1. Multiple choice **[7 Punkte]**

(a) **[1.5 Punkte]** Gilt $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$?

i. Ja, $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ gilt für alle Zufallsvariablen X, Y.

ii. $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ gilt für alle unabhängigen Zufallsvariablen X, Y. Es gibt nicht unabhängige Zufallsvariablen für die $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \neq \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ gilt.

iii. Nein, es gibt unabhängige sowie nicht unabhängige Zufallsvariablen für die $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \neq \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ gilt. Es gibt Spezialfälle in denen $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ gilt.

iv. Nein, für alle Zufallsvariablen X, Y gilt $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \neq \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$.

(b) **[2 Punkte]** Welche dieser Funktionen ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte f_X einer reellwertigen Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$?

i. $x \mapsto \begin{cases} 1-x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ 10, & \text{falls } x \in \left(1, \frac{21}{20}\right] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

ii. $x \mapsto \begin{cases} \sin(x), & \text{falls } x \in [0, 3\pi] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

iii. $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{32}, & \text{falls } x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{3}+x, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ 1, & \text{falls } x \geq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

iv. $x \mapsto \frac{1}{100}e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$

v. $x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}+\frac{x}{2}, & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ 1, & \text{falls } x \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

vi. $x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, & \text{falls } x > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

vii. $x \mapsto x$ für $x \in \mathbb{R}$

viii. $x \mapsto 1$ für $x \in \mathbb{R}$

(c) **[1.5 Punkte]** Welche der Funktionen aus Frage **1.**b ist eine Verteilungsfunktion[1] F_X einer reellwertigen Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$?

(d) **[2 Punkte]** Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeits-Modell auf $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Sind die Ereignisse $A = \{1,2\}$ und $B = \{4\}$ unabhängig?

[1] Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, **c**umulative (probability) **d**istribution **f**unction, cdf oder CDF bezeichnet.

i. A und B sind unabhängig für jedes $\mathbb{P}$.
ii. A und B sind abhängig für jedes $\mathbb{P}$.
iii. A und B sind unabhängig, falls $\mathbb{P}[\{\omega\}] \neq 0\ \forall \omega \in \Omega$ erfüllt, aber **1.**(d)i gilt nicht.
iv. A und B sind abhängig, falls $\mathbb{P}[\{\omega\}] \neq 0\ \forall \omega \in \Omega$ erfüllt, aber **1.**(d)ii gilt nicht.

2. S, T, U und V **[6.5 Punkte]**

(a) Sei $S \sim \mathcal{N}(-5, 4^2)$ und $T \sim \mathcal{N}(10, 3^2)$ unabhängig. [**4 Punkte**]
   i. Berechne $\mathbb{P}[S < T]$.
   ii. Wäre die Berechnung von $\mathbb{P}[S < T]$ (**2.**(a)i) auch ohne der Unabhängigkeits-Annahme korrekt? (Die Antwort muss nicht begründet werden.)
   iii. Berechne die Varianz σ_R^2 von $R := S - 2T$.
   iv. Wäre die Berechnung von σ_R^2 (**2.**(a)iii) auch ohne der Unabhängigkeits-Annahme korrekt? (Die Antwort muss nicht begründet werden.)

(b) Sei $U \sim \mathcal{U}(1, 3)$ und $V \sim \mathcal{U}(0, 4)$ unabhängig. [**2.5 Punkte**]
   i. Berechne $\mathbb{E}[2U + V^3]$.
   ii. Wäre die Berechnung von $\mathbb{E}[2U + V^3]$ (**2.**(b)i) auch ohne der Unabhängigkeits-Annahme korrekt? (Die Antwort muss nicht begründet werden.)

3. Rechteck **[6.5 Punkte]**

Gegeben sei ein Rechteck mit den zufälligen Seitenlängen X und Y. Die gemeinsame Dichtefunktion von X und Y ist gegeben durch

$$f_{X,Y}(x, y) := \begin{cases} C(x^2 + y^2) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter C. [**1.5 Punkte**]
(b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y. [**2 Punkte**]
(c) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. [**1 Punkt**]
(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Seite X mehr als doppelt so lang wie die Seite Y ist. [**2 Punkte**]

4. Urnen-Problem **[3 Punkte]**

Wir haben zwei Urnen A und B. Urne A enthält eine schwarze und eine weisse Kugel und Urne B enthält zwei schwarze und eine weisse Kugel.

Eine Urne wird zufällig gewählt und daraus eine Kugel gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wurde, gegeben, dass die gezogene Kugel weiss ist?

5. Medikament **[7 Punkte]**

Ein Pharmainstitut behauptet, ein bestimmtes Medikament wirke mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90%. Daraufhin wird das Medikament an 100 Personen verabreicht. Verwende für die folgenden Aufgaben den Zentralen Grenzwertsatz um schwer berechenbare Werte zu approximieren und begründe deine Antworten!

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

(a) In dieser ersten Testreihe zeigt das Mittel bei 97 der 100 Personen Wirkung. Ist damit die Behauptung des Pharmainstituts auf dem Signifikanzniveau von 5% statistisch bewiesen? [**5 Punkte**]

(b) Einige Zeit, nachdem das neue Medikament zugelassen ist, bekommt der angesehene Medizinprofessor Zweifel den Verdacht, das Pharmainstitut habe die Studie gefälscht und das Mittel wirke doch nicht so gut wie behauptet. Er lässt daraufhin erneut einen Test an 100 Personen durchführen. Formuliere für Professor Zweifels Test Nullhypothese und Gegenhypothese. Wie muss seine Entscheidungsregel lauten, wenn er seine Vermutung auf dem Signifikanzniveau von 5% statistisch belegen will? [**2 Punkte**]

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $P[Z \leq 1.96] = 0.975$.