PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 1: Multiple Choice [*16 Punkte*]

(1.a) [*2 Punkte*] Sei $z \in \mathbb{C}$, sodass $\mathrm{Re}(z) > 0$. Welche der folgenden Zahlen $w \in \mathbb{C}$ erfüllt $\mathrm{Re}(w) < 0$?

i. $w = \frac{1}{\overline{z}}$ ii. $w = \overline{z}$ iii. $w = \frac{1}{z}$ iv. $w = -\frac{1}{\overline{z}}$

(1.b) [*2 Punkte*] Was ist eine Polarform von $\overline{\mathrm{i}\sqrt{2} - \sqrt{2}}$?

i. $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

iii. $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

ii. $2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

iv. $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

(1.c) [*2 Punkte*] Betrachten Sie die schwarzen Punkte in der Abbildung 1. Den Lösungen welcher Gleichung entsprechen diese Punkte?

i. $z^6 = \frac{1}{2}$ ii. $z^6 = \frac{1}{64}$ iii. $z^6 = -\frac{1}{64}$ iv. $z^8 = \frac{1}{256}$

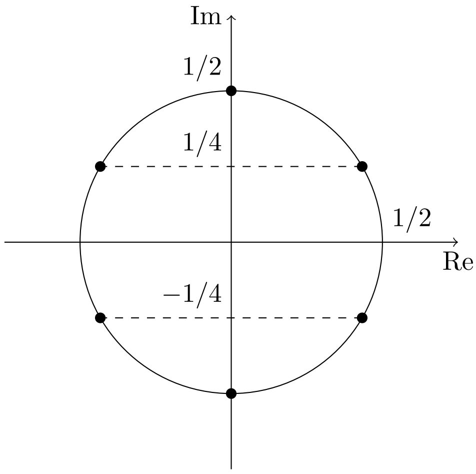

Abbildung 1: Punkte auf einem Kreis.

(1.d) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Welche der folgenden Funktionen ist im Allgemeinen *nicht* holomorph?

i. $g(z) = f(z)^3$ ii. $g(z) = f\left(z^4\right)$ iii. $g(z) = f(\bar{z})$ iv. $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$

(1.e) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Weg. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

i. $\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_\gamma \mathrm{Im}\left(f(z)\right)\,\mathrm{d}z$

ii. $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$

iii. $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$, wenn ein $t \in [0,1]$ existiert, so dass $f(\gamma(t)) \neq 0$.

iv. $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, wenn für alle $t \in [0,1]$, $f(\gamma(t)) = 0$ gilt.

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

(1.f) [*2 Punkte*] Welche der folgenden Aussagen gilt?

i. $\operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ ii. $\operatorname{Log}(\mathrm{i}) = 1 + \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ iii. $\operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \mathrm{e} + \pi \mathrm{i}$ iv. $\operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \pi \mathrm{i}$

(1.g) [*2 Punkte*] Welche der Funktionen, deren Absolutbetrag in Abbildung 2 dargestellt ist, ist sicherlich nicht holomorph?

i. Die Funktion zur Abbildung 2i.

ii. Die Funktion zur Abbildung 2ii.

iii. Die Funktion zur Abbildung 2iii.

iv. Die Funktion zur Abbildung 2iv.

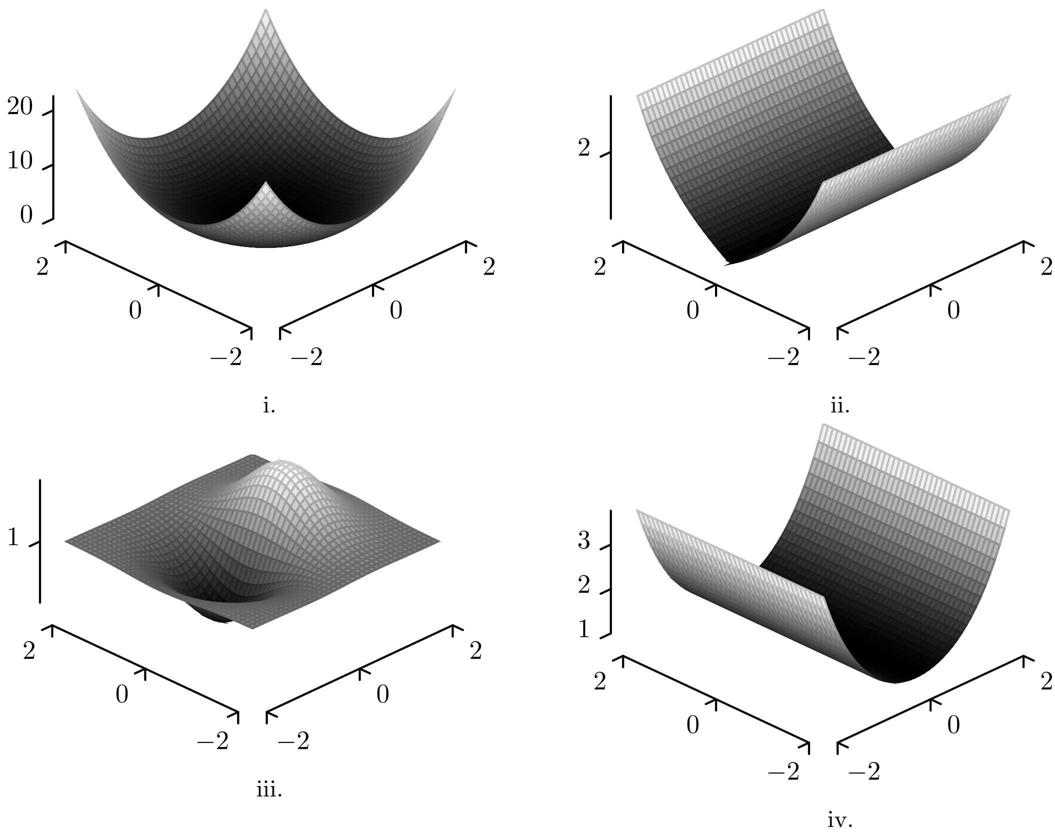

Abbildung 2: Die Absolutbeträge von vier Funktionen.

(1.h) [*2 Punkte*] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die kontinuierliche Fouriertransformation von $f(t) = \exp(-t^2)$ gegeben ist durch $\widehat{f}(s) = \sqrt{\pi}\exp(-s^2/4)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

i. $\widehat{g}(s) = \sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{s^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}$

ii. $\widehat{g}(s) = \sqrt{\pi}\left(\dfrac{s^2}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}$

iii. $\widehat{g}(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}s}{2}\mathrm{e}^{-s^2/4}$

iv. $\widehat{g}(s) = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-s^2/4}$

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Aufgabe 2: Residuensatz [*16 Punkte*] Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} \, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Sollte ein Kurvenintegral gegen Null konvergieren in Ihrer Berechnung, so argumentieren Sie warum dies der Fall ist.

Lösung.

Aufgabe 3: Fourierreihe [*16 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **2π-periodische Funktion**, die durch

$$f(t) = \cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

für $t \in [0, 2\pi]$, gegeben ist.

(3.a) [*2 Punkte*] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(3.b) [*8 Punkte*] Berechnen Sie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{\sinh(2\pi) + in(\cosh(2\pi) - 1)}{2\pi(n^2 + 1)}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

der komplexen Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$$

von f, wobei $\sinh(t) = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$.

(3.c) [*6 Punkte*] Benutzen Sie (2.b), um zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi \cosh(\pi)}{\sinh(2\pi)} - 1 \right)$$

gilt.

Lösung.

Click to BUY NOW! PDF-XChange Editor www.pdf-xchange.com

Aufgabe 4: Laplacetransformation [*16 Punkte*]

(4.a) [*4 Punkte*] Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie, dass

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > a$.

(4.b) [*12 Punkte*] Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\begin{gathered} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{-t}, \qquad t > 0, \\ \dot{y}(0) = 0, \qquad y(0) = -1. \end{gathered}$$

Lösung.