第十二章

§12-1 电动势

§12-2 电磁感应定律

§12-3 动生电动势

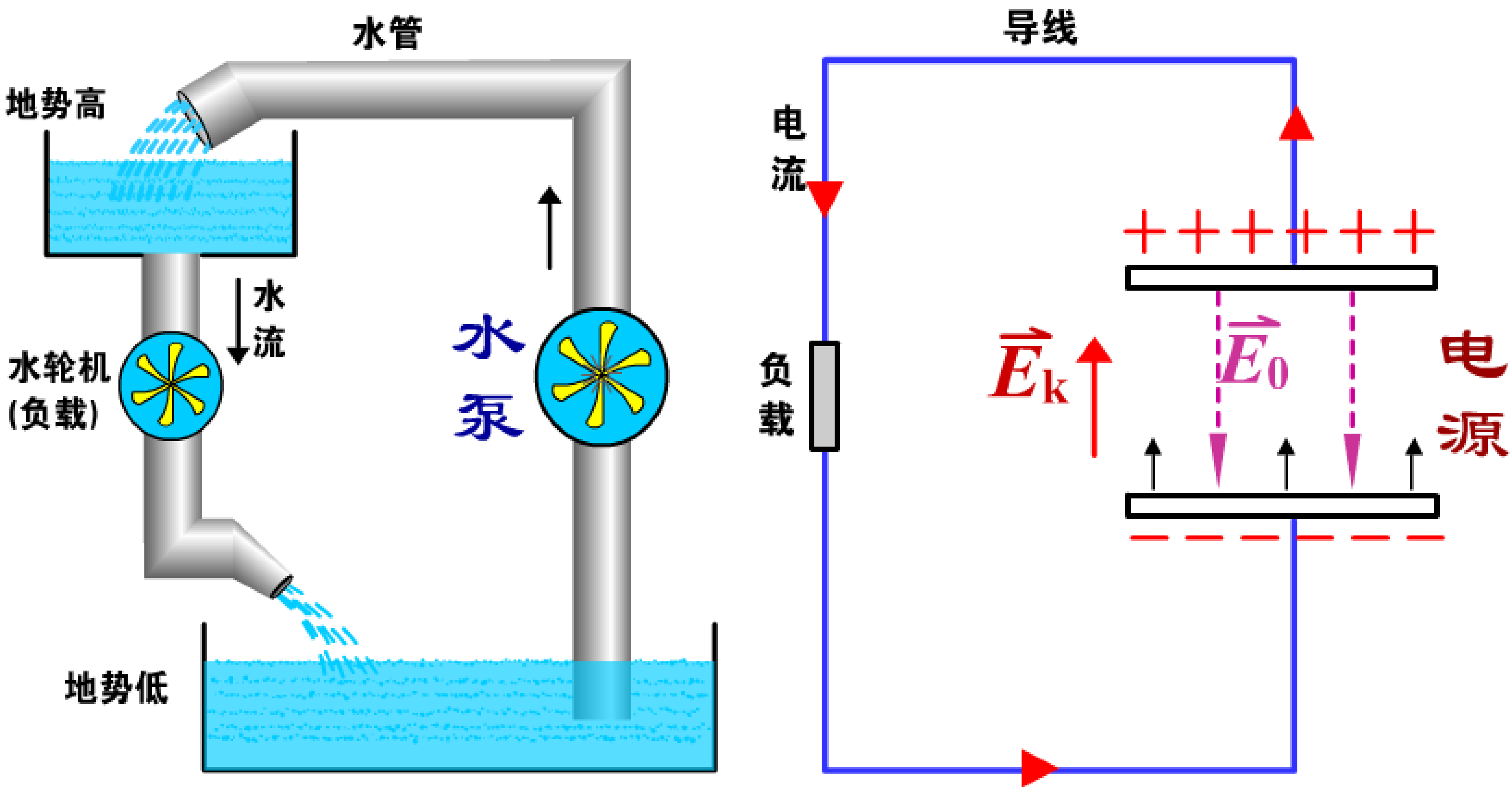
§12-4 感生电动势

§12-5 自感

§12-6 互感

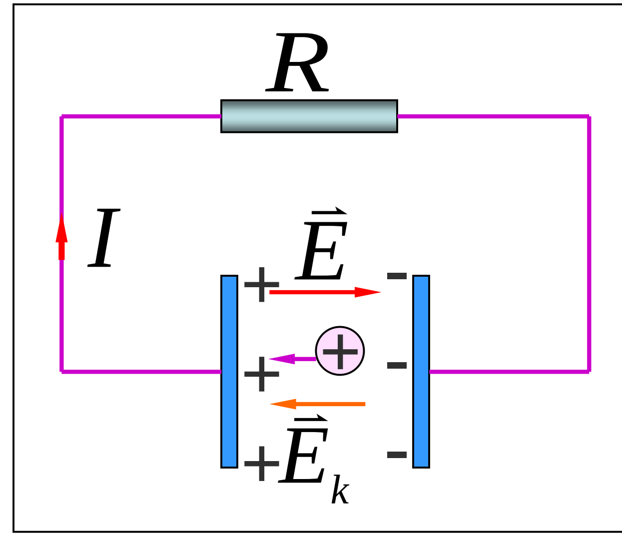
§12-7 磁场能量

§ 12-1　电动势



电源和水泵作用的类比

非静电力：能不断分离正负电荷使正电荷逆静电场力方向运动



电源：提供非静电力的装置

◆ 非静电电场强度 $\vec{E}_k$ ：为单位正电荷所受的非静电力

绕回路一周总电场力作功

$$W=\oint_l q(\vec{E}_k+\vec{E})\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_l q\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

◆ 电动势的定义：单位正电荷绕闭合回路运动一周，非静电力所做的功

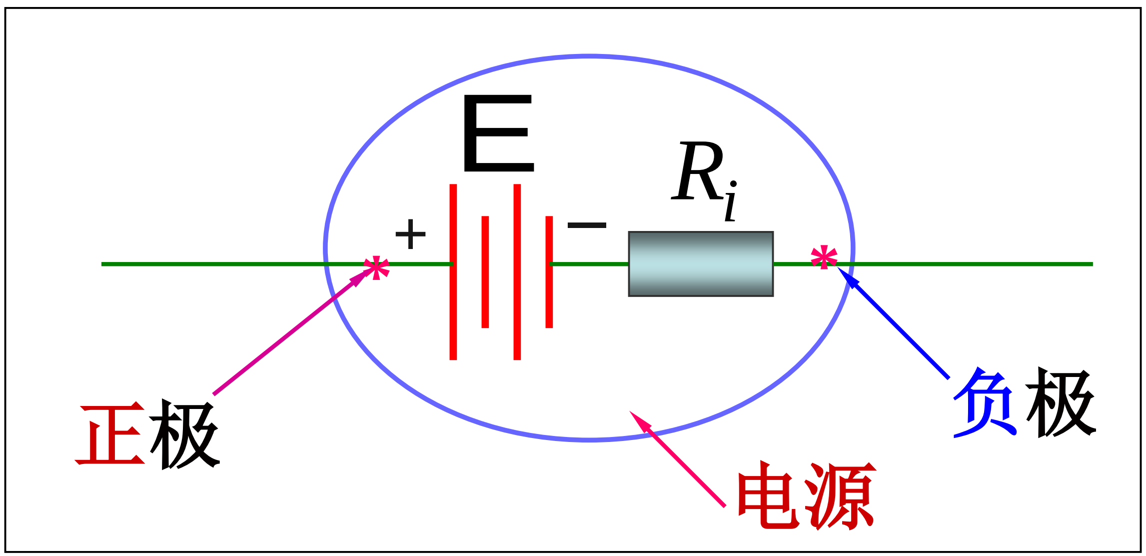
电动势

$$\mathcal{E}=\frac{W}{q}=\frac{\oint_l q\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{q}$$

$$\mathcal{E} = \int_{外} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} + \int_{内} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \qquad \because \int_{外} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = 0$$

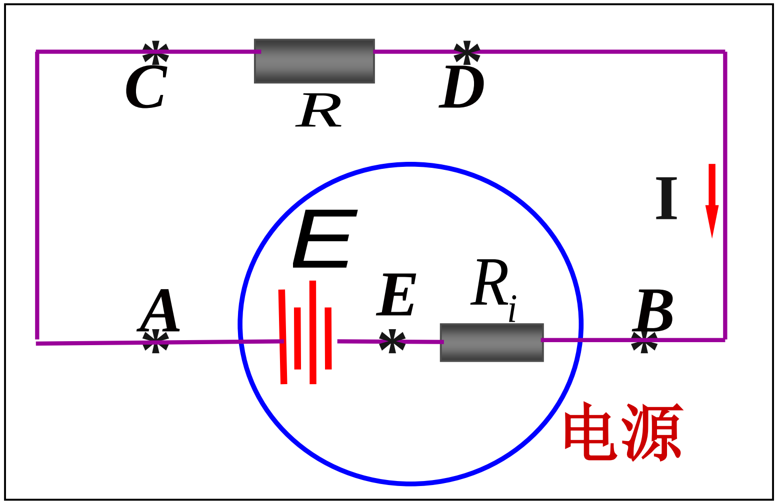
$\therefore$ 电源电动势 $\mathcal{E} = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_{内} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

◆ 电源电动势大小等于将单位正电荷从负极经电源内部移至正极时非静电力所作的功.



电源的电动势 $\mathcal{E}$ 和内阻 R_i

从点A出发，顺时针绕行一周各部分电势降落总和为零，即



$$\oint_l \mathrm{d}U = \oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$U_{AC} + U_{CD} + U_{DB} + U_{BE} + U_{EA} = 0$$

$$U_{AC} = U_{DB} = 0 \qquad U_{EA} = -\mathrm{E} \qquad U_{BE} = IR_i$$

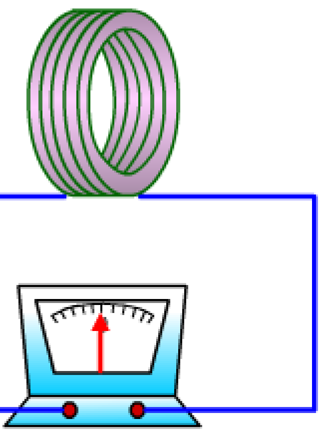
$$U_{CD} = IR \qquad IR + IR_i - \mathrm{E} = 0$$

◆ 全电路的欧姆定律

$$I = \frac{\mathrm{E}}{R + R_i}$$

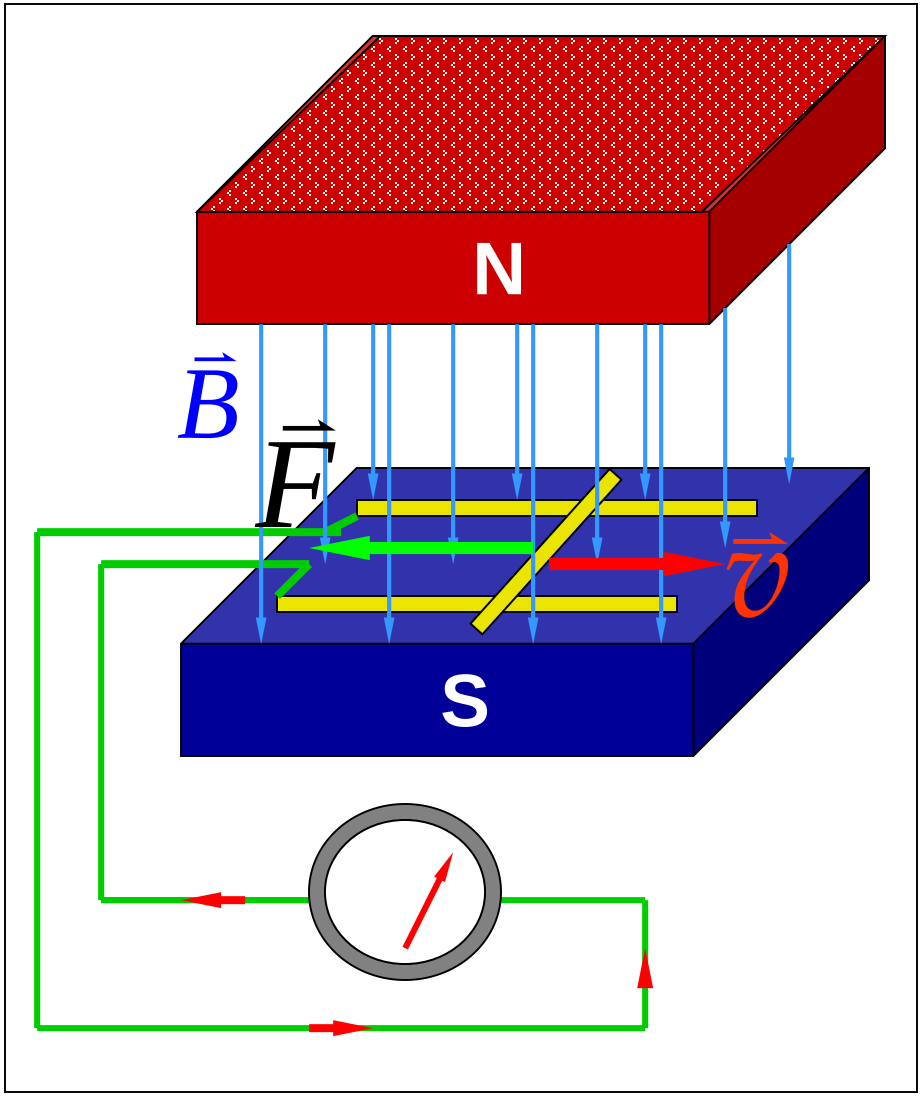
§12-2　电磁感应定律

电磁感应(electromagnetic induction)现象



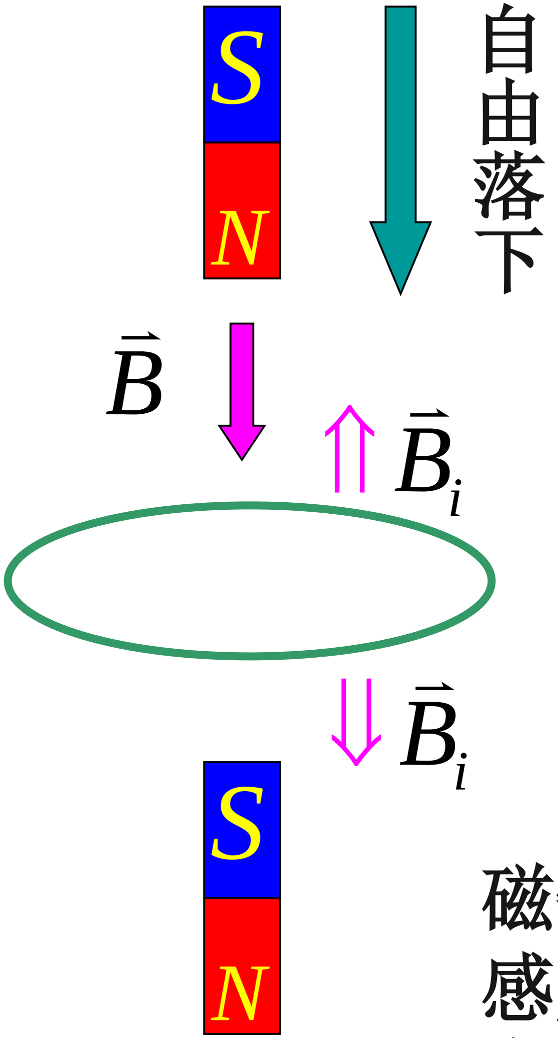
一 楞次定律(Lenz law)

闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因（反抗相对运动、磁场变化或线圈变形等）.



用楞次定律判断感应电流方向

线圈中有电流，电能从何而来？



磁铁在运动前后没有变化，电能只能从磁铁运动的动能转化而来。

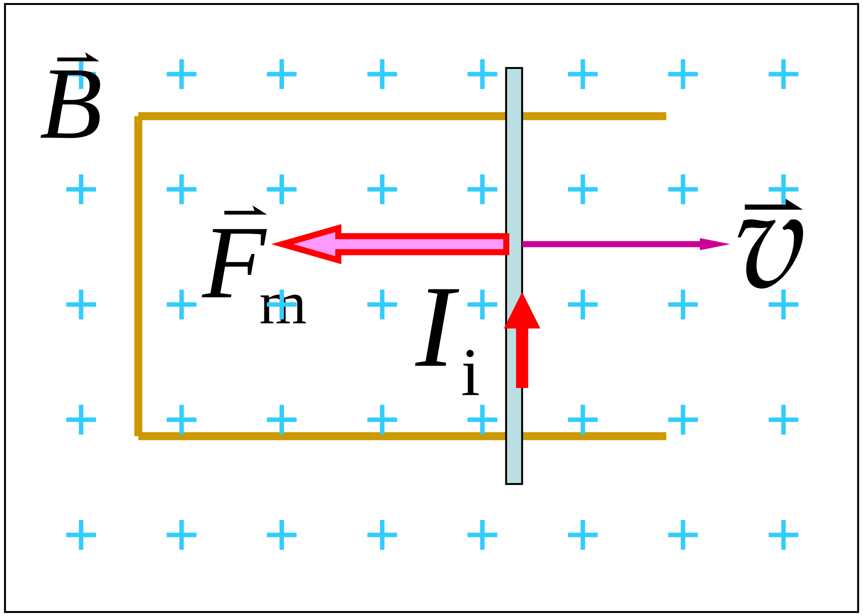
势能 → 动能 →

- 保持磁铁向下运动的动能
- 通过磁场的变化转变成为电能

推论：磁铁落地速度变慢

磁铁在线圈上方，线圈电流产生的磁感应强度方向向上，在下方时，线圈电流产生的磁感应强度方向向下

楞次定律　闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因.



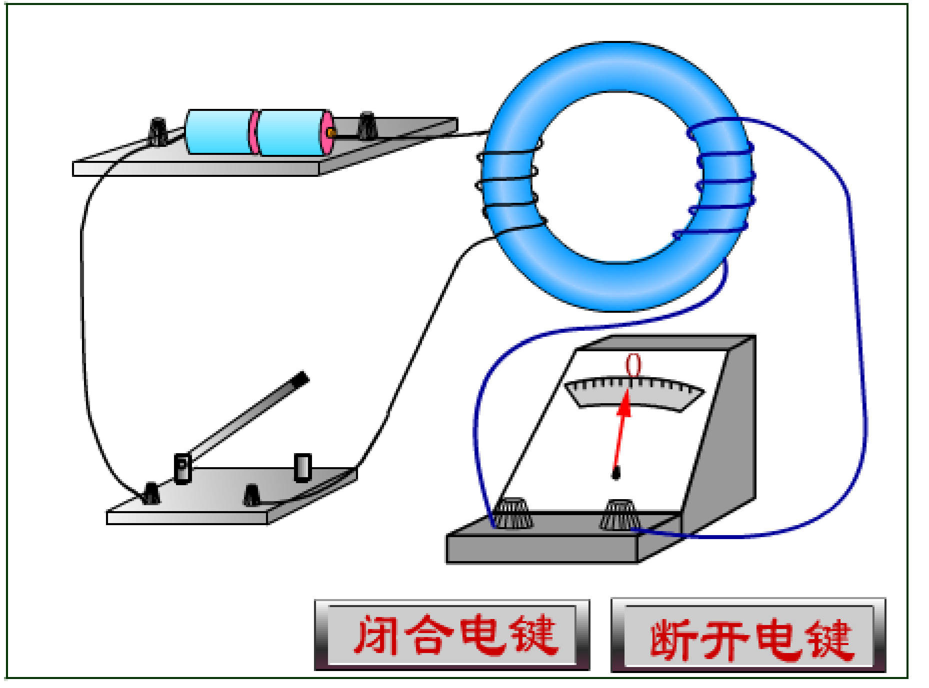
楞次定律是能量守恒定律的一种表现

机械能 → 焦耳热

维持滑杆运动必须外加一力，此过程为外力克服安培力做功转化为焦耳热.

二　法拉第电磁感应定律

当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时，回路中会产生感应电动势，且感应电动势正比于磁通量对时间变化率的负值



$$\mathrm{E}_i = -k\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

国际单位制 $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}_i \rightarrow \text{伏特} \\ \Phi \rightarrow \text{韦伯} \end{array}\right.$ 　$k=1$

1）闭合回路由 N 匝密绕线圈组成

ϕ, φ

$$\mathcal{E}_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

磁通匝数（磁链）$\psi = N\Phi$

[psi:] [fai]

2）若闭合回路的电阻为 R，感应电流为

$$I_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内，流过回路的电荷

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i \mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \mathrm{d}\Phi = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

3） 感应电动势的方向

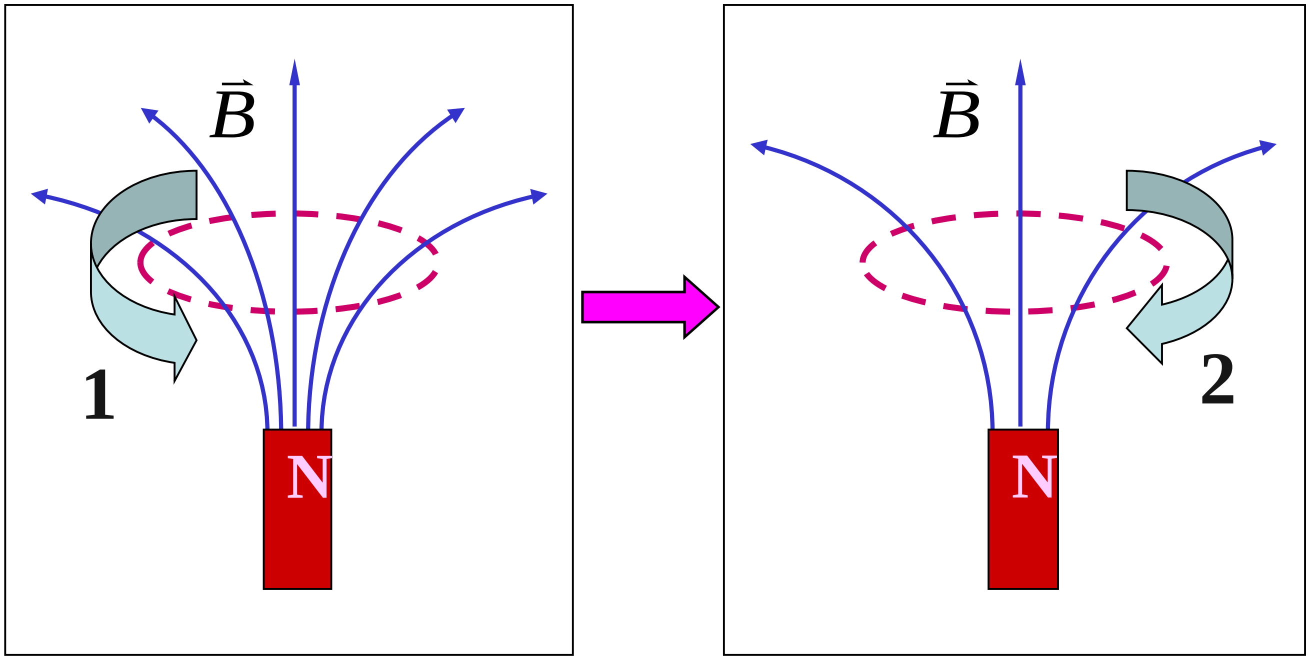
负号“－”的讨论：——如何确定正、负号？

以环路方向为基准，成右螺旋的环路面积法向 $\vec{n}$ 为判别 Φ_B 正负号的依据

- $\vec{B}$ 与 $\vec{n}$ 夹锐角，$\Phi > 0$
- $\vec{B}$ 与 $\vec{n}$ 夹钝角，$\Phi < 0$

确定电动势方向的步骤：

1. 选定回路 L 绕行方向，以确定 $\vec{n}$ 的方向作为基准；
2. 确定 Φ_B 的正负；
3. 确定 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$ 的正负；
4. 确定 ε 的正负，$\begin{cases} \varepsilon > 0，\varepsilon \text{ 的方向与} L \text{ 绕行方向相同；} \\ \varepsilon < 0，\varepsilon \text{ 的方向与} L \text{ 绕行方向相反。} \end{cases}$



$|\vec{B}|$ 减小

回路1, $\vec{S}$ 与 $\vec{B}$ 同向

$\Phi > 0, \mathrm{d}\Phi < 0$

回路2, $\vec{S}$ 与 $\vec{B}$ 异向

$\Phi < 0, \mathrm{d}\Phi > 0$

回路1 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} < 0$ $\quad E_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} > 0$ $\quad E_i$ 与回路同向

回路2 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} > 0$ $\quad E_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} < 0$ $\quad E_i$ 与回路异向

【结论】

1. 对任意选定的环路方向，$\mathcal{E}$与$\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$的符号恒相反；

2. ε的大小和方向与Φ无关，只由$\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi}/\mathbf{d}\boldsymbol{t}$ 决定；

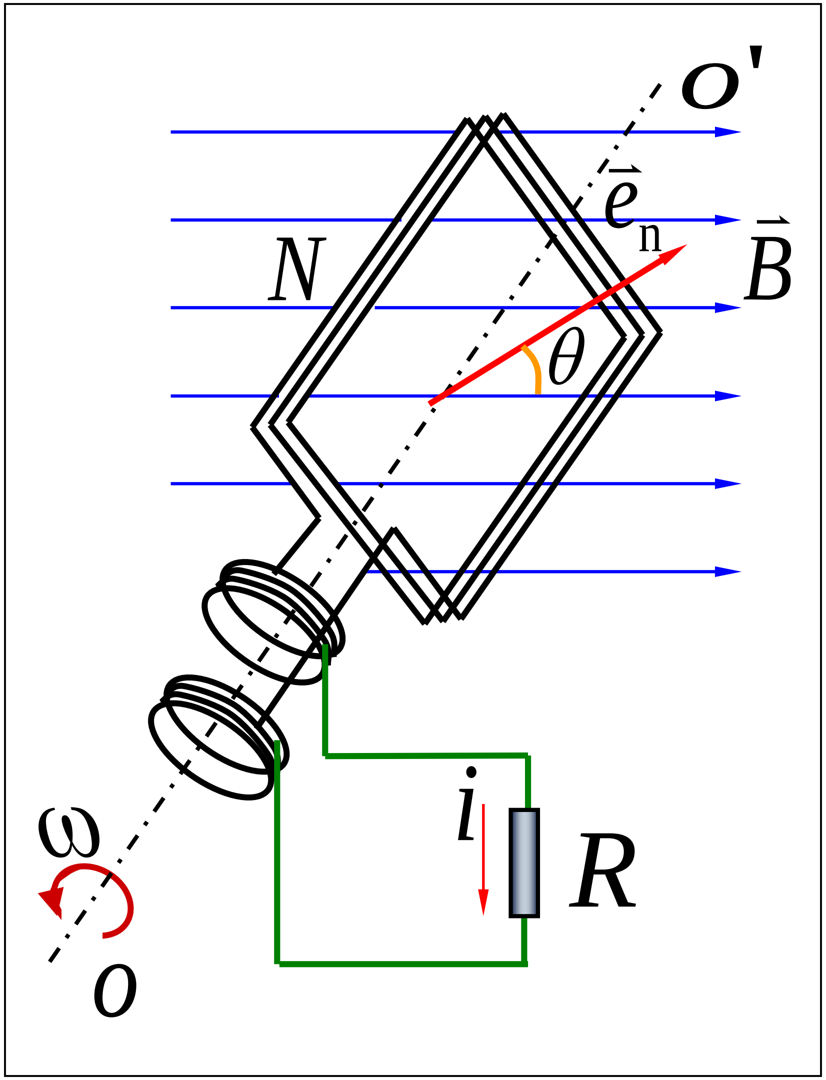
$$q=\int_{t_1}^{t_2} I\mathrm{d}t \quad I=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \quad q=\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}\mathrm{d}\Phi=\frac{1}{R}\left(\Phi_2-\Phi_1\right)$$

3. $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ — $\boldsymbol{\Phi}_B$的变化率，即变化的快慢决定ε的值；

$\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1$—$\boldsymbol{\Phi}_B$的变化量，即变化了多少决定q的值。

（q是流过的电量）

【例】 在匀强磁场中，置有面积为 S 的可绕轴转动的N 匝线圈 . 若线圈以角速度 ω 作匀速转动. 求线圈中的感应电动势.



已知 S, N, ω 求 E

【解】设 $t=0$ 时,

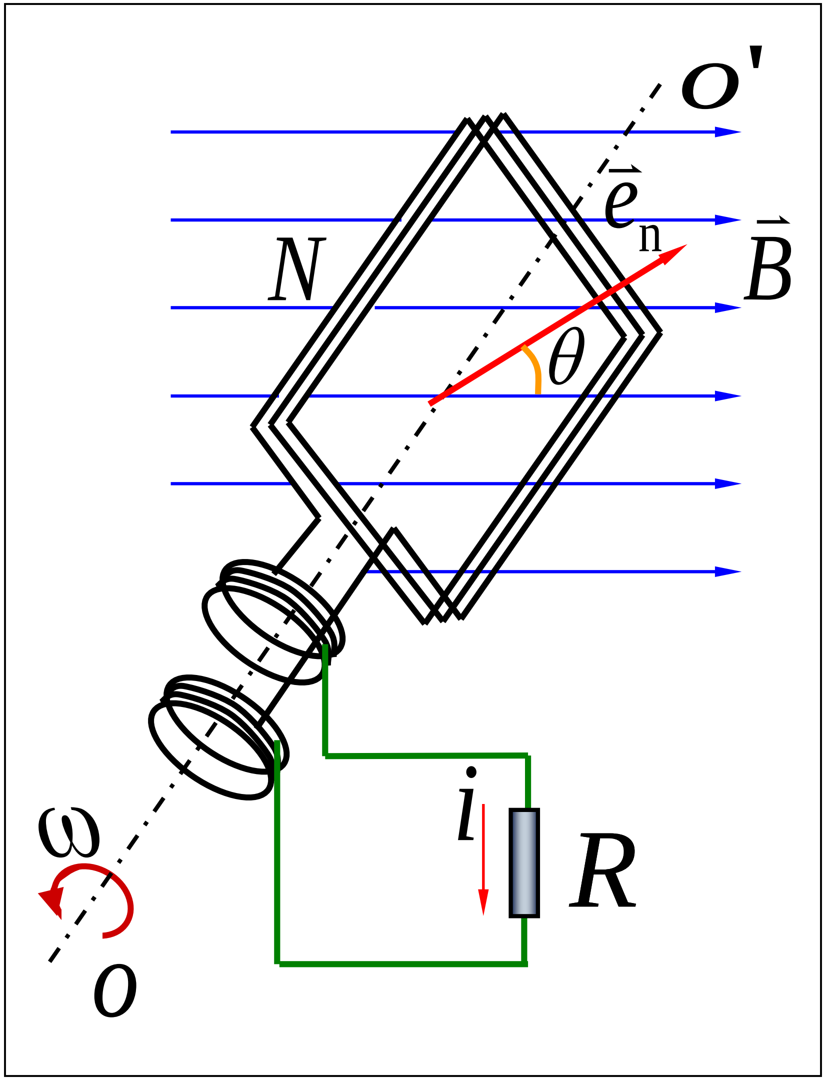
$\vec{e}_{\mathrm{n}}$与 $\vec{B}$ 同向, 则 $\theta=\omega t$

$$\psi = N\phi = NBS\cos\omega t$$

$$\mathrm{E} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = NBS\omega\sin\omega t$$

令 $\mathrm{E}_{\mathrm{m}} = NBS\omega$

则 $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\mathrm{m}}\sin\omega t$

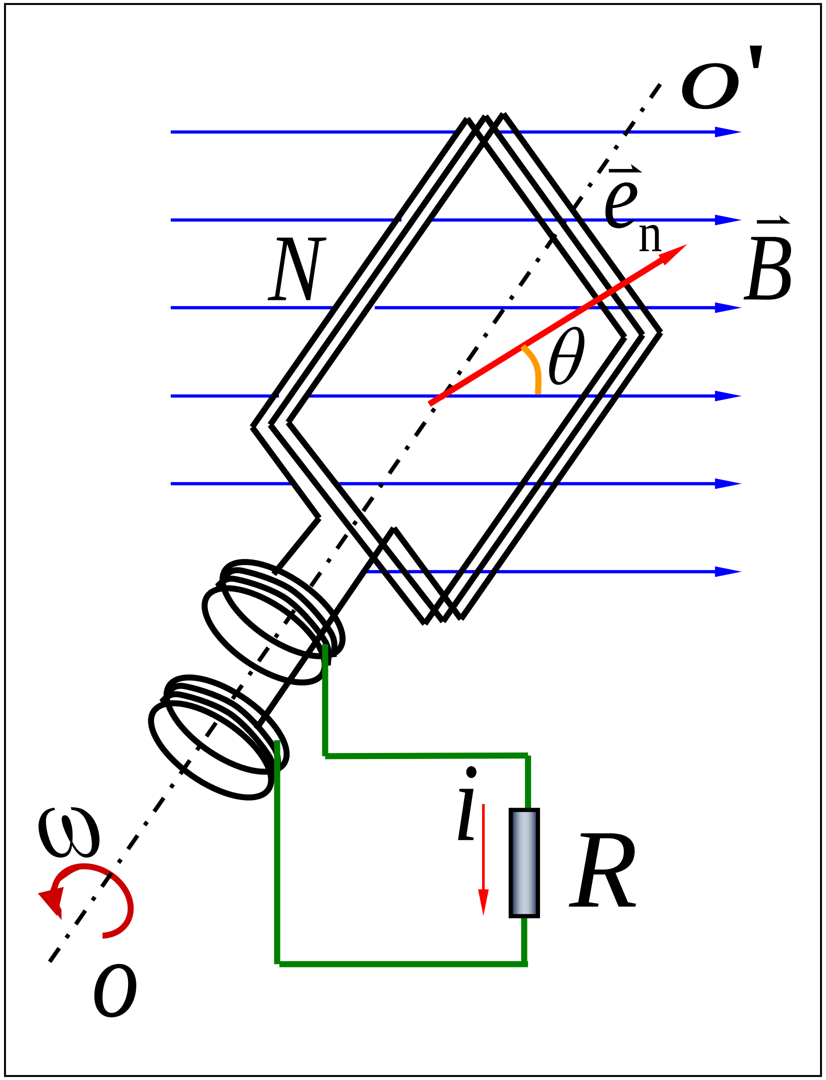


$$E = E_m \sin \omega t$$

$$i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

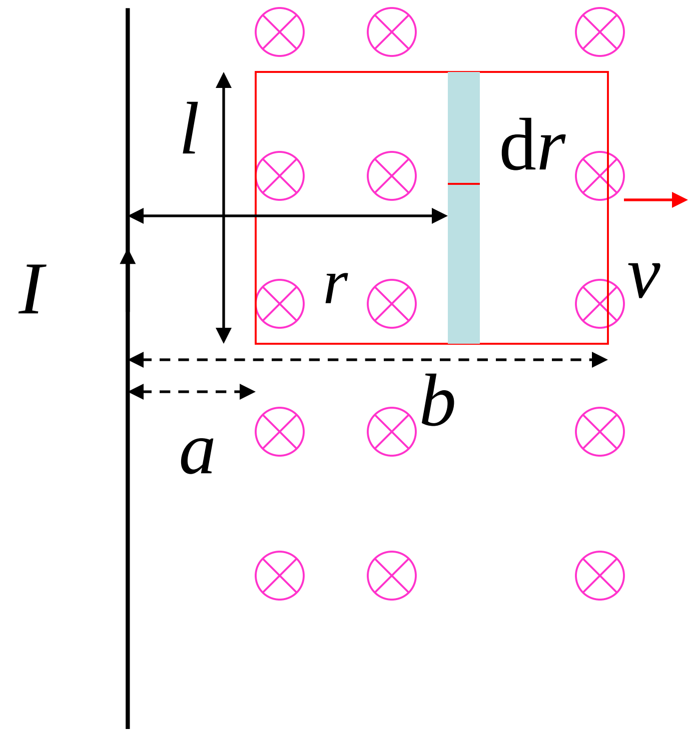
$$I_m = \frac{E_m}{R}$$

可见,在匀强磁场中匀速转动的线圈内的感应电电流是时间的正弦函数.这种电流称交流电.



【例】在一个载流为I的无限长直线旁边有一个矩形线圈，几何尺寸和相对位置如图所示。试求，当矩形线圈以速度v运动时，回路中的感应电动势。

【解】先求磁通量 $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



$$\Phi_m=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_s B\cos\theta ds$$

$$=\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l dr=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

由 $\varepsilon_i=-\dfrac{d\Phi_m}{dt}$ 可得

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi_m}{da}\frac{da}{dt}-\frac{d\Phi_m}{db}\frac{db}{dt}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)v$$

§12-3 动生电动势

引起磁通量变化的原因

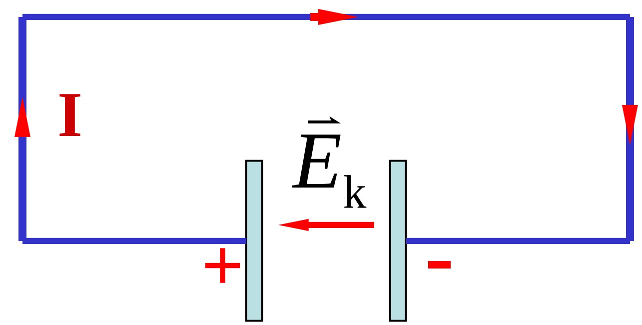
1）稳恒磁场中的导体运动， 或者回路面积变化、取向变化等 ⟹ 动生电动势

2）导体不动，磁场变化 ⟹ 感生电动势

感应电动势：
- 动生电动势
- 感生电动势

$\vec{E}_{\mathrm{k}}$：非静电的电场强度.

电动势



$$\mathrm{E}=\int_{-}^{+}\vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

◆ 闭合电路的总电动势

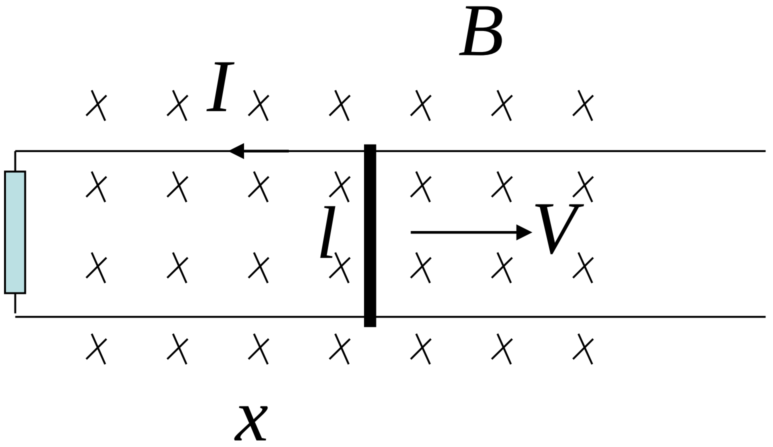
$$\mathrm{E}=\oint_{l}\vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

一　动生电动势(motional electromotive force)

特例

回路磁通量为：

$$\Phi_m = B \cdot lx$$



根据法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d(B \cdot lx)}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

洛沦兹力为：

$$\vec{F}_{洛} = q\vec{V} \times \vec{B}$$

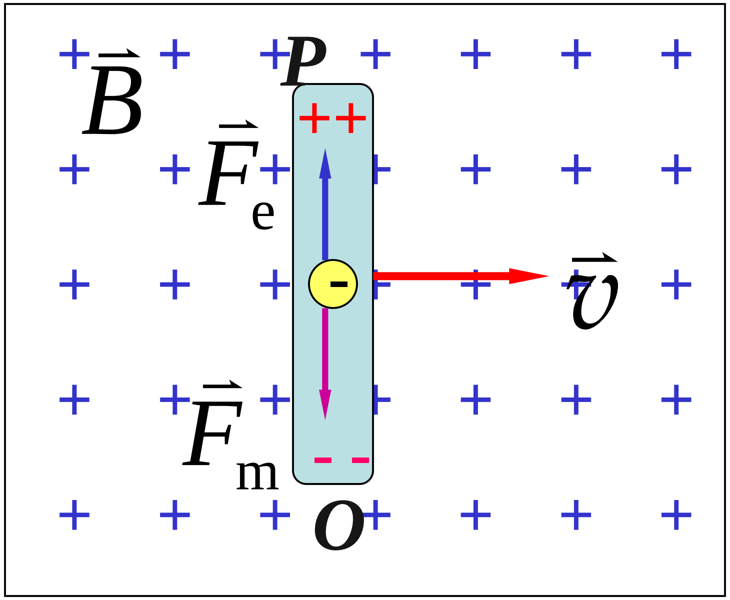
二　动生电动势的理论解释

动生电动势的非静电力场来源 ⟹ 洛伦兹力

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

平衡时 $\vec{F}_{\mathrm{m}} = -\vec{F}_{\mathrm{e}} = -e\vec{E}_{\mathrm{k}}$

$$\vec{E}_{\mathrm{k}} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{m}}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$



$$\mathcal{E}_{\mathrm{i}} = \int_{OP} \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{OP} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{i}} = (v \times B) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

设杆长为 l　　$\mathcal{E}_{\mathrm{i}} = \int_0^l vB\mathrm{d}l = vBl$

三 动生电动势与能量转换

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y \qquad \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$\vec{F}_y = -e\vec{\upsilon}_x \times \vec{B} \qquad \vec{F}_x = -e\vec{\upsilon}_y \times \vec{B}$$

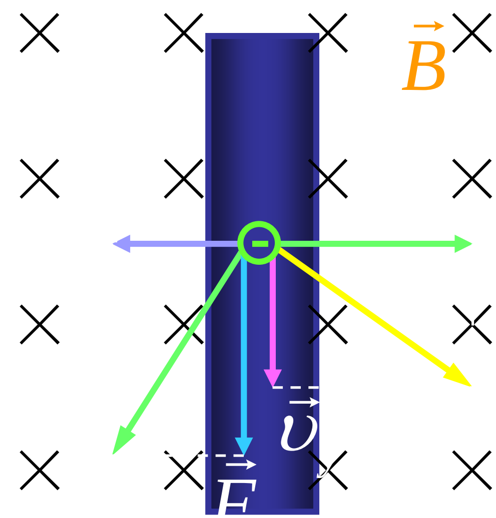


图5.11 洛仑兹力不做功

功率 $P = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = \vec{F}_x\cdot\vec{\upsilon}_x + \vec{F}_y\cdot\vec{\upsilon}_y$

$$= \left(-e\vec{\upsilon}_y \times \vec{B}\right)\cdot\vec{\upsilon}_x + \left(-e\vec{\upsilon}_x \times \vec{B}\right)\cdot\vec{\upsilon}_y$$

$$= -e\left[\vec{\upsilon}_y\cdot\left(\vec{B}\times\vec{\upsilon}_x\right) + \left(\vec{\upsilon}_x\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\upsilon}_y\right]$$

$$= -e\vec{\upsilon}_y\cdot\left[\left(\vec{B}\times\vec{\upsilon}_x\right) - \left(\vec{B}\times\vec{\upsilon}_x\right)\right] = 0$$

即

洛仑兹力不做功，洛仑兹力只起传递能量的作用。

要保持金属杆移动速度 $\vec{\upsilon}_x$，外力需克服阻力$\vec{F}_x$做功；

电荷受$\vec{F}_y$的作用而获得速度 $\vec{\upsilon}_y$，从而获得能量。

【例】一长为 L 的铜棒在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中,以角速度 ω 在与磁场方向垂直的平面上绕棒的一端转动，求铜棒两端的感应电动势.

【解】

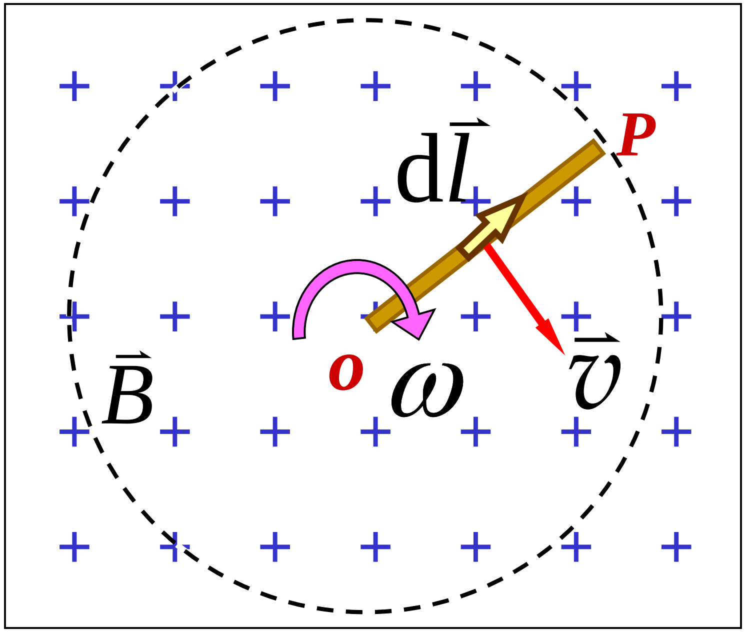
$$\mathrm{d}\mathcal{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= vB\mathrm{d}l$$

$$\mathcal{E}_i = \int_0^L vB\mathrm{d}l$$

$$= \int_0^L \omega lB\mathrm{d}l$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

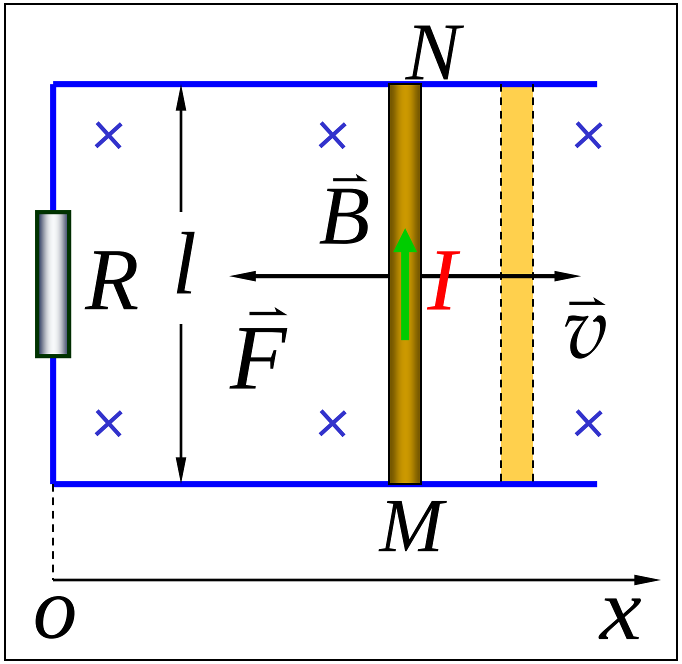


$\mathcal{E}_i$ 方向 $O \longrightarrow P$

（点 P 的电势高于点 O 的电势）

【例】一导线矩形框的平面与磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场相垂直.在此矩形框上,有一质量为 m 长为 l 的可移动的细导体棒 MN；矩形框还接有一个电阻 R，其值较之导线的电阻值要大得很多.若开始时,细导体棒以速度 $\vec{v}_0$ 沿如图所示的矩形框运动,试求棒的速率随时间变化的函数关系.

解 如图建立坐标



棒中 $\mathcal{E}_i = Blv$ 且由 $M \longrightarrow N$

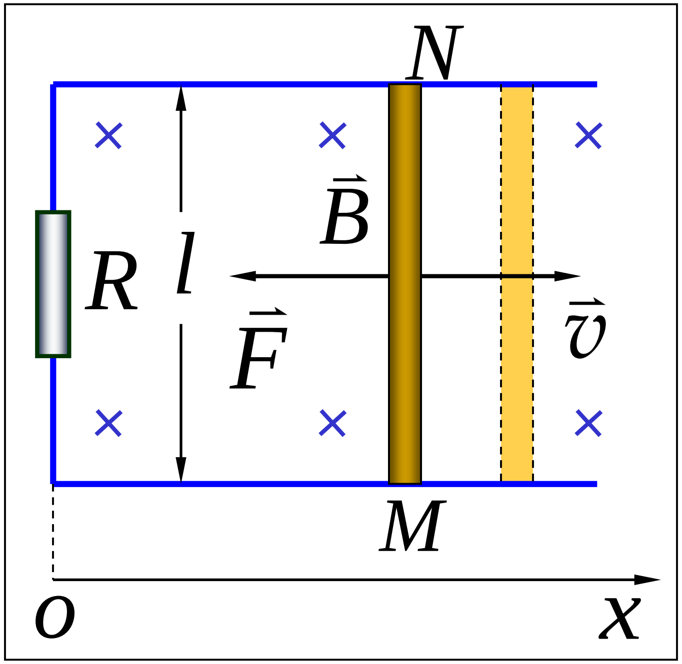
棒所受安培力

$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

方向沿 ox 轴反向

$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

方向沿ox轴反向



棒的运动方程为

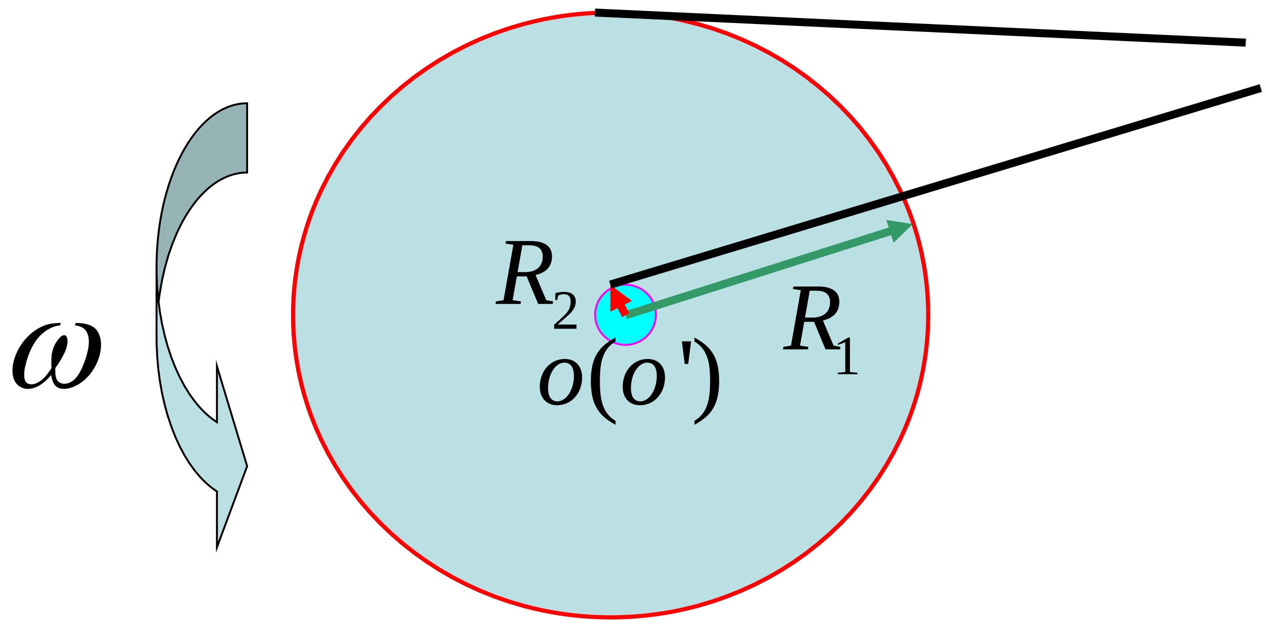
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$$

则 $$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int_0^t \frac{B^2 l^2}{mR}\mathrm{d}t$$

计算得棒的速率随时间变化的函数关系为

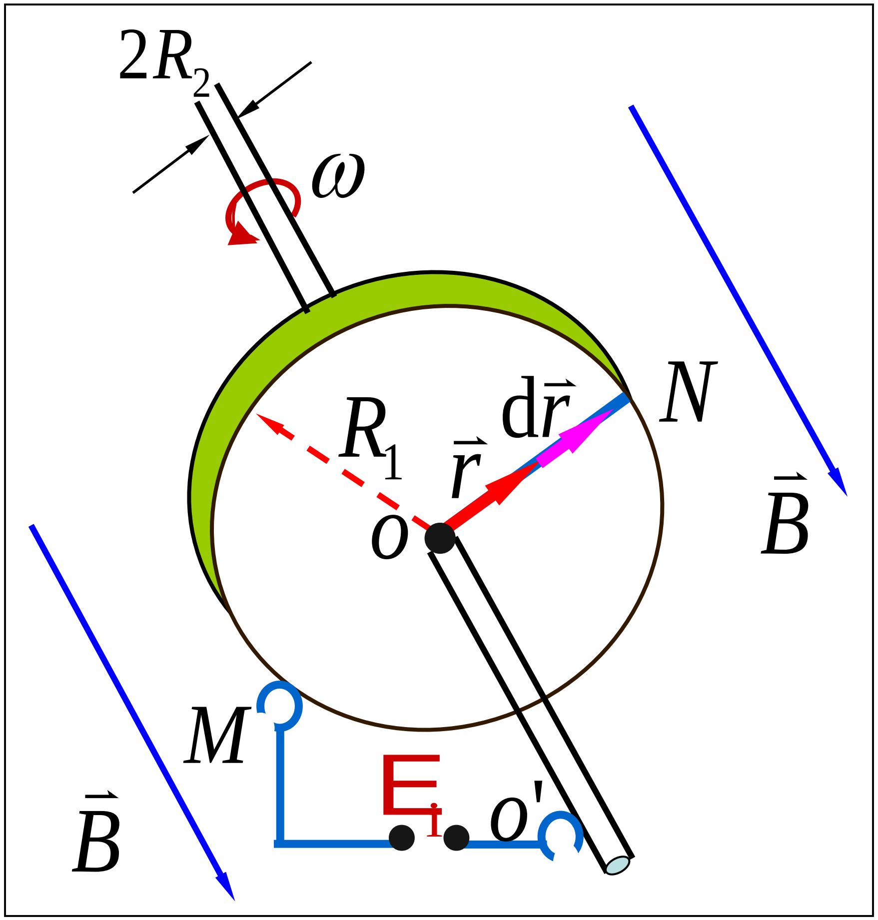
$$v = v_0 \mathrm{e}^{-(B^2 l^2 / mR)t}$$

【例】 圆盘发电机 一半径为 $R_1 = 1.2\text{m}$ 、厚度 $d = 1.0\times10^{-3}\text{m}$ 的铜圆盘,以角速率 $\omega = 5\times 2\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$,绕通过盘心 垂直的金属轴 OO' 转动， 轴的半径为 R_2 ，且 $R_2 = 2.0\times10^{-3}\text{m}$。圆盘放在磁感强度 $B = 10\text{T}$ 的均匀磁场 $\vec{B}$ 中, $\vec{B}$ 的方向亦与盘面垂直. 有两个集电刷分别与圆盘的边缘和转轴相连。试计算它们之间的电势差,并指出何处的电势较高。



已知 $R_1 = 1.2\mathrm{m}$，$d = 1.0\times10^{-3}\mathrm{m}$，$\omega = 5\times2\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

$R_2 = 2.0\times10^{-3}\mathrm{m}$，$B = 10\mathrm{T}$



求 $E_i = ?$

（方法一）

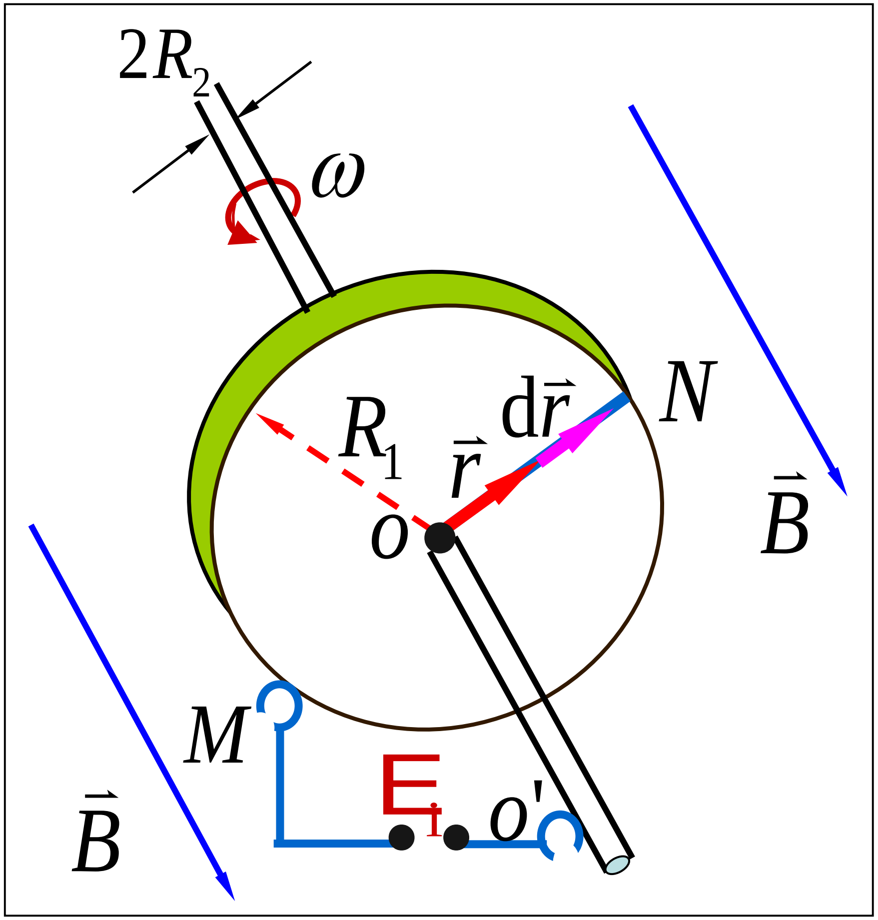
解 因为 $d << R_1$，所以不计圆盘厚度.

如图取线元 $\mathrm{d}\vec{r}$

则 $\mathrm{d}E_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$= vB\mathrm{d}r = r\omega B\,\mathrm{d}r$

$$\mathrm{dE_i} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = vB\mathrm{d}r = r\omega B\mathrm{d}r$$



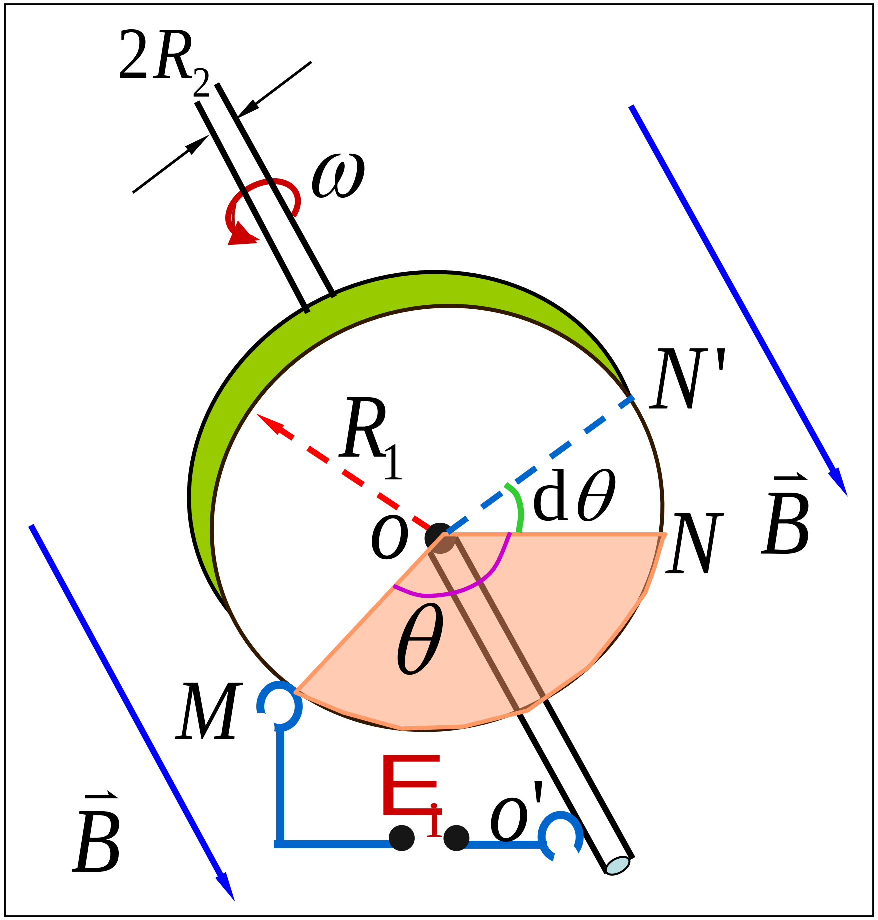
$$\mathrm{E_i} = \int_{R_1}^{R_2} r\omega B\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\omega B(R_1^2 - R_2^2)$$

$$= 226\mathrm{V}$$

圆盘边缘的电势高于中心转轴的电势.

已知 $R_1 = 1.2\mathrm{m}$，$d = 1.0\times10^{-3}\mathrm{m}$， $\omega = 5\times2\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$



$R_2 = 2.0\times10^{-3}\mathrm{m}$，$B = 10\mathrm{T}$

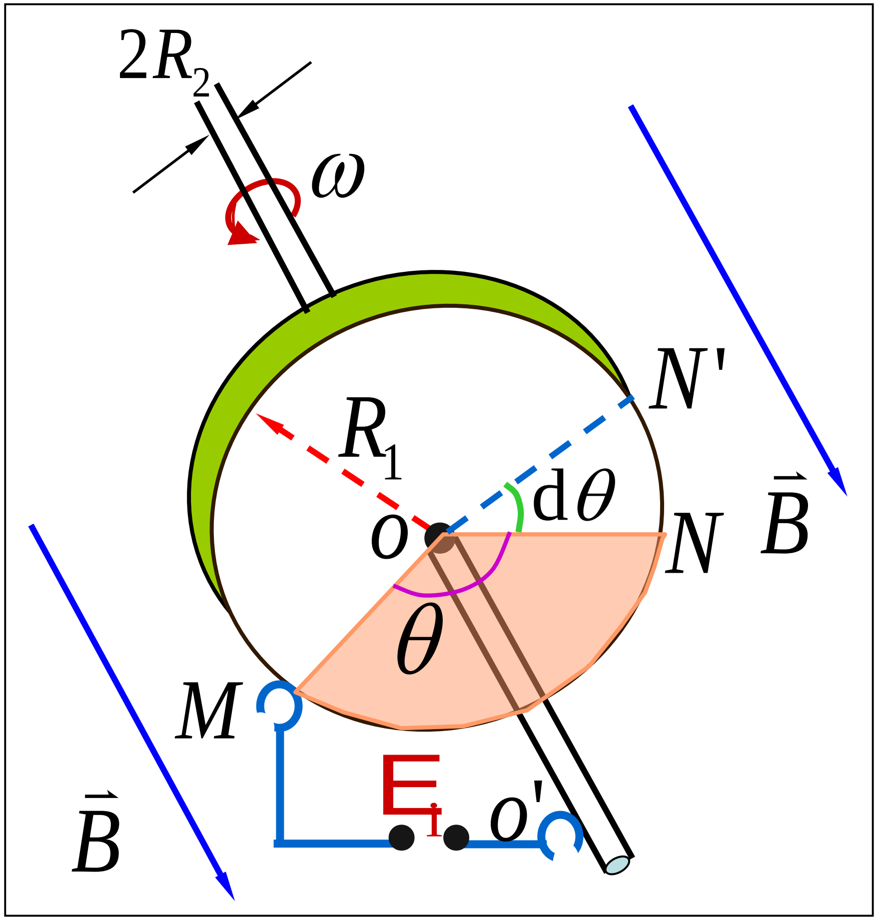
求 $\mathcal{E}_i = ?$

（方法二）

【解】 取一虚拟的闭和回路 $MNOM$ 并取其绕向与 $\vec{B}$ 相同 . 则

$$\Phi = B\frac{\theta}{2\pi}\pi(R_1^2 - R_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}B(R_1^2 - R_2^2)\theta$$



$$\Phi = \frac{1}{2}B(R_1^2 - R_2^2)\theta$$

设 $t=0$ 时点 M 与点 N 重合即 $\theta = 0$

则 t 时刻 $\theta = \omega t$

$$\Phi = \frac{1}{2}B(R_1^2 - R_2^2)\omega t$$

$$\mathrm{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

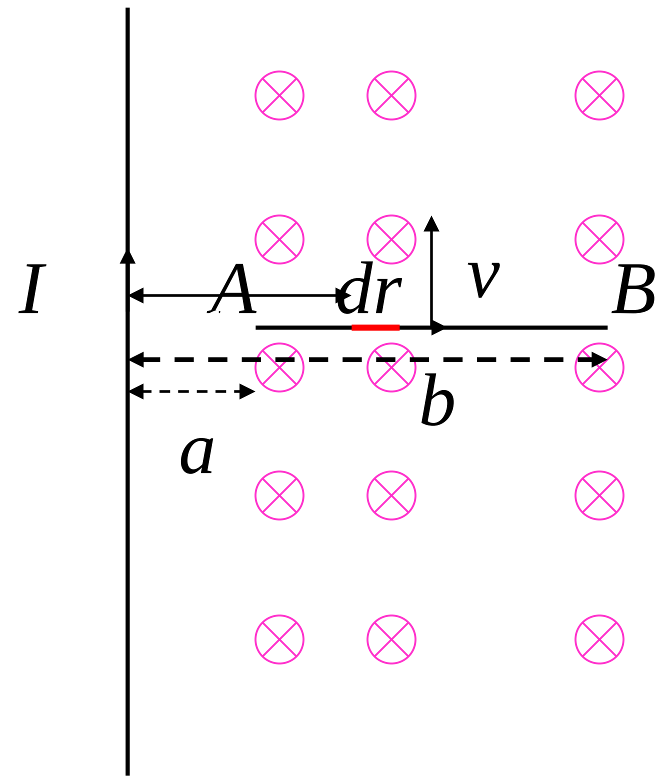
$$= -\frac{1}{2}B(R_1^2 - R_2^2)\omega$$

方向与回路 $MNOM$ 绕向相反,即盘缘的电势高于中心.

【例】在一个无限长载流*I*的直线旁边有一个与其垂直且共面的直导线***AB***。几何关系如图所示。当***AB***以速度***v***平行于载流直线运动时，试求***AB***的动生电动势.

【解】长直载流线产生的磁场如图所示。大小为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



此题也属于“三量垂直”的情况，所以

$$\varepsilon = \int vBdl = \int_a^b v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr$$

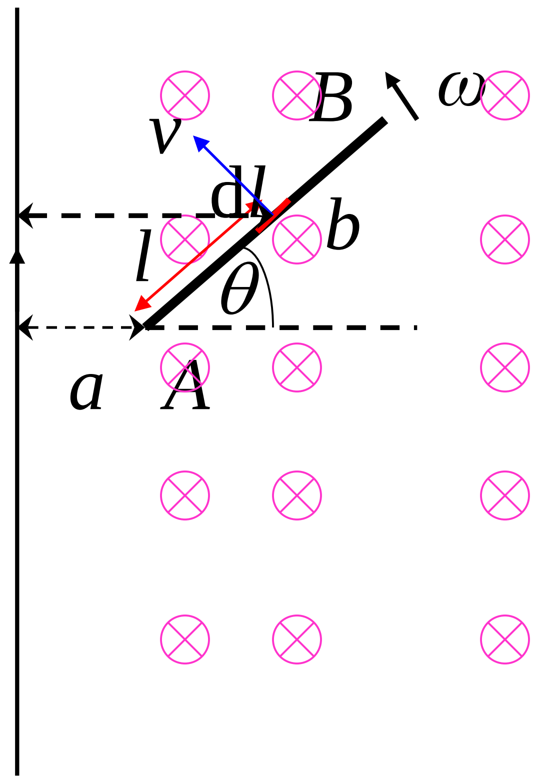
$$= \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

A端是正极，电动势的方向是由**B**端指向**A**端.

【例】在一个无限长载流I的直线旁边有一个与其共面的直导线*AB*。几何关系如图所示。当*AB*以角速度旋转到θ角时，试求*AB*的动生电动势。

【解】长直载流线产生的磁场如图所示。大小为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$



$$\varepsilon=\int vBdl=\int_0^b \omega l\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+l\cos\theta)}dl$$

$$\varepsilon=\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\cos\theta}\int_0^b\frac{a+l\cos\theta-a}{(a+l\cos\theta)}dl$$

$$=\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\cos\theta}[b-\frac{a}{\cos\theta}\ln\frac{a+b\cos\theta}{a}]$$

*A*端是正极，电动势的方向是由*B*端指向*A*端.

§ 12-4　感生电动势　有旋电场

感生电动势(induced electromotive force)

产生感生电动势的非静电场 ⟶ 感生电场

麦克斯韦假设 变化的磁场在其周围空间激发一种电场,这个电场叫感生电场 $\vec{E}_{\mathrm{k}}$.

闭合回路中的感生电动势 $\mathrm{E}_{\mathrm{i}} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \; \cdots \; \mathrm{d}\vec{s}$$

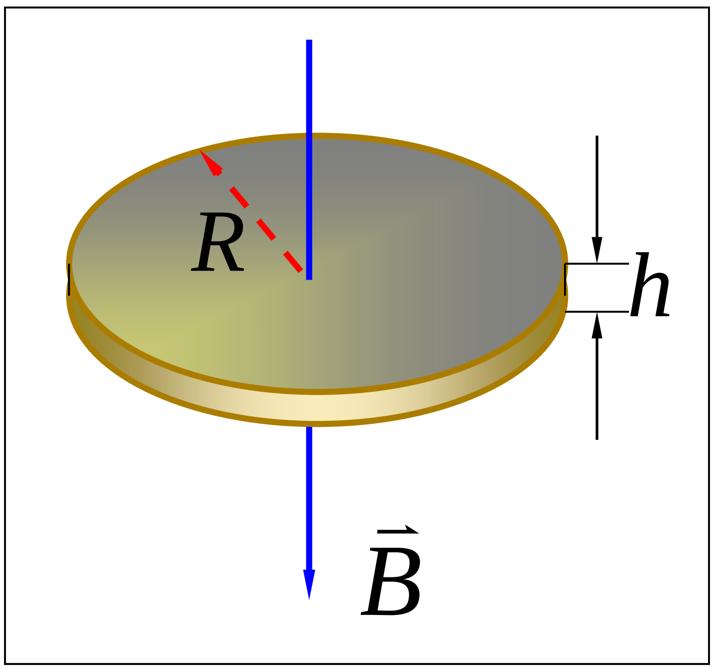
变化的磁场产生电场

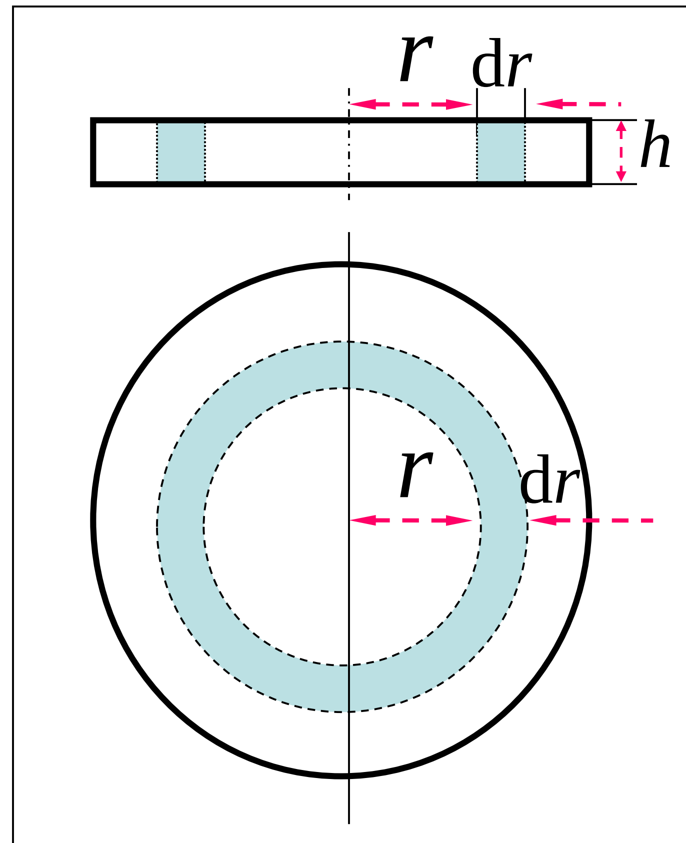
$$\mathrm{E}_{\mathrm{i}} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

感生电场和静电场的对比

- $\vec{E}_{静}$ 和 $\vec{E}_{\mathrm{k}}$ 均对电荷有力的作用.
- 静电场是保守场 $\oint_L \vec{E}_{静} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$
- 感生电场是非保守场 $\oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \neq 0$
- 静电场由电荷产生；感生电场是由变化的磁场产生 .

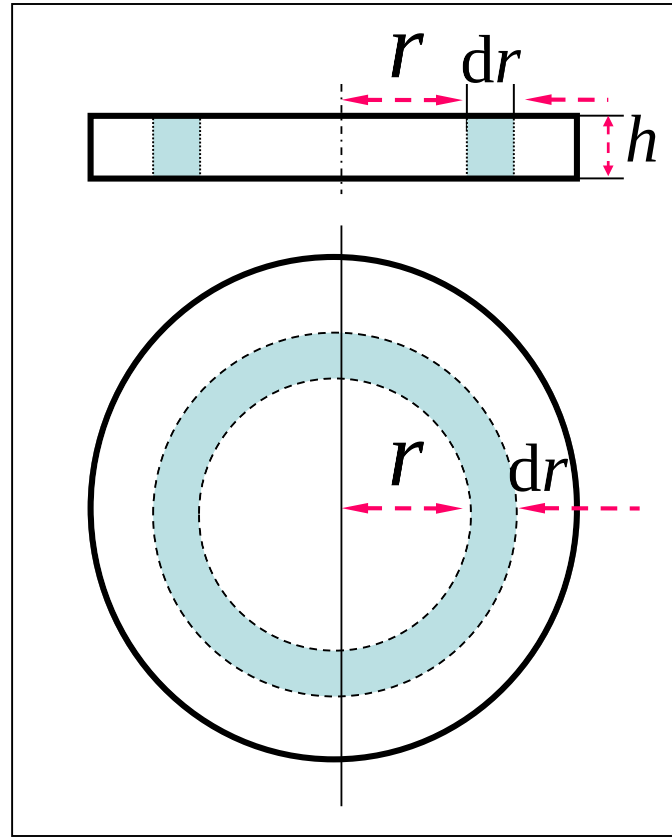
【例】 设有一半径为R ,高度为h 的铝圆盘, 其电导率为 γ.把圆盘放在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中, 磁场方向垂直盘面.设磁场随时间变化, 且 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k$ 为一常量.求盘内的感应电流值.（圆盘内感应电流自己的磁场略去不计）





已知 R， h，γ，$\vec{B}$，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k$

求 I



解 如图取一半径为 r，宽度为dr，高度为 h 的圆环.

则圆环中的感生电动势的值为

$$\mathcal{E}_{\mathrm{i}} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

代入已知条件得 $$\mathcal{E}_{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \int_S \mathrm{d}s = k\pi r^2$$

又 $$\mathrm{d}R = \frac{1}{\gamma} \frac{2\pi r}{h\mathrm{d}r}$$

所以 $$\mathrm{d}I = \frac{kh\gamma}{2} r\mathrm{d}r$$

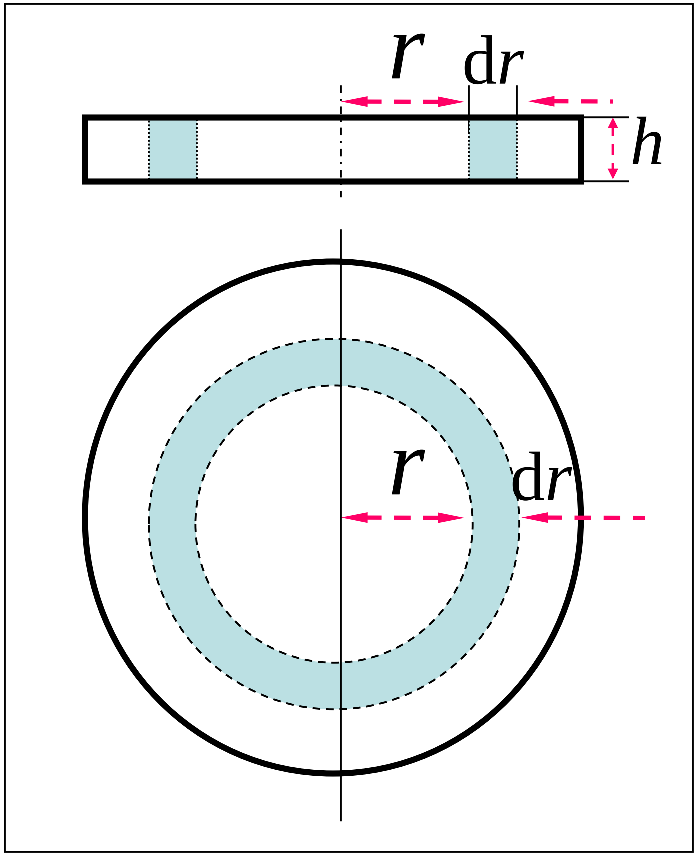
由计算得圆环中电流

$$\mathrm{d}I = \frac{kh\gamma}{2} r\mathrm{d}r$$

于是圆盘中的感应电流为

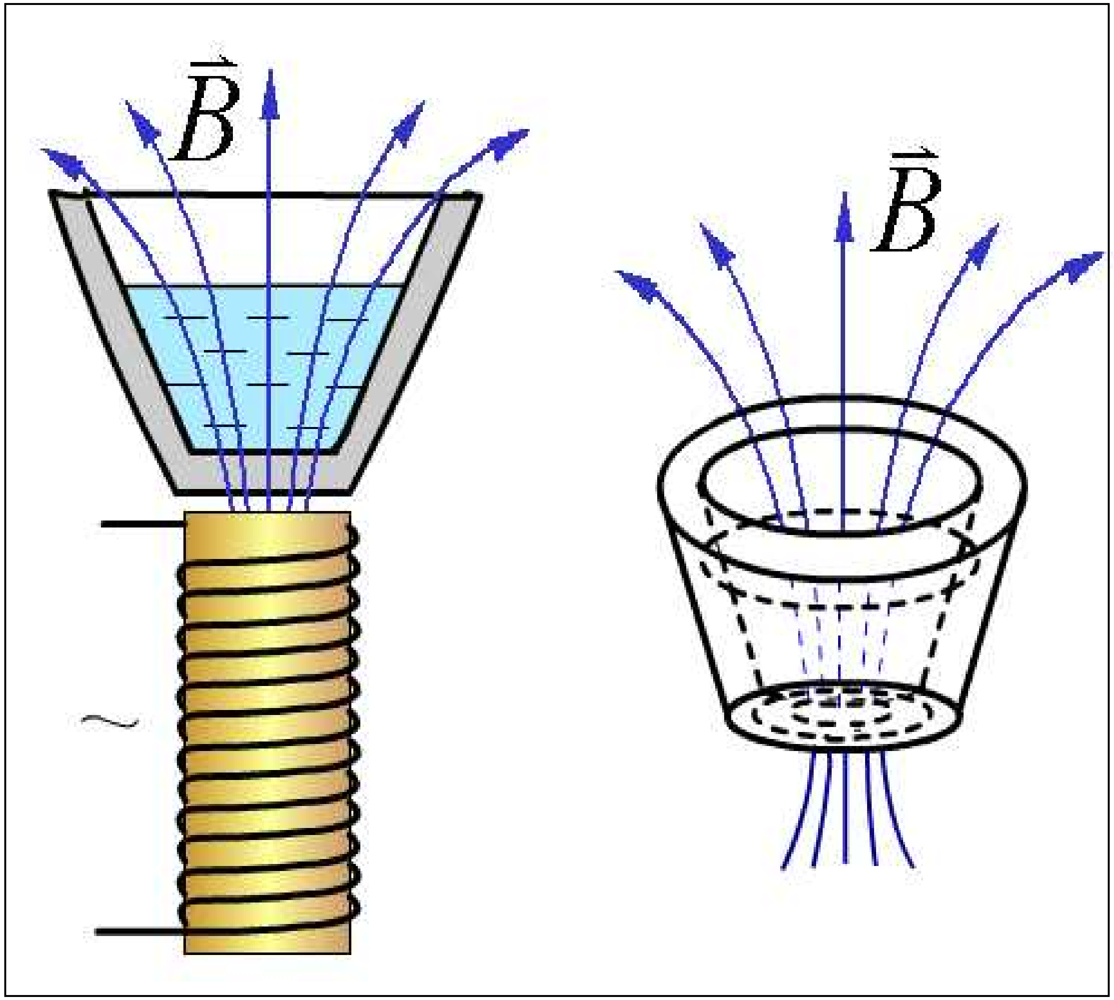
$$I = \int \mathrm{d}I = \frac{kh\gamma}{2}\int_0^R r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{4}k\gamma R^2 h$$

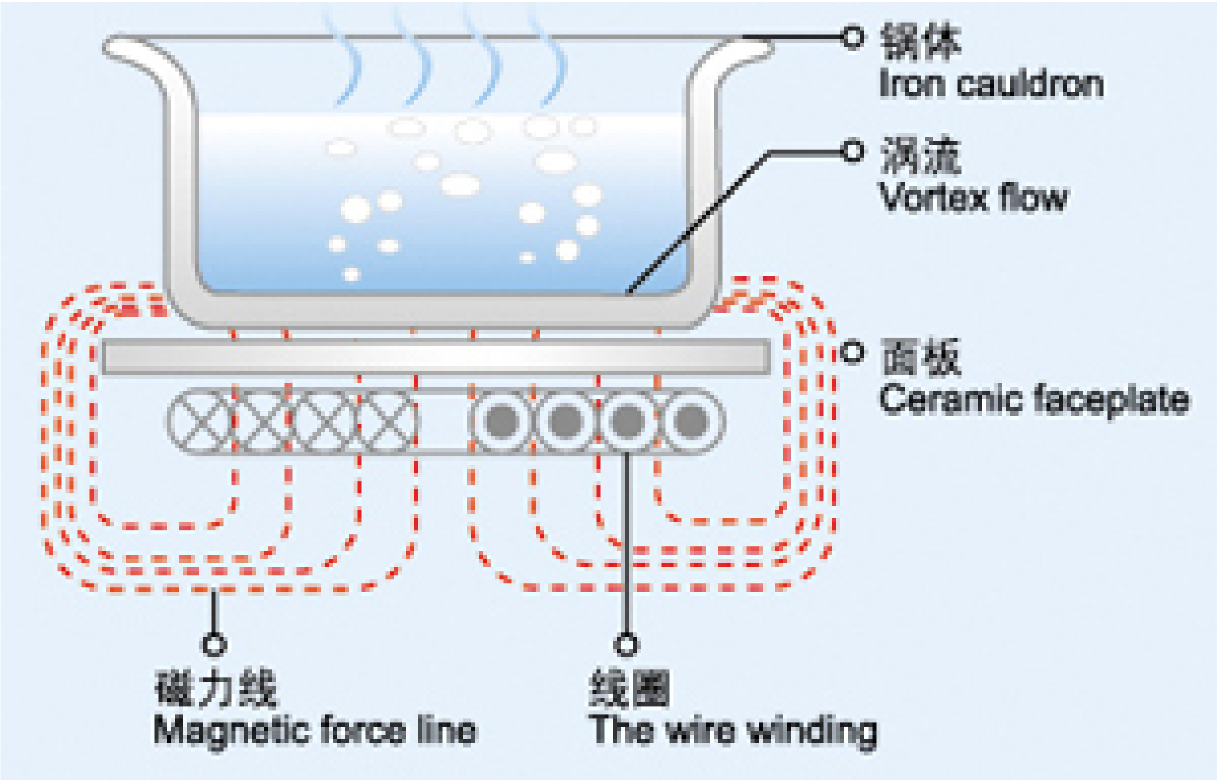


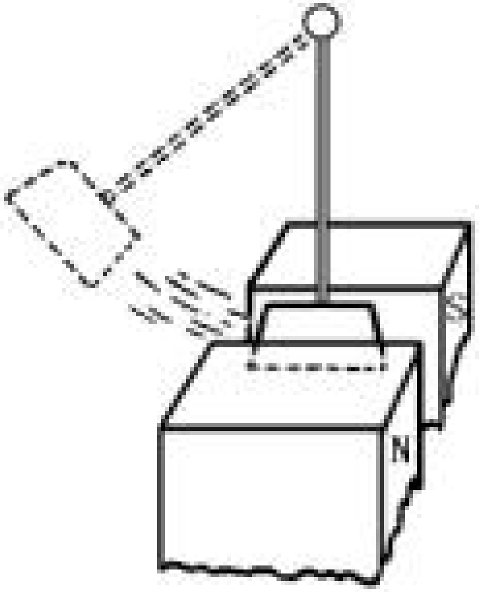
涡电流(eddy current)

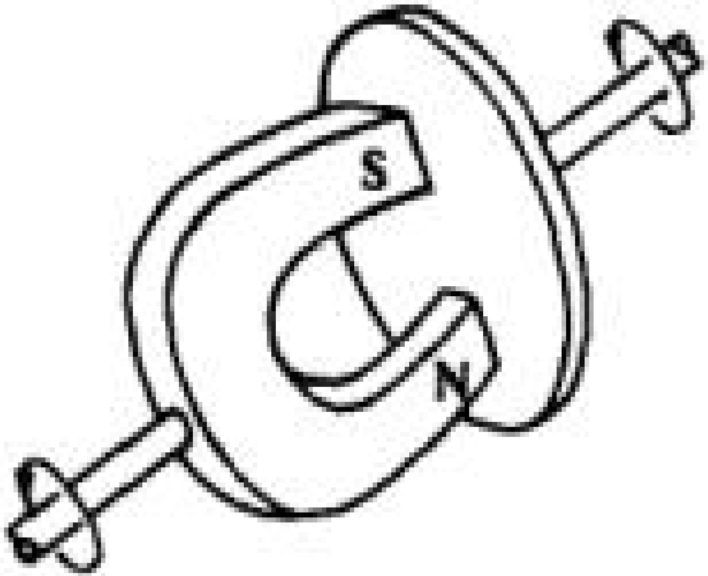
感应电流不仅能在导电回 路内出现， 而且当大块导体与磁场有相对运动或处在变化的磁场中时，在这块导体中也会激起感应电流.这种在大块导体内流动的感应电流,叫做涡电流，简称涡流.



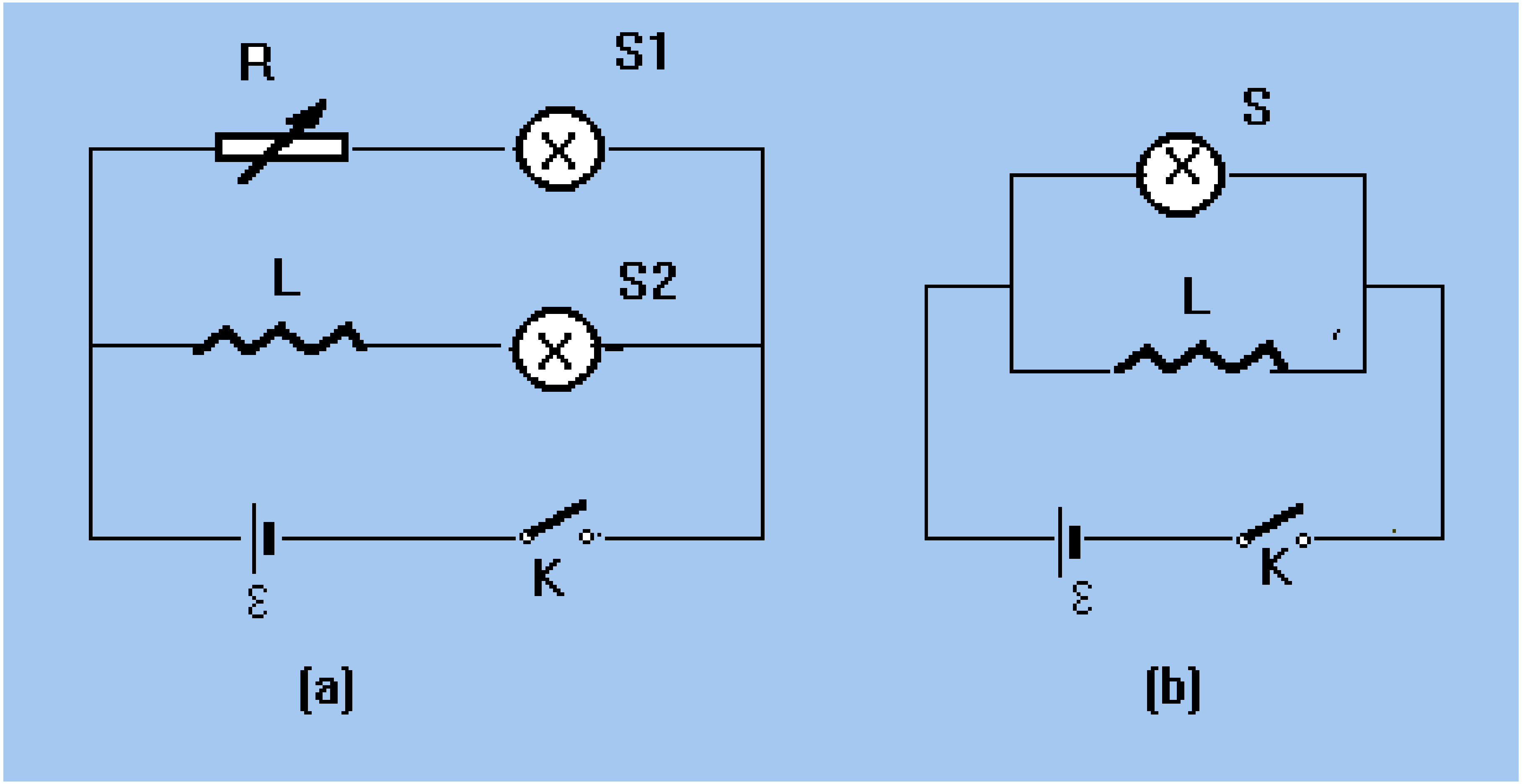
- 应用　　热效应、电磁阻尼效应.


锅体
Iron cauldron
涡流
Vortex flow
面板
Ceramic faceplate
磁力线
Magnetic force line
线圈
The wire winding


N


S
N

§ 12-5　自感



在开关合上和断开的瞬间有什么现象？
为什么？

一 自感电动势 自感(self-inductance)

回路电流发生变化时，其激发的磁场穿过回路自身的磁通量亦随之发生变化，则在回路中产生感应电动势，这种现象称为自感应现象，该电动势称为自感电动势。

根据毕–萨定律，有 $B \propto I \qquad \Phi \propto B$

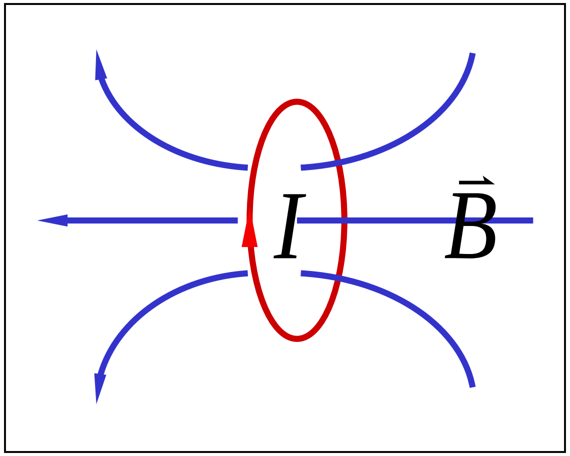
$$\therefore \Phi = LI$$

式中***L***是自感系数，简称自感，由回路的形状、大小、匝数和空间介质的性质决定。

无铁磁性物质存在时，***L***与回路电流无关。

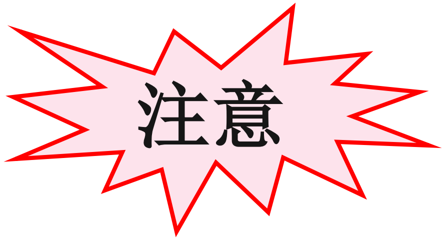
穿过闭合电流回路的磁通量 $\Phi = LI$

1）自感 $\boxed{L = \Phi / I}$



若线圈有 N 匝，

磁通匝数 $\psi = N\Phi$ 自感 $L = \psi / I$



无铁磁质时，自感仅与线圈形状、磁介质及 N 有关.

2）自感电动势 $\mathcal{E}_L = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -(L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t})$

若回路本身不变，空间介质不变，无铁磁物质存在

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \boxed{\mathcal{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

自感 $L = -\mathcal{E}_L \Big/ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

单位：**1 亨利（H）= 1 韦伯 / 安培（1 Wb / A）**

$$1\mathrm{mH} = 10^{-3}\mathrm{H}, \quad 1\mu\mathrm{H} = 10^{-6}\mathrm{H}$$

3）自感的计算方法

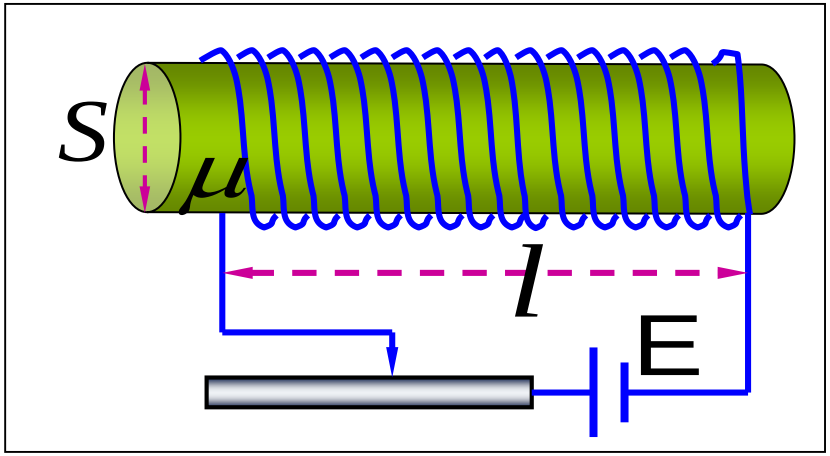
【例】 如图的长直密绕螺线管,已知l, S, N, μ，

求其自感 L.（忽略边缘效应）

解 先设电流 $\boldsymbol{I} \longrightarrow$ 根据安培环路定理求得 $\boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{B}$

$\longrightarrow \Phi \longrightarrow L$.

$$n = N/l$$

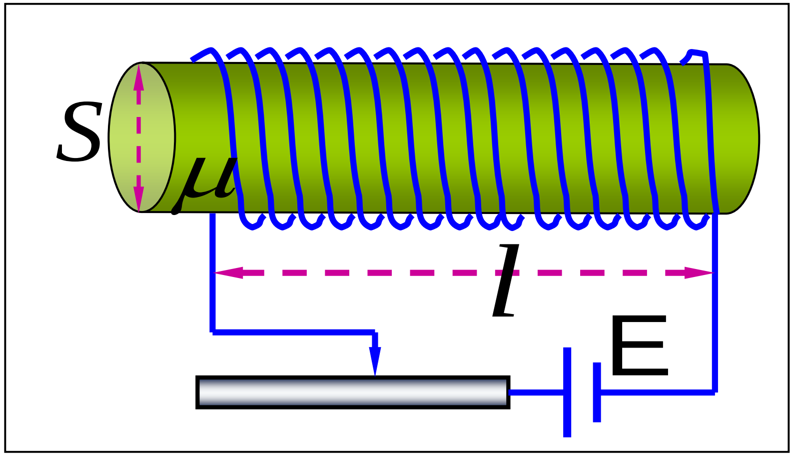


$$B = \mu H = \mu n I$$

$$\psi = N\Phi = NBS$$

$$= N\mu \frac{N}{l} IS$$

$$\psi = N\mu\frac{N}{l}IS$$



$$\boxed{L = \frac{\psi}{I} = \mu\frac{N^2}{l}S}$$

（一般情况可用下式测量自感）

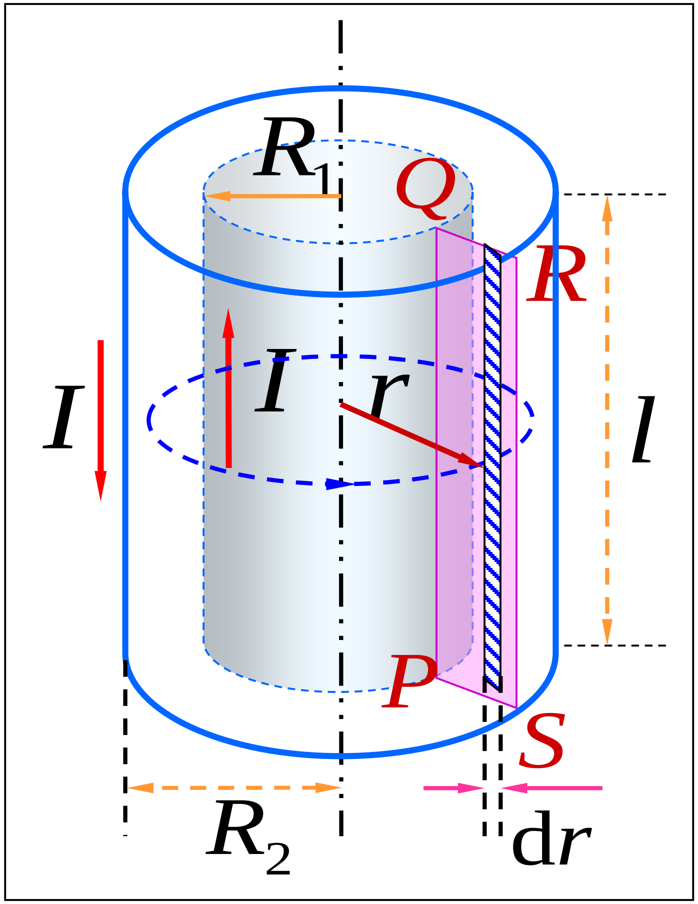
$$n = N/l \quad V = lS$$

$$\therefore L = \mu n^2 V$$

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

4）自感的应用　稳流，LC 谐振电路，滤波电路，感应圈等．

【例】 有两个同轴圆筒形导体，其半径分别为 R_1 和 R_2，通过它们的电流均为 I，但电流的流向相反. 设在两圆筒间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质，求其自感 L.



解 两圆筒之间 $B=\dfrac{\mu I}{2\pi r}$

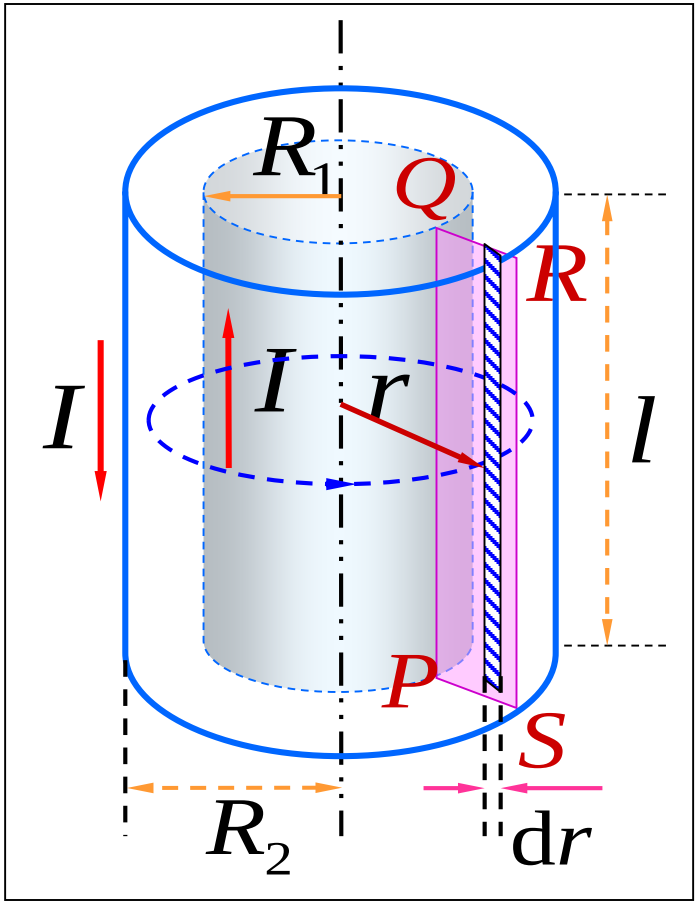
如图在两圆筒间取一长为 l 的面 $PQRS$，并将其分成许多小面元.

则 $\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=Bl\mathrm{d}r$

$$\Phi=\int\mathrm{d}\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}l\mathrm{d}r$$

$$\Phi=\int \mathrm{d}\Phi=\int_{R1}^{R2}\frac{\mu I}{2\pi r}l\mathrm{d}r$$

即 $$\Phi=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



由自感定义可求出

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

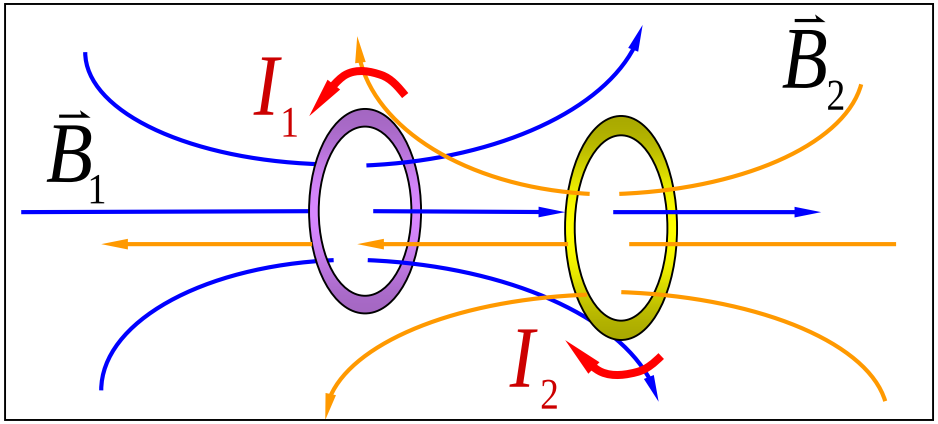
单位长度的自感为 $$\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

§ 12-6　互感

互感电动势　互感(mutual inductance)

I_1 在 I_2 电流回路中所产生的磁通量

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$



I_2 在 I_1 电流回路中所产生的磁通量 $\Phi_{12} = M_{12} I_2$

1）互感系数

（理论可证明）

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

注意

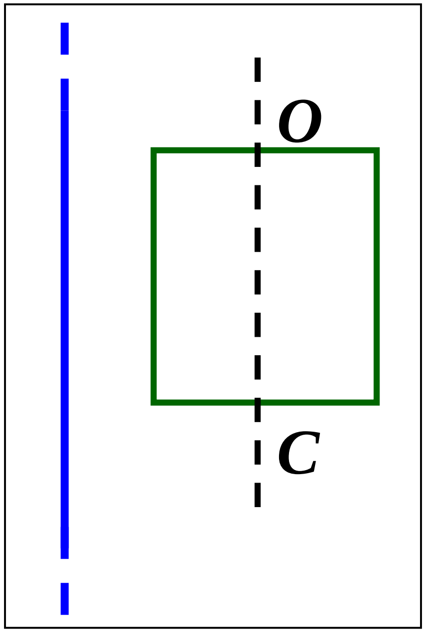
互感仅与两个线圈形状、大小、匝数、相对位置以及周围的磁介质有关(无铁磁质时为常量).

2）互感电动势

如果回路本身、两回路相对位置及空间介质不变，无铁磁物质存在

$$\mathcal{E}_{12}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\qquad \mathcal{E}_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

➤ 互感系数 $M=-\dfrac{\mathcal{E}_{21}}{\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathcal{E}_{12}}{\mathrm{d}I_2/\mathrm{d}t}$



问：下列几种情况互感是否变化？

1）线框平行直导线移动；

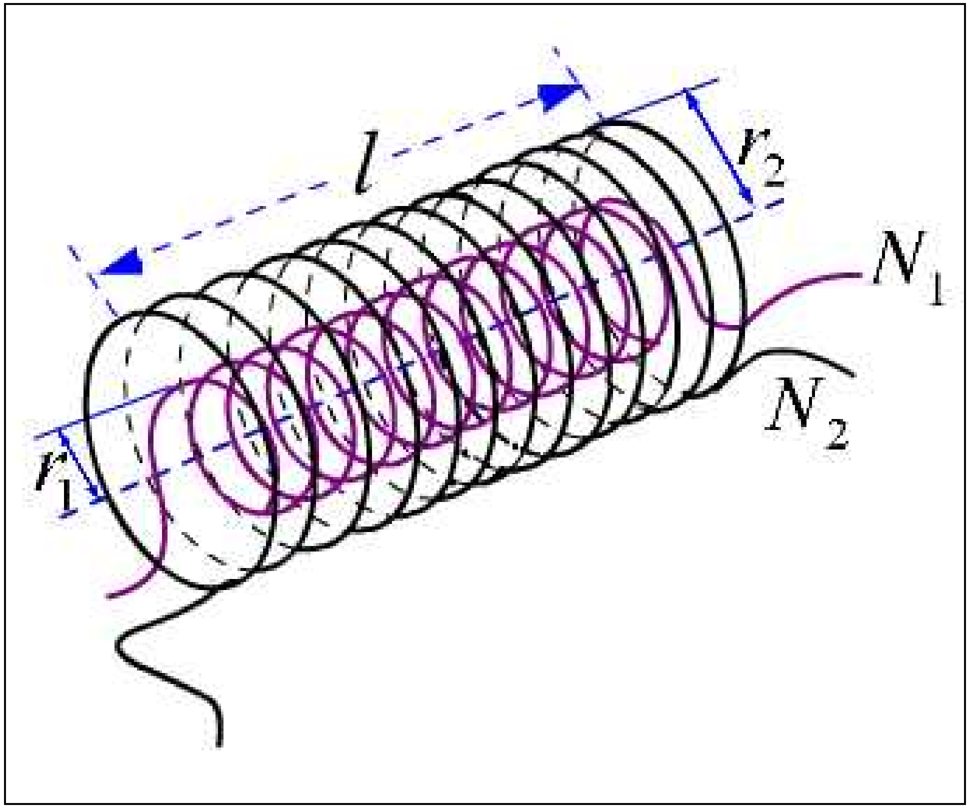
2）线框垂直于直导线移动；

3）线框绕 OC 轴转动；

4）直导线中电流变化.

【例】两同轴长直密绕螺线管的互感　　有两个长度均为l,半径分别为r_1和r_2（$r_1<r_2$）,匝数分别为N_1和N_2的同轴长直密绕螺线管.求它们的互感 M.

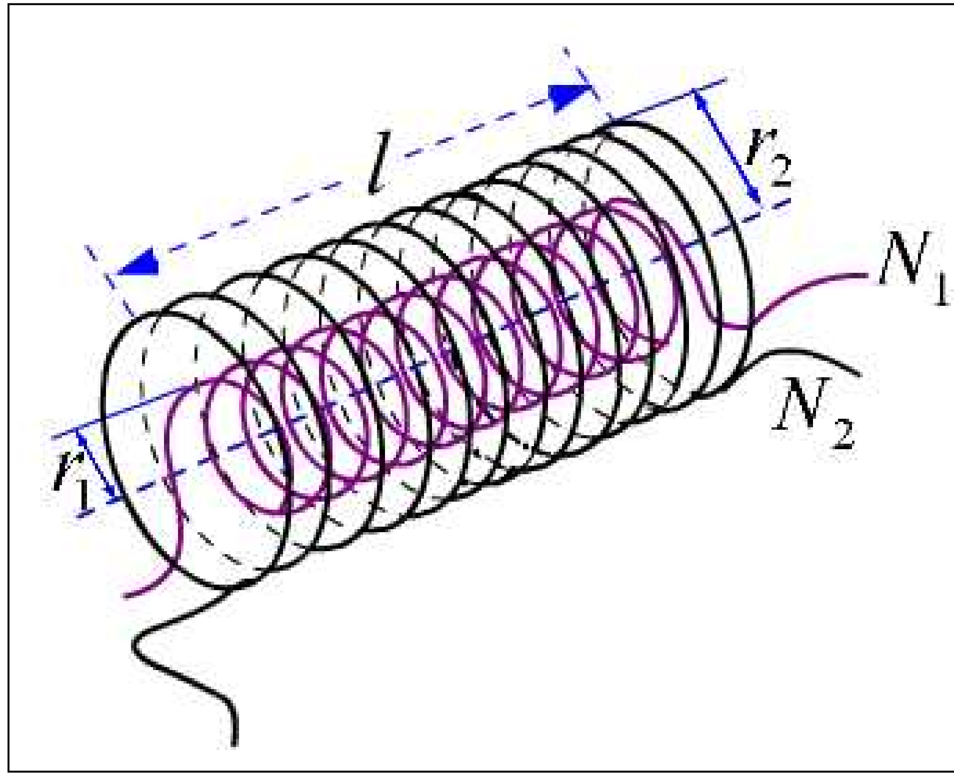
【解】先设某一线圈中通以电流 I → 求出另一线圈的磁通量Φ → M



设半径为 r_1 的线圈中通有电流 I_1，则

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$



则穿过半径为 r_2 的线圈的磁通匝数为

$$\psi = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 (\pi\, r_1^2)$$

$$= n_2 l B_1 (\pi r_1^2)$$

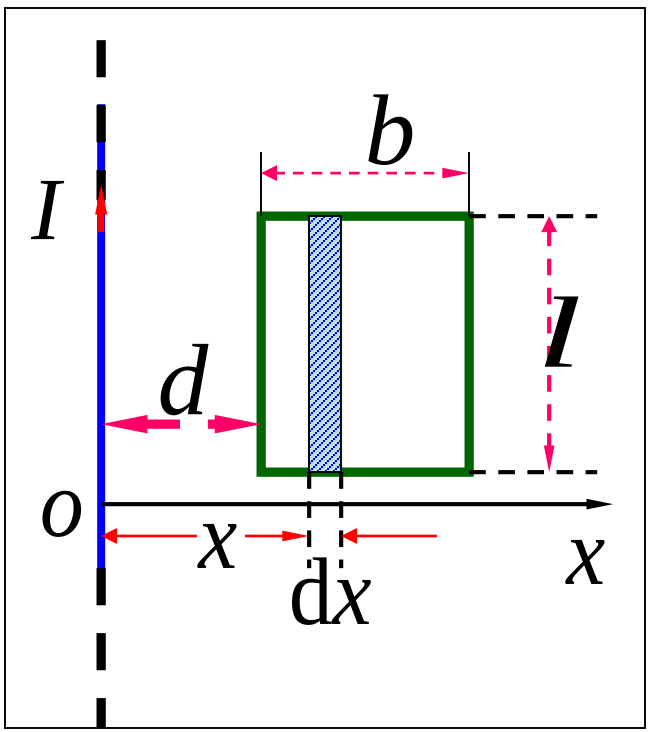
代入 B_1 计算得 $\psi = N_2 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi\, r_1^2) I_1$

则

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi\, r_1^2)$$

【例】在磁导率为 μ 的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与一宽长分别为 b 和 l 的矩形线圈共面,直导线与矩形线圈的一侧平行,且相距为 d . 求二者的互感系数.

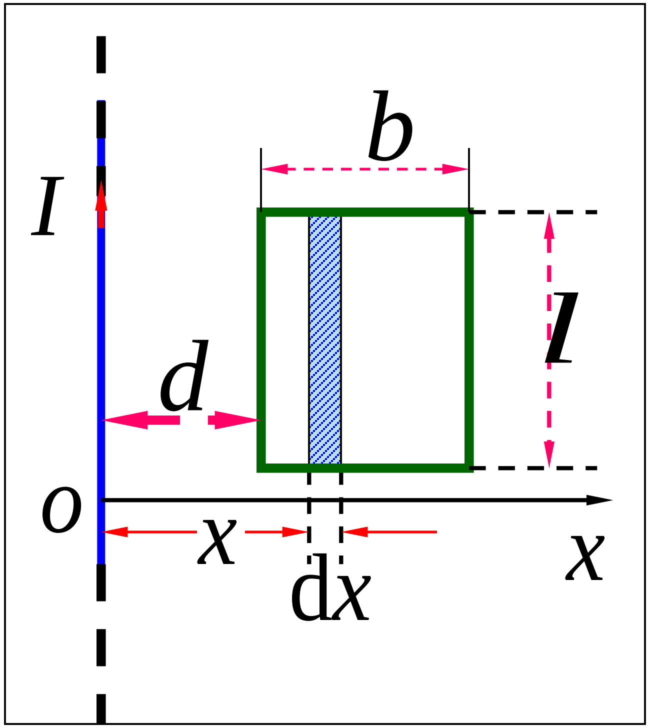
解　设长直导线通电流 I



$$B = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mu I}{2\pi x} l \mathrm{d}x$$

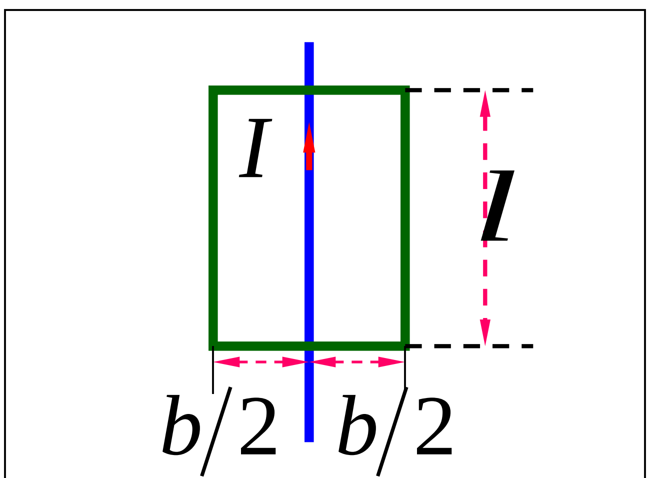
$$\Phi = \int_{d}^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l \mathrm{d}x$$



$$\Phi = \int_{d}^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi\ x} l \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln(\frac{b+d}{d})$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln(\frac{b+d}{d})$$



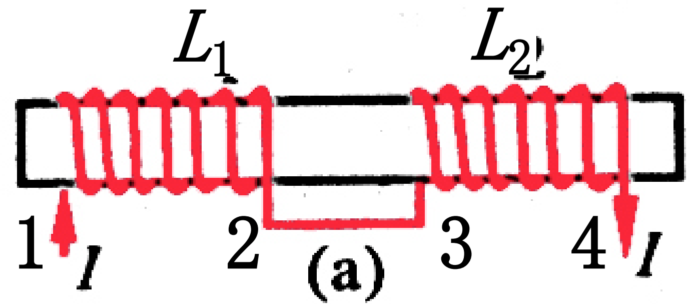
若导线如左图放置，根据对称性可知 $\Phi = 0$

得

$$M = 0$$

3）串联线圈的等效电感

如图所示，自感L_1、L_2，互感M



1. 顺串，如图(a)

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$ **2→1**

$$\mathcal{E}_{21} = -M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$ **2→1**

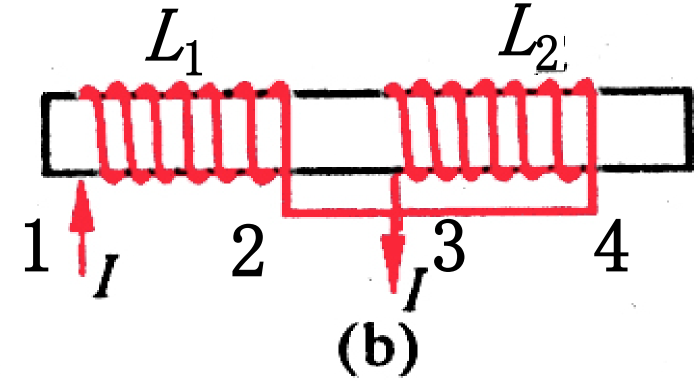
$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$ **4→3**

$$\mathcal{E}_{12} = -M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$ **4→3**

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12} = -\left(L_1 + L_2 + 2M\right)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

则有 $L = L_1 + L_2 + 2M$

2. 反串，如图(b)



$\mathcal{E}_1$	$2\rightarrow1$	$\mathcal{E}_2$	$3\rightarrow4$
$\mathcal{E}_{21}$	$1\rightarrow2$	$\mathcal{E}_{12}$	$4\rightarrow3$

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_{21}+\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_{12}=-(L_1+L_2-2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

则有 $L=L_1+L_2-2M$

3. 无互感线圈：$L = L_1 + L_2$

4. 无漏磁线圈： 顺串 $L=L_1+L_2+2\sqrt{L_1L_2}$

反串 $L=L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}$

5. 无感线圈：

无漏磁线圈，令 $L_1=L_2=L_0$

反串时即可得 $L = 0$

【例】两线圈间无漏磁

$$L_1 = \frac{N_1\Phi_1}{I_1} \quad L_2 = \frac{N_2\Phi_2}{I_2} \qquad M = \frac{N_1\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2\Phi_1}{I_1}$$

得 $M^2 = L_1L_2$ 或 $M = \sqrt{L_1L_2}$

【例】同轴电缆单位长度之电感

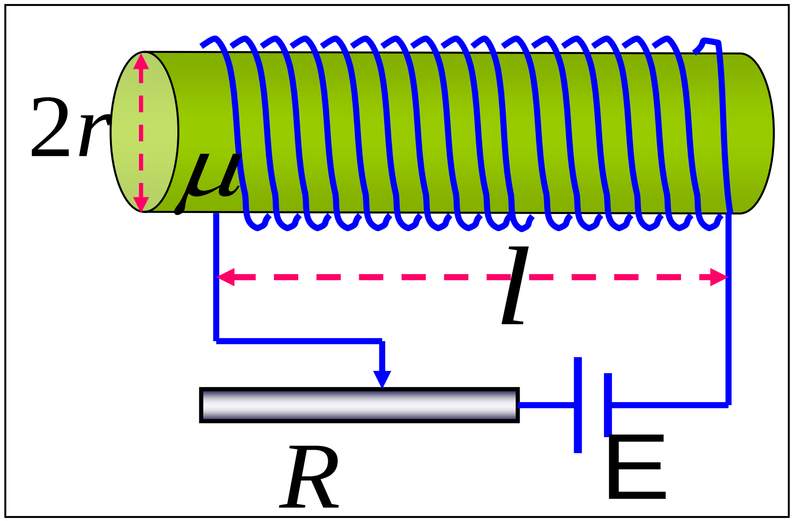
两柱面间 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(a \le r \le b\right)$

$$\Phi = \int_a^a Bl\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I\, l\ln\frac{b}{a} \qquad \Rightarrow L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

§ 12-6　磁场的能量

一　自感磁能

考虑下面的回路



接通电源，电流从 0 增加到 I

$$\mathscr{E} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI$$

$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}$

回路总电阻

$$\mathscr{E} I\mathrm{d}t - LI\mathrm{d}I = RI^2\mathrm{d}t$$

$$\int_0^t \mathscr{E}\, I\mathrm{d}t = \frac{1}{2}LI^2 + \int_0^t RI^2\mathrm{d}t$$

电源作功

电源反抗自感电动势作的功

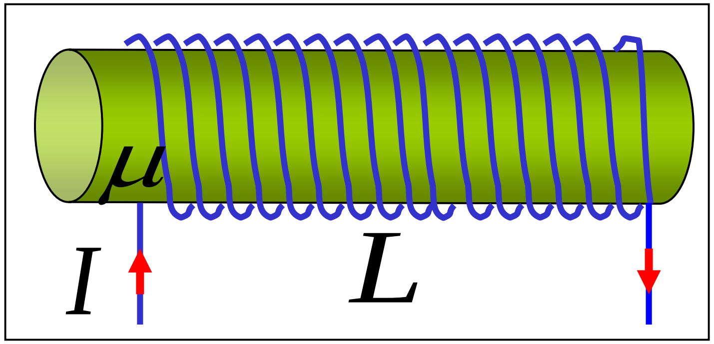
回路电阻所放出的焦耳热

自感线圈磁能

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}LI^2$$

二　磁能密度

◆ 自感线圈磁能 $\boxed{W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2}$



$$L=\mu n^2V\,,\qquad B=\mu nI$$

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu n^2V\left(\frac{B}{\mu n}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V=w_{\mathrm{m}}V$$

◆ 磁场能量密度 $\boxed{w_{\mathrm{m}}=\frac{B^2}{2\mu}=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}BH}$

矢量式

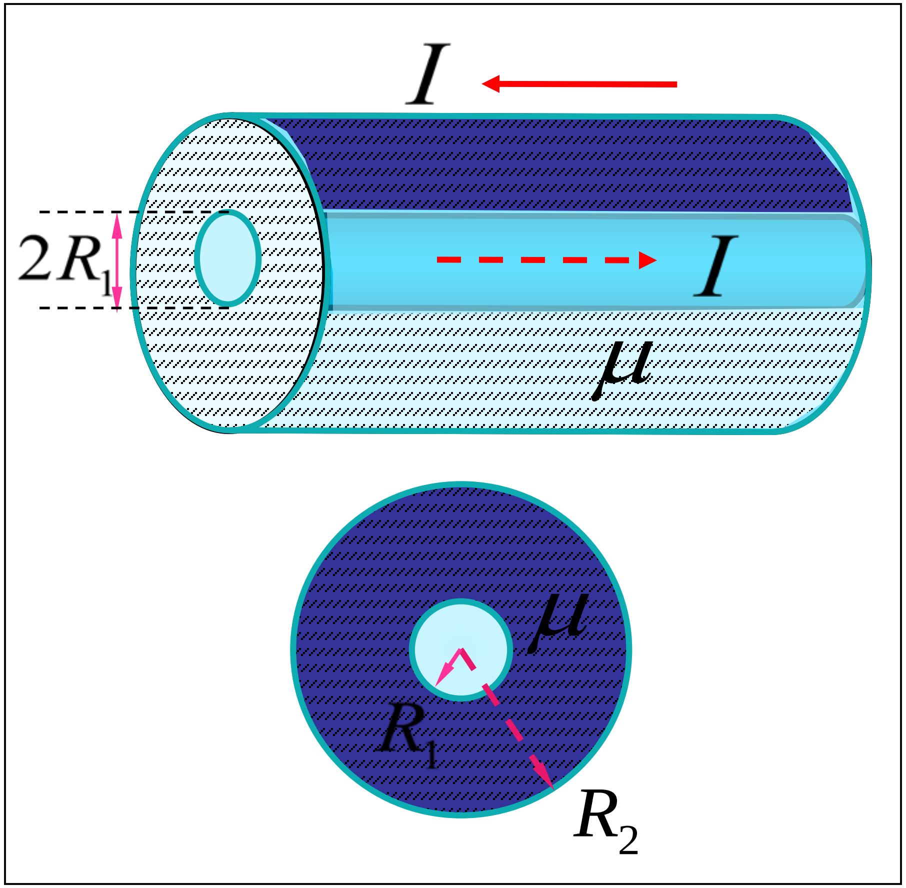
$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ 与电场能量密度 $w_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ 比较

◆ 磁场能量 $W_{\mathrm{m}}=\int_V w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\int_V\frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}V$

【例】 如图同轴电缆,中间充以磁介质,芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反. 已知 R_1, R_2, I, μ, 求单位长度同轴电缆的磁能和自感. 设金属芯线内的磁场可略.

【解】由安培环路定律可求 H

$$\begin{cases} r < R_1, & H = 0 \\ R_1 < r < R_2, & H = \dfrac{I}{2\pi r} \\ r > R_2, & H = 0 \end{cases}$$



则 $\quad R_1 < r < R_2$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$$

$$R_1 < r < R_2 \quad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \mathrm{d}V$$

单位长度壳层体积

$$\mathrm{d}V = 2\pi r \mathrm{d}r \cdot 1$$

$$W_{\mathrm{m}} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{4\pi r} \mathrm{d}r = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L I^2} \quad L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$