
ITET, RW

Nachname:	
Vorname:	
Legi Nr.:	
Exam Nr.:	

Diese Seite enthält die allgemeinen Daten des Studenten: Name, Vorname, Studentenausweisnummer (Legi) und Prüfungsnummer. Die Prüfungsnummer ist eine Nummer, die den Studenten eindeutig identifiziert.

Mit seiner Unterschrift auf dieser Seite bestätigt der Student, dass die oben genannten persönlichen Daten korrekt sind.

Unterschrift

ITET, RW
Prof. Dr. A. Iozzi

Winter 2023
401-0302-10L

Prüfung Komplexe Analysis
ITET, RW

Exam Nr.:	

Aufgabe	Erstkorrektur	Zweitkorrektur
1		
2		
3		
Total		

Hinweise:

i. Schalten Sie ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es in einer Tasche.

ii. Legen Sie Ihre ETH-Karte (Legi) auf den Tisch.

iii. Die Prüfung besteht aus einer Multiple-Choice Aufgabe mit acht Teilaufgaben (Aufgaben mit jeweils vier Antworten von denen nur eine wahr ist) und zwei Aufgaben zur schriftlichen Beantwortung.

iv. Schreiben Sie entweder in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Wenn Sie diese Regeln missachten, werden Sie möglicherweise nicht die volle Punktzahl erreichen können!

v. Beantworten Sie die Multiple-Choice Aufgaben auf das beiliegende Blatt. Für jede Multiple-Choice-Frage gibt es für die richtige Antwort **3 Punkte**, für die falsche Antwort **-1 Punkt** und für keine Antwort **keine Punkte**. Es ist erlaubt, mehr als eine Antwort auszuwählen, und die Gesamtpunktzahl wird als Summe der Punkte für jede ausgewählte Antwort berechnet.

vi. Beantworten Sie die schriftlichen Aufgaben auf den separaten Blättern.

vii. Begründen Sie Ihre Aussagen bei den schriftlichen Aufgaben. Nicht motivierte Lösungen werden dort nicht mit der vollen Punktezahl bewertet!

viii. Öffnen Sie dieses Dossier erst, wenn die Assistierenden das Zeichen dazu geben!

Viel Erfolg!

Datum: 15.02.2023
Prüfungsdauer: 120 min.

Aufgabe 1: Multiple Choice [*Für jede Multiple-Choice-Frage gibt es für die richtige Antwort **3 Punkte**, für die falsche Antwort **-1 Punkt** und für keine Antwort **keine Punkte**. Es ist erlaubt, mehr als eine Antwort auszuwählen, und die Gesamtpunktzahl wird als Summe der Punkte für jede ausgewählte Antwort berechnet.*]

1) Was ist eine Polarform von $\sqrt{3 - \imath}$?

   a) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \imath \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
   b) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
   c) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \imath \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
   d) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2) Welche der folgenden Mengen ist nicht wegzusammenhängend?

   a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z < 0 \wedge |z| > 5\}$.
   b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 5 \wedge |z-1| > 1\}$.
   c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| < 2 \vee |z+2| < 1\}$.
   d) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 4\}$.

3) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

   mit $c_{3n} = n$, $c_{3n+1} = n^2$ und $c_{3n+2} = n^3$, $n \geq 0$. Dann ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe

   a) $R = 0$.
   b) $R = 1$.
   c) $R = \infty$.
   d) nicht bestimmbar.

4) Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{\cos(z) - 1}$$

   hat in $z_0 = 0$ ...

   a) eine hebbare Singularität.
   b) einen Pol erster Ordnung.
   c) einen Pol zweiter Ordnung.
   d) eine wesentlichen Singularität.

5) Sei

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \in (-\pi, 0], \\ \sin t, & \text{für } t \in (0, \pi] \end{cases}$$

   die 2π-periodische Funktion. Finden Sie den Koeffizienten a_4 der Fourier-Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)$$

   der Funktion $f(t)$:

   a) 0.
   b) $-\frac{1}{5\pi}$.
   c) $-\frac{1}{15\pi}$.
   d) $-\frac{2}{15\pi}$.

6) Die Fourier-Transformation der Funktion $h(t) := \frac{1}{t^2+k^2}$ ist $\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-k|\xi|}$. Ferner sei g eine absolut integrierbare Funktion mit Fourier-Transformation $\widehat{g}$. Verwenden Sie den Faltungssatz, um die Fourier-Transformation der Funktion

$$f(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{(t-s)^2 + 4} \mathrm{d}s$$

   durch $\widehat{g}$ auszudrücken.

a) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4}\widehat{g}(\xi)\mathrm{e}^{-4|\xi|}$.

b) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2}\widehat{g}(\xi)\mathrm{e}^{-2|\xi|}$.

c) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi^2+4}$.

d) $\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi+2}$.

7) Finden Sie die Laplace-Transformation $\mathcal{L}[y(t)](s)$ der Lösung $y(t)$ der folgenden Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) - 5y(t) = t, \qquad & t > 0, \\ \dot{y}(0) = -1, \qquad & y(0) = 0. \end{aligned}$$

a) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1+s^2}{s(s-5)(s+1)}$.

b) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1+s^2}{s^2(s-5)(s+1)}$.

c) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1-s}{s(s-5)}$.

d) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1-s}{s^2(s-5)}$.

8) Finden Sie die Inverse der folgenden Laplace-Transfromation

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = 6 \cdot \left(\frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s+1)^4} \right).$$

a) $y(t) = 2t^5 \cosh(t)\, H(t)$.

b) $y(t) = 2t^3 \cosh(t)\, H(t)$.

c) $y(t) = 2t^5 \sinh(t)\, H(t)$.

d) $y(t) = 2t^3 \sinh(t)\, H(t)$.

Aufgabe 2 [*10 Punkte*]

a) [*2 Punkte*] Sei $f(x + \imath y) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \imath(4x^3y - 4xy^3)$. Zeigen Sie, dass f holomorph ist.

b) [*4 Punkte*] Berechnen Sie folgendes Wegintegral

$$I := \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

entlang der Kurve γ_1, welche in Abbildung 1 dargestellt ist.

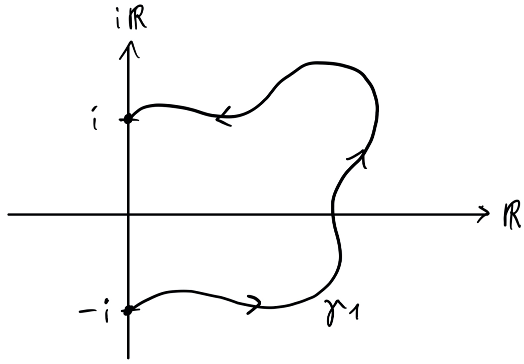

Figure 1: Die Kurve γ_1 startet im Punkt $-\imath$ und endet im Punkt $\imath$.

c) [*4 Punkte*] Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 3 [*12 Punkte*]
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 4x + 13)^2}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.