《高等数学》上 期末试卷（综合卷）

一．填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\cot x}=$________．

2. 设 $f(x)$ 可导，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-2x)}{x}=3$，则 $f'(1)=$________.

3. 设 $\begin{cases} x=t-\mathrm{e}^{-t} \\ y=t+\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

4.设 $f'(2)=3$，则函数 $y=f\left(2x^2\right)$ 在 $x=1$ 处的微分为________．

5. $\int_{-5\pi}^{5\pi}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{1-\sin^2 x}\right]\mathrm{d}x=$________.

二．选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）下列每小题给出 4 个答案，其中只有一个是正确的，请将正确答案的编号填入括号内。

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & x>0 \\ x+1 & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点间断是因为________.

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 点无意义　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 都不存在

C. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在　　D. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\ne f(0)$

2. 函数 $f(x)=\left(2-x^2\right)\left(4-x^2\right)\left(6-x^2\right)$ 有________ 个驻点.

A. 3 个　　B. 4 个

C. 5 个　　D. 6 个

3. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos 2x$ 是 $\sin^2 x$ 的________.

A. 高阶无穷小；　B. 同阶无穷小，但不是等价无穷小；

C. 低阶无穷小；　D. 等价无穷小

4. 函数 $f(x)$ 二阶可导，若 $f'(x_0)f''(x_0)<0$，则 ________.

A. $f(x_0)$ 是极小值；　　B. $f(x_0)$ 是极大值；

C. $f(x_0)$ 不是极值；　　D. 不能确定 $f(x_0)$ 是否极值

5. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，则 $\int \frac{f(\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ ________.

A. $F(\cot x)+C$　　　　B. $-F(\cot x)+C$

C. $F(\sin x)+C$　　　　D. $-F(\sin x)+C$

三. 计算题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题满分 6 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\le 0 \\ \ln(1+2x), & x>0 \end{cases}$，确定 a 和 b，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

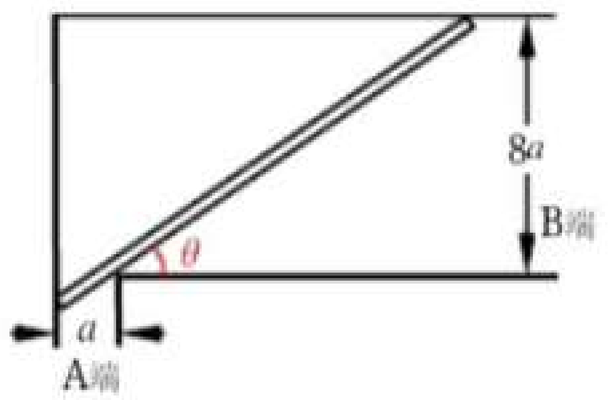
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t}{\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t}$.

3. 设 $y=y(x)$ 是方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=1$ 确定的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 求微分方程 $(1+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy-\tan x=0$ 的通解.

四.（本题 10 分） 求曲线 $y=x^2$ 与 $y=x^3$ 在第一象限内所围平面图形的面积，及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五.（本题 10 分） 若有一走廊 A 端宽为 a，B 端宽为 $8a$，垂直相交（如图），今有一根直线型的细竿，从 A 端进入，B 端移出（不能弯曲），试问细竿最长可为多少？



六.（本题 10 分） 求 $f(x)=x^6\mathrm{e}^{-x}$ $(x>0)$ 的单调区间与极值，并求出曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间.

七.（本题 10 分） 设 $\varphi(x)$ 有连续的二阶导数，$\varphi'(0)=0$，且满足

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{3}\int_0^x\left[\varphi''(t)+2\varphi(t)-6t\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t,$$ 求 $\varphi(x)$.

八.（本题 6 分） 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t \quad (x>0)$.

证明：若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调（增加或减少），则 $F(x)$ 也在 $(0,+\infty)$ 上单调（增加或减少）.