学院＿＿＿ 专业、班＿＿＿ 年级＿＿＿ 学号＿＿＿ 姓名＿＿＿ 考试教室＿＿＿

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

命题人：
组题人：
审题人：
命题时间：
教务处制

重庆大学《高等数 II-1》课程试卷

◉A卷　○B卷

2022— 2023 学年　第 1 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10821　考试日期：2023-01

考试方式：○开卷　◉闭卷　○其他　　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，$\Leftrightarrow$表示充分必要条件，下列命题正确的是（　A　）

A. $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数

B. $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数

C. $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数

D. $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数

2. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}, x\in(0,1)$, 下列命题正确的是（　C　）

A. $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 为无穷大

B. $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 为无穷小

C. $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 非无穷大，且在 $(0,1)$ 上无界

D. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界

3. $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在以下哪个区间有界（　A　）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=0$, 则下列命题中正确的是（　C　）

A. $f(0)=0$ 且 $f_-'(0)$ 存在　　B. $f(0)=1$ 且 $f_-'(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f_+'(0)$ 存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f_+'(0)$ 存在

5. 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$, 存在 $\delta>0$, 下列命题中正确的是（　C　）

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单调增加

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单调减少

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(0)$

D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$, 有 $f(x)>f(0)$

6.已知反常积分 $I_1=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$，下列结论正确的是（　B　）

A. I_1 发散，I_2 发散　　B. I_1 收敛，I_2 收敛

C. I_1收敛，I_2发散　　　　D. I_1发散，I_2收敛

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

7. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{\tan 2x})}{3^x-1}=5$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ____ $10\ln 3$

8. 设 $S_n=\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$, $n=1,2,\cdots$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$.

9. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$, 其渐近线的条数为 $\underline{3}$.

10. 由方程 $x=y^y$ 确定了 y 为 x 的函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\dfrac{1}{x(\ln y+1)}, \text{或} \dfrac{1}{x}-\ln y}$.

11. 设星形线的方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}(a>0)$，则它的弧长为____ $6a$

12. 由双扭线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ 所围成的平面图形的面积 $S=$ $\underline{1}$.

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

13. 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\int_2^x\left[\int_t^2 e^{-u^2}du\right]\mathrm{d}t}{(x-2)^2}$.

解：当 $x\to2$ 时有 $\int_2^x\left[\int_t^2 e^{-u^2}du\right]\mathrm{d}t\to0,\ (x-2)^2\to0$.　　（2 分）

$$\therefore\lim_{x\to2}\frac{\int_2^x\left[\int_t^2 e^{-u^2}du\right]\mathrm{d}t}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{\int_x^2 e^{-u^2}du}{2(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{2}\left(-e^{-x^2}\right)=-\frac{1}{2e^4}.$$　　（5 分）

14. 设函数 $y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\left(1+t^2\right),\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2},\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

解：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2},\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$.　　（2 分）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1+t^2}\cdot\left(1+t^2\right)=2t.$$　　（1 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=2\left(1+t^2\right).$$　　（2 分）

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4t}{\frac{1}{1+t^2}}=4t\left(1+t^2\right).$$　　（2 分）

15. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$, 求 $f(0),f'(0),f''(0)$.

解：在 $x=0$ 的某邻域内有：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)$.　　（1 分）

若 $f(0)\neq0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\infty$, 矛盾。

$\therefore f(0)=0$.　　（2 分）

同理若 $f'(0)\neq0$, 则有：

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{1}{2}x^2}=\infty, \text{矛盾。}$$

$\therefore f'(0)=0$.　　（2 分）

故有：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f''(0)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{1}{2}x^2}=f''(0)=1$.　　（2 分）

16. 设 $f'(x)=e^{(x-1)^2}, f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

解：$I=\int_0^1 f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=f(1)-\int_0^1 xe^{(x-1)^2}dx$　　（3 分）

又 $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)\Rightarrow f(1)=\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1 e^{(x-1)^2}dx$　　（2 分）

于是 $I=\int_0^1 e^{(x-1)^2}dx-\int_0^1 xe^{(x-1)^2}dx=\int_0^1(1-x)e^{(x-1)^2}dx=\frac{1}{2}(e-1)$　　（2 分）

另解：$I=\int_0^1 f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=f(1)-\int_0^1 xe^{(x-1)^2}dx$

$=f(1)-\int_0^1(x-1+1)e^{(x-1)^2}dx=f(1)-\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx-\int_0^1 f'(x)dx$

$=f(1)-\frac{1}{2}\left[e^{(x-1)^2}\right]_0^1-\left[f(1)-f(0)\right]=\frac{1}{2}(e-1).$

再解：$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)=\left[(x-1)f(x)\right]_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)dx$（2+3）分

$=-\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx=-\left[\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1).$（2 分）

四、综合题（每小题 9 分，共 18 分）

17. (1) 证明 $x>0$ 时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.　(2) 计算积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\arctan\left(e^x\right)\left|\sin x\right|dx$.

解：(1) 令 $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$. 当 $x>0$ 时 $f(x)$ 可导。

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

$\therefore f(x)$ 在 $x>0$ 时恒为常数：$f(x)=C$.

特别的，当 $x=1$ 时有：$C=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}$.

故当 $x>0$ 时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.　　（4 分）

(2) $\because \int_{-\pi}^{0}\arctan\left(e^x\right)\left|\sin x\right|dx$

$\overset{x=-t}{=}-\int_{\pi}^{0}\arctan\left(e^{-t}\right)\left|\sin(-t)\right|d(-t)$

$=\int_0^{\pi}\arctan\frac{1}{e^t}\left|\sin t\right|dt.$

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}\arctan\left(e^x\right)\left|\sin x\right|dx.$

$=\int_{-\pi}^{0}\arctan\left(e^x\right)\left|\sin x\right|dx+\int_0^{\pi}\arctan\left(e^x\right)\left|\sin x\right|dx$

$=\int_0^{\pi}\arctan\frac{1}{e^t}\left|\sin t\right|dt+\int_0^{\pi}\arctan\left(e^x\right)\left|\sin x\right|dx$

$=\int_0^{\pi}\left[\arctan\frac{1}{e^t}+\arctan\left(e^t\right)\right]\left|\sin t\right|dt$

$=\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\sin t dt$

$=\pi.$　　（5 分）

18. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值与最小值。

解：由于 $f(x)=f(-x)$, 故只须求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最值。

当 $x>0$ 时，由 $f'(x)=\left(2-x^2\right)e^{-x^2}\cdot 2x=0,$

解得：$x=0$ 或者 $x=\sqrt{2}$.　　（3 分）

由于 $f(0)=0,\ f\left(\sqrt{2}\right)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-e^{-t}(2-t)\Big|_0^2+\int_0^2 e^{-t}d(-t)=1+e^{-2},$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt=-e^{-t}(2-t)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}d(-t)=1.$　　（4 分）

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有唯一极大值，即最大值 $1+e^{-2}$; 在 $x=0$ 处有最小值 0.

由于 $f(x)$ 是偶函数，

因此 $f(x)$ 在 R 上有最大值 $1+e^{-2}$, 有最小值 0.　　（2 分）

五、证明题（每小题 9 分，共 18 分）

19. 已知 $x_1=1, x_2=1+\dfrac{x_1}{x_1+1}, \cdots, x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}, \cdots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出此数列的极限.

证　$x_2=\dfrac{3}{2}>1=x_1$，假设 $x_n>x_{n-1}$，

$$x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{x_n+1}-1-\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(x_n+1)(x_{n-1}+1)}>0$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调增加，且 $1\le x_n<2$，故则数列 $\{x_n\}$ 收敛.（6 分）

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A=1+\dfrac{1}{1+A}$，解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.　　（3 分）

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且 $f(a)f(b)>0$, $f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$, 证明：任给 $\lambda\neq 0$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得：$f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0$.

证：不妨设 $f(a)>0$, 由条件则有：$f(b)>0$, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$.

由于 $f(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 上连续，

且有：$f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)f(b)<0$,

由介值定理，存在 $\eta_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$, $\eta_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$ 使得：$f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$.　　（4 分）

令 $F(x)=f(x)e^{-\lambda x}$, 则 $F(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上可导，且有：$F(\eta_1)=F(\eta_2)=0$.

因此存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)\cdot e^{-\lambda\xi}-\lambda f(\xi)\cdot e^{-\lambda\xi}=0$,

即是：　$f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0$.　　（5 分）