

重庆大学《线性代数 II》课程

 A卷 B卷

2022—2023 学年 第 2 学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10862 考试日期: 2023 年 06 月

考试方式: 开卷 闭卷

考试时间: 120 分

考试提示: 1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试; 2. 考试作弊, 留校察看, 毕业当年不授学位; 请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等, 属严重作弊, 开除学籍。

温馨提示: 您所有客观题(用 2B 铅笔)和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置, 不在指定位置答题将不会计分, 敬请您在答题卡上作答时注意字体尽量小, 节约能够使用的空间! 在该试卷纸上作答均不会计分!

一、单项选择题(客观题, 请用铅笔在答题卡方格中填涂)(每小题 3 分, 共 18 分)

1. D , 2. (B) 3. (C) 4. (C)
5. (B)
6. (A)

二、填空题(主观题, 每小题 3 分, 共 18 分)

7. 0 _____.

8. 1 _____.

9. 1 _____.

10. 9 _____.

11. 2 _____.

12. $y = k(1, 1^T \mathbb{H}) (\theta, \vec{3})$ _____.

三、判断并简述(主观题。判断对错, 若正确请给出简单证明, 若错误请给出反例或说明理由, 每小题 5 分, 共 10 分)

13. 解: 正确 (2 分), 因为 $Ax=0$ 有非零解, 则

$$|A|=0, \text{ 则 } |A^k|=|A|^k=0 \quad (3 \text{ 分})$$

14. 解: 错误 (2 分)。如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

AB 有特征值 3, 对应特征向量为 $x = (1, 1)^T$

但是 x 不是 BA 的特征向量, 因为 $(AB)x = 3x$,
而 $(BA)x = (3, 0)^T \neq \lambda(1, 1)^T$ (3 分)

四、计算题(主观题, 共四题, 共 40 分)

15.

解 原式=

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \quad (2\text{分})$$

$$= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} \quad (2\text{分})$$

= 0 (2分) (如果用性质加上展开定理, 即使错误, 也须给一定的方法分数)

16.

$$|A|=2, A^*A=2E, AA^*X+4AA^{-1}=AA+AX \quad (2\text{分})$$

$$(A-2E)X=4E-A^2=(2E-A)(2E+A) \quad (2\text{分})$$

$$|2E-A|=8 \neq 0, \text{则}$$

解:

$$X=-2E-A \quad (2\text{分}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2\text{分})$$

17. (12 分)

解 将 η 代入 $Ax=\beta$, 得到 $1-a+c-1=0, a=c$ (2 分)

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2a-1) & 2a-1 & 2a-1 \end{pmatrix} \quad (2\text{分})$$

$$\text{当 } a=\frac{1}{2}, (A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2\text{分})$$

$$\text{同解方程组为} \begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_2 = -3x_3 - x_4 + 1 \end{cases}$$

$$\text{通解为: } x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2\text{分})$$

$$\text{当 } a \neq \frac{1}{2}, (A, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2a & 1-a & -a \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{则通解为 } x = k \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

18. (12 分)

$$\text{解 : 二 次 型 矩 阵 为 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2-1) \quad (2 \text{ 分})$$

故特征值为 2, 1, -1 (3 分)

其对应的特征向量为 $\xi_1 = (0, 1, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 1)^T, \xi_3 = (1, 0, -1)^T$ (3 分)

单位化: $\eta_1 = (0, 1, 0)^T, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ (2 分)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分}), \text{ 为不定} \quad (1 \text{ 分})$$

五、证明题 (请在主观题指定区域解答) (每小题 7 分, 共 14 分)

$$AB - E = A(B - E) + (A - E) \quad (3 \text{ 分}), \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} 19. \text{ 证明: } R(AB - E) &\leq R(A - E) + R(A(B - E)) \quad (2 \text{ 分}) \\ &\leq R(A - E) + R(B - E) \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

20.

证明:

由于 $(E - A^{-1})^T = E^T - (A^T)^{-1} = E - A^{-1}$ (2分)

设 λ 为 A 的特征值，则 $A - E$ 的特征值为 $\lambda - 1$ ，

$E - A^{-1}$ 的特征值为 $1 - \frac{1}{\lambda}$ (2分)，由于 $A, A - E$ 正定，则

$\lambda > 0, \lambda - 1 > 0$ (2分), $1 - \frac{1}{\lambda} = \lambda - 1 / \lambda > 0$ (1分)