学院______ 专业、班______ 年级______ 学号______ 姓名______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学高等数学（工学类）课程试卷

◉A卷 ○B卷

2019 — 2020 学年 第 1 学期

开课学院：数学与统计 课程号：________ 考试日期：__________

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项先择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+ax+b)=0$，其中 a,b 为常数，则（ A ）

（A）$a=1,b=\frac{1}{2}$　（B）$a=-1,b=-\frac{1}{2}$

（C）$a=-1,b=\frac{1}{2}$　（D）$a=1,b=-\frac{1}{2}$

2. 设 $f(x)$ 是不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$（ B ）

（A）在 $x=0$ 处无极限　（B）$x=0$ 为其可去间断点

（C）$x=0$ 为其跳跃间断点　（D）$x=0$ 为其第二类间断点

3. 函数 $f(x)=\frac{x|x-2|}{(x-1)(x-3)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有（ D ）

（A）1 条铅直渐近线，1 条水平渐近线　（B）1 条铅直渐近线，2 条水平渐近线

（C）2 条铅直渐近线，1 条水平渐近线　（D）2 条铅直渐近线，2 条水平渐近线

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2-\cos x, & x\le 0\\ \sqrt{x}+1, & x>0\end{cases}$，则（ C ）

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,1)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,1)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-2e^{-x}+1}=$（ A ）

（A）$-\frac{1}{3}\ln\frac{e-1}{e+2}$　（B）$\frac{1}{3}\ln\frac{e-1}{e+2}$　（C）∞　（D）$\frac{1}{2}\ln(e+2)$

6. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中阶数最高的是（ C ）

（A）$(1+x)^{x^3}-1$　（B）$e^{x^4-3x}-1$　（C）$\int_0^{x^2}\sin t^2dt$　（D）$\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})=$________ $\frac{1}{\ln 2}$

2. 定积分 $\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=$_______ $2(2-\arctan 2)$

3. 椭圆 $x=a\cos t,y=b\sin t$（$a>b>0$）在 $t=\frac{3\pi}{2}$ 处的曲率为_________ $\frac{b}{a^2}$

4. 设 $f(x)=x^2e^{3x}$，则 $f^{(2020)}(0)=$________ $f^{(2020)}(0)=2C_{2020}^{2018}3^{2018}$

5. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x f(x-u)\cdot 2^u du=\sin x$，则 $f(x)=$_______ $\cos x-\ln 2\cdot\sin x$

6. 定积分 $\int_{-1}^1[x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x^4]dx=$_______ $\frac{2}{5}$

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x^2}}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\sin x^2}}$ （3 分）

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2/2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ （3 分）

原极限 $=e^{-\frac{1}{2}}$. （1 分）

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sin x-\int_1^y\varphi(u)du=0$ 确定，$\varphi(1)=\varphi'(1)=1$ 且可导函数 $\varphi(u)>0$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解：当 $x=0$ 时，$y=1$。 （1 分）

等式 $\sin x-\int_1^y\varphi(u)du=0$ 两端对 x 求导得

$\cos x-\varphi(y)\cdot y'=0\Rightarrow y'(0)=1$ （3 分）

等式 $\cos x-\varphi(y)\cdot y'=0$ 两端再对 x 求导得

$-\sin x-\varphi'(y)(y')^2-\varphi(y)y''=0\Rightarrow y''(0)=-1$ （3 分）

3. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\arctan x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)\tan\dfrac{3x}{2}\right]$，求正常数 a 的值。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\arctan x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ （3 分）

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)\tan\dfrac{3x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{3}-x)}{\cos\frac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{-\cos(\frac{\pi}{3}-x)}{-\frac{3}{2}\sin\frac{3x}{2}}=\dfrac{2}{3}$ （3 分）

由 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{2}{3}$ 得 $a=\dfrac{9}{4}$. （1 分）

4.计算定积分 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx.$

解：$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1\ln(1+x)d\dfrac{1}{2-x}$ （1 分）

$=\left[\ln(1+x)\cdot\dfrac{1}{2-x}\right]_0^1-\int_0^1\dfrac{dx}{(2-x)(1+x)}$ （2 分）

$=\ln 2-\dfrac{1}{3}\int_0^1(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x})dx$ （2 分）

$=\ln 2-\dfrac{1}{3}\left[\ln(1+x)-\ln(2-x)\right]_0^1=\dfrac{1}{3}\ln 2.$ （2 分）

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1.设 $f(x)$ 是以 4 为周期的可导函数，$f(1)=\dfrac{1}{4}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sin x)-f(1+\sin x)}{x}=4$，求 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 处的法线方程。

解：由 $4=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sin x)-f(1+\sin x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sin x)-f(1)-[f(1+\sin x)-f(1)]}{x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sin x)-f(1)]}{-\sin x}\dfrac{\sin x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(1+\sin x)-f(1)]}{\sin x}\dfrac{\sin x}{x}$

$=-f'(1)-f'(1)=-2f'(1)$

得 $f'(1)=-2$。（4 分）

因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，所以 $f(4+x)=f(x)\Rightarrow f'(4+x)=f'(x)$，

从而 $f(5)=f(1)=\frac{1}{4},\ f'(5)=f'(1)=-2$，（3 分）

故 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 处的法线方程为：$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(x-5)$，或 $y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}$.（1 分）

2.设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\le x\le e)$。

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1,x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的面积。

解：（Ⅰ） $y'=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，则 L 的弧长

$$s=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^e(x+\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)\qquad（4 分）$$

（Ⅱ）面积 $A=\int_1^e(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}x\right]_1^e=\frac{1}{12}e^3-\frac{7}{12}$（4 分）

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1.设导函数 $f'(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且

$f'(0)+f'(1)+f'(2)=6,\ f'(3)=2$，证明存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0.$

证明：因 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，故有最小值 m，最大值 M，从而有

$$3m\le f'(0)+f'(1)+f'(2)\le 3M\Leftrightarrow m\le\frac{f'(0)+f'(1)+f'(2)}{3}\le M$$

由介值定理知存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f'(\eta)=\frac{f'(0)+f'(1)+f'(2)}{3}=2$（4 分）

因 $f'(\eta)=f'(3)=2$，故 $f'(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上使用罗尔中值定理得

$\exists\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$。（3 分）

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$\forall x\in[a,b],\ f'(x)>0,\ f''(x)>0.$ 证明：

$$\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)).$$

证： 令 $\varphi(x)=\frac{x-a}{2}(f(x)+f(a))-\int_a^x f(t)dt\Rightarrow\varphi(a)=0$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(a))+\frac{(x-a)f'(x)}{2}-f(x)$$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}(f(a)-f(x))+\frac{(x-a)f'(x)}{2}\Rightarrow\varphi'(a)=0$$

$$\varphi''(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{f'(x)}{2}+\frac{(x-a)}{2}f''(x)=\frac{(x-a)}{2}f''(x)>0,(a<x\le b)$$

$$\Rightarrow\forall x\in(a,b],\varphi'(x)\nearrow\Rightarrow\varphi'(x)>\varphi'(a)=0$$

$$\Rightarrow\forall x\in(a,b],\varphi(x)\nearrow\Rightarrow\varphi(x)>\varphi(a)=0$$

故有：$\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)).$

六、应用题（共 6 分）

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\ge0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周的体积为最大？

解：联立$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$解得$(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{a}{1+a})$，

直线OA的方程为$y = \frac{ax}{\sqrt{1+a}}$.（2 分）

旋转体的体积

$$V = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a} - a^2x^4\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{a^2}{3(1+a)}x^3 - \frac{a^2}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}$$

$$= \frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{5/2}}$$ （2 分）

令$\frac{\mathrm{d}V}{da} = \frac{\pi(4a - a^2)}{15(1+a)^{7/2}} = 0$得驻点$a = 4$ （2 分）

由实际问题知当$a = 4$时旋转体的体积为最大。