学院________ 专业、班________ 年级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《高等数学 II-I》期中评分参考

◉A卷
○B卷

2021 — 2022 学年 第 1 学期

开课学院：<u>数统</u> 课程号：<u>MATH10821</u> 考试日期：<u>2021.11</u>

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他　　考试时间：<u>120</u> 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设函数 $f(x)=x^2$， $f[\varphi(x)]=2^{2^x}$，则函数 $\varphi(x)=$（ D ）

A. $\log_2 2x$.　　B. x^2.　　C. $\log_2 x^2$.　　D. 2^x.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，则下列命题中正确的是（ B ）

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 x_n 收敛.

3. 当 $x\to 0$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 更高阶的无穷小量，则 α 的取值范围是（ B ）

A. $(2,+\infty)$.　　B. $(1,2)$.　　C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$.　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

4. 若函数 $f(x)$ 在原点的某邻域内有定义且在该邻域内满足 $|f(x)|\leqslant 1-\cos x$，则 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的（ C ）

A. 间断点.　　B. 连续但不可导点.

C. 可导点且 $f'(0)=0$.　　D. 可导点且 $f'(0)\neq 0$.

5. 设 $f(0)=0$，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是（ A ）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}f(1-\mathrm{e}^x)$ 存在.　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}f(1-\cos x)$ 存在.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}f(x-\sin x)$ 存在.　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}[f(2x)-f(x)]$ 存在.

6. 方程 $2^x=1+x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的实根个数为（ B ）

A. 2 个.　　B. 3 个.　　C. 4 个.　　D. 5 个.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

7. 若 $f(x)$ 在点 a 连续，那么 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x^2-a^2}=2$，则 $f(a)=$_________.0

8. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2$， $x_{n+1}=\sqrt{x_n+8}-\sqrt{x_n+3}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.1

9. 设函数 $y=\ln(1-2x)$， 则 $y^{(n)}\big|_{x=0}=$________________. $-2^n(n-1)!$

10. 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{x-2}$ 的水平渐近线方程为__________. $y=\pm\frac{\pi}{2}$

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

11．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$__________. $(\ln 2-1)\mathrm{d}x$

12．有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 $2\,\mathrm{cm/s}, -3\,\mathrm{cm/s}$．当底面半径为 $10\,\mathrm{cm}$，高为 $5\,\mathrm{cm}$ 时，圆柱体的表面积随时间变化的速率是__________. $40\pi\,(\mathrm{cm}^2/s)$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-2x}$.

【解】　**原式** $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-\ln\mathrm{e}^{2x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin^2 x+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}}{-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=-1.$$

14. 若函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x\leqslant 0,\\ b(1-x^2), & x>0\end{cases},$$

在 $x\in\mathbf{R}$ 上可导，求 $a,\ b$ 的值.

【解】　由已知可得

$$\lim_{x\to0^-}\mathrm{e}^{ax}=1,\quad \lim_{x\to0^+}b(1-x^2)=b,$$

因可导必连续，故有 $b=1$，即

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x\leqslant 0,\\ 1-x^2, & x>0\end{cases}$$

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导

$$f'_-(0)=a\mathrm{e}^{ax}\Big|_{x=0}=a=f'_+(0)=0.$$

即 $a=0$.

当 $x\neq0$ 时，$\mathrm{e}^{ax}, b(1-x^2)$ 均可导，因此 $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上可导.

15. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{t=0}$.

【解】　由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{e}^t+1, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4t\mathrm{e}^t+2t$，故由参数方程求导法则可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4t\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=2t,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2}{2\mathrm{e}^t+1},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{t=0}=\frac{2}{3}.$$

16．设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq0, x\neq\pm1,\\ 0, & x=0, x=\pm1\end{cases}$$

指出 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型.

【解】 间断点为 $x=0,\ x=\pm 1$，因为

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x(x^2-1)}=-1;$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x(x^2-1)}=1$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃间断点）.

因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x(x^2-1)}=\infty$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点（无穷间断点）.

因为 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x(x^2-1)}=\dfrac{1}{2}$, $f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（可去间断点）.

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

【解】 因 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，且

$$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0^-}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}$$

所以

$$-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e},$$

解得 $a=\dfrac{1-\mathrm{e}^2}{\pi\mathrm{e}}$.

18. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 更高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0}\left[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[8x+\alpha(x)\right]$$

可得 $f(1)-3f(1)=0$，故 $f(1)=0$. 又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+\alpha(x)}{\sin x}=8,$$

令 $t=\sin x$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}\\&=4f'(1),\end{aligned}$$

所以 $f'(1)=2$，由于 $f(x+5)=f(x)$，所以

$$f(6)=f(1)=0,\quad f'(6)=f'(1)=2,$$

故所求的切线方程为 $y=2(x-6)$，即 $2x-y-12=0$.

五、证明题与应用题（每小题 10 分，共 20 分）

19. 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，满足条件：

$$|f'(x)|\leqslant k|f(x)|(0<k<1),\ f(0)=0\text{，}$$

求证：$f(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$.

【证】 在 $|f'(x)|\leqslant k|f(x)|$ 中令 $x=0$，可得 $f'(0)=0$．于是 $\forall x\in(0,1)$，应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,x)\subset(0,1)$，使得

$$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x\text{，}$$

于是

$$|f(x)|=|f'(\xi_1)|x\leqslant k|f(\xi_1)|x\text{，}\tag{1}$$

在 $[0,\xi_1]$ 上再应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，使得

$$f(\xi_1)=f(0)+f'(\xi_2)\xi_1=f'(\xi_2)\xi_1\text{，}$$

于是 $|f(\xi_1)|=|f'(\xi_2)|\xi_1\leqslant k|f(\xi_2)|x$，代入（1）式可得

$$|f(x)|\leqslant k^2|f(\xi_2)|x^2\text{，}$$

再在 $[0,\xi_2]$ 上再应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi_3\in(0,\xi_2)$，使得

$$|f(x)|\leqslant k^3|f(\xi_3)|x^3$$

如此继续下去，$\exists\xi_n\in(0,\xi_{n-1})$，使得

$$|f(x)|\leqslant k^n|f(\xi_n)|x^n$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，必有界，即 $\exists M>0$，使得 $|f(\xi_n)|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$，

而 $0<k<1,0<x<1$，在上式右端令 $n\to\infty$ 得

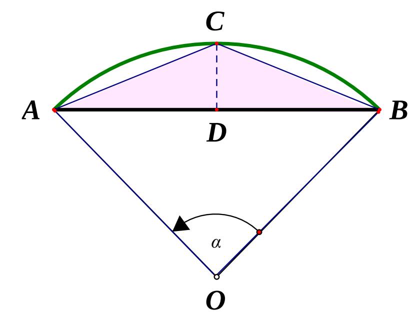
$$\lim_{n\to\infty}k^n|f(\xi_n)|x^n=0\text{，}$$

于是 $f(x)\equiv 0,0\leqslant x<1$．再由 $f\in C[0,1]$，得

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}0=0=f(1)\text{，}$$

即 $f(1)=0$．于是 $f(x)\equiv 0$，$x\in[0,1]$.

20. 设有一弓形，其弦长为 b，拱高为 h，半径为 R，又有等腰三角形 $\triangle ABC$ 内接于此弓形．当 R 不变，弓形的弧长趋于零时，求弓形面积与内接三角形面积之比的极限，并利用所得结果推出弓形面积的近似公式：



$$S\approx\frac{2}{3}bh.$$

附：$\alpha-\sin\alpha\sim\dfrac{1}{6}\alpha^3\ (\alpha\to 0)$

【解】 如图所示，$AB=b,CD=h,\angle AOB=\alpha$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bh=R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

弓形的面积

$$S_{弓形}=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)\text{，}$$

当弧长趋于零时，α 趋于零，于是，弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限为

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{S_{弓形}}{S_{\triangle ABC}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}{R^2(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha)}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha-\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{6}\alpha^3}{2\sin\frac{\alpha}{2}(1-\cos\frac{\alpha}{2})}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

由此可得弓形面积的近似公式为$S_{弓形}\approx\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}bh=\frac{2}{3}bh$.