学院________ 专业、班________ 年级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《高等数 1》（工学类）评分参考

◉A卷 ○B卷

2020— 2021 学年 第 1 学期

开课学院：数统 课程号：MATH10013 考试日期：202101

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$（ B ）

A. 1．　B. 2．　C. 3．　D. 4．

2. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为（ A ）

A. $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.　B. $y=x-\dfrac{\pi}{2}$.

C. $y=-x+\dfrac{\pi}{2}$.　D. $y=-x-\dfrac{\pi}{2}$.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（ B ）

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

4. 设在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)>0,\ f'(x)<0,\ f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（ C ）

A. $S_1<S_2<S_3$.　B. $S_3<S_1<S_2$.

C. $S_2<S_1<S_3$.　D. $S_2<S_3<S_1$.

5. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则（ A ）

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

6. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数，则下列等式中，正确的是（ D ）

A. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.　B. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.　D. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$__________.1

2. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处的切线方程是__________. $y=2x$

3. 曲线 $y=x^2+x\ (x<0)$ 曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是__________. $(-1,0)$

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

4. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=$____ 2

5. $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$__________________. -4π

6. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\ (-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$，则 L 所围平面图形的面积为____.

$\frac{\pi}{12}$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t}{x^5}$.

解

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t}{x^5}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin^3(1-\cos x)}\sin x}{5x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}x}{5x^4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{20}.$$

2. 求不定积分 $\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=2\int\frac{t\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}\mathrm{d}t$$
$$=2\int\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$
$$=2\int\arcsin t\,\mathrm{d}\arcsin t$$
$$=\arcsin^2 t+C$$
$$=\arcsin^2\sqrt{x}+C.$$

3. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点及凹凸区间.

解　函数 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$y'=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ y''=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=0$ 及 $x=\pm\sqrt{3}$.

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	−	0	+	0	−	0	+
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

由此可知，曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间 $(-\sqrt{3},0)$ 及 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内是凹的，

在区间 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 及 $(0,\sqrt{3})$ 内是凸的.

又 $y(0)=0,\ y(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},\ y(\sqrt{3})=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$，

所以曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点为 $(0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$.

4. 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　任给 $A>1$，有

$$\int_1^A\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^A+\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}.$$

其中

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Bigg|_1^A$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{A^2}{1+A^2}.$$

于是，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arctan A}{A} + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{A^2}{1+A^2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解　令 $u=2x-t$，则 $t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$.

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)\mathrm{d}u = 2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u,$$

于是

$$2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\arctan x^2,$$

两边对 x 求导得

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x}{1+x^4} + xf(x),$$

令 $x=1$，得 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$.

2. 设函数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

解　当 $0<x\le 1$ 时，

$$f(x) = \int_0^x \left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t + \int_x^1 \left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x (t^2-x^2)\mathrm{d}t + \int_x^1 (t^2-x^2)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$$

当 $x>1$ 时，$f(x)=\int_0^1 (x^2-t^2)\mathrm{d}t = x^2-\frac{1}{3}$，

所以

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0<x\le 1 \\ x^2 - \frac{1}{3}, & x>1 \end{cases}$$

而

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{x-1} = 2,\quad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{x-1} = 2$$

故 $f'(x) = \begin{cases} 4x^2-2x, & 0<x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$

由于 $f'(x)=0$ 求得唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$，又 $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$，从而 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，并且有 $f''(x)>1$，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$. 证明：

$$f(x) \ge 2x + \frac{x^2}{2}.$$

【证】　构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - 2x - \frac{x^2}{2}.$$

由已知条件可知函数 $f(x)$ 连续，从而由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow f(0)=0\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\Rightarrow f'(0)=2\,.$$

于是对 $F(x)$ 求一阶、二阶导数，得

$$F'(x)=f'(x)-2-x\,,$$

$$F''(x)=f''(x)-1\,.$$

由于 $f''(x)>1\Rightarrow F''(x)>0$，函数 $F(x)$ 为凹函数，并且有

$F'(0)=f'(0)-2=0$， $F(0)=0$，

所以 $x=0$ 是函数 $F(x)$ 的极小值点，也是最小值点，故结论成立.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明: 存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3\,.$$

【证】　令 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，设 $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x_0)=0$，且有

$$F(a)=f(x_0)(a-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\frac{f''(\xi_1)}{3!}(a-x_0)^3\text{，其中 }\xi_1\in(a,x_0)\,.$$

$$F(b)=f(x_0)(b-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(b-x_0)^2+\frac{f''(\xi_2)}{3!}(b-x_0)^3\text{，其中 }\xi_2\in(x_0,b)\,.$$

$$F(b)-F(a)=f(x_0)(b-a)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{48}(b-a)^3\,.$$

由 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$ 上连续，由介值定理得 $\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$，使得

$f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，代入即可知结论成立.

六、应用题（共 6 分）

1. 一个容器可以看成是由 $y=x^2$ 绕 y 轴旋转而成，其容积为 $72\pi\ \mathrm{m}^3$，其中盛满水，水的密度为 γ，现将水从容器中抽出 $64\pi\ \mathrm{m}^3$，问需要作多少功?

解　建立坐标系，设容器的深度为 h.

任取小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,h]$，于是体积元素

$$\mathrm{d}V=\pi x^2\mathrm{d}y=\pi y\mathrm{d}y$$

故容器的体积为

$$V=\pi\int_0^h y\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}h^2\,.$$

当 $V=72\pi\ \mathrm{m}^3$ 时，由 $72\pi=\dfrac{\pi}{2}h^2$ 可得 $h=12$；

当 $V=72\pi-64\pi=8\pi\ \mathrm{m}^3$ 时，由 $8\pi=\dfrac{\pi}{2}h^2$ 可得 $h=4$；

于是功元素 $\mathrm{d}W=g\gamma(12-y)\pi y\mathrm{d}y$，故所求的功为

$$W=g\gamma\pi\int_4^{12}y(12-y)\mathrm{d}y=\frac{640}{3}\pi g\gamma\,.$$