学院＿＿ 专业、班＿＿ 年级＿＿ 学号＿＿ 姓名＿＿ 考试教室＿＿

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《高等数学 II-2(重修班)》期末考试试卷

◉ A卷　○ B卷

2024— 2025 学年　第 1 学期

开课学院: 数统　课程号: MATH10822　考试日期: 2025-01

考试方式: ○开卷 ◉闭卷 ○其他　考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.考试作弊,留校察看,毕业当年不授学位;请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

一、单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

【答案】C

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　).

(A) 连续且偏导数存在　(B) 连续但偏导数不存在

(C) 不连续但偏导数存在　(D) 不连续且偏导数不存在

【答案】C

3. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 具有连续二阶偏导数,且 $z'_x(x_0,y_0)=0, z'_y(x_0,y_0)=0, D(x,y)=\begin{vmatrix}z''_{xx}(x,y) & z''_{xy}(x,y)\\ z''_{yx}(x,y) & z''_{yy}(x,y)\end{vmatrix}$,则该二元函数在点 (x_0,y_0) 处取得极大值的充分条件是(　　).

(A) $D(x_0,y_0)>0, z''_{xx}(x_0,y_0)>0$　(B) $D(x_0,y_0)>0, z''_{yy}(x_0,y_0)<0$

(C) $D(x_0,y_0)<0, z''_{xx}(x_0,y_0)>0$　(D) $D(x_0,y_0)<0, z''_{yy}(x_0,y_0)<0$

【答案】B

4. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解可设为(　　).

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$　(B) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

(C) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$　(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

【答案】A

5. 设二元函数 $F(x,y)$ 可微.如果第二型曲线积分 $\int_C F(x,y)(xdx+ydy)$ 与积分路径无关,则 $F(x,y)$ 应满足(　　).

(A) $yF'_y(x,y)=xF'_x(x,y)$　(B) $F'_y(x,y)=F'_x(x,y)$

命题人: 组题人: 审题人: 命题时间: 教务处制

(C) $yF''_{yy}(x,y)=xF''_{xx}(x,y)$　　(D) $xF'_y(x,y)=yF'_x(x,y)$

【答案】D

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $|x|$,则 $f(x)$ 的傅里叶级数为(　　).

(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$

(B) $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\sin 2x+\frac{1}{4^2}\sin 4x+\frac{1}{6^2}\sin 6x+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\sin 2nx+\cdots\right]$

(C) $\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$

(D) $\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{4^2}\cos 4x+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\cos 2nx+\cdots\right]$

【答案】A

【解】排除法.

(1) 偶函数 $f(x)=|x|$ 的傅里叶级数是余弦级数,排除选项 B.

(2) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi\neq 0$,排除选项 B、C.

二、　填空题(每小题 3 分,共 18 分)

7. 二元函数 $f(x,y)=xe^y$ 在点 $P(2,0)$ 处沿该点到点 $Q\left(\frac{1}{2},2\right)$ 的方向导数为 ______.

【答案】1

8. 设二元函数 $f(u,v)$ 可微,而二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 所确定的隐函数,则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ______.

【答案】$-dx+2dy$

9. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续,则

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)d\sigma=\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】$f(0,0)$

10. 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $\begin{cases}y(0)=1\\ y'(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$ 的特解为 ______.

【答案】$y^2=x+1$

【解】原方程化为 $(yy')'=0$,则 $yy'=C$,得 $yy'=\frac{1}{2}$ 之后变量分离.

11. 设积分曲面为 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 的内侧,且积分曲线为 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$ 若从 x 轴的正向看去,取 Γ 的逆时针方向,则

$$\frac{\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)ds\cdot\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz}{\oiint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy}=\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2$

【解】设积分曲面为 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧,并取 Σ_1 为平面 $x+y+z=0$ 被 Γ 所围成的部分的上侧,则 Σ_1 的法线向量为 $\vec{n}=\{1,1,1\}$,其方向余弦为 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$. 于是,

(1) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=-\iiint_{\Omega}3dxdydz=-3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=-4\pi a^3.$

(2) $$\oint_{\Gamma} ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma_1}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=\iint_{\Sigma_1}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=-\sqrt{3}\iint_{\Sigma_1}dS=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(3) $\displaystyle\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds=a^2\oint_{\Gamma}ds=a^2\cdot 2\pi a=2\pi a^3.$

因此,$\dfrac{\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds\cdot\oint_{\Gamma}ydx+zdy+xdz}{\oiint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2.$

12. 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x+y+1\right\}$,则 $4\iint\limits_{D}xdxdy=$______.

【答案】3π

【解】设 $D=\left\{(x,y)\middle|\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{3}{2}\right\}$,则它的质心为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,面积 $S_D=\dfrac{3}{2}\pi$. 根据形心公式,$4\iint\limits_{D}xdxdy=4\bar{x}S_D=3\pi.$

三、计算题(每小题 7 分,共 28 分)

13. 求点 $P(1,-2,-5)$ 到双叶双曲面 $x^2-2y^2-4z^2=4$ 在点 $Q(4,2,-1)$ 处的切平面的距离.

【解】令 $F(x,y,z)=x^2-2y^2-4z^2-4$,则 $\begin{cases}F_x'(Q)=\left[2x\right]_Q=8,\\ F_y'(Q)=\left[-4y\right]_Q=-8,\\ F_z'(Q)=\left[-8z\right]_Q=8.\end{cases}$ 于是,所求切平面的法向量为 $\vec{n}=\left\{F_x'(Q),F_y'(Q),F_z'(Q)\right\}=\{8,-8,8\}=8\{1,-1,1\}$,切平面为 $(x-4)-(y-2)+(z+1)=0$,即 $x-y+z-1=0$. (5 分)

因此,$d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{\left|1+2-5-1\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}.$ (7 分)

14. 计算二次积分 $I=\displaystyle\int_0^1dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy.$

【解】设 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,x\le y\le\sqrt{x}\right\}$,则 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1,y^2\le x\le y\right\}$.

于是,$I=\displaystyle\int_0^1dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$ (2 分)

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$$

$=\displaystyle\int_0^1\sin ydy-\int_0^1y\sin ydy$ (4 分)

$$=\left[-\cos y\right]\Big|_0^1+\int_0^1 y d(\cos y)$$

$$=1-\cos 1+\left\{\left[y\cos y\right]\Big|_0^1-\int_0^1\cos y dy\right\}$$

$$=1-\cos 1+\cos 1-\left[\sin y\right]\Big|_0^1$$

$$=1-\sin 1. \qquad (7\text{ 分})$$

15. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1,\ f_x'(1,1)=2,$ $f_y'(1,1)=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 求 $\left.\dfrac{d[\varphi^3(x)]}{dx}\right|_{x=1}$.

【解】 设 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 则

$$\varphi'(x)=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)]. \qquad (3\text{ 分})$$

于是,

$$\frac{d[\varphi^3(x)]}{dx}=3\varphi^2(x)\varphi'(x)=3\varphi^2(x)\{f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)]\},$$

其中 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1.$ (5 分)

因此, $\left.\dfrac{d[\varphi^3(x)]}{dx}\right|_{x=1}=3[2+3(2+3)]=51.$ (7 分)

16. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+z)^2dv$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$.

【解】 因为积分区域Ω关于三个坐标面都对称,所以

$$\iiint_{\Omega}xydv=\iiint_{\Omega}xzdv=\iiint_{\Omega}yzdv=0. \qquad (2\text{ 分})$$

因为积分区域Ω具有轮换对称性,所以

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2dv=\iiint\limits_{\Omega}y^2dv=\iiint\limits_{\Omega}z^2dv. \qquad (4\text{ 分})$$

因此, $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+4y^2+z^2)dv$

$$=\iiint\limits_{\Omega}6x^2dv$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\times 2\pi\times 2\times\frac{1}{5}R^5$$

$$=\frac{8}{5}\pi R^5. \qquad (7\text{ 分})$$

四、综合题(每小题 9 分,共 18 分)

17. 计算第二型曲线积分 $\oint_L\dfrac{ydx-xdy}{2x^2+2y^2}$, 其中 $L:(x-1)^2+y^2=2$ 沿逆时针方向.

【解】 令 $P(x,y)=\dfrac{y}{2x^2+2y^2},Q(x,y)=\dfrac{-x}{2x^2+2y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \forall(x,y)\ne(0,0). \qquad (2\text{ 分})$$

令 $L_1:\begin{cases}x=\varepsilon\cos\theta,\\ y=\varepsilon\sin\theta,\end{cases}$ $\theta:0\to 2\pi$, 取顺时针方向,其中 $\varepsilon\to 0^+$, 则(4 分)

$$\oint_L\frac{ydx-xdy}{2x^2+2y^2}$$

$$=\oint_{L+L_1}\frac{ydx-xdy}{2x^2+2y^2}-\oint_{L_1}\frac{ydx-xdy}{2x^2+2y^2}$$

$$=0+\oint_{L_1^-}\frac{ydx-xdy}{2x^2+2y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\varepsilon^2}[\varepsilon\sin\theta\cdot\varepsilon(-\sin\theta)-\varepsilon\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta]d\theta$$

$$=-\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=-\pi.$$ (9 分)

18. 将 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

【解】 $f'(x)=\left(\arctan\frac{1-2x}{1+2x}\right)'$

$$=-\frac{2}{1+4x^2}$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n$$ (3 分)

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},\ |x|<\frac{1}{2}.$$

于是, $f'(t)=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n},\ |t|<\frac{1}{2}.$ (4 分)

从而, $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\left[-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}\right]dt=-2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n4^nt^{2n}dt$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\int_0^x t^{2n}dt=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

其中 $f(0)=\frac{\pi}{4},|x|<\frac{1}{2}.$ (6 分)

因此, $f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$ ($f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 无意义) (7 分)

令 $x=\frac{1}{2}$, 则 $0=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$ (9 分)

五、证明题或应用题(每小题 9 分,共 18 分)

19. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n,\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nv_n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 都收敛.

【证】 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

(1) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_nv_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 其中正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

由正项级数比较判别法的极限形式可知:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛. (3 分)

(2) $\sqrt{u_nv_n}\le\frac{1}{2}(u_n+v_n)$, 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(u_n+v_n)$ 收敛.

由正项级数比较判别法可知:级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$收敛.　　(6 分)

(3) 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$都收敛,由(2)可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$收敛. (9 分)

20. 设 $f(x)$ 是可导函数,且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$, $x=1$ 及 $x=t\ (t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体的体积在数值上是该曲边梯形的面积的 πt 倍,求该曲线的方程.

【解】 由题设,所给旋转体体积为 $V=\pi\int_1^t f^2(x)dx$, 曲边梯形面积为 $S=\int_1^t f(x)dx.$　　(2 分)

令 $\pi\int_1^t f^2(x)dx=\pi t\int_1^t f(x)dx$, 则 $\int_1^t f^2(x)dx=t\int_1^t f(x)dx$, 即

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)dx+tf(t).\qquad (*)$$

于是, $2f(t)f'(t)=f(t)+f(t)+tf'(t)$, 即 $(2z-t)\frac{dz}{dt}=2z$, 其中 $z=f(t)$.　(4 分)

也就是说, $\frac{dt}{dz}+\frac{1}{2z}t=1$. 由一阶非齐次线性方程的通解公式得

$$t=e^{-\int\frac{1}{2z}dz}\left[\int 1\cdot e^{\int\frac{1}{2z}dz}dz+C\right]=Cz^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}z.\qquad (**)\qquad (7\text{ 分})$$

在(*)中,令 $t=1$, 则 $f^2(1)=f(1)$, 即 $f(1)=1$.　　(8 分)

代入(**)求得 $C=\frac{1}{3}$, 即 $3t=z^{-\frac{1}{2}}+2z$.

综上所述,所求曲线方程为 $2y+y^{-\frac{1}{2}}-3x=0$.　　(9 分)