



Aufgabe 1.

[8 Punkte]

- (a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}.$$

- (b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \geq 1 + n.$$

- (c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 + 3^n} z^n.$$

- (d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktionenfolge $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n)$$

für $n \rightarrow \infty$ und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

Aufgabe 2.

[10 Punkte]

- (a) Zeigen Sie, dass folgende Funktion f streng monoton wachsend und bijektiv ist.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

Sei $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f . Berechnen Sie die Werte

$$f^{-1}(1) \quad \text{und} \quad (f^{-1})'(1).$$

- (b) Für welche $q \in \mathbb{N}$ konvergiert das folgende uneigentliche Integral?

$$\int_0^1 \frac{1 - t^q}{1 - t} dt$$

- (c) Finden Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g(x) = \log(\cosh x)$ um $x_0 = 0$.

- (d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = i$$

und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.



Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion

[6 Punkte]

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und -werte von f unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Aufgabe 4.

[11 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Lösungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Systems

$$\begin{cases} f'(x) = 4f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 8f(x) - 4g(x) \end{cases}$$

zu den Anfangsdaten $f(0) = 3$ und $g(0) = 5$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2 \cos(x^2)$$

für $x > 0$ zum Beispiel durch „Variation der Konstanten“.

Aufgabe 5.

[6 Punkte]

(a) Sei $\lambda = ye^x dx + e^x dy$ eine 1-Form. Sei γ ein Weg in \mathbb{R}^2 , der die Teilmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [-1, 1], y^3 = x\}$ von $(-1, -1)$ nach $(1, 1)$ durchläuft. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \lambda.$$

(b) An welchen Punkten im \mathbb{R}^2 hat der Gradient der Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

den grössten Betrag?

Aufgabe 6.

[6 Punkte]

Seien $b > a > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, das von den drei Kurven mit den Gleichungen

$$y = bx,$$

$$xy = 1, \quad (x > 0)$$

$$y = ax$$

beschränkt wird. Skizzieren Sie das Gebiet Ω und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} xy \, d\mu.$$

Aufgabe 7.

[6 Punkte]

Gegeben sind das Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 1], y \in [0, 2]\}$, die Funktion

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sin(xy)$$

und das Vektorfeld $w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds w von unten nach oben durch den Graphen $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$ der Funktion f .

Aufgabe 8. Berechnen Sie

[6 Punkte]

$$\int_{\gamma} v \cdot d\vec{s}$$

für das Vektorfeld

$$v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x - 2yz \\ e^x - 9z \\ y^2 - 3z \end{pmatrix}$$

entlang des eingezeichneten Wegs γ .

