考试教室　　姓名　　学号　　年级　　专业、班　　学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　　封　　线

重庆大学《高等数学 II-2》课程试卷

◉A卷　○B卷

2022 — 2023 学年　第 2 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10822　考试日期：2023.06

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他　　考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为非零向量，则与$\vec{a}$不垂直的向量是（ D ）

A. $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.　　B. $\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$.

C. $\vec{a}\times\vec{b}$.　　D. $\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$

2. 已知$f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^4}$，则(C)

A．$f_x'(0,0),f_y'(0,0)$都存在　　B．$f_x'(0,0)$存在但$f_y'(0,0)$不存在

C．$f_x'(0,0)$不存在但$f_y'(0,0)$存在　　D．$f_x'(0,0),f_y'(0,0)$都不存在

3. 设C为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其周长为$L$，则$\oint_C (bx+ay)^2 ds=$（ A ）

A. a^2b^2L.　　B. $(a+b)L$.　　C. $(a^2+b^2)L$.　　D. abL.

4. 设$f(x)$有连续的导数，$f(0)=0$，区域Ω由柱面$x^2+y^2=t^2(t>0)$和两平面$z=0,z=1$所围成，则$\lim\limits_{t\to0+}\frac{1}{t^4}\iiint_\Omega f(x^2+y^2)dv=$（ B ）

A. $\frac{\pi}{3}f'(0)$　　B. $\frac{\pi}{2}f'(0)$　　C. $\frac{2\pi}{3}f'(0)$　　D. $\frac{4\pi}{5}f'(0)$

5. 设$u_n=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（ C ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$都收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$都发散

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛

6.设$f(x,y)$为连续函数，则极坐标二次积分

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=$（ C ）

A. $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.

C. $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

7. 设$\vec{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量，则函数

命题人：　组题人：　审题人：　命题时间：　教务处制

$u=\dfrac{xy}{z}$ 在此处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数为______ $.\dfrac{4}{\sqrt{14}}=\dfrac{2}{7}\sqrt{14}$

8.函数 $f(x)=\arctan x$ 展开式为 x 的幂级数为_____ $.\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-1,1)$

(若为批注收敛域也给分)

9. 函数 $f(x,y)=2x-y+1$ 满足方程 $x^2+y^2=5$ 的条件极大值为_______.6

10.设 L 为逆时针圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分

$\int_L xdy-2ydx=$_______ . $\dfrac{3\pi}{2}$

11. 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_\Sigma (x+y)dS=$_______.0

12. 已知一阶线性方程 $y'+p(x)y=2xe^x$ 有特解 $y=x^2e^x$，则该微分方程的

通解为________ $.y=e^x(c+x^2)=ce^x+x^2e^x$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

13. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处切线和法平面方程.

解：曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在点 $(1,-2,1)$ 处法向量为 $\vec{n}_1=\{1,-2,1\}$，

曲面 $x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处法向量为 $\vec{n}_2=\{1,1,1\}$，

则 $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-3,0,3\}=3\{-1,0,1\}$ 为曲线的切向量，故

切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$

法平面方程为 $-(x-1)+0(y+2)+(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

14. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^n}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\dfrac{n2^n}{x^{n-1}}\right|=\dfrac{1}{2}|x|<1$ 知，幂级数在 $|x|<2$ 内收敛。

当 $x=-2$ 时，原级数 $=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n2^n}(-2)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}$ 收敛，

当 $x=2$ 时，原级数 $=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n2^n}\cdot 2^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，故收敛域为 $[-2,2)$。

当 $x=0$ 时，$S(0)=\dfrac{1}{2}$。

当 $x\neq 0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=\frac{1}{x}S(x)$$

$$S'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}x^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^{n-1}=\frac{1}{2-x},$$

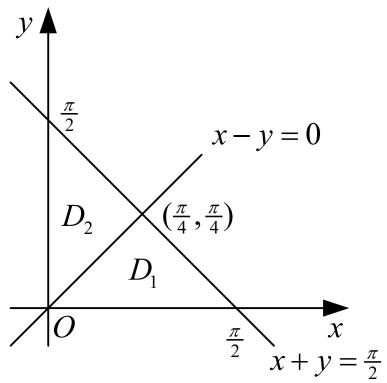
于是 $S(x)=\int_0^x\dfrac{dt}{2-t}=\ln 2-\ln(2-x)$

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{\ln 2-\ln(2-x)}{x}, & x\neq 0\end{cases}$

15. 求 $\iint_D|\sin(x-y)|dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

解：如图，用直线 $x-y=0$ 将区域 D 划分 D_1, D_2，则

$$\iint_D |\sin(x-y)|dxdy = \iint_{D_1} \sin(x-y)dxdy - \iint_{D_2} \sin(x-y)dxdy$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x-y)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x-y)dy$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x-y)\Big|_y^{\frac{\pi}{2}-y} dy - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x-y)\Big|_x^{\frac{\pi}{2}-x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin 2y)dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin 2x)dx$$

$$= 2\left[y + \frac{1}{2}\cos 2y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

16. 设 $f(u)$ 具有连续的二阶导数，函数 $z = f(e^y \sin x)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{3y}\sin x$，求 $f(u)$ 的表达式。

解：记 $u = e^y \sin x$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^y \cos x, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2y}\cos^2 x - f'(u)e^y \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^y \sin x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2y}\sin^2 x + f'(u)e^y \sin x$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{3y}\sin x$，可得

$$e^{2y} f''(u) = e^{3y}\sin x \Rightarrow f''(u) = u \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{2}u^2 + C_1 \Rightarrow f(u) = \frac{1}{6}u^3 + C_1 u + C_2$$

四、综合题（每小题 9 分，共 18 分）

17. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f(0)=0, f'(0)=0$，若使得曲线积分 $\int_C \left[2f(x) + 3f'(x) - xe^{-2x}\right] ydx - f'(x)dy$ 与路径无关，求函数 $f(x)$.

解：由已知 $2f(x) + 3f'(x) - xe^{-2x} = -f''(x)$

即 $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = xe^{-2x}$

对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = -2$

对应齐次方程的通解为 $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

因 $\alpha = -2$ 是特征方程的单根，方程的特解可设为 $f^*(x) = x(ax+b)e^{-2x}$，代入原方程可得 $a = -\frac{1}{2}, b = -1$，即特解为 $f^*(x) = -(\frac{1}{2}x^2 + x)e^{-2x}$

于是 $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{-2x}$。

由初始条件，可得 $C_1 + C_2 = 0, -C_1 - 2C_2 - 1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -1$

从而满足题设条件的 $f(x) = e^{-x} - e^{-2x} - (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{-2x}$.

18. 计算曲面积分 $I = \iint_\Sigma 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

解：取 Σ_1 为 xoy 面上被圆 $x^2 + y^2 = 1$ 所围部分的下侧，记 Ω 是由 Σ 与 Σ_1 所围的空间区域，则

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1)dxdy$$

$$- \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1)dxdy$$

由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint_\Omega (6x^2+6y^2+6z)dxdydz$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)dz$$

$$=12\pi\int_0^1[\frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)^2+\rho^3(1-\rho^2)]d\rho=2\pi$$

而 $\iint_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)dxdy=3\pi$

故 $I=2\pi-3\pi=-\pi.$

五、证明题（共 9 分）

19. 设 L 是圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$ 的逆时针方向，$f(x)$ 恒正且连续，试证

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi.$$

证：设 L 所围成的平面区域为 D，并注意 D 关于直线 $y=x$ 对称，先用格林公式，再用对称性。有

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D[f(y)+\frac{1}{f(x)}]dxdy$$

$$=\iint_D f(y)dxdy+\iint_D\frac{1}{f(x)}dxdy=\iint_D f(x)dxdy+\iint_D\frac{1}{f(x)}dxdy$$

$$=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\ge\iint_D 2dxdy=2\pi.$$

六、应用题（共 9 分）

20. 设物体占有区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 2Rz,R>0\right\}$，物体的体密度 $\mu=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求物体的质心.

解：物体的质量

$$m=\iiint\limits_\Omega\mu dv=\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=8\pi R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{5}\pi R^4$$

对 xoy 面的静力矩

$$M_{xy}=\iiint\limits_\Omega z\mu dv=\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{64}{5}\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{64}{35}\pi R^5$$

设质心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，由对称性知 $\overline{x}=\overline{y}=0,\overline{z}=\dfrac{M_{xy}}{m}=\dfrac{8}{7}R$。