学院 专业、班 年级 学号 姓名 考试教室

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

重庆大学《高等数学 II-2》课程试卷

○A卷 ◉B卷

2023—2024 学年 第 一 学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10822 考试日期: 2023.12

考试方式: ○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

一、单项选择题(每小题3 分,共18分)

1. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=6$, 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 为 (   ).

(A) 5 (B) 6 (C) 15 (D) 30

【答案】C

【解】 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{6}=5\times6\times\frac{1}{2}=15.$

2. 二元函数 $z=x\sin y$ 在点 $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 处对 x,y 的偏导数分别为 (   ).

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解】 设 $z=x\sin y$, 则 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x\cos y.\end{cases}$ 于是, $\begin{cases}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

3. 在下列微分方程中,不是全微分方程的 (   ).

(A) $ydx+(x-3x^3y^2)dy=0$ (B) $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$

(C) $\frac{2xy+1}{y}dx+\frac{y-x}{y^2}dy=0$ (D) $ydx+xdy=0$

【答案】A

【解】微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 是全微分方程的充要条件是 $\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$. 因此,选项 (B),(C),(D) 均满足此条件,而 $\frac{\partial M}{\partial y}=1\neq1-9x^2y^2=\frac{\partial N}{\partial x}$, 因此应选(A)

4. 设 C 是圆周闭曲线 $x^2+y^2=\pi^2$, 则 $\oint_C(x^2y-y^3-x+y)ds=$ (   ).

(A) 0 (B) π (C) π^2 (D) 2π

【答案】A

【解】$\oint_C (x^2\sin y - y^3 - x + y)ds$

$$=\oint_C x^2\sin y ds+\oint_C(-y^3)ds+\oint_C(-x)ds+\oint_C yds$$
$$=0+0+0+0$$
$$=0.$$

5. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则必定收敛的级数为(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$

【答案】D

【解】$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n-1}$收敛. 收敛级数的和收敛.所以(D)是答案. 对于(C)有以下反例:设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1},\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)$, 故$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

6. 设积分曲面Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2\ (R>0)$的外侧,则

$$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{x^2+y^2+z^2}=(\quad).$$

(A) 0　(B) $4\pi R$　(C) $4\pi R^2$　(D) $\frac{4}{3}\pi R^3$

【答案】B

【解】$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{x^2+y^2+z^2}$

$$=\frac{1}{R^2}\oiint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$$
$$=\frac{3}{R^2}\iiint_{\Omega}dxdydz$$
$$=\frac{3}{R^2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$
$$=4\pi R.$$

二、填空题(每小题 3 分,共 18分)

7. 若$f(x,y)=e^y+x^2+x\sin(x-y)$,则梯度$gradf(1,1)=$______.

【答案】$\{3,e-1\}$

【解】设$f(x,y)=e^y+x^2+x\sin(x-y)$,则

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x+\sin(x-y)+x\cos(x-y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}=e^y-x\cos(x-y).\end{cases}$$
于是,
$$\begin{cases}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=3,\\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=e-1.\end{cases}$$

因此,$gradf(1,1)=\{3,e-1\}$.

8. 设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=2$确定的隐函数,则

$$dz|_{(0,0)}=\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】$-(dx+2dy)$

【解】设 $e^{2yz}+x+y^2+z=2$, 则

$$\begin{cases} e^{2yz}\cdot 2yz_x'(x,y)+1+z_x'(x,y)=0, \\ e^{2yz}[2z+2yz_y'(x,y)]+2y+z_y'(x,y)=0. \end{cases}$$

于是, $\begin{cases} z_x'(0,0)=-1, \\ z_y'(0,0)=-2. \end{cases}$ 因此, $dz|_{(0,0)}=-(dx+2dy).$

9. 设 D 是由 $x^2+y^2=4$ 围成的有界闭区域,则 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=$______.

【解】$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{\rho^2}\right]\Bigg|_0^2=\pi(e^4-1).$

【答案】$\pi(e^4-1)$

10. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+4x}$ 在开区间 $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ 上的麦克劳林级数为______.

【答案】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-4x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-4)^n x^n$

11. 设 a,b 为任意常数, $\varphi(x)$ 是实数域上的正值连续函数,平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$, 则 $\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}dxdy=$______.

【答案】$\dfrac{a+b}{8}\pi$

【解】$\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}+\frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\right]dxdy$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint\limits_D dxdy$$

$$=\frac{a+b}{8}\pi.$$

12. $\int_{(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy=$______.

【答案】$e^2-\dfrac{7}{2}$

【解】$\int_{(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy=\int_0^1(1+x)dx+\int_0^2(e^y-2y)dy=e^2-\dfrac{7}{2}.$

三、计算题(每小题 7 分,本题共 28 分)

13. 求通过直线 $x=y=z$ 和平面 $x+y+z-3=0$ 的交点,且平行于平面 $x+y+2z=0$ 的平面方程.

【解】令 $\begin{cases} x=y=z, \\ x+y+z-3=0, \end{cases}$ 则直线与平面的交点为 $(1,1,1)$.　　(3 分)

因为所求平面平行于 $x+y+2z=0$, 所以该平面的法向量为 $\{1,1,2\}$. (4 分)

于是,所求平面为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$, 即

$$x+y+2z-4=0. \text{ (7 分)}$$

14. 求微分方程 $y'-2xy=e^{x^2}\cos x$ 的通解.

【解】一阶线性微分方程(公式法).

设 $y'-2xy=e^{x^2}\cos x$, 则

$$y=e^{-\int -2xdx}\left(\int e^{x^2}\cos x\cdot e^{\int -2xdx}dx+C\right) \quad (3\text{ 分})$$

$$=e^{x^2}\left(\int e^{x^2}\cos x\cdot e^{-x^2}dx+C\right) \quad (5\text{ 分})$$

$$=e^{x^2}\left(\int \cos xdx+C\right)$$

$$=e^{x^2}(\sin x+C),\ \forall C\in\mathbb{R}. \quad (7\text{ 分})$$

15. 计算下列二重积分 $\iint\limits_D \cos(x+y)d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0),(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

【解】 设积分区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le x\}$, 则　(1 分)

$$\iint\limits_D \cos(x+y)d\sigma$$

$$=\int_0^\pi dx\int_0^x \cos(x+y)dy \quad (3\text{ 分})$$

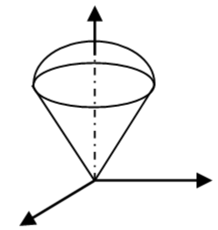
$$=\int_0^\pi \left[\sin(x+y)\right]\Big|_0^x dx$$

$$=\int_0^\pi (\sin 2x-\sin x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$=-2. \quad (7\text{ 分})$$

16. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成的空间闭区域.



【解】 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{6},0\le r\le 1\right\}$, 则　(1 分)

$$\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$$

$$=\iiint\limits_\Omega r\cos\varphi\cdot r\cdot r^2\sin\varphi d\theta d\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr \quad (4\text{ 分})$$

$$=2\pi\cdot\left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}\cdot\left[\frac{1}{5}r^4\right]\Bigg|_0^1$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}$$

$$=\frac{\pi}{20}. \quad (7\text{ 分})$$

四、 综合题(每小题 9 分,共 18 分)

17. 求斜边为 a 且周长最大的直角三角形的两条直角边的长.

【解】 设直角三角形的两直角边的长度分别为 x,y, 则目标函数为 $f(x,y)=a+x+y$, 约束条件为 $x^2+y^2-a^2=0$.　(2 分)

令拉格朗日函数为 $L=a+x+y+\lambda(x^2+y^2-a^2)$, 则　(5 分)

$$\begin{cases} L'_x = 1+2\lambda x = 0, \\ L'_y = 1+2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2+y^2-a^2 = 0. \end{cases}$$ (8 分)

解方程组得唯一驻点 $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, 故斜边为 a 而且周长最大的直角三角形为等腰直角三角形,它的直角边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. (9 分)

18. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$ 的收敛半径与收敛域,并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}$.

【解】 令 $u_n(x)=\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$, 则 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}|x|^{n-1}}=\dfrac{|x|}{2}<1$, 其中 $\dfrac{|x|}{2}<1$, 即 $x\in(-2,2)$. (2 分)

当 $x=\pm 2$ 时, $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}\right]_{x=\pm 2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)$ 都发散.

(3 分)

因此,收敛半径为 2, 收敛域为 $(-2,2)$.

设 $s(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}t^{n-1}, \forall t\in(-2,2)$, 则

$$\int_0^u s(t)dt=\int_0^u\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}t^{n-1}\right]dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^u\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n-1}}u^n, \forall u\in(-2,2);$$

$$\int_0^x\left[\int_0^u s(t)dt\right]du=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n-1}}u^n\right]du=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{2^{n-1}}u^n du=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}x^{n+1}$$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}x^{n-1}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{2x^2}{2-x}, \forall x\in(-2,2).$$

于是, $\int_0^x\left[\int_0^u s(t)dt\right]du=\dfrac{2x^2}{2-x}, \forall x\in(-2,2)$.

因此, $\int_0^x s(t)dt=\dfrac{8x-2x^2}{(2-x)^2}, \forall x\in(-2,2); s(x)=\dfrac{16}{(2-x)^3}, \forall x\in(-2,2)$. (9 分)

或者

设 $s(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^{n-1}, \forall t\in(-1,1)$. 对 $s(t)$ 在开区间 $(0,t)$ 上两次逐项积分,再两次逐项求导可知: $s(t)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n+1}\right)''=\left(\dfrac{t^2}{1-t}\right)''=\dfrac{2}{(1-t)^3}, \forall t\in(-2,2)$.

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}=\dfrac{2}{(1-x)^3}, \forall x\in(-2,2)$. 特别地, $s\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}=16$.

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}\ \underline{\underline{\text{积分二次}}}\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n-1}}\right)''=4\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right]''$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2-x}\right)''=\frac{16}{(2-x)^3}, \forall x\in(-2,2).$$

显而易见, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}=s(1)=\dfrac{16}{(2-1)^3}=16$.

五、证明题(9 分)

19. 设Γ为平面$x+y+z=1$被三个坐标面所截成的三角形的整个边界,从z轴正向看去,顺时针方向.求证:变力$\vec{F}=\{y,z,x\}$沿有向闭曲线Γ所作的功等于$\frac{3}{2}$.

【解】用斯托克斯公式,取Σ为平面$x+y+z=1$的下侧被Γ所围的部分,则Σ下侧的单位法向量为$\frac{1}{\sqrt{3}}\{-1,-1,-1\}$. (1 分)

变力$\vec{F}$所做的功为

$$W=\int_{\Gamma}ydx+zdy+xdz \quad (3\text{ 分})$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}-1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\sqrt{3}dS$$

$$=\sqrt{3}\iint_{\Sigma}dS \quad (6\text{ 分})$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy,$$

其中$D_{xy}=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1-x\}$

$$=3\iint_{D_{xy}}dxdy$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$

$$=\frac{3}{2}. \quad (9\text{ 分})$$

六、应用题(共 9 分)

20. 一单位质量的物体,在粘性液体中由静止自由下落.假如液体阻力与运动速度成正比,试求物体运动的规律.

【解】取物体的初始位置为坐标原点,x轴向下为正向.设$x=x(t)$表示在时刻t时的物体位置,则阻力为$k\frac{dx}{dt}$(其中$k>0$为比例系数),其中物体所受的重力为$mg=g$. (3 分)

由牛顿第二定律可知:

$$\begin{cases}g-k\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2},\\ x(0)=x'(0)=0,\end{cases}\ 即\begin{cases}x''+kx'=g,\\ x(0)=x'(0)=0.\end{cases} \quad (6\text{ 分})$$

解得:$x=c_1+c_2e^{-kt}+\frac{g}{k}t$,其中$c_1,c_2$是任意常数.

于是,$x'=-kc_2e^{-kt}+\frac{g}{k}$.

由$x(0)=0$,可得到$c_1=-c_2$.

由$0=x'(0)=-kc_2+\frac{g}{k}$,可得到$c_2=\frac{g}{k^2}$,即$c_1=-c_2=-\frac{g}{k^2}$.

所求解为$x=-\frac{g}{k^2}+\frac{g}{k^2}e^{-kt}+\frac{g}{k}t,\forall t\ge 0$. (9 分)