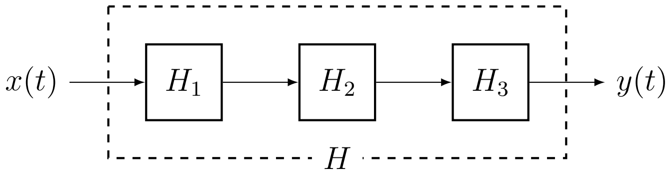
Aufgabe 1 (25 Punkte)

★ (a) (7 Punkte) Gegeben sei folgendes System H,



bestehend aus dem LTI-System H_1 mit Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$(H_1 x)(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-|t-\tau|}\,d\tau,$$

dem LTI-System H_2 mit Impulsantwort

$$h_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 2f_g, & t = 0 \end{cases}, \quad f_g > 0,$$

und dem System H_3 mit Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$(H_3 x)(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

★ i. (1 Punkt) Ist das System H_3 ein LTI-System?
Hinweis: Sie können die Stetigkeit des Operators $\frac{dx(t)}{dt}$ *ohne Beweis annehmen.*

★ ii. (3 Punkte) Berechnen Sie $\widehat{h}_1(f)$ und $\widehat{h}_2(f)$, wobei h_1 die Impulsantwort des LTI-Systems H_1 ist, und stellen Sie die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Systems H_3 im Frequenzbereich dar, d.h., bestimmen Sie $\widehat{(H_3 x)}(f)$ als Funktion von $\widehat{x}(f)$.

iii. (1 Punkt) Ist das Gesamtsystem H ein LTI-System? Wenn ja, geben Sie die Fouriertransformierte $\widehat{h}(f)$ der zugehörigen Impulsantwort h an.

iv. (2 Punkte) Am Eingang des Gesamtsystems H liegt das Signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t/T}, \; T > 0, \; c_k \in \mathbb{C},$$

an. Berechnen Sie die Fourierreihe des Ausgangssignals $y(t) = (Hx)(t)$ in Abhängigkeit von c_k, T und f_g.

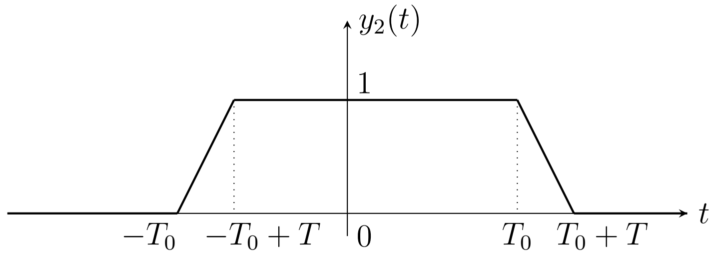
PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

★ (b) (4 Punkte) Gegeben sei nun die Impulsantwort

$$h_4(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

des LTI-Systems H_4, wobei $T > 0$. Bestimmen Sie das zum Ausgangssignal

$$y_2(t) = \begin{cases} \dfrac{T_0 + t}{T}, & -T_0 \leq t \leq -T_0 + T \\ 1, & -T_0 + T \leq t \leq T_0 \\ \dfrac{T_0 + T - t}{T}, & T_0 \leq t \leq T_0 + T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$



gehörige Eingangssignal $x_2(t)$, unter der Annahme $T_0 > T$. Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Aufgabe ohne Rechnung gelöst werden kann.

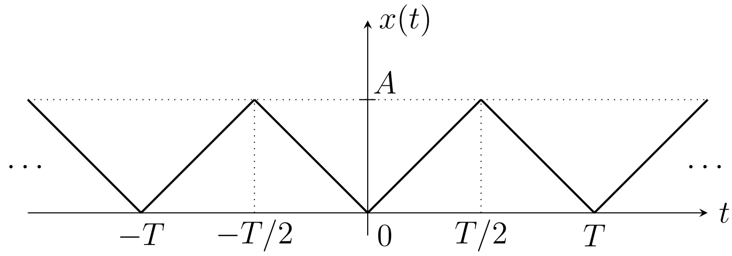
★ (c) (4 Punkte) Ein LTI-System H_5 sei durch die Differentialgleichung

$$-\frac{d^2y}{dt^2}(t) + a^2 y(t) = x(t)$$

charakterisiert, wobei $y(t) = (H_5 x)(t)$ und $a > 0$. Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_5(t)$ des Systems in Abhängigkeit von a.

★ (d) (10 Punkte) Gegeben sei das T-periodische Signal

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{2A}{T}t, & -\dfrac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \dfrac{2A}{T}t, & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases},$$



mit $A > 0,\ T > 0$.

★ i. (8 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/T}$ in Abhängigkeit von A.
Hinweis: Das folgende unbestimmte Integral kann hilfreich sein.

$$\int t e^{at}\, dt = \frac{e^{at}(at-1)}{a^2}, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

ii. (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt.$$

Benutzen Sie dieses Resultat in Kombination mit der Parsevalschen Beziehung für zeitkontinuierliche periodische Signale, um zu beweisen, dass

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Click to BUY NOW! PDF-XChange Editor www.pdf-xchange.com

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Gegeben sei das Signal $x(t)$ mit der zugehörigen Fouriertransformierten $\hat{x}(f)$. Des Weiteren seien $F, F_0 \in (0,\infty)$ mit $F \geq F_0$ und $\hat{x}(f) = 0$, für alle f mit $|f| > F_0$. Das Abtasttheorem besagt, dass $x(t)$ in der Form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2F}\right) g_k(t) \tag{1}$$

dargestellt werden kann, wobei $g_k(t)$ geeignete von $x(t)$ unabhängige Funktionen sind, deren Fouriertransformierte $\hat{g}_k(f) = 0$, für alle f mit $|f| > F_0$ und alle $k \in \mathbb{Z}$, erfüllen. Ziel dieser Aufgabe ist es, den Effekt von Überabtastung zu untersuchen.

★ (a) (5 Punkte) Es sei $\hat{y}(f)$ das $(2F)$-periodische Signal, welches wie folgt definiert ist: $\hat{y}(f) = \hat{x}(f)$, für alle f mit $|f| \leq F$ und $\hat{y}(f + 2F) = \hat{y}(f)$, für alle $f \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$, der Fourierreihe des Signals $\hat{y}(f)$ in Abhängigkeit der Abtastwerte $x(k/(2F))$, $k \in \mathbb{Z}$, des Signals $x(t)$.

(b) (5 Punkte) Verwenden Sie das Resultat aus Teilaufgabe (a), um die Darstellung von $x(t)$ in (1) zu beweisen. Berechnen Sie dazu explizit die zugehörigen Funktionen $g_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, in (1), welche die Bedingungen $\hat{g}_k(f) = 0$, für alle f mit $|f| > F_0$ und $k \in \mathbb{Z}$, erfüllen müssen.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Signals $\hat{y}(f)$ aus Teilaufgabe (a) als Fourierreihe für die Berechnung der inversen Fouriertransformierten des Signals $\hat{x}(f)$.

★ (c) (5 Punkte) Betrachten Sie die Signale

$$g_k(t) = \frac{F_0}{F} \frac{\sin(2\pi F_0(t - k/(2F)))}{2\pi F_0(t - k/(2F))}, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Berechnen Sie $\langle g_k, g_\ell \rangle$, für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Welche Bedingung müssen F und F_0 erfüllen, damit die Funktionen $g_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, orthogonal zueinander sind?

Wir betrachten nun im Folgenden das $(4F)$-periodische Signal $\hat{x}(f)$, welches wie folgt definiert ist:

$$\hat{x}(f) = \begin{cases} f^2/F, & \text{für } -F \leq f < 0 \\ -f^2/F, & \text{für } 0 \leq f < F \\ 0, & \text{für } -2F \leq f < -F \text{ und } F \leq f < 2F \end{cases}$$

und $\hat{x}(f) = \hat{x}(f + 4F)$, für alle $f \in \mathbb{R}$.

★ (d) (3 Punkte) Skizzieren Sie $\hat{x}(f)$ für $f \in [-6F, 6F]$ (Achsenbeschriftung!).

★ (e) (7 Punkte) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$, der Fourierreihe des

Signals $\hat{x}(f)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Identität

$$\int_0^{\pi k/2} s^2 \sin(s) \, \mathrm{d}s = \left(2 - \left(\frac{\pi k}{2}\right)^2\right) \cos(\pi k/2) + \pi k \sin(\pi k/2) - 2, \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 3 (25 Punkte)

★ (a) (15 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $H(z) = \dfrac{2}{(2z+1+i)\left(z+\frac{1}{2}+ai\right)}$ die Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten LTI-Systems.

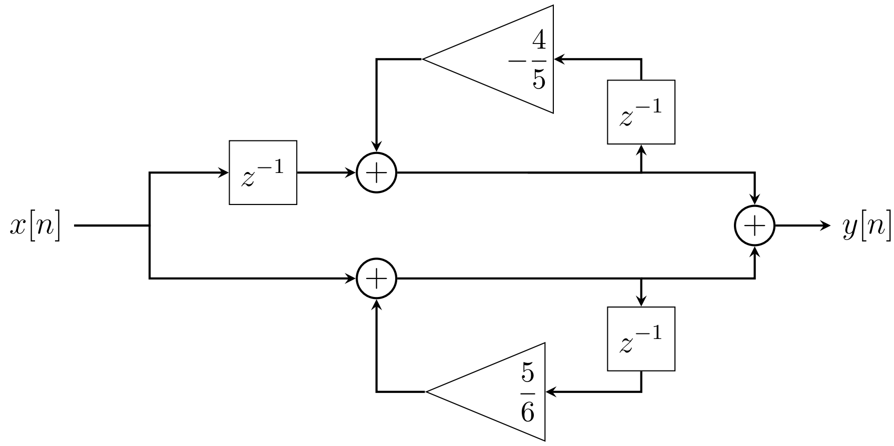
★ i. (4 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Impulsantwort $h[n]$ des Systems reellwertig.

★ ii. (2 Punkte) Sei $a = 0$. Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet von $H(z)$ so, dass das System BIBO stabil ist.

★ iii. (7 Punkte) Sei $a = 0$. Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems so, dass es kausal ist.

★ iv. (2 Punkte) Sei $a = 0$. Berechnen Sie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$.

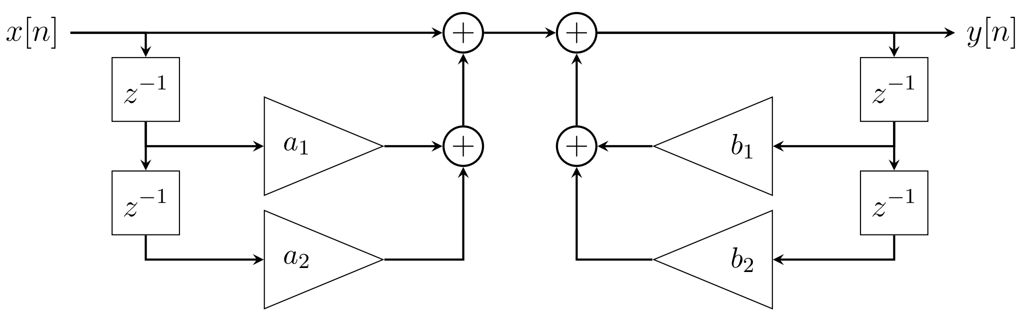
★ (b) (6 Punkte) Gegeben sei folgendes Blockschaltbild. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des zugehörigen zeitdiskreten Systems.



★ (c) (4 Punkte) Gegeben sei ein zeitdiskretes LTI-System mit Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1+\frac{2}{3}z^{-1}}.$$

Zeigen Sie, dass dieses System durch folgendes Blockschaltbild dargestellt werden kann und bestimmen Sie die zugehörigen Werte für a_1, a_2, b_1 und b_2.



PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Aufgabe 4 (25 Punkte)

★(a) (5 Punkte) Seien x, φ komplexwertige N-periodische Signale, wobei $N \in \mathbb{N}$. Wir betrachten folgende Gleichung:

$$x[n-1] - 2x[n] + x[n+1] = \varphi[n], \quad n \in \{0, \dots, N-1\}. \tag{2}$$

★ i. (2 Punkte) Sei $\varphi[n] = (-1)^n$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Zeigen Sie, dass kein komplexwertiges N-periodisches Signal x existiert, welches (2) erfüllt, wenn N ungerade ist.
Hinweis: Summieren Sie jeweils die linke und die rechte Seite von (2) *über* $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

★ ii. (3 Punkte) Sei nun

$$\varphi[n] = \begin{cases} N-1, & \text{für } n = 0, \\ -1, & \text{sonst}, \end{cases} \quad n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Bestimmen Sie die N-Punkt DFT eines N-periodischen Signals x, welches (2) erfüllt.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst die N-Punkt DFT von (2).

★(b) (8 Punkte) Seien $K, L \in \mathbb{N}$ und $N := KL$. Wir betrachten das N-periodische Signal x, welches wie folgt definiert ist:

$$x[n] := \begin{cases} \cos^2(\pi k/K), & \text{falls } n = kL, \text{ für } k \in \{0, \dots, K-1\}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

für $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Berechnen Sie die N-Punkt DFT von x.
Hinweis: Betrachten Sie das K-periodische Signal $a[k] := \cos^2(\pi k/K)$, $k \in \{0, \dots, K-1\}$, und drücken Sie die N-Punkt DFT von x als Funktion der K-Punkt DFT von a aus.

★(c) (12 Punkte) Sei x ein komplexwertiges N-periodisches Signal, wobei $N = 2^\nu$ mit $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, dessen N-Punkt DFT mit $\hat{x}$ bezeichnet wird.

★ i. (3 Punkte) Wir definieren das $N/2$-periodische Signal u gemäss

$$u[n] := x[n] + x[n + N/2], \quad n \in \{0, \dots, N/2 - 1\}.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{x}[2k] = \hat{u}[k]$, $k \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$, wobei $\hat{u}$ die $N/2$-Punkt DFT von u bezeichnet.
Hinweis: Teilen Sie die Summe in der Definition der DFT entsprechend auf.

★ ii. (9 Punkte) Wir definieren die $N/4$-periodischen Signale v, w gemäss

$$v[n] := (x[n] - x[n+N/2] - i\,(x[n+N/4] - x[n+3N/4]))\,\omega_N^n,$$
$$w[n] := (x[n] - x[n+N/2] + i\,(x[n+N/4] - x[n+3N/4]))\,\omega_N^{3n},$$

für $n \in \{0, \ldots, N/4-1\}$, wobei $\omega_N := e^{-2\pi i/N}$. Seien $\hat{v}, \hat{w}$ die $N/4$-Punkt DFTs von v, w. Zeigen Sie, dass

$$\hat{x}[4k+1] = \hat{v}[k],$$
$$\hat{x}[4k+3] = \hat{w}[k],$$

für $k \in \{0, \ldots, N/4-1\}$.

Hinweis: Teilen Sie die Summe in der Definition der DFT entsprechend auf.