第三章 集合与关系（Sets and Relations)

本章首先采用朴素集合论的方法，介绍有关集合的一些基本知识，内容显得较为直观，学起来易于接受。但集合及其相关的概念是本门课程后面各章内容的基础，同学们务必熟练的掌握。本章重点讨论关系（主要是二元关系），它仍然是一种集合，但它是一种更为复杂的集合。它的元素是有序二元组的形式，这些有序二元组中的两个元素来自于两个不同或者相同的集合。因此，关系是建立在其它集合基础之上的集合。关系中的有序二元组反映了不同集合中元素与元素之间的关系，或者同一集合中元素之间的关系。本章讨论这些关系的表示方法、关系的运算以及关系的性质，最后讨论集合A上几类特殊的关系。

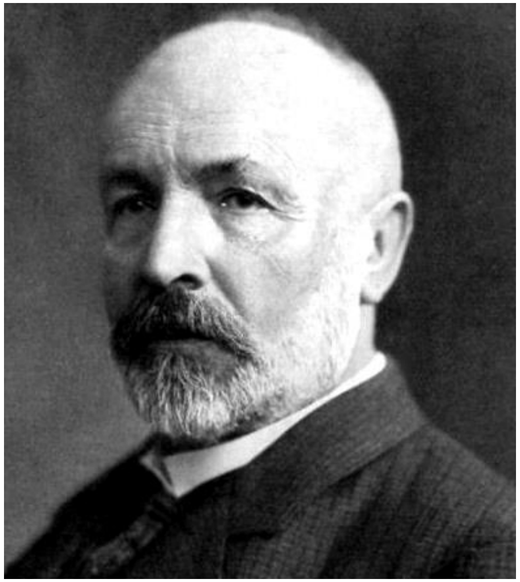
康托与集合

康托是19世纪末20世纪初德国伟大的数学家，集合论的创立者，是数学史上最富有想象力，最有争议的人物之一。他对数学的贡献是集合论和超穷数理论。

康托29岁（1874）时在《数学杂志》上发表了关于集合论的第一篇论文，提出了“无穷集合”这个数学概念，引起了数学界的极大关注。

39岁的康托尔，经历了人生第一次精神崩溃，使康托尔曾一度患精神分裂症，被送进精神病诊所。在康托尔的余生中，多次遭受不同程度的精神崩溃。他不得不一次次出入精神病院。

在1897 年举行的第一次国际数学家会议上，康托尔的思想终于大放光彩，他的成就得到承认。伟大的哲学家、数学家罗素称赞康托尔的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作。”



格奥尔格·费迪南德·路德维希·菲利普·康托　　1845-1918
（Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor）

第三章 集合与关系（Sets and Relations)

3-1 集合的概念和表示法

3-2 集合的运算

3-4 序偶与笛卡尔积

3-5 关系及其表示

3-6 关系的性质

第三章 集合与关系（Sets and Relations)

3-7 复合关系和逆关系

3-8 关系的闭包运算

3-9 集合的划分与覆盖

3-10 等价关系与等价类

3-11 相容关系

3-12 序关系

3-1 集合的概念和表示方法

定义(集合set)：把具有共同性质的一些对象汇集成一个整体，就构成一个集合，这些对象称为元素(element)或成员(member)

用大写英文字母A,B,C,…表示集合

用小写英文字母a,b,c,…表示元素

$a\in A$：表示a是A的元素，读作“a属于A”

$a\notin A$：表示a不是A的元素，读作“a不属于A”

3-1.1 有关集合的概念

- n元集(n-set)：有n个元素的集合称为n元集。
- |A|: 表示集合A中的元素个数，A是n元集 $\Leftrightarrow$ |A|=n
- 0元集: 记作 $\varnothing$
- 1元集(或单元集),如{a}, {b}, {$\varnothing$}…
- 有限集 (finite set): |A|是有限数, |A|<∞, 也叫有穷集，否则为无限集。

3-1.2 集合的表示方法

通常使用“列举法”和“叙述法” 两种方法来给出一个集合

（1）列举法(roster)

列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，例如

A={a,b,c,d,…,x,y,z}

B={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

集合中的元素不规定顺序

$C=\{2,1\}=\{1,2\}$

集合中的元素各不相同

$C=\{2,1,1,2\}=\{2,1\}$

3-1.2 集合的表示方法

（2）叙述法(defining predicate)

用谓词P(x)表示“x具有性质P”，用$A=\{x|P(x)\}$表示元素具有性质P的集合A，如果P(b)为真，那么$b\in A$，否则$b\notin A$。例如

$P_1(x)$: x是英文字母

$A=\{x|P_1(x)\}=\{x|\ x\text{是英文字母}\}$

$=\{a,b,c,d,\ldots,x,y,z\}$

$P_2(x)$: x是十进制数字

$B=\{x|P_2(x)\}=\{x|x\text{是十进制数字}\}$

$=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

两种表示法可以互相转化

例如：$E=\{2,4,6,8,\ldots\}$

$=\{x|x>0$且x是偶数$\}$

$=\{x|x=2(k+1)$，k为非负整数$\}$

$=\{2(k+1)\mid k$为非负整数$\}$

两个集合相等的外延性原理：

两个集合A、B是相等的，当且仅当它们有相同的成员，记作$A=B$；否则记作$A\neq B$ 。

集合的元素还可以是一个集合。

例如：$S=\{a,\{1,2\},p,\{q\}\}$

3-1.3 数的集合

N：自然数(natural numbers)集合

$N=\{0,1,2,3,\ldots\}$

Z：整数(integers, Zahlen)集合

$Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

Q：有理数(rational numbers, Quotient)集合

R：实数(Real numbers)集合

C：复数(Complex numbers)集合

3-1.4 集合之间的关系

子集、相等、真子集；

空集、全集；

幂集、n元集、有限集；

（1）子集

[定义3-1.1]　子集(subset)：

设A、B是任意两个集合，如果A的每一个元素是B的成员，则称A为B的子集，或说A包含于B, 或说B包含A, 记作$A \subseteq B$，或$B \supseteq A$。

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

若A不是B的子集，则记作$A \not\subseteq B$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$

（1）子集

证明$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$成立

[证明]：根据定义

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

则 $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge \neg(x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$

子集(举例)

设$A=\{a,b,c\}$,$B=\{a,b,c,d\}$,$C=\{a,b\}$,则

$A \subseteq B$, $C \subseteq A$, $C \subseteq B$

（1）子集

定理3-1.1　集合A和集合B相等的充分必要条件是这两个集合互为子集。

$$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$$

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \rightleftarrows x\in B)$$

[证明]

$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$　　　　(=定义)

$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in A)$　($\subseteq$定义)

$\Leftrightarrow(\forall x)((x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A))$　(量词分配)

$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A \rightleftarrows x\in B)$　(等价式)

重庆大学 CHONGQING UNIVERSITY

包含($\subseteq$)的性质:

1. $A\subseteq A$（自反性）

证明: $A\subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in A) \Leftrightarrow T$

2. 若$A\subseteq B$,且$A\neq B$,则 $B\not\subseteq A$（反对称性）

3. 若$A\subseteq B$,且$B\subseteq C$, 则$A\subseteq C$（传递性）

证明: $A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)$

$\forall x,\quad x\in A$

$\Rightarrow x\in B \qquad (A\subseteq B)$

$\Rightarrow x\in C \qquad (B\subseteq C)$

$\therefore\ (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in C)$, 即$A\subseteq C$.

（2）真子集

[定义3-1.2] 真子集(proper subset)

如果集合A的每一个元素都属于B，但集合B至少有一个元素不属于A，则称A为B的真子集，记作$A \subset B$。

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$$

$A \not\subset B$的含义：

$A \not\subset B \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B \wedge A \neq B)$ （$\subset$定义）

$\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \vee (A = B)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow \Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee (A = B)$

含义：A不是B的子集或者A和B相等。

*真包含(⊂)的性质

1. $A \not\subset A$ （反自反性）

证明： $A \subset A \Leftrightarrow A \subseteq A \wedge A \neq A \Leftrightarrow T \wedge F \Leftrightarrow F$.

2. 若$A \subset B$,则 $B \not\subset A$ （反对称性）

证明：(反证) 设$B \subset A$, 则

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \subseteq B$ (化简)

$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A \Rightarrow B \subseteq A$

所以 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ (=定义)

但是 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \neq B$ (化简) 矛盾!

*真包含($\subset$)的性质

3．若$A\subset B$,且$B\subset C$, 则$A\subset C$ （传递性）

证明：$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B \Rightarrow A\subseteq B$ (化简),

同理 $B\subset C \Rightarrow B\subseteq C$, 所以$A\subseteq C$.

假设$A=C$，则$B\subseteq C\Leftrightarrow B\subseteq A$，又$A\subseteq B$，故$A=B$，此与$A\subset B$矛盾, 所以$A\neq C$.

所以, $A\subset C$.　#

（3）空集

[定义3-1.3]　空集(empty set)：

不包含任何元素的集合是空集,记作$\varnothing$

例如：　$\{x \in R | x^2 + 1 = 0\}$

[定理3-1.2]　对任意一个集合A，　$\varnothing \subseteq A$

也就是对任意集合A, $\varnothing \subseteq A$

证明: $\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow \forall x(F \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T.$

对于每一个非空集合A，至少有两个不同的子集，A和$\varnothing$，称为A的平凡子集。

（3）空集

* [推论] 空集是唯一的.

证明: 设$\varnothing_1$与$\varnothing_2$都是空集, 则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \wedge \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$
$\Leftrightarrow \varnothing_1 = \varnothing_2$. #

（4） 全集

[定义3-1.4] 全集:

在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集,则称这个集合是全集,记作E。

$E=\{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$，P(x)为任何谓词

全集是相对的, 视情况而定, 因此不唯一。

例如, 讨论(a,b)区间里的实数性质时, 可以选

$E=(a,b)$, $E=[a,b)$, $E=(a,b]$, $E=[a,b]$, $E=(a,+\infty)$, $E=(-\infty,+\infty)$等

（5）幂集

[定义3-1.5]　幂集(power set)

给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成的集合,称为A的幂集,记作$\mathscr{P}(A)$

$\mathscr{P}(A)=\{x|x\subseteq A\}$

注意：$x\in\mathscr{P}(A) \Leftrightarrow x\subseteq A$

例如: $A=\{a,b\}$,

$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

（5）幂集

[定理]　如果有限集合A有n个元素，则幂集$\mathscr{P}(A)$有2^n个元素。

证明：利用二项式展开定理，见教材P85。

作业(3-1)：

P85

(6)

(9)

(10)

3-2集合的运算

3-2.1 交集

[定义3-2.1] 集合的交(intersection):

设任意两个集合A和B，由集合A和B的所有共同元素组成的集合S，称为A和B的交集，记作$A\cap B$。

$$S=A\cap B = \{ x \mid (x\in A) \wedge (x\in B) \}$$

$$x\in A\cap B \Leftrightarrow (x\in A) \wedge (x\in B)$$

3-2.1 交集

例1: 设$A_n=\{x\in R|n-1\le x\le n\}$,$n=1,2,\ldots,10$,则

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n= \varnothing$

例2: 设$A_n=\{x\in R|0\le x\le 1/n\}$,$n=1,2,\ldots$,则

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \{0\}$

重庆大学 CHONGQING UNIVERSITY

3-2.1 交集

不相交(disjoint)

不相交：$A \cap B = \varnothing$

互不相交：设$A_1, A_2, \ldots$是可数多个集合，若对于任意的$i \neq j$, 都有$A_i \cap A_j = \varnothing$, 则说它们互不相交。

例: 设 $A_n = \{x \in R \mid n-1 < x < n\}$, $n=1, 2, \ldots, 10$, 则 $A_1, A_2, \ldots$是互不相交的

3-2.1 交集

集合交运算的性质

a) $A \cap A = A$ （幂等律）

b) $A \cap \varnothing = \varnothing$ （零律）

c) $A \cap E = A$ （同一律）

d) $A \cap B = B \cap A$ （交换律）

e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ （结合律）

因为集合交运算满足结合律，故n个集合的交记为：

$$P = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

3-2.2 集合的并

[定义3-2.2]并集(union)：

设任意两个集合A和B，由所有集合A和B的元素组成的集合S，称为A和B的并集，记作$A \cup B$ 。

$$S=A\cup B = \{ x \mid (x\in A) \vee (x\in B) \}$$

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow (x\in A) \vee (x\in B)$$

3-2.2 并集

例1: 设$A_n=\{x\in R|n-1\le x\le n\}$,$n=1,2,\ldots,10$,则

$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=$ $[0,\ 10]$

例2: 设$A_n=\{x\in R|0\le x\le 1/n\}$,$n=1,2,\ldots$,则

$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\cup\ldots=$ $[0,\ 1]$

3-2.2 并集

集合并运算的性质

a) $A \cup A = A$　　（幂等律）

b) $A \cup \varnothing = A$　　（同一律）

c) $A \cup E = E$　　（零律）

d) $A \cup B = B \cup A$　　（交换律）

e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　（结合律）

因为集合并运算满足结合律，故n个集合的并记为：

$$P = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

3-2.3 集合的补 / 相对补

[定义3-2.3]补集 / 相对补集(relative complement , difference set):

属于A而不属于B的全体元素组成的集合S，称为B对于A的补集 / 相对补集, 记作A-B

$$S=A-B = \{ x \mid (x\in A) \wedge (x\notin B) \}$$

[定义3-2.4]绝对补(complement):

设E为全集，对任一集合A关于E的补E-A，称为集合A的绝对补，记作 ~A。

$$\sim A=\{x|(x\in E\wedge x\notin A)\}$$

3-2.3 集合的补 / 相对补

集合补运算的性质

（1） 对合律：$\sim\sim A=A$

（2） 全补律：$\sim E=\varnothing$

（3） $\sim\varnothing=E$

（4） 矛盾律：$A\cap\sim A=\varnothing$

（5） 排中律：$A\cup\sim A=E$

3-2.4 集合的对称差

［定义3-2.5］对称差 (symmetric difference)：

属于A而不属于B，或属于B而不属于A的全体元素组成的集合S, 称为A与B的对称差, 记作A⊕B。

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

3-2.4 集合的对称差

对称差(⊕)的性质

（1）　交换律：$A \oplus B = B \oplus A$

（2）　结合律：$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

（3）　分配律：$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

（4）　同一律：$A \oplus \varnothing = A$

（5）　排中律：$A \oplus \sim A = E$

（6）　$A \oplus A = \varnothing$

（7）　$A \oplus E = \sim A$

相对补、对称差 (举例)

例：设$A=\{x\in R|0\le x<2\}$, $B=\{x\in R|1\le x<3\}$,则

$A-B=\{x\in R|0\le x<1\}=[0,1)$

$B-A=\{x\in R|2\le x<3\}=[2,3)$

$A\oplus B=\{x\in R|(0\le x<1)\vee(2\le x<3)\}=[0,1)\cup[2,3)$

3-2.5 集合运算的性质（集合恒等式）

(1) 幂等律(idempotent laws)

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

(2) 结合律(associative laws)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 交换律(commutative laws)

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

3-2.5 集合运算的性质（集合恒等式）

(4) 分配律(distributive laws)

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(5) 对合律(double complement law)

$\sim\sim A=A$

(6) 零律(dominance laws)

$A\cup E=E$

$A\cap\varnothing=\varnothing$

3-2.5 集合运算的性质（集合恒等式）

(7) 同一律(identity laws)

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap E = A$

(8) 排中律(excluded middle)

$A \cup \sim A = E$

(9) 矛盾律(contradiction)

$A \cap \sim A = \varnothing$

(10) 全补律

$\sim \varnothing = E$

$\sim E = \varnothing$

3-2.5 集合运算的性质（集合恒等式）

(11) 吸收律(absorption laws)

$A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

(12) 德.摩根律(DeMorgan's laws)

$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

(13) 补交转换律(difference as intersection)

$A-B=A\cap\sim B$

3-2.6 集合恒等式证明(方法)

（1）逻辑演算法:

利用逻辑等价式和逻辑推理规则

（2）集合演算法:

利用集合恒等式和已知的集合结论

（1）逻辑演算法(格式)

题型: $A \subseteq B$.

证明: $\forall x$, $x \in A$

$\Rightarrow \ldots(????)$

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subseteq B$证毕.

题型: $A=B$.

证明: $\forall x$, $x \in A$

$\Leftrightarrow \ldots(????)$

$\Leftrightarrow x \in B$

$\therefore A=B$ 证毕.

或证明: $\forall x$, $x \in A \Rightarrow \ldots\ (????) \Rightarrow x \in B$.

另，$\forall x$, $x \in B \Rightarrow \ldots\ (????) \Rightarrow x \in A$.

$\therefore A=B$证毕.

3-2.6 集合恒等式证明(方法)

例1：分配律(定理3-2.1)

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明: $\forall x$, $x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in(B\cap C)$ ($\cup$定义)

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)$ ($\cap$定义)

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$ (命题逻辑分配律)

$\Leftrightarrow (x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$ ($\cup$定义)

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ($\cap$定义)

$\therefore$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$成立

3-2.6 集合恒等式证明(方法)

例2：零律(证明)

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

证明: $\forall x, \quad x \in A \cap \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing$ (∩定义)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge F$ (∅定义)

$\Leftrightarrow F$ (命题逻辑零律)

$\therefore A \cap \varnothing = \varnothing$ 成立

3-2.6 集合恒等式证明(方法)

例3. 排中律(证明)

$A\cup\sim A = E$

证明: $\forall x,\quad x\in A\cup\sim A$

$\Leftrightarrow x\in A \lor x\in\sim A$ (∪定义)

$\Leftrightarrow x\in A \lor x\notin A$ (~定义)

$\Leftrightarrow x\in A \lor \neg(x\in A)$ (∉定义)

$\Leftrightarrow T$ (命题逻辑排中律)

$\therefore A\cup\sim A = E$ 成立

3-2.7 集合恒等式证明(举例)

1. 基本集合恒等式

例如：①补交转换律

$A-B = A\cap\sim B$

证明: $\forall x,\ x\in A-B$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in\sim B$

$\Leftrightarrow x \in A\cap\sim B$

$A-B = A\cap\sim B$.

(2) 集合演算法（格式1）

题型: A=B.

证明: A

$=\ldots(????)$

$=B$

$\therefore$ A=B. #

题型: A$\subseteq$B.

证明: A

$\subseteq \ldots(????)$

$\subseteq B$

$\therefore$ A$\subseteq$B. #

(2) 集合演算法（格式2）

题型: A=B

证明: (⊆) …

∴ $A \subseteq B$

(⊇) …

∴ $A \supseteq B$

∴ $A = B$.　　#

说明: 把=分成⊆与⊇

题型: A⊆B

证明:　$A \cap B$ (或$A \cup B$)

$= \ldots(????)$

$= A$ (或B)

∴ $A \subseteq B$.　　#

说明: 化⊆成=

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

3-2.6 集合恒等式证明(方法)

例1：吸收律(定理3-2.2)

$A \cup (A \cap B) = A$

证明: $A \cup (A \cap B)$

$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$ (同一律)

$= A \cap (E \cup B)$ (逆用分配律)

$= A \cap E$ (零律)

$= A$ (同一律)

$\therefore A \cup (A \cap B) = A$

3-2.6 集合恒等式证明(方法)

例2：吸收律(定理3-2.2)

$A\cap(A\cup B) = A$

证明: $A\cap(A\cup B)$

$= (A\cap A)\cup(A\cap B)$ (分配律)

$= A\cup(A\cap B)$ (幂等律)

$= A$ (吸收律第一式)

$\therefore A\cap(A\cup B) = A$

3-2.7 集合恒等式证明(举例)

②德•摩根律的相对形式

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明: $A-(B\cup C)$

$= A\cap\sim(B\cup C)$ (补交转换律)

$= A\cap(\sim B\cap\sim C)$ (德•摩根律)

$= (A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$ (幂等律)

$= (A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$ (交换律,结合律)

$= (A-B)\cap(A-C)$ (补交转换律). #

小结：本节介绍了集合的运算和运算定律。重点掌握集合的各种运算及其运算规律。

作业：**P94**

(1) (2)

(3) c) d)

(4)

(5) a) c)

(6)

3-4 序偶与笛卡尔积

3-4.1 序偶(二元组)

定义［序偶ordered pair］：

由两个固定次序的客体 a,b组成的序列称为序偶，记作<a,b>， 其中a,b称为序偶的分量。

<a,b> 其中, a是第一元素, b是第二元素, 记作<a,b>也记作(a,b)。

定义3-4.1 **两个序偶相等** **，<x， y> = <u, v >, iff x＝u, y = v 。**

推论: $a\neq b \Rightarrow \langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$

3-4.2 三元组(ordered triple)

定义［三元组］：$<a,b,c>=<<a,b>,c>$.

定义［n(≥2)元组］：

$$<a_1,a_2,\ldots,a_n>=<<a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}>,a_n>.$$

定理: $<a_1,a_2,\ldots,a_n>= <b_1,b_2,\ldots,b_n>$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i,\ \ i =1,2,\ldots,n.$$

CHONGQING UNIVERSITY

3-4.3 笛卡尔积及其性质

定义3-4.2 令A和B是任意两个集合，若序偶的第一个成员是A的元素，第二个成员是B的元素，所有这样的序偶集合，称为集合A和B的笛卡尔乘积或直积，记为$A\times B$，$A\times B=\{<x,y>\mid x\in A\wedge y\in B\}$

3-4.3 笛卡尔积及其性质

例1: $A=\{\varnothing,a\}$, $B=\{1,2,3\}$.

$A\times B=$

$\{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\varnothing,3>,<a,1>,<a,2>,<a,3>\}$.

$B\times A=$

$\{<1,\varnothing>,<1,a>,<2,\varnothing>,<2,a>,<3,\varnothing>,<3,a>\}$.

$A\times A=$

$\{<\varnothing,\varnothing>, <\varnothing,a>, <a,\varnothing>, <a,a>\}$.

$B\times B=$

$\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,$
$<3,1>,<3,2>,<3,3>\}$.

3-4.4 笛卡尔积的性质：

当$|A|=m$，$|B|=n$时，$|A\times B|$是多少？

$|A\times B|= m\times n$

3-4.4 笛卡尔积的性质：

1. 非交换： $A\times B \neq B\times A$

(除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)

举例： $A=\{1\}$, $B=\{2\}$.

$A\times B=\{<1,2>\}$, $B\times A=\{<2,1>\}$.

2. 非结合： $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

(除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)

举例： $A=B=C=\{1\}$.

$(A\times B)\times C=\{<<1,1>,1>\}$, $A\times(B\times C)=\{<1,<1,1>>\}$.

3-4.3 笛卡尔积及其性质

3. 笛卡尔积分配律：（对$\cup$或$\cap$运算满足）

（1） $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

（2） $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

（3） $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$

（4） $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

3-4.3 笛卡尔积及其性质

3. 笛卡尔积分配律(证明(1))

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

证明: $\forall \langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow$ $x\in A \wedge y\in (B\cup C)$

$\Leftrightarrow$ $x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C)$

$\Leftrightarrow$ $(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow$ $(\langle x,y\rangle\in A\times B)\vee(\langle x,y\rangle\in A\times C)$

$\Leftrightarrow$ $\langle x, y\rangle \in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\therefore$ $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$. #

3-4.3 笛卡尔积及其性质

4. 其他性质：

设A,B,C,D是任意集合,

(1)　若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\times A \subseteq C\times A \Leftrightarrow B\subseteq C$（即书上的定理3-4.2）

(2)　$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Leftrightarrow A\times B\subseteq C\times D$.（即书上的定理3-4.3）

(3)　$A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$

3-4.3 笛卡尔积及其性质

证明(1) 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $B=\varnothing$, 则 $B\subseteq C$.

设 $B\neq\varnothing$, 由$A\neq\varnothing$, 设$x\in A$, $\forall y$, $y\in B$,

$<x,y>\in A\times B \Rightarrow <x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$

$\Rightarrow y\in C$.

$\therefore B\subseteq C$

$(\Leftarrow)$若$B=\varnothing$,则$A\times B=\varnothing\subseteq A\times C$.

设 $B\neq\varnothing$. $\forall <x,y>$, $<x,y>\in A\times B \Leftrightarrow$

$x\in A\wedge y\in B\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow <x,y>\in A\times C$

$\therefore A\times B\subseteq A\times C$. #

3-4.5 推广：n维笛卡尔积

定义［n维笛卡尔积］：

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{<x_1,x_2,\ldots,x_n> \mid x_1\in A_1\wedge x_2\in A_2\wedge\ldots\wedge x_n \in A_n \}$$

$$A\times A\times\ldots\times A = A^n$$

$$|A_i|=n_i \text{ , } i =1,2,\ldots,n \Rightarrow |A_1\times A_2\times\ldots\times A_n| = n_1\times n_2\times\ldots\times n_n.$$

n维笛卡尔积性质与2维笛卡尔积类似.

小结：本节介绍了序偶、有序n元组及笛卡尔积的概念。重点理解有序n元组及笛卡尔积的概念。

作业：P104 (1) b)

(2)

(5)

3-5关系及其表示

3-5.1关系的概念及记号

兄弟关系、长幼关系、同学关系、邻居关系，上下级关系等。

在数学上有大于关系、小于关系，整除关系。

例如：“3小于5”，“x大于y”，“点a在b与c之间”。

我们又知道序偶可以表达两个客体、三个客体或n个客体之间的联系，因此用序偶表达这个概念是非常自然的。

3-5.1关系的概念及记号

例如：火车票与座位之间的对号关系。

设X表示火车票的集合，Y表示座位的集合，

则对于任意的 $x \in X$ 和 $y \in Y$，

必定有 x 与y有“对号”关系

x 与y没有“对号”关系。二者之一

令R表示“对号”关系，

则上述问题可以表示为 xRy 或 $x \not R y$ 。

亦可表示为$<x,y> \in R$ 或$<x,y> \notin R$，

因此我们看到对号关系是序偶的集合。

3-5.1关系的概念及记号

定义3-5.1［关系］：

二元关系(binary relation)，

简称关系，任一**序偶的集合**即确定了一个二元关系R，R中任一序偶$\langle x,y \rangle$ 可记为 $\langle x,y \rangle \in R$或$xRy$。

不在R中的任一序偶$\langle x,y \rangle$ 可记为$\langle x,y \rangle \notin R$

或$x \not R y$

3-5.1关系的概念及记号

例1: 在实数中关系“≥”可记作

“≥ ” $=\{<x,y>|x,y$是实数且$x \geq y\}$。

例2: $R_1=\{<1,2>,<\alpha,\beta>,<a,b>\}$

R_1是二元关系.

例3: $A=\{<a,b>,<1,2,3>,a,1\}$

A不是关系.

3-5.1关系的概念及记号

二元关系的记号:

设R是二元关系, 则$<x,y>\in R$

$\Leftrightarrow$ x与y具有R关系

$\Leftrightarrow$ xRy。

对比: xRy (中缀(infix)记号)

$<x,y>\in R$ (后缀(suffix)记号)

R(x,y) (前缀(prefix)记号)

例如: $2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow <2,15>\in <$。

$<1,2> \in R \Leftrightarrow 1\,R\,2$ 。

$<5,4> \notin R \Leftrightarrow 5\,\not R\,4$。

3-5.1关系的概念及记号

X到Y的二元关系

定义3-5.3 令**X**和**Y**是任意两个集合，直积**X×Y**的**子集R**称为**X到Y的二元关系**。

R是X到Y的二元关系⇔$R\subseteq X\times Y$

⇔$R\in\mathscr{P}(X\times Y)$（幂集）

若$|X|=m,|Y|=n,$

则$|X\times Y|=mn,$

故$|\mathscr{P}(X\times Y)|=2^{mn}$，即X到Y不同的二元关系共有$2^{mn}$个

X到Y的二元关系(举例)

例：设 $A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b\}$,

则A到B的二元关系共有$2^{2\times 1}=4$个：

$R_1=\varnothing$, $R_2=\{<a_1,b>\}$,

$R_3=\{<a_2,b>\}$, $R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$

B到A的二元关系也有4个：

$R_5=\varnothing$, $R_6=\{<b,a_1>\}$,

$R_7=\{<b,a_2>\}$, $R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$。

3-5.1关系的概念及记号

X上的二元关系

定义［X上的二元关系］：

是X×X的任意子集。

R是X上的二元关系

$$\Leftrightarrow R \subseteq X \times X$$

$$\Leftrightarrow R \in \mathscr{P}(X \times X)。$$

若$|X|=m$,则$|X \times X|=m^2$, 故$|\mathscr{P}(X \times X)|= 2^{m^2}$， 即X上不同的二元关系共有$2^{m^2}$个。

3-5.1关系的概念及记号

X上的二元关系(举例)

例1：设 $A=\{a_1,a_2\}$,

则A上的二元关系共有16个：

$R_1 = \varnothing$, $\quad R_2 = \{\langle a_1,a_1\rangle\}$,

$R_3 = \{\langle a_1,a_2\rangle\}$, $\quad R_4 = \{\langle a_2,a_1\rangle\}$,

$R_5 = \{\langle a_2,a_2\rangle\}$,

$R_6 = \{ \langle a_1,a_1\rangle, \langle a_1,a_2\rangle \}$,

$R_7 = \{ \langle a_1,a_1\rangle, \langle a_2,a_1\rangle \}$,

$R_8 = \{ \langle a_1,a_1\rangle, \langle a_2,a_2\rangle \}$,

3-5.1关系的概念及记号

$R_9 = \{\langle a_1,a_2\rangle, \langle a_2,a_1\rangle\}$,

$R_{10} = \{\langle a_1,a_2\rangle, \langle a_2,a_2\rangle\}$,

$R_{11} = \{\langle a_2,a_1\rangle, \langle a_2,a_2\rangle\}$,

$R_{12} = \{\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_1,a_2\rangle,\langle a_2,a_1\rangle\}$,

$R_{13} = \{\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_1,a_2\rangle, \langle a_2,a_2\rangle\}$,

$R_{14} = \{\langle a_1,a_1\rangle, \langle a_2,a_1\rangle,\langle a_2,a_2\rangle\}$,

$R_{15} = \{\langle a_2,a_1\rangle,\langle a_2,a_1\rangle,\langle a_2,a_2\rangle\}$,

$R_{16} = \{\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_1,a_2\rangle,\langle a_2,a_1\rangle,\langle a_2,a_2\rangle\}$。

3-5.1关系的概念及记号

例2: 设 $A=\{a\}$,

则A上的二元关系共有2个:

$R_1=\varnothing$, $R_2=\{<a,a>\}$.

例3: 设 $A=\{a,b,c\}$,

则A上的二元关系共有$2^9=512$个!

3-5.2 与二元关系有关的概念

对任意集合R, 可以定义:

前域 / 定义域（domain）：

$$\mathrm{dom}\ R = \{ x \mid \exists y\ (xRy) \}$$

值域（range）：

$$\mathrm{ran}\ R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$$

域（field）：

$$\mathrm{FLD}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$$

前域 / 定义域,值域,域图示见书106页例题1。

3-5.2 与二元关系有关的概念

定义域,值域,域(举例)

例: $R_1=\{a,b\}$, $R_2=\{\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\}$,
$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 5,6\rangle\}$.

当a,b不是序偶时, R_1不是关系.

$\mathrm{dom}\ R_1=\varnothing$, $\mathrm{ran}\ R_1=\varnothing$, $\mathrm{FLD}\ R_1=\varnothing$

$\mathrm{dom}\ R_2=\{c,e\}$, $\mathrm{ran}\ R_2=\{d,f\}$, $\mathrm{FLD} R_2=\{c,d,e,f\}$

$\mathrm{dom}\ R_3=\{1,3,5\}$, $\mathrm{ran}\ R_3=\{2,4,6\}$,
$\mathrm{FLD}\ R_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.

3-5.3 一些特殊关系

设A是任意集合，则可以定义A上的：

空关系(empty relation): $\varnothing$

恒等关系(identity relation):

$$I_A = \{ <a, a> \mid a \in A \}$$

全域关系(universal relation):

$$U_A = A \times A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \}$$

3-5.3 一些特殊关系

此外，设$A \subseteq I$, 则可以定义A上的：

整除关系: $D_A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x|y \}$

例：$A=\{1,2,3,4,5,6\}$, 则

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$。

3-5.3 一些特殊关系

设$A \subseteq R$, 则可以定义A上的：

小于等于(less than or equal to)关系：

$LE_A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y \}$

小于(less than)关系：

$L_A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \}$

大于等于(greater than or equal to)关系，大于(great than)关系,…

3-5.3 一些特殊关系

设A为任意集合，则可以定义P(A)上的:

包含关系::

$\subseteq_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subseteq y \}$

真包含关系:

$\subset_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subset y \}$

见P107 例2和例3

3-5.4 关系的运算

定理3-5.1：若Z和S是从集合X到集合Y的两个关系，则Z和S的并、交、补、差仍是X到Y的关系。

证明见书108页。

3-5.5 二元关系的表示

(1) 序偶集合的形式表达

(2) 关系矩阵：

设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$, $R\subseteq A\times B$, 则R的关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{n\times m}$,其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & a_i R b_j \text{ 或 } \langle a_i, b_j\rangle \in R\\ 0, & a_i \not R\, b_j \text{ 或 } \langle a_i, b_j\rangle \notin R\end{cases}$$

3-5.5 二元关系的表示

例题：P108 例题5

例如: $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则

$$M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{R2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3-5.5 二元关系的表示

(3) 关系图:

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，$R\subseteq A\times B$,

首先在平面上做结点$a_1,a_2,\ldots,a_n$，$b_1,b_2,\ldots,b_n$

以“◦”表示(称为顶点),

若a_iRb_j，则从结点a_i向结点b_j画有向边$<a_i,b_j>$，箭头指向b_j,

若$a_i\not{R}b_j$，则a_i与b_j之间没有线段连接,

这样得到的图称为R的关系图 G_R 。

P109 例题7

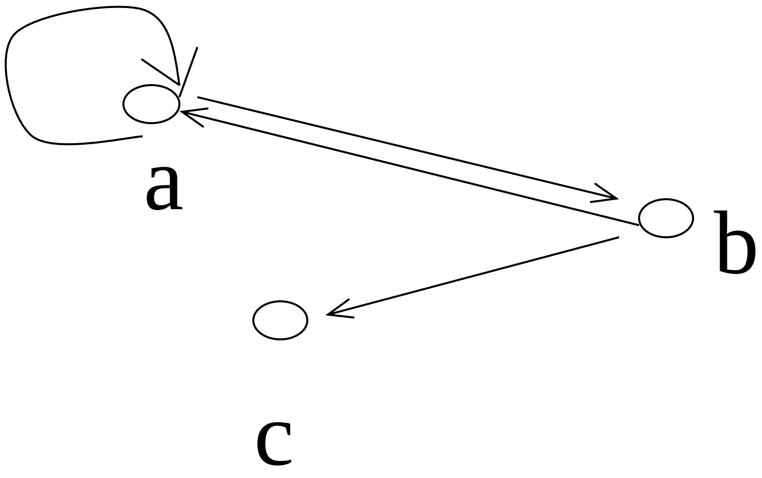
3-5.5 二元关系的表示

定义在集合A上的关系图有所不同

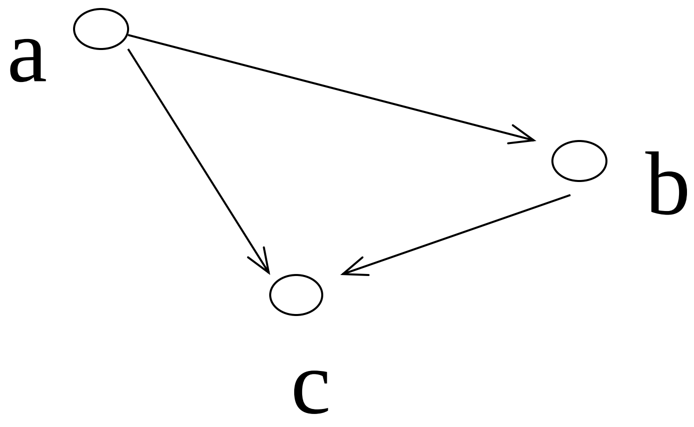
例如（上例），A={a,b,c},

R1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>},

R2={<a,b>,<a,c>,<b,c>}, 则关系图如下：



G_{R1}



G_{R2}

3-5.5 二元关系的表示

关系矩阵、关系图(讨论):

当A中元素标定次序后, $R \subseteq A \times A$的关系图G_R与R的序偶集合表达式可以唯一互相确定。

R的序偶集合表达式，关系矩阵，关系图三者均可以唯一互相确定。

小结: 本节介绍了关系的定义、几种特殊的关系及关系的表示。重点掌握关系的表示方法。

作业：P109 (2)

(5) b) d) 给出关系图和关系矩阵

3-6 关系的性质

（1） 自反性(reflexivity)

（2） 反自反性(irreflexivity)

（3） 对称性(symmetry)

（4） 反对称性(antisymmetry)

（5） 传递性(transitivity)

3-6 关系的性质

需要指出：

从X到Y的关系R是X×Y 的子集，即$R \subseteq X \times Y$，

而$X \times Y \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$

所以$R \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$

令$Z = X \cup Y$，则$R \subseteq Z \times Z$

因此，我们今后通常限于讨论同一集合上的关系。

3-6.1自反性(reflexivity)

定义3-6.1（自反性reflexivity）：设R为定义在A上的二元关系，即$R\subseteq A\times A$, 如果对于每一个$x\in A$，有xRx ($<x,x>\in R$)，则称二元关系R是自反的。

R在A上是自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(x\in A \rightarrow xRx)$$

R在A上是非自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(x\in A \wedge <x,x>\notin R)。$$

3-6.1自反性(reflexivity)

定理： R是自反的$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

$\Leftrightarrow M_R$主对角线上的元素全为1

$\Leftrightarrow G_R$的每个顶点处均有自环。

自反性(举例)：

平面上三角形的全等关系，

实数集中实数的小于等于关系，

幂集上的集合的相等、包含关系，

命题集合上的命题的等价、蕴含关系。

3-6.2 反自反性(irreflexivity)

定义（反自反性irreflexivity）：设$R \subseteq A \times A$，如果对于每一个$x \in A$，有$\langle x,x \rangle \notin R$，则称二元关系R是反自反的。

R在A上是反自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x,x \rangle \notin R)。$$

R在A上是非反自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(x \in A \wedge xRx)$$

3-6.2 反自反性(irreflexivity)

定理： R是反自反的$\Leftrightarrow$ $I_A \cap R=\varnothing$

$\Leftrightarrow$ M_R主对角线上的元素全为0

$\Leftrightarrow$ G_R的每个顶点处均无自回路（无环）。

反自反性(举例)：

数的大于关系，幂集上的集合之间的真包含关系。

注意：非自反不一定是反自反的。

即存在有关系既不是自反的也不是反自反的。

3-6.3 对称性(symmetry)

<u>定义</u>（对称性symmetry）：

设$R \subseteq A \times A$, 如果对于每个$x,y \in A$,每当 xRy， 就有yRx， 则称集合A上的关系R是对称的。

R在A上对称$\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx).$$

R非对称 $\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(\exists y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge y \not R x)$$

3-6.3 对称性(symmetry)

定理： R是对称的$\Leftrightarrow$ M_R是对称的

$\Leftrightarrow$ G_R的任何两个顶点之间若有边，则必有两条方向相反的有向边.

对称性(举例)：

平面上三角形的相似关系，

人群中人之间的同学、同事、邻居关系，

幂集中集合相等的关系。

命题集合上的命题的等价关系。

3-6.4 反对称性(antisymmetry)

定义（反对称性antisymmetry）：设$R \subseteq A \times A$,如果对于每个$x,y \in A$,每当 xRy和yRx，必有$x=y$，则称集合A上的关系R是反对称的。

R是反对称的$\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \wedge xRy \rightarrow y \not R x).$$

R非反对称$\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(\exists y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$$

3-6.4 反对称性(antisymmetry)

定理：R是反对称的

$\Leftrightarrow$ 在M_R中，$\forall x_i \forall x_j (i \neq j \wedge r_{ij}=1 \rightarrow r_{ji}=0)$

$\Leftrightarrow$ 在G_R中，$\forall x_i \forall x_j (i \neq j)$，若有有向边$<x_i, x_j>$，则必没有$<x_j, x_i>$。

3-6.4 反对称性(antisymmetry)

反对称性(举例):

实数集中的小于等于关系、整数的整除关系，集合的包含关系、命题的蕴含关系。

注意：非对称不一定反对称；可能有某种关系即是对称的又是反对称的。

例如：$A=\{1,2,3\}$,

$S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

S在A上即是对称的又是反对称的。

$N=\{<1,2>,<1,3>,<3,1>\}$

N在A上即不是对称的又不是反对称的。

3-6.5 传递性(transitivity)

定义（传递性transitivity）：设$R \subseteq A \times A$, 如果对于任意的$x,y,z \in A$, 每当xRy，yRz时就有xRz，称关系R在A上是传递的。

R在A上是传递的$\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

R非传递$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge x \not R z)$。

3-6.5 传递性(transitivity)

定理：R是传递的

$\Leftrightarrow$ 在G_R中，$\forall x_i\ \forall x_j\ \forall x_k(i\neq j\neq k)$，若有有向边$<x_i,x_j>$和$< x_j, x_k>$，则必有$<x_i,x_k>$ 。

传递性(举例)：

实数集中的实数之间的小于等于、小于、等于关系;

幂集上的集合之间的包含、真包含关系;

命题集合上的命题的等价、蕴含关系。

人群中人之间的同姓关系。

3-6.6 举例

例1：在 $N = \{0,1,2,\ldots\}$ 上：

$\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$

自反,反对称,传递

$\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$

自反,反对称,传递

$<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$

反自反,反对称,传递

3-6.6 举例

接上页

$>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$ (大于关系)

反自反,反对称,传递

$D=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$ (整除关系)

反对称,传递($\neg 0|0$)

$I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$ (恒等关系)

自反,对称,反对称,传递

$E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$ (全域关系)

自反,对称,传递

3-6.6 举例

例2：判断以下关系所具有的性质。

$A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$,

$R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_6=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_7=\varnothing$

3-6.6 举例

解答：

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$反对称,传递

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$反对称

$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$自反,对称,传递

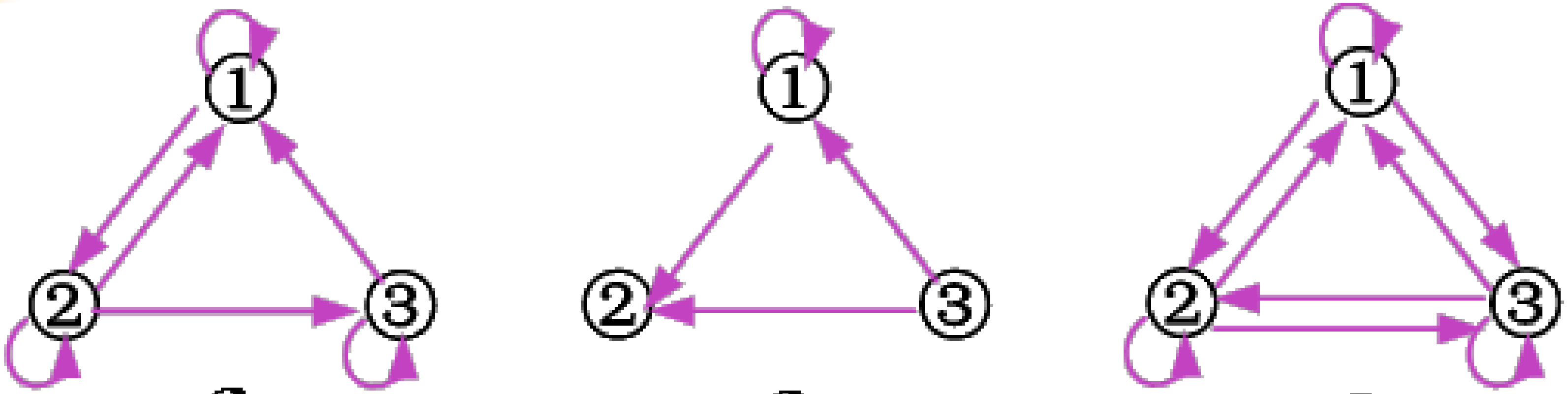
$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$对称

$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\}$自反,反对称,传递

$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}$

$R_7=\varnothing$（空关系）反自反，对称，传递，反对称.

例6 设 $A=\{1,2,3\}$，下面分别给出集合A上三个关系的关系图，试判断它们的性质。



ρ_1 ρ_2 ρ_3

解 （1）是自反的，非对称，不是反对称，不可传递

$\langle 1,2\rangle \in \rho_1, \langle 2,3\rangle \in \rho_1$, 但 $\langle 1,3\rangle \notin \rho_1$.

（2）非自反，也不是反自反，非对称，反对称，可传递。

（3）是自反的，对称的，可传递的，不是反自反，也不是反对称。

小结: 本节介绍了关系的基本性质及其判别方法。

作业：P113 （3）

（6）

3-7 复合关系和逆关系

3-7.1复合关系

定义1[复合 (合成)(composite)关系]:

设**R**为**X**到**Y**的关系，**S**为从**Y**到**Z**上的关系，则 **R**$\circ$ **S**称为**R**和**S**的复合关系，表示为:

$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid$

$x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\}.$

重庆大学 CHONGQING UNIVERSITY

3-7 复合关系和逆关系

3-7.2逆关系

定义2[逆(inverse)关系]：

设R是X到Y的二元关系，则从Y到X的二元关系R^c定义为：

$$R^c = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\}.$$

整数集合上的“>”关系的逆关系是“<”关系。

人群中的父子关系的逆关系是子父关系。

容易看出$(R^c)^c=R$

重庆大学 CHONGQING UNIVERSITY

3-7 复合关系和逆关系

例1: 设 $R=\{<a,b>, <c,d>\}$,

$S=\{<b,e>, <d,c>\}$.

求: (1)R^c， S^c.

(2) $R\circ S$, $S\circ R$

解: (1) $R^c = \{<b,a>,<d,c>\}$

$S^c = \{<e,b>,<c,d>\}$.

(2) $R\circ S=\{<a,e>, <c,c>\}$

$S\circ R=\{<d,d>\}$.

例2:（书上的例题2，第115页）

3-7 复合关系和逆关系

定理1: 设R_1,R_2,R_3为关系，R_1是X到Y的关系，R_2是Y到Z的关系，R_3是Z到W的关系则$(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$.

证明: $\forall\langle x,w\rangle$, $\langle x,w\rangle\in(R_1\circ R_2)\circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists z(z\in Z \wedge x\,(R_1\circ R_2)z \wedge zR_3w\,)$

$\Leftrightarrow \exists z(z\in Z \wedge \exists y(y\in Y \wedge xR_1y \wedge yR_2z\,) \wedge zR_3w)$

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(z\in Z \wedge y\in Y \wedge xR_1y \wedge yR_2z \wedge zR_3w)$

$\Leftrightarrow \exists y\exists z(z\in Z \wedge y\in Y \wedge xR_1y \wedge(yR_2z \wedge zR_3w))$

$\Leftrightarrow \exists y(y\in Y \wedge xR_1y \wedge\exists z(z\in Z \wedge yR_2z \wedge zR_3w))$

$\Leftrightarrow \exists y(y\in Y \wedge xR_1y\wedge y(R_2\circ R_3)w\,)$

$\Leftrightarrow xR_1\circ(R_2\circ R_3)w \Leftrightarrow \langle x,w\rangle\in R_1\circ(R_2\circ R_3)$

$\therefore (R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$. #

说明: 本定理说明复合运算满足结合律.

3-7 复合关系和逆关系

由复合关系满足结合律，可以把关系R本身所组成的复合关系写成：

$R \circ R$，　$R \circ R \circ R$，　…，　$R \circ R \circ \dots \circ R$(m个)，

分别记作

$R^{(2)}$，　$R^{(3)}$，　…，　$R^{(m)}$。

可以证明复合关系不满足交换律。

$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$

3-7 复合关系和逆关系

7-3.3关系矩阵的性质：

(1) $M_{R^c} = (M_R)^T$.

(^{T}表示矩阵转置)

(2) $M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} \bullet M_{R_2}$

(•表示布尔乘法，其中加法使用逻辑∨，乘法使用逻辑∧)

3-7 复合关系和逆关系

3-7.4逆关系关系图的性质：

关系 R^c 的图形是将关系R图形中弧的箭头方向反转。

3-7 复合关系和逆关系

定理2: 设R、 R_1 、 R_2都是从A到B的二元关系，则有

(1) $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$

(2) $(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$

(3) $(A \times B)^c = B \times A$

(4) $(\sim R)^c = \sim R^c$, 这里$\sim R = A \times B - R$

(5) $(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$

注：证明(1)(4)(5)见书117页。

3-7 复合关系和逆关系

定理3: 设**R,S**为二元关系, 则$(R\circ S)^c = S^c \circ R^c$.

证明: $\forall\langle x,y\rangle$,

$$\langle x,y\rangle \in (R\circ S)^c$$

$$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in (R\circ S)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\ yRz \wedge zSx\ )$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\ zR^cy \wedge xS^cz\ )$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\ xS^cz \wedge zR^cy)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in S^c \circ R^c.$$

3-7 复合关系和逆关系

定理4:设**R**为**X**上的二元关系，则

(1) R是对称的$\Leftrightarrow$**R=R**^{c}（证明见书**118**页）

(2) R是反对称的$\Leftrightarrow$**R**$\cap$**R**$^c\subseteq I_X$

定理5:[P119 (2)]设**R**为**X**上的二元关系，则

(1) R是传递的$\Leftrightarrow$ $(R\circ R)\subseteq R$

(2) R是自反的$\Leftrightarrow$ $I_X\subseteq R$

3-7 复合关系和逆关系

例题: 设 $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

用 M_{R1}, M_{R2} 确定 $M_{R1}{}^c$, $M_{R2}{}^c$, $M_{R1\circ R1}$, $M_{R1\circ R2}$, $M_{R2\circ R1}$, 从而求出它们的集合表达式.

3-7 复合关系和逆关系

$$M_{R1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad M_{R1c}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R2}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad M_{R2c}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R1\circ R2}=M_{R1}\bullet M_{R2}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$R_1\circ R_2$ = {<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>}.

3-7 复合关系和逆关系

$$M_{R_1\circ R_1} = M_{R_1} \bullet M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \circ R_1 = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>\}$.

$$M_{R_2\circ R_1} = M_{R_2} \bullet M_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \circ R_1 = \{<a,b>,<a,c>\}$.

3-7 复合关系和逆关系

解: $R_1^c = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$

$R_2^c = \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$

$R_1 \circ R_1 =$
$\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>\}.$

$R_1 \circ R_2 = \{<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>\}.$

$R_2 \circ R_1 = \{<a,b>,<a,c>\}.$

小结: 本节主要介绍了关系的复合运算与逆运算。重点掌握关系的复合运算及其性质、关系的逆运算的性质。

作业：P118 (1)

(2)

(8)

3-8 关系的闭包运算

自反闭包r(R)　(reflexivity closure)

对称闭包s(R)　(symmetry closure)

传递闭包t(R)　(transitivity closure)

闭包的性质, 求法, 相互关系

3-8 关系的闭包运算

3-8.1自反闭包(reflexive closure)

定义1[自反闭包]:

包含给定关系R的最小自反关系，称为R的自反闭包, 记作r(R).

(1) r(R)是自反的;

(2) $R \subseteq r(R)$;

(3) $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S\text{自反}) \rightarrow r(R) \subseteq S)$.

3-8 关系的闭包运算

3-8.2对称闭包(symmetric closure)

定义2[对称闭包]: 包含给定关系R的最小对称关系, 称为R的对称闭包, 记作s(R).

(1) s(R)是对称的;

(2) $R \subseteq s(R)$;

(3) $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S对称) \rightarrow s(R) \subseteq S)$.

3-8 关系的闭包运算

3-8.3传递闭包(transitive closure)

定义3[传递闭包]: 包含给定关系**R**的**最小**传递关系, 称为**R**的传递闭包, 记作**t(R)**.

(1) t(R)是传递的;

(2) R $\subseteq$ t(R);

(3) $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S)$.

3-8 关系的闭包运算

定理1: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R) = R$;

(2) R对称 $\Leftrightarrow s(R) = R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) 充分性：$R \subseteq R \wedge R$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R$

又 $R \subseteq r(R)$,

$\therefore r(R) = R.$

必要性：由于$r(R) = R$， $r(R)$自反，

因此R也自反。 (2)(3) 完全类似.

3-8 关系的闭包运算

*（补充）定理1:设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

证明: (1) $R_1 \subseteq R_2 \subseteq r(R_2)$自反,

$$\therefore\ r(R_1) \subseteq r(R_2)$$

(2)(3) 类似可证.

3-8 关系的闭包运算

（补充）定理2:设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\emptyset$, 则

(1) $r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$;

(2) $s(R_1\cup R_2) = s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2) \supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明: (1)利用补充定理1,

$r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$.

$r(R_1)\cup r(R_2)$自反且包含$R_1\cup R_2$,所以

$r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$\therefore r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$

3-8 关系的闭包运算

证明(2):利用补充定理1,

$s(R_1) \cup s(R_2) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$.

$s(R_1) \cup s(R_2)$对称且包含$R_1 \cup R_2$,所以

$s(R_1 \cup R_2) \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$.

$\therefore s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

证明(3):利用补充定理1,

$t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.

反之不成立: $t(R_1) \cup t(R_2)$不满足传递性.

3-8 关系的闭包运算

定理2: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^c$;

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

对比: R自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

R对称 $\Leftrightarrow R = R^c$

R传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

3-8 关系的闭包运算

证明: (1) $r(R) = R \cup I_A$;

i) $R \subseteq R \cup I_A$;

ii) $I_A \subseteq R \cup I_A \Leftrightarrow R \cup I_A$ 自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R \cup I_A$;

iii) $R \subseteq r(R) \wedge r(R)$ 自反

$\Rightarrow R \subseteq r(R) \wedge I_A \subseteq r(R)$

$\Rightarrow R \cup I_A \subseteq r(R)$

$\therefore r(R) = R \cup I_A$.

3-8 关系的闭包运算

证明: (2) $s(R) = R \cup R^c$;

i) $R \subseteq R \cup R^c$;

ii) $(R \cup R^c)^c = R \cup R^c \Leftrightarrow R \cup R^c$ 对称 $\Rightarrow s(R) \subseteq R \cup R^c$;

iii) $R \subseteq s(R) \wedge s(R)$对称

$\Rightarrow R \subseteq s(R) \wedge R^c \subseteq s(R)$

$\Rightarrow R \cup R^c \subseteq s(R)$

$\therefore s(R) = R \cup R^c$.

3-8 关系的闭包运算

证明(3)之前，说明以下事实：

复合运算对并运算满足分配律

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3)=(R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

(2) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 =(R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$

复合运算对交运算满足**弱**分配律

(1) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

(2) $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

3-8 关系的闭包运算

证明: (3)　$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots.$

证明:i) 先证$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

$\because R \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

$\because (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^2 = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Leftrightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$传递

$\therefore \Rightarrow t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

ii)再证$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\because R \subseteq t(R) \wedge t(R)$传递

$\Rightarrow R \subseteq t(R) \wedge R^2 \subseteq t(R) \wedge R^3 \subseteq t(R) \wedge \ldots$

$\Rightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots.$ #

3-8 关系的闭包运算

定理3：设X是含有n个元素的集合，R是X上的二元关系，则存在一个正整数k≤n，使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k$$

证明：见**P122**。

3-8 关系的闭包运算

例题1: 设 $A = \{ a,b,c,d \}$,

$$R = \{ \langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle \}.$$

求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

解: $r(R)=R\cup I_A =$

$$\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle, \langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle \}$$

$s(R)=R \cup R^c=$

$$\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle, \langle c,d\rangle \langle d,c\rangle \}$$

$t(R)= R\cup R^2\cup R^3\cup R^4 =$

$$\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

见P123

3-8 关系的闭包运算

求传递闭包的另一种方法：

当有限集X的元素较多时，矩阵运算很繁琐，Warshall 在1962年提出了R+的一个有效算法如下：

（1）置新矩阵A=M

（2）置i=1

（3）对所有j如果A[j, i]=1，则对k=1,2,…,n

A[j,k]=A[j,k]+A[i,k]

（4） i= i+1

（5）如果 i≤ n,则转到步骤（3）,否则停止。

3-8 关系的闭包运算

引出下面定理：

闭包运算是否可以交换顺序?即：

(1) $rs(R) = sr(R)$?

(2) $rt(R) = tr(R)$?

(3) $st(R) = ts(R)$?

3-8 关系的闭包运算

定理4：设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$;

证明： (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R \cup R^c)$

$= I_A \cup (R \cup R^c) = (I_A \cup R) \cup (I_A{}^c \cup R^c)$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^c = r(R) \cup r(R)^c$

$= s(r(R)) = sr(R)$.

$\therefore$ $rs(R) = sr(R)$.

3-8 关系的闭包运算

(2)证明: $rt(R) = r(t(R)) = r(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= I_A \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R \cup R^2) \cup (I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3) \cup \ldots$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^2 \cup (I_A \cup R)^3 \cup \ldots$

$= r(R) \cup r(R)^2 \cup r(R)^3 \cup \ldots = t(r(R)).$

$\therefore\ rt(R) = tr(R).$

3-8 关系的闭包运算

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$;

证明: $st(R) \subseteq st(s(R))$

$= sts(R)$

$= s(ts(R))$

$= ts(R)$ ($ts(R)$对称)

$\therefore st(R) \subseteq ts(R)$.

小结: 本节介绍了关系的闭包的概念及其求法。重点掌握关系的传递闭包的求法。

作业：P127 (1)

(2)

(5) (6) (7)

3-9 集合的划分和覆盖

定义3-9.1[覆盖cover]：若把一个集合A分成若干个叫做分块的非空子集，使得A中每个元素至少属于一个分块，这些分块的全体叫做A的一个覆盖。

即：设A为非空集合，$S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$，

其中$S_i \subseteq A$，$S_i \neq \varnothing (i=1,2,\ldots,m)$

且$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m = A$，

则集合S称作集合A的覆盖。

3-9 集合的划分和覆盖

例:判断以下集合是否为集合A的覆盖？　其中 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

（1）$S_1=\{\varnothing, \{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$ 不是

（2）$S_2=\{\{a,b\},\{c,d\},\{f,g\}\}$ 不是

（3）$S_3=\{\{a,b\},\{c,d\},\{f\}\}$ 不是

（4）$S_4=\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{e,f\}\}$ 是

3-9 集合的划分和覆盖

定义3-9.2[划分partition]：给定集合A的一个覆盖S，若A中的每个元素属于且仅属于S的一个分块，则S称作是A的一个划分。

即：若S是集合A的覆盖，

且满足$S_i \cap S_j = \varnothing$，（这里$i \neq j$），

则称S是A的划分。

3-9 集合的划分和覆盖

例: 判断以下集合是否为集合A的划分？ 其中

$A=\{a,b,c,d,e,f\}$

（1）$S_1=\{\varnothing,\{a,b,c,d\},\{f\}\}$ 不是

（2）$S_4=\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{e,f\}\}$ 不是

（3）$S_5=\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$ 是

（4）$S_6=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$ 最大划分

（5）$S_7=\{\{a,b,c,d,e,f\}\}$ 最小划分

我们看到对于一个给定集合，划分不唯一

3-9 集合的划分和覆盖

定义3-9.3[交叉划分]：若$\{A_1,A_2, \ldots,A_r\}$与$\{B_1,B_2, \ldots,B_s\}$是同一集合A的两种划分，则其中所有$A_i \cap B_j$组成的非空集合，称为原来两种划分的交叉划分。

定义3-9.4[加细]：给定X集合的任意两个划分$\{A_1,A_2, \ldots,A_r\}$和$\{B_1,B_2, \ldots,B_s\}$，若对于每一个A_j，均有B_k使得$A_j \subseteq B_k$，则称$\{A_1,A_2, \ldots,A_r\}$为$\{B_1,B_2, \ldots,B_s\}$的加细。

3-9 集合的划分和覆盖

定理3-9.1: 设$\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$与$\{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$是同一集合X的两种划分，则其交叉划分仍是原集合的一种划分。

证明见书129页。

3-9 集合的划分和覆盖

定理3-9.2: 任何两种划分的交叉划分，都是原来各划分的一种加细。

证明见书130页。

3-9 集合的划分和覆盖

作业(3-9):

P130 (1)

(2)

(3)

3-10 等价关系与等价类

3-10.1 等价关系

定义3-10.1

[等价关系Equivalence Relations]：

设A $\neq\varnothing$，R $\subseteq$ A $\times$ A，若R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系。

例如平面上三角形集合中，三角形的全等关系、相似关系是等价关系。一个班级中，同学之间的同姓关系也是等价关系

例1: 见书131页例题2（验证一个等价关系）

3-10.2 等价类

定义3-10.2[等价类Equivalence classes]：

设R是非空集合A上的等价关系，

对任意的$a\in$A，定义

$$[a]_R = \{x\in A \mid aRx\},$$

称为a关于R的等价类，简称a的等价类，

在不混淆的情况下记为[a]。

显然$[a]_R$非空，因为$a \in [a]_R$

3-10 等价关系与等价类

定理3-10.1 设R是非空集合A上的等价关系，对于任意a, b$\in$A，有aRb iff $[a]_R=[b]_R$。

证明：假设$[a]_R=[b]_R$，因为$a\in[a]_R$，

故$a\in[b]_R$，即aRb。

若aRb，设$c\in[a]_R \Rightarrow aRc \Rightarrow cRa \Rightarrow cRb$

$\Rightarrow c\in[b]_R$，即$[a]_R\subseteq[b]_R$

同理，若$c\in[b]_R \Rightarrow bRc \Rightarrow cRb \Rightarrow cRa$

$\Rightarrow c\in[a]_R$，即$[a]_R\subseteq[b]_R$

由此证得若aRb，则$[a]_R=[b]_R$

3-10 等价关系与等价类

定义3-10.3[商集]：设R是非空集合A上的等价关系，关于R的全体不同的等价类为元素的集合

$$\{[a]_R \mid a \in A\}$$

称为A关于R的商集，记为A/R。

例2：仍以书131页例题2为例（给出一个集合和等价关系，求商集）。

3-10 等价关系与等价类

定理3-10.2： 非空集合A上的等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集A/R。

定理的证明见书133页上，在此省略。

3-10 等价关系与等价类

定理3-10.3：集合A的一个划分确定A的元素间的一个等价关系。

定理的证明见书133页下，在此省略。

例：包含三个元素的集合，可以有多少种不同的划分，就有多少种等价关系。

5种。

看P134 例题4

3-10 等价关系与等价类

定理3-10.4： 设R_1和R_2为非空集合A上的等价关系，则$R_1=R_2$当且仅当$A/R_1=A/R_2$。

定理的证明见书134页中，在此省略。

作业（3-10）

P134 (2)

(3)

(4)

(5)

3-11 相容关系

定义3-11.1[相容关系]：给定集合A上的关系r，若r是自反的，对称的，则称r是相容关系。

我们可以知道，相容关系的关系矩阵的对角线元素都为1，且是对称矩阵，为此，可以将矩阵用梯形表示。

关系图上，每个结点都有自回路，且相关结点间的有向边成对出现，可以把图形简化为：不画自回路，并用单线（无向边）代替双向有向边。

3-11 相容关系

例1：设X={216，2234，379，648，545}，R是X中的二元关系。

R={$<x,y>|x\in X$，$y\in X$，x和y有相同的数字}，试说明R是一个相容关系，并写出R的关系矩阵，画出关系图。

解：令X中的元素分别为$x_1 \sim x_5$，则

R={$<x_1,x_1>,<x_1,x_2>,<x_1,x_4>,<x_2,x_1>,<x_2,x_2>,<x_2,x_3>,<x_2,x_4>,<x_2,x_5>,<x_3,x_2>,<x_3,x_3>,<x_4,x_1>,<x_4,x_2>,<x_4,x_4>,<x_4,x_5>,<x_5,x_2>,<x_5,x_4>,<x_5,x_5>$

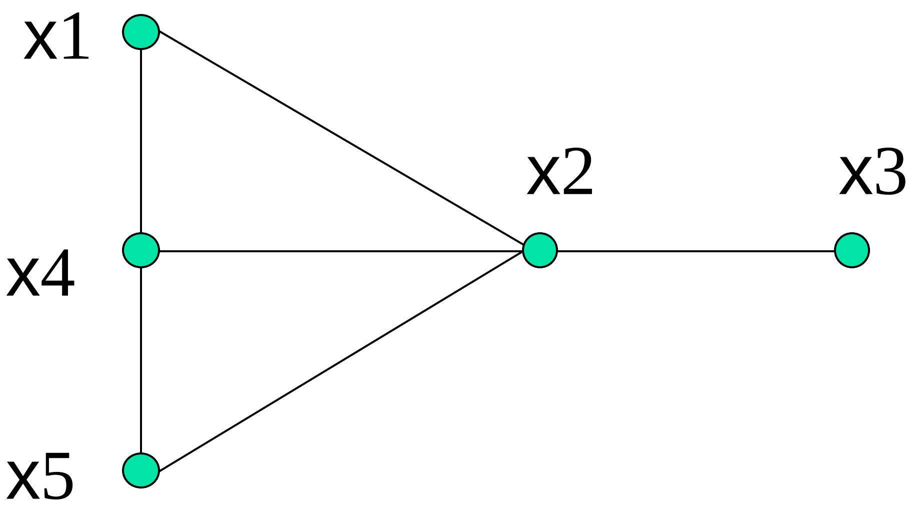
3-11 相容关系

关系矩阵如下：

$$
M_R=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

转化后如下：

x_2	1			
x_3	0	1		
x_4	1	1	0	
x_5	0	1	0	1
	x_1	x_2	x_3	x_4



3-11 相容关系

定义3-11.2[相容类]: 设r是集合A上的相容关系，若$C \subseteq A$，如果对于C中任意两个元素a_1，a_2有$a_1\ r\ a_2$，称C是由相容关系r产生的相容类。

上例中的相容类有：

$\{x_1,x_2\},\{x_1,x_4\},\{x_2,x_3\},\{x_2,x_4\},\{x_2,x_5\}$等。

3-11 相容关系

定义3-11.3 [最大相容类]：设r是集合A上的相容关系，不能真包含于任何其它相容类中的相容类，称作最大相容类。记作Cr。在相容关系图中，最大完全多边形的顶点集合，就是最大相容类。此外，一个孤立结点，以及不是完全多边形的两个结点的连线，也是最大相容类。

例2：见P137 例1。

3-11 相容关系

定理3-11.1：设r是有限集合A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类Cr，使得C⊆Cr。

定义3-11.4[A的完全覆盖]：在集合A上给定相容关系r，其最大相容类的集合称作A的完全覆盖，记作Cr(*A*).

例1中X的完全覆盖是

$$\{\{x_1,x_2,x_4\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_2,x_3\}\}$$

3-11 相容关系

已知集合的覆盖，求相容关系

定理3-11.2：给定集合A的覆盖$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由它确定的关系$R=A_1\times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$是相容关系。

定理3-11.3：集合A上的相容关系r与完全覆盖$C_r(A)$存在一一对应。

3-11 相容关系

作业（3-11）

P139 (1)

(2)

3-12 序关系

在这一节中，我们将介绍以下一些序关系：

- 偏序关系
- 全序关系
- 良序关系
- 拟序关系*

3-12 序关系

在一个集合上，我们常常要考虑使得元素具有一定的次序的关系，其中很重要的一类关系称作偏序关系。

下面给出一些偏序关系的例子：

1. 实数集上的小于等于（或大于等于）关系。
2. 幂集合中的集合之间的包含关系。
3. 整数集合上的整除关系。
4. 一个单位里，部门之间的责任关系。

3-12 序关系

3-12.1 偏序关系

定义3-12.1[偏序关系] (*partial order*)：

设**A** $\neq \varnothing$，**R** $\subseteq$ **A** $\times$ **A**，若**R**是自反的、反对称的和传递的，则称**R**是**A**上的偏序关系。

常将偏序关系**R**记为“$\leq$”，并将 xRy记为$x \leq y$。序偶<A, ≤>称为偏序集(***partially ordered set, poset***)。

3-12 序关系

例1:验证实数集**R**上的小于等于关系“≤”是偏序关系。（见书**140**页例题**1**）。

证明：**1.** 对于任何实数$a\in R$,有$a\le a$成立，故“≤”是自反的。

2. 对于任何实数$a,b\in R$，如果$a\le b$，$b\le a$，则必有$a=b$，故“≤”是反对称的。

3. 如果$a\le b$，$b\le c$ 那么必有$a\le c$，故“≤”是传递的。

因此“≤” 是一个偏序关系。

3-12 序关系

定义3-12.2[盖住]: 设$<A, \leq>$是偏序集，若有$x, y \in A$，$x \leq y$，且$x \neq y$，且不存在其它元素z，$z \in A$，使得$x \leq z \wedge z \leq y$，则称元素y盖住元素x。并且记盖住集为:

$COV A=\{<x,y> | x,y \in A; y$盖住$x\}$。

例2：求盖住集。P140 例2

$COV A=\{<2,6>, <2,8>, <3,6>\}$。

例3： P140 例3

$COV A=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<2,6>,<3,6>,<4,12>,<6,12>\}$。

3-12 序关系

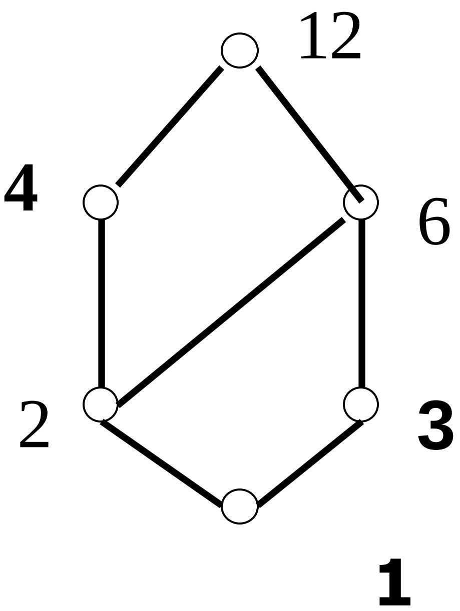
3-12.2 哈斯图

根据上述定义，可以简化偏序关系的关系图得到哈斯图(**Hasse diagram**)，具体画法如下：

1. 用小圆圈代表元素；
2. 若$x \le y$，$x \ne y$，将代表y的小圆圈放在代表x的小圆圈之上，
3. 如果$\langle x,y \rangle \in COV A$，则在$y$与$x$之间用直线连接。

3-12 序关系

例3的哈斯图



注意到：哈斯图中的边不再需要用有向边。因为若**u**，**v**两点间有边，且**u**在**v**的下层，则表示**u ≤ v**，所以边的方向一定是从下层结点指向上层结点的。

3-12 序关系

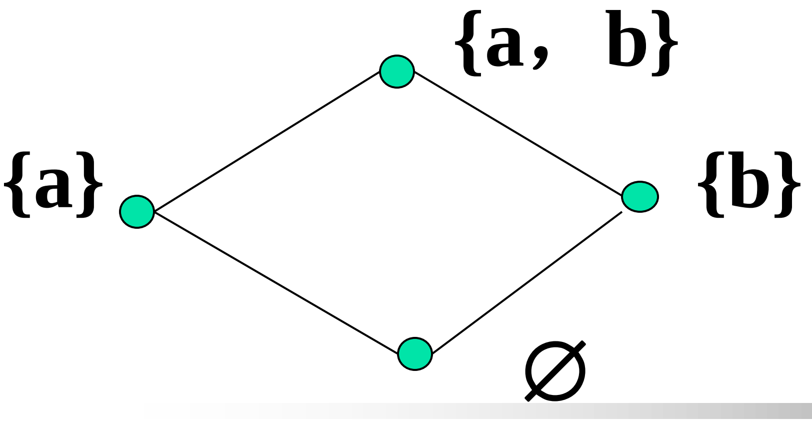
由关系图改画为哈斯图的方法

首先去掉自环，然后去掉封闭边，再按照有向边的方向，将结点位置进行重新排列，即有向边起始的结点放下层，终点的结点放上层；最后把有向边改为无向边。

3-12 序关系

例5：验证定义在P({a,b})上的包含关系是偏序关系，并画出哈斯图。

证明：因为P({a,b})有元素为{a，b}，{a}，{b}，∅；又知{a} ⊆{a，b} ， {b} ⊆{a，b} ， ∅ ⊆{a，b} ， ∅ ⊆{a} ， ∅ ⊆{b} ，{a，b}⊆{a ，b} ，{a} ⊆ {a} ， {b} ⊆ {b}， ∅ ⊆ ∅ ；可看出此包含关系具有自反，反对称和传递性，所以是偏序关系。哈斯图如下：



3-12 序关系

定义3-12.3[链chain，反链]： 设<A, ≤ >是一个偏序集合，在A的一个子集中，如果每两个元素都是有关系的，则称这个子集为链。在A的一个子集中，如果每两个元素都是无关的，则称这个子集为反链。

我们约定，若A的子集中只有单个元素，则这个子集既是链又是反链。

特别地，当A本身是链，称<A, ≤ >是全序集，而关系“≤”称为全序关系。

3-12 序关系

定义3-12.4[全序关系linear order]： 在偏序集$<A,\leq>$中，如果A是一个链，则称$<A,\leq>$为全序集合或称线序集合，在这种情况下，二元关系“$\leq$”称为全序关系或线序关系。

全序集[linearly ordered sets] $<A,\leq>$就是对任意x，y$\in$A，或者有$x\leq y$或者有$y\leq x$成立。

例如，定义在自然数集合N上的“小于等于”关系“$\leq$”是偏序关系，且对任意i，j$\in$N，必有 $i\leq j$ 或 $j\leq i$ 成立，故也是全序关系。

3-12 序关系

3-12.3 极大(小)元，最大(小)元

定义3-12.5-6[最大(小)元、极大(小)元]： 设<A, ≤ >为偏序集，B⊆A，则：

1. 若存在$y \in B$，使得$\forall x\,(x \in B \rightarrow y \leq x)$为真，则称$y$为B的最小元(*least element*)。

2. 若存在$y \in B$，使得$\forall x\,(x \in B \rightarrow x \leq y)$为真，则称$y$为B的最大元(*greatest element*)。

3. 若存在$y \in B$，使得$\forall x\,(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$为真，则称$y$为B的极小元(*minimal element*)。

4. 若存在$y \in B$，使得$\forall x\,(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$为真，则称$y$为B的极大元(*maximal element*)。

3-12 序关系

考虑偏序集<P({a,b}), ⊆>，哈斯图为P143图3-12.7所示。

A）若B={{a}，∅}，

则{a}是B的极、最大元， ∅是B的极、最小元。

B）若B={{a}， {b}}，

则B没有最大元和最小元。 {a}， {b}是B的极大元，也是极小元。

C）若B={∅，{a，b}}，

则{a，b}是B的极大、最大元， ∅是B的极小、最小元。

D）若B={{a}， {b}， ∅}，

则{a}，{b}是B的极大元， ∅是B的极小、最小元。

3-12 序关系

定理3-12.1： 设$<A, \leq>$为偏序集，$B \subseteq A$，若B有最小（大）元，则该最小（大）元是唯一的。

证明：假定a，b两者都是B的最大元素，则$a \leq b$，$b \leq a$，从$\leq$的反对称性，得到$a=b$。同理可证最小元唯一。

3-12 序关系

定义3-12.7、8 设<A, ≤ >为一偏序集，对于$B \subseteq A$。

（1）如果$a \in A$，且对每一$x \in B$，$x \le a$，则称a为B的**上界**（*upper bound*）。即

a为B的上界 $\Leftrightarrow a \in A \land \forall x(x \in B \to x \le a)$

（2）如果$a \in A$，且对每一$x \in B$，$a \le x$，则称a为B的**下界**（*lower bound*），即

a为B的下界 $\Leftrightarrow a \in A \land \forall x(x \in B \to a \le x)$

（3）如果a是B的所有上界的集合中的最小元。则称a为 B的**最小上界**或**上确界LUB**（*Least Upper Bound*）。

（4）如果a是B的所有下界的集合中的最大元。则称a为 B的**最大下界**或**下确界GLB**(*Greatest Lower Bound*)。

3-12 序关系

定义3-12.9[良序集]：若偏序集A的每一个非空子集存在最小元，则称A为良序集。

定理3-12.2 每一个良序集合，一定是全序集合。

■ 证明：设<A, ≤ >是良序集，那么对任意两个元素x,y ∈ A可构成子集{x,y}，必存在最小元素，这个最小元素不是x就是y，因此一定有x ≤ y或 y ≤ x 。 ■

3-12 序关系

定理3-12.3 每一个有限的全序集合，一定是良序集合。

■ 证明：设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，令$\langle A, \prec\rangle$是全序集，现假定$\langle A, \prec\rangle$不是良序集合，那么必存在一个非空集合$B\subseteq A$，在B中不存在最小元素，由于B是一个有限集合，故一定可以找到两个元素x与y是无关的，由于$\langle A, \prec\rangle$是全序集，$x,y\in A$，所以x,y必有关系，得出矛盾。故$\langle A, \prec\rangle$是良序集合。 ■

上述结论对于无限的全序集合不一定成立。

拟序关系是一种反自反的、可传递的二元关系。

3-12 序关系

$$\text{关系}\begin{cases}\text{等价关系}\\ \text{偏序关系}\end{cases}$$

偏序集 ⊇ 全序集 ⊇ 良序集

（链）（有最小元的全序集）

3-12 序关系

作业：(3-12)

P145 （1）

（5）

（6）

（7）

结 束

谢 谢！