考试教室　姓名　学号　年级　专业、班　学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《高等数学 II-I》期末评分参考

◉A卷　○B卷

2021 — 2022 学年 第 1 学期

开课学院：__数统__ 课程号：MATH10821　考试日期：__2022.01__

考试方式：○开卷　◉闭卷　○其他　　考试时间：__120__ 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设有数列$\{x_n\}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在是数列$\{x_n\}$有界的

A.必要而非充分条件.　　B.充分而非必要条件.

C.充要条件.　　D.既非充分也非必要条件.

2. 当$x\to 0$时，下列函数中是x的三阶无穷小的是

A. $x^3(e^x-1)$.　　B. $1-\cos x$.

C. $\sin x-\tan x$.　　D. $\ln(1+x)$.

3. 曲线$y=x\sin x+2\cos x\ (-\frac{\pi}{2}<x<2\pi)$的拐点是

A. $(0,2)$.　B. $(\pi,-2)$.　C. $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.　D. $(\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi}{2})$.

4. 若$f''(x)>0$，则下述关系正确的是

A. $f'(2)>f'(1)>f(2)-f(1)$.　　B. $f(2)-f(1)>f'(2)>f'(1)$.

C. $f'(2)>f(2)-f(1)>f'(1)$.　　D. $f'(1)>f(2)-f(1)>f'(2)$.

5. 曲线$y=x\ln(e+\frac{1}{x})$（$x>0$）的渐近线条数为

A. 0.　B. 1.　C. 2.　D. 3.

6. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，则

A. $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$.　　B. $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\int_0^{\pi}f(\cos x)dx$.

C. $\int_0^{\pi}f(\sin 2x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$.　　D. $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设$x=g(y)$是$f(x)=\ln x+\arctan x$的反函数，则$g'(\frac{\pi}{4})=$ ______. $\frac{2}{3}$

2. 曲线$y=x^2+x\ (x<0)$上曲率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是______________. $(-1,0)$

3. 广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=$ __________. $\frac{1}{2}\ln 2$

4. 已知$f(0)=1,\ f(2)=3,\ f'(2)=5$，则$\int_0^1 xf''(2x)dx=$ _________. 2

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin a+\sin(a+\frac{b}{n})+\cdots+\sin(a+\frac{n-1}{n}b)\right]=$ ______. $\frac{1}{b}[\cos a-\cos(a+b)]$

命题人：　组题人：　审题人：　命题时间：　教务处制

6. 对数螺线 $\rho=e^{2\theta}$ 上从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 的一段弧长为 $\underline{\quad\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)\quad}$.

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 求函数 $y=x^3-6x^2-15x+4$ 的单调区间与极值.

【解】 由题意知定义域为 $(-\infty,+\infty)$．令

$$y'=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)=0.$$

可得驻点为 $x=-1$ 和 $x=5$.

函数在各区间上的导数符号如下表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以，区间 $(-\infty,-1),(5,+\infty)$ 为增区间，$(-1,5)$ 为减区间，$x=-1$ 为极大值点，

极小值为 $y(-1)=12$， $x=5$ 为极小值点，极小值为 $y(5)=-96$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & x\geqslant 0,\\ e^x, & x<0,\end{cases}$$

求 $\int_0^2 f(x-1)\,dx$.

【解】 令 $x-1=t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x-1)\,dx&=\int_{-1}^1 f(t)dt\\&=\int_{-1}^0 e^x dx+\int_0^1\cos 2x dx\\&=\int_{-1}^0 e^x dx+\frac{1}{2}\int_0^1\cos 2x d(2x)\\&=e^x\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^1\\&=1-e^{-1}-\frac{1}{2}\sin 2.\end{aligned}$$

3. 求 $\int x(\arctan x)^2dx$.

【解】 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int x(\arctan x)^2dx&=\int\frac{(\arctan x)^2}{2}d(x^2+1)\\&=\frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x-\int\arctan x dx\\&=\frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x-(x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx)\\&=\frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x-x\arctan x+\frac{\ln(1+x^2)}{2}+C.\end{aligned}$$

4. 讨论 k 取不同值时，方程 $x-\frac{\pi}{2}\sin x-k=0$，在开区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内根的个数.

【解】 设 $f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$，则 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，由

$$f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x=0,$$

可解得 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$ 是 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内唯一驻点，且

当 $x\in(0,x_0)$ 时， $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调减少；

当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时， $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加；

因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取得最小值，最小值为

$$y_0=f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0.$$

又因为 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$，故在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $f(x)$ 的取值范围是 $[y_0,0)$，由此可得

当 $k\notin[y_0,0)$ 时，方程无根，当 $k=y_0$ 时，方程有唯一根，当 $k\in(y_0,0)$ 时，方程有两个根.

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1．设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0,\ f'(0)=2$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{\sin x-x\cos x}.$$

【解】令 $x-t=u$，则

$$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{\sin x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{\sin x-x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)}{\cos x-\cos x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x},$$

故可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{\sin x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=1.$$

2．设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

【解】　（1）因为

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

在积分区间 $[0,1]$ 上，$x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\leqslant 0$ 且不恒为零，所以

$$a_{n+1}-a_n<0,$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减少，当 $n\geqslant 2$ 时，因为

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n,$$

所以

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots).$$

（2）由（1）可得 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+2}\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$，因为 $\{a_n\}$ 单调减少且 $a_n>0$，所以

$$\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1,$$

由夹逼原理，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$

五、证明题与应用题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设有直线 $x=t\ (1\leqslant t\leqslant 3)$，它与曲线 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为 V_1，与曲线 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^3$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 V_2.

（1）求 $V_1(t)$ 与 $V_2(t)$；

（2）证明存在唯一的 $\xi\in(1,3)$，使得 $V_1(\xi)=2V_2(\xi)$.

【证】　（1）由题意当 $t\in[1,3]$ 时，可得

$$V_1(t)=\int_1^t \pi(\mathrm{e}^x)^2\mathrm{d}x-\pi\mathrm{e}^2(t-1)；$$

$$V_2(t)=\pi(\mathrm{e}^3)^2(3-t)-\int_t^3 \pi(\mathrm{e}^x)^2\mathrm{d}x.$$

（2）令 $F(t)=V_1(t)-2V_2(t)$，则

$$F(1)=-4\pi\mathrm{e}^6+2\pi\int_1^3\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x<-4\pi\mathrm{e}^6+2\pi\int_1^3\mathrm{e}^6\mathrm{d}x=0.$$

$$F(3)=\pi\int_1^3\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-2\pi\mathrm{e}^2>\pi\int_1^3\mathrm{e}^2\mathrm{d}x-2\pi\mathrm{e}^2=0$$

由闭区间连续函数的介值定理，在区间 $(1,3)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即 $V_1=2V_2$．又因为当 $t\in(1,3)$ 时

$$F'(t)=\pi\mathrm{e}^{2t}-\pi\mathrm{e}^2+2\pi\mathrm{e}^6-2\pi\mathrm{e}^{2t}>0，$$

即 $F(t)$ 在区间 $[1,3]$ 上严格单调. 故 $F(t)=0$ 在区间 $(1,3)$ 内只有一根.

2、某人由甲地开车出发，沿直线行驶，经过 2 h 到达乙地停止，一路通畅. 若开车的最大速度为 100 km/h .

（1）若汽车在 $t=t_0$ 达到最大速度，求速度 $v=v(t)$ 在 $t=t_0$ 的二阶 Taylor 展开式；

（2）求证：该汽车在行驶途中加速度的变化率的最小值不大于 $-200\ \mathrm{km/h^3}$.

【解】（1）设加速度为 $a=a(t)=v'(t)$.由题设可得　$v(t_0)=100, v'(t_0)=a(t_0)=0$.

由 Taylor 公式，可得

$$v(t)=v(t_0)+v'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}a'(\xi)(t-t_0)^2=100+\frac{1}{2}a'(\xi)(t-t_0)^2$$

其中 ξ 介于 t 与 t_0 之间.

（2）由题设可得 $v(0)=0, v(2)=0$,分别令 $t=0$ 与 $t=2$，得

$$v(0)=0=100+\frac{1}{2}a'(\xi_1)t_0^2，\ v(2)=0=100+\frac{1}{2}a'(\xi_2)(2-t_0)^2$$

其中 $0<\xi_1<t_0<\xi_2<2$.

（1）　若 $t_0=1$，则 $a'(\xi_1)=a'(\xi_2)=-200$；

（2）　若 $0<t_0<1$，则 $a'(\xi_1)=-\dfrac{200}{t_0^2}<-200$；

（3）　若 $1<t_0<2$，则 $a'(\xi_2)=-\dfrac{200}{(1-t_0)^2}<-200$；

于是 $\min a'(t)\leqslant\min\{a'(\xi_1),a'(\xi_2)\}\leqslant-200$.