Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Michael Struwe

11. August 2017

Analysis I & II
Wiederholungsprüfung 2

D-INFK

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 180 Minuten.

- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.

- Schreiben Sie in blau oder schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie ordentlich!
Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.

- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

- Maximalpunktzahl: 59 Punkte.
Für die Bestnote 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[8]	
2	[10]	
3	[6]	
4	[11]	
5	[6]	
6	[6]	
7	[6]	
8	[6]	
Total	[59]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}.$$

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 2^n \geq 1 + n.$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 + 3^n} z^n.$$

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktionenfolge $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n)$$

für $n \to \infty$ und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

Aufgabe 2. **[10 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass folgende Funktion f streng monoton wachsend und bijektiv ist.

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

Sei $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie die Werte

$$f^{-1}(1) \quad \text{und} \quad (f^{-1})'(1).$$

(b) Für welche $q \in \mathbb{N}$ konvergiert das folgende uneigentliche Integral?

$$\int_0^1 \frac{1 - t^q}{1 - t}\, dt$$

(c) Finden Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g(x) = \log(\cosh x)$ um $x_0 = 0$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = i$$

und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion **[6 Punkte]**

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und -werte von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Aufgabe 4. **[11 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Lösungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Systems

$$\begin{cases} f'(x) = 4f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 8f(x) - 4g(x) \end{cases}$$

zu den Anfangsdaten $f(0) = 3$ und $g(0) = 5$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2\cos(x^2)$$

für $x > 0$ zum Beispiel durch „Variation der Konstanten".

Aufgabe 5. **[6 Punkte]**

(a) Sei $\lambda = ye^x\,dx + e^x\,dy$ eine 1-Form. Sei γ ein Weg in $\mathbb{R}^2$, der die Teilmenge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in [-1,1],\ y^3 = x\}$ von $(-1,-1)$ nach $(1,1)$ durchläuft. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \lambda.$$

(b) An welchen Punkten im $\mathbb{R}^2$ hat der Gradient der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{aligned}$$

den grössten Betrag?

Aufgabe 6. **[6 Punkte]**

Seien $b > a > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, das von den drei Kurven mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= bx, \\ xy &= 1, \quad (x > 0) \\ y &= ax \end{aligned}$$

beschränkt wird. Skizzieren Sie das Gebiet Ω und berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega xy \, d\mu.$$

Aufgabe 7. **[6 Punkte]**

Gegeben sind das Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 2]\}$, die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin(xy) \end{aligned}$$

und das Vektorfeld $w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds w von unten nach oben durch den Graphen $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3\,;\ (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$ der Funktion f.

Aufgabe 8. Berechnen Sie **[6 Punkte]**

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$$

für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x - 2yz \\ e^x - 9z \\ y^2 - 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entlang des eingezeichneten Wegs γ.