Für jede der Subfragen von 1. und 2. ist genau eine Antwortmöglichkeit richtig.

1. Multiple choice [7 Punkte]

1.1. **[2 Punkte]** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der Folgenden Aussagen ist wahr:

(A) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt immer.

(B) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cup B] \geq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(C) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(D) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer. Sowohl „<“ als auch „>“ kann vorkommen.

1.2. **[2 Punkte]** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der Folgenden Aussagen ist wahr:

(A) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt immer.

(B) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(C) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(D) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer. Sowohl „<“ als auch „>“ kann vorkommen.

1.3. **[3 Punkte]** Sei $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim \mathcal{N}(m, 1)$ eine Folge von i.i.d. normalverteilten Zufallsvariablen mit unbekanntem Mittelwert m und bekannter Standardabweichung 1. Wir betrachten das 95%-Konfidenzintervall $I_n = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - a_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + a_n]$ für m mit $\mathbb{P}[m \in I_n] = 0.95$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine neue unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable $Y_{n+1} \sim \mathcal{N}(m, 1)$ im Konfidenzintervall I_n liegt, im Limes $n \to \infty$?

(A) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 0\%$.

(B) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 5\%$.

(C) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 50\%$.

(D) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 95\%$.

(E) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 100\%$.

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

2. Multiple-Choice: Quadrat **[6 Punkte]**

Betrachte die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 1 \leq x \leq 4 \text{ und } 1 \leq y \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.1. [**0.5 Punkte**] Sind X und Y identisch verteilt?

(A) Ja.
(B) Nein.

2.2. [**1.5 Punkte**] Sind X und Y unabhängig?

(A) Ja.
(B) Nein.

2.3. [**0.5 Punkte**] Sind X und Y i.i.d.?

(A) Ja.
(B) Nein.

2.4. [**2 Punkte**] Welche dieser Funktionen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f_X von X?

(A) $x \mapsto 1$ für $x \in \mathbb{R}$

(B) $x \mapsto \frac{1}{9}$ für $x \in \mathbb{R}$

(C) $x \mapsto \frac{1}{3}$ für $x \in \mathbb{R}$

(D) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{9}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 1, & \text{falls } x > 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(E) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{3}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 1, & \text{falls } x > 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(F) $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{9}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(G) $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(H) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{9}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

2.5. [**1.5 Punkte**] Welche der Funktionen aus Frage 2.4 ist die Verteilungsfunktion[1] F_X von X?

[1] Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, **c**umulative (probability) **d**istribution **f**unction, cdf oder CDF bezeichnet.

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

3. Rot und Grün **[6 Punkte]**

In einer Urne befinden sich 4 rote und 2 grüne Bälle. Wir ziehen zufällig eine Kugel nach der anderen aus der Urne (ohne diese zurückzulegen) bis die Urne leer ist.

3.1. **[1.5 Punkte]** Was ist der erwartete Anteil der grünen Bällen unter den verbleibenden Bällen in der Urne nachdem wir den ersten Ball gezogen haben?

3.2. **[1.5 Punkte]** Betrachte die Reihenfolge der Farben der 6 Kugeln, wie beispielsweise „RGRRRG“ oder „GGRRRR“. Zeige das jede mögliche Reihenfolge (mit 4 „R“ und 2 „G“) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt und berechne diese Wahrscheinlichkeit.

Hinweis: Stelle dir vor, dass jede Kugel mit einer Nummer von 1 bis 6 beschriftet ist und entferne dann diese Beschriftungen von den Kugeln sodass Kugeln der gleichen Farbe nicht mehr voneinander unterscheiden werden können.

3.3. **[1.5 Punkte]** Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel grün ist, wenn wir wissen, dass die letzte Kugel grün ist?

3.4. **[1.5 Punkte]** Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel rot ist, wenn wir wissen, dass die beiden grünen Kugeln hintereinander gezogen wurden?

4. Zwei Uniformverteilte **[5 Punkte]**

Seien $X \sim U([0,1])$ und $Y \sim U([0,2])$ zwei unabhängige Zufallsvariablen.

4.1. **[0.5 Punkte]** Berechne $\mathbb{E}[\cos(\pi X)]$.

4.2. **[1.5 Punkte]** Berechne $\mathbb{E}[\exp(X+Y)]$.

4.3. **[1.5 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X < Y$?

4.4. **[1.5 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X + Y > 2$?

Aufgabe 5 ist auf der nächsten Seite.

5. Defekte Maschine [6 Punkte]

Eine Maschine ist für den durchgängigen Betrieb designt. (Somit sollte sie 7 Tage die Woche in Betrieb sein.) Aber jeden Tag gibt es eine Wahrscheinlichkeit p, dass die Maschine einen Defekt erleidet der dazu führt, dass die Maschine gestoppt und bis zum nächsten Tag repariert werden muss. Dieses Ereignis ist unabhängig davon ob die Maschine an anderen Tagen Defekte erleidet hat.

5.1. [**1.5 Punkte**] Was ist die Verteilung und die erwartete Anzahl der Defekte in einer bestimmten Woche?

5.2. [**3 Punkte**] In den letzen 500 Wochen war die Maschine

- in 320 Wochen gar nicht defekt,
- in 130 Woche an jeweils einem Tag defekt,
- in 37 Wochen an jeweils 2 Tagen defekt,
- in 11 Wochen an jeweils 3 Tagen defekt,
- in 2 Wochen an jeweils 4 Tagen defekt.

Berechne die Anzahl an Tagen an denen die Maschine defekt ist und die Anzahl an Tagen wo sie nicht defekt war, und finde den Maximum-Liklihood Schätzer (englisch MLE) $\hat{p}$ für die Wahrscheinlichkeit p.

5.3. [**1.5 Punkte**] Wir nehmen an, der MLE $\hat{p}$, den wir in Aufgabe 5.2 berechnet ist korrekt. Wie viele Maschinen brauchen wir unter dieser Annahme um zu garantieren, dass an einem Tag die Wahrscheinlich, dass alle Maschinen defekt sind kleiner als 0.01% ist?

Hinweis: Wenn du den MLE in Aufgabe 5.2 nicht gefunden hast, verwende stattdessen den Wert $\hat{p} = 8\%$.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $P[Z \leq 1.96] = 0.975$.