PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgaben:

1. *Wahr oder Falsch* [**10 Punkt(e)**]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **2 Punkte**, falsch gesetzte Kreuzchen geben *keine* negative Punkte.

	wahr	falsch
1) Das folgende Anfangswertproblem (AWP) $$\dot{y}(t) = 2\sqrt{y^2+5},\ y(0) = 0$$ genügt den Vorrausetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf.		
2) Das Bisektions-Verfahren mit Startintervall $[0,2]$ findet die eindeutige Nullstelle der Gleichung $$e^x - e = 0$$ in nur einer Iteration.		
3) Da die Mittelpunktsregel auf einem Interpolationspolynom nullten Grades basiert hat Sie einen Genauigkeitsgrad von $q = 0$.		
4) Das durch folgendes Butcher-Tableau gegebene Runge-Kutta Einschrittverfahren ist konsistent $$\begin{array}{c\|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$		
5) Implizite Einschrittverfahren sind immer effizienter wie explizite Einschrittverfahren.		

Bitte wenden!

2. *Fragen aus den Übungen* **[15 Punkt(e)]**

a) [**3 Punkt(e)**] *(Serie 4, Aufgabe 3)*
In dieser Aufgabe wollen wir eine adaptive Quadratur Methode zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

entwickeln basierend auf der Trapezregel. Wie in der Vorlesung diskutiert, benötigt man dafür einen Fehler-Schätzer. Hierzu vergleichen wir das Resultat der Trapezregel

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

mit dem Resultat der zusammengesetzten Trapezregel (mit zwei Teil-Intervallen)

$$Q_1^2[f] = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Bestimmen Sie den Fehler-Schätzer $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]|$.

b) [**2 Punkt(e)**] *(Serie 5, Aufgabe 3)*
Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -y(t) + (1 - \sin(t))e^{-5t},\\ y(0) &= 7.\end{aligned}$$

c) [**4 Punkt(e)**] *(Serie 7, Aufgabe 1)*
Geben Sie für das folgende Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

$$\begin{aligned}k_1 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right),\\ y_{j+1} &= y_j + hk_1.\end{aligned}$$

Schreiben Sie Ihre Antworten direkt hier:

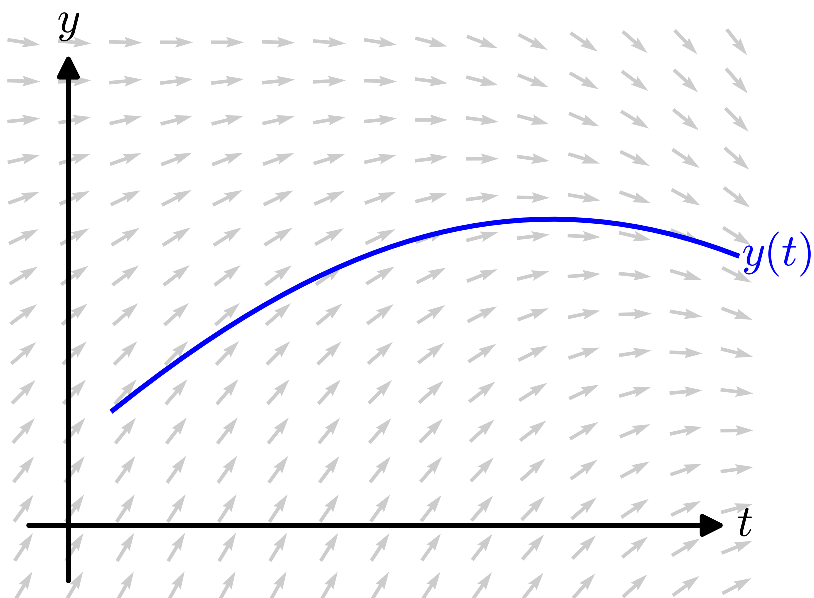
(i)

(ii)

(iii) Richtungsfeld:

Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com



d) [**1 Punkt(e)**] *(Serie 8, Aufgabe 3)*
Ist folgendes SDIRK Verfahren autonomisierungsinvariant

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}?$$

Bitte wenden!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

e) [**5 Punkt(e)**] *(Serie 10, Aufgabe 3)*
Vervollständigen Sie folgende MATLAB Implementierung einer adaptiven Schrittweitensteuerung:

```
  function [t,y] = adaptode(f,t0,T,y0,h0,atol,rtol)

% Parameters: f     ... rechte Seite f(t,y(t)) der gew. Diff.-Gl.
%             t0,T ... Start- und End-Zeit
%             y0   ... Anfangswert
%             h0   ... Anfangs-Schrittweite
%             atol ... Absolute Toleranz
%             rtol ... Relative Toleranz
%
% Returns: t ... Zeiten
%          y ... approx. Loesung zu Zeiten t

% Parameter
  p = 4;          % KO von Verfahren
  hmin = 10*eps;  % kleinste zugelassene Schrittweite
  fac = 0.9;      % Sicherheits-Faktor
  facmin = 0.5;   % kleinste zugelassene Schrittweiten-Verkleinerung
  facmax = 1.5;   % groesste zugelassene Schrittweiten-Vergroesserung

% Initialisiere Zeit- und Loesungs-Vektor
  t = t0;
  y = y0;

% Mache Zeitschritte solange Endzeit nicht erreicht
  j  = 0;    % Initialisiere Schritt-Zaehler
  h  = h0;   % Initialisiere Schrittweite
  epsilon = atol + norm(y0)*rtol; % Initialisiere Fehlerschaetzer
  while (t(end) < T)

    % Zwischenspeicherung der Daten zum j-ten Schritt
    tj = t(end);    % t_j
    yj = y(:,end);  % y_j

    % Setze Schrittweite h
    tol = atol + norm(yj)*rtol;
    h = h*min(             ,max(             ,         *(                          )^(1./(p + 1.))));









    % Verfahren der Ordnung p
    yjp = Verfahren(tj,yj,h);              % y_{j+1}
    % Kontroll-Verfahren der Ordnung p + 1
    yhutjp = KontrollVerfahren(tj,yj,h);   % \hat{y}_{j+1}

    % Fehlerschaetzer
    epsilon = norm(yhutjp - yjp);

    % Kontrolliere Toleranz-Kriterium
    if (                    )
      j = j + 1;
      t =
      y =
    end

  end
```

Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

3. *Stabilitätfunktion und Steifigkeit* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\ddot{y} + \dot{y} - \varepsilon y = \sin(t) \tag{1}$$

mit Anfangswerten $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 1$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, 1]$. Hiebei ist ε ein positiver Parameter.

Die Lösung des AWP (1) soll näherungsweise mit folgendem Einschrittverfahren (ESV) berechnet werden

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \tag{2}$$

a) **[1 Punkt(e)]** Schreiben Sie (1) in ein AWP erster Ordnung.

b) **[3 Punkt(e)]** Ist dieses Problem steif für beliebig kleine $\varepsilon > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) **[3 Punkt(e)]** Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des ESV (2).

d) **[1 Punkt(e)]** Ist das ESV (2) A-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) **[2 Punkt(e)]** Ist das ESV (2) geeignet um das AWP (1) für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ zu lösen? Falls es nicht geeignet ist, geben Sie ein besser geeignetes ESV an.

Bitte wenden!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

4. *Konsistenzordnung und Implementierung* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten das folgende Runge-Kutta Einschrittverfahren (ESV)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j), \\ k_2 &= f(t_j + \frac{3}{4}h, y_j + \frac{3}{4}hk_1), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2). \end{aligned} \tag{3}$$

a) [1 Punkt(e)] Geben Sie das Butcher-Tableau des ESV (3) an.

b) [4 Punkt(e)] Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des ESV (3).

Hinweis: Ein zweistufiges explizites ESV hat höchstens Konsistenzordnung $p = 2$.

c) [2 Punkt(e)] Nun soll das folgende Anfangswertproblem mit dem ESV (3) näherungsweise gelöst werden

$$\dot{\mathbf{y}} = A\,\mathbf{y}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

für den Anfangswert

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und das Zeitintervall $t \in [0, 1]$. Welche Konvergenzordnung erwarten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Falls Sie **b)** nicht gelöst haben, nehmen Sie einfach den Parameter s für die Konsistenzordnung.

Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

d) [3 Punkt(e)] Implementieren Sie dieses Verfahren in folgendem `MATLAB` Template:

```
function [t,y] = ESV(f,t0,T,y0,N)

% Zweck: integriere eine gewoehnliche Diff.-Gleichung erster
%        Ordnung mit gegebenem Einschrittverfahren
%
% Parameters:
% f      ... Rechte Seite f(t,y(t)) der gew. Diff.-Gl.
% t0, T  ... Start- und End-Zeit
% y0     ... Anfangswert
% N      ... Anzahl Schritte
%
% Returns:
% t      ... Zeiten
% y      ... approx. Loesung zu Zeiten t

% Berechne Zeitschritt
h = (T - t0)/N;

% Speicher fuer Zeit & approx. Loesung
t = zeros(1,N+1);
y =

% Setze Anfangswert fuer t
t(1) = t0;

% Setze Anfangswert fuer y



% Integriere
for j=1:N
    t(j+1) = t0 + j*h;
    k1 =
    k2 =

    % Berechne y_{j+1}



end

end
```

Verwenden Sie die folgende Box um zusätzliche Funktionen zu implementieren. Sie können davon ausgehen, dass der Inhalt dieser Box in der selben Datei wie obige Box steht.

Bitte wenden!

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Siehe nächstes Blatt!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

5. *Implizite Trapez-Methode* **[5 Punkt(e)]**

Wir betrachten die logistische Differentialgleichung

$$\dot{y} = y(1-y)$$

mit Anfangswert $y(0) = 1/2$ welche im Zeitintervall $t \in [0,1]$ mit der impliziten Trapez-Methode

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})\right)$$

gelöst werden soll.

a) **[1 Punkt(e)]** Stellen Sie die Gleichung auf welche in jedem Zeitschritt gelöst werden muss.

b) **[3 Punkt(e)]** Schlagen Sie eine zweckmässige Methode vor um Ihre Gleichung aus **a)** näherungsweise zu lösen.

Geben Sie alle nötigen Komponenten der von Ihnen gewählten Methode an.

c) **[1 Punkt(e)]** Was für eine Konvergenzordnung hat Ihr in **b)** gewähltes Verfahren? Sie können annehmen, dass Ihr gewähltes Verfahren konvergiert und Sie nahe genug an einer Lösung sind.