

第九章

§9-1 静电场中的导体

§9-2 电介质 电介质中的高斯定理

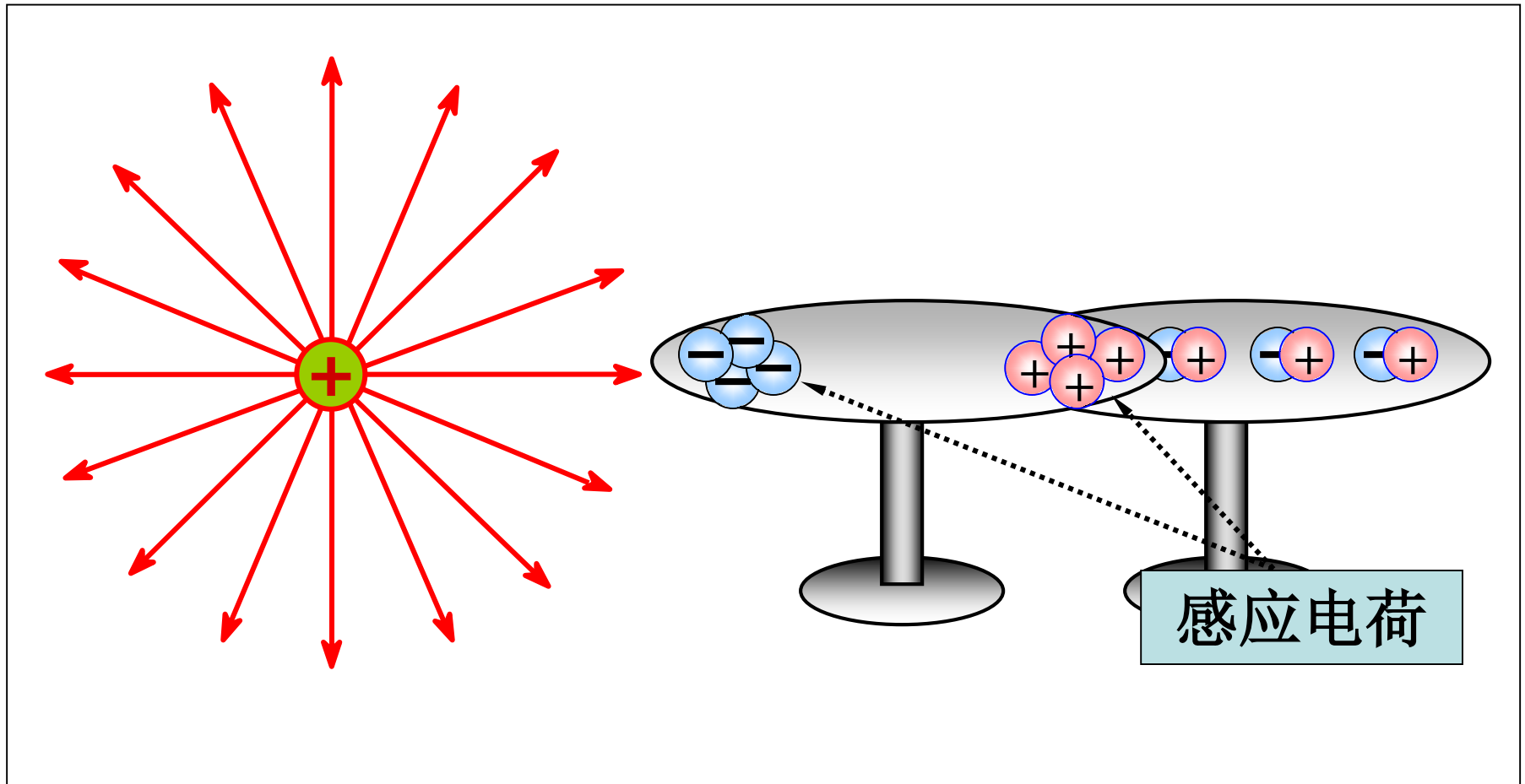
§9-3 电容器

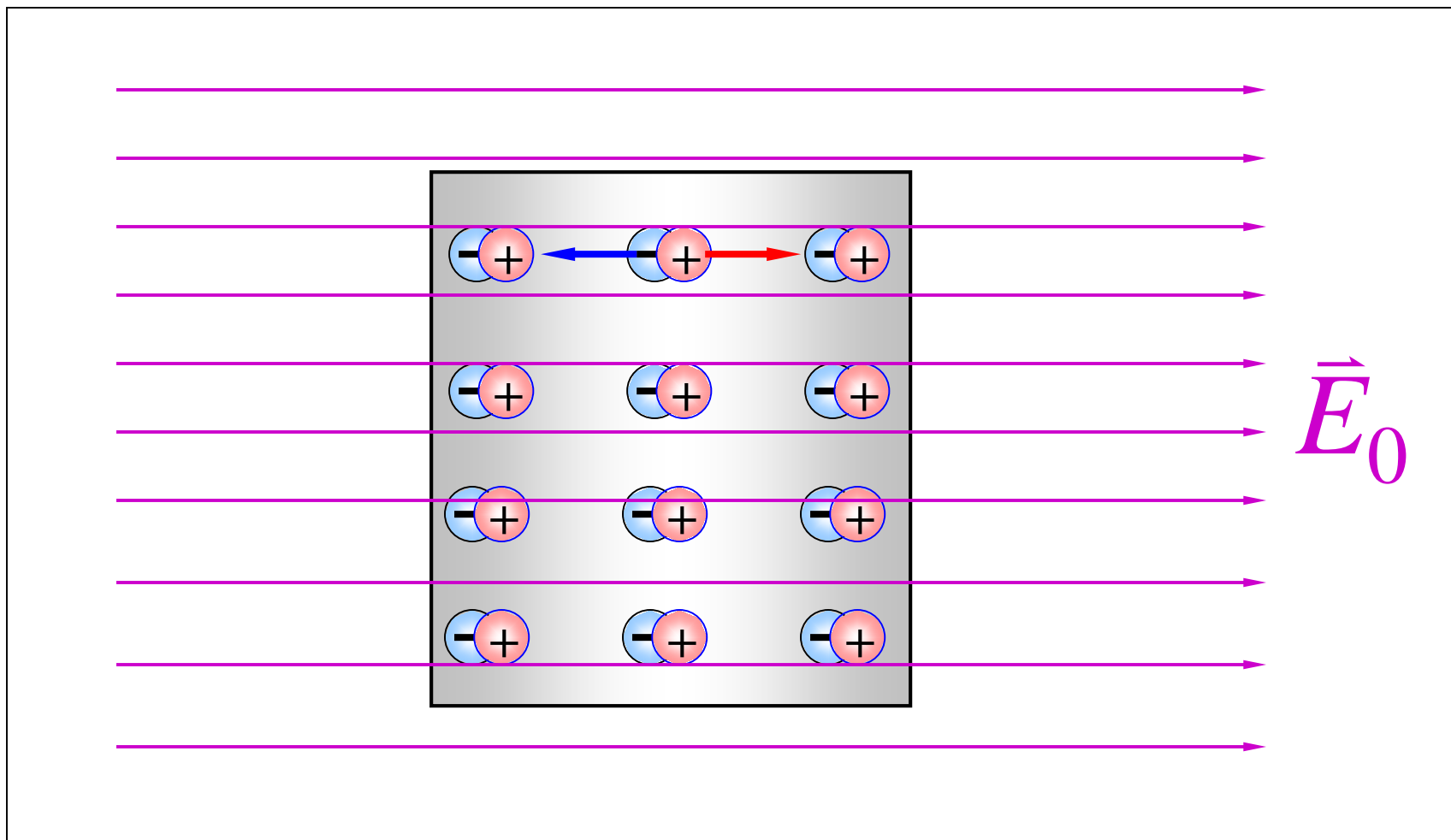
§8-4 静电场的能量

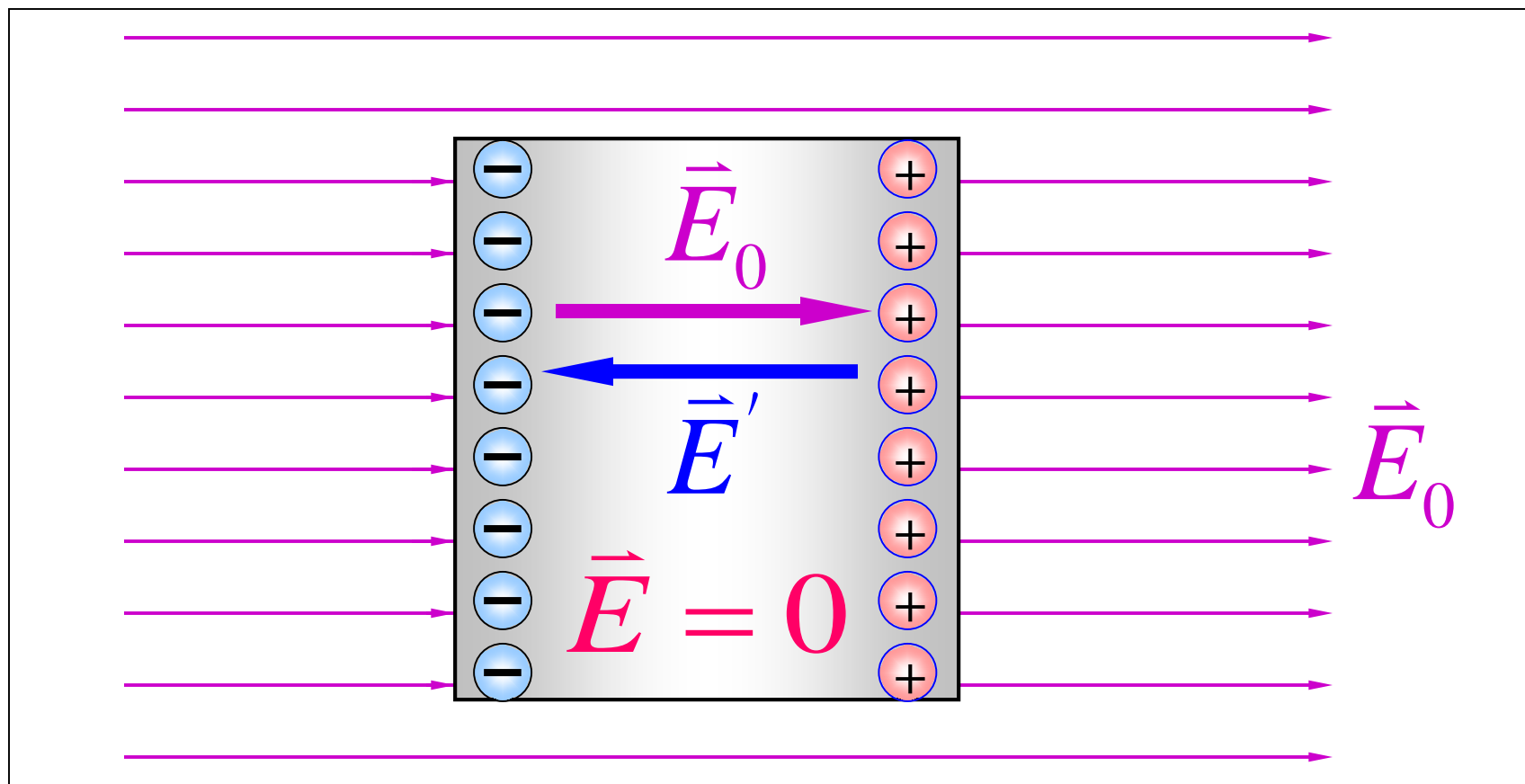
§ 9-1 静电场中的导体

静电感应 (electrostatic induction)

导体(conductor)与自由电子(free electron)







$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

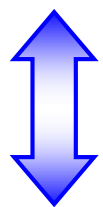
导体内电场强度

外电场强度

感应电荷电场强度

一、 导体静电平衡(Electrostatic equilibrium)条件

- (1) 导体内部任何一点处的电场强度为零;
- (2) 导体表面处的电场强度的方向, 都与导体表面垂直.



导体是等势体

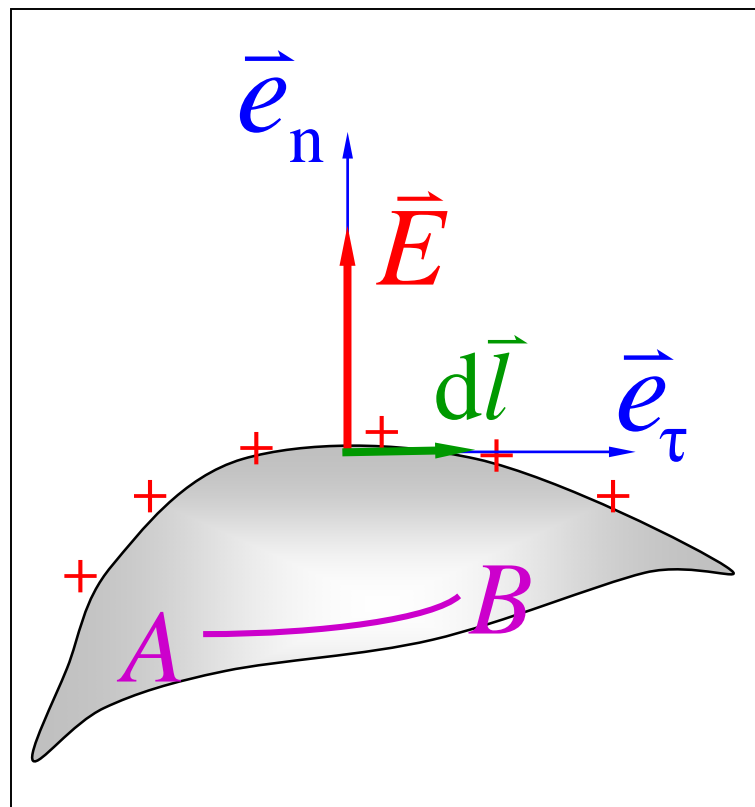
➤ 导体表面是等势面

$$\because \vec{E} \perp d\vec{l}$$

$$\therefore -\Delta U = \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

➤ 导体内部电势相等

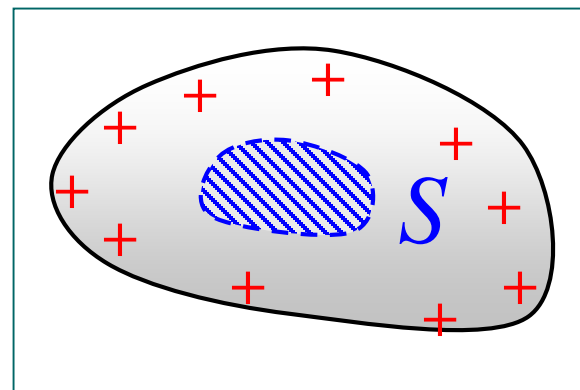
$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



1 实心导体 $\therefore \vec{E} = 0$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore q = 0$$



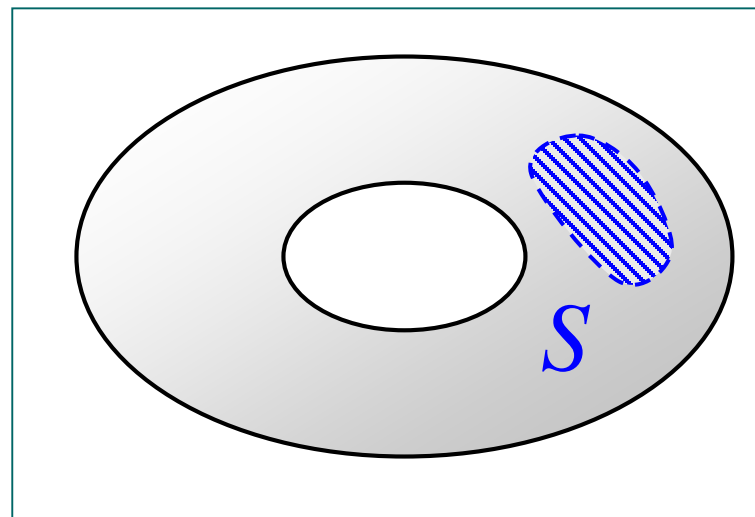
结论： 导体内部无电荷，电荷只分布在导体表面上。

2 有空腔导体

◆ 空腔内无电荷

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

电荷分布在表面上



内表面上有电荷吗？

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \sum q_i = 0$$

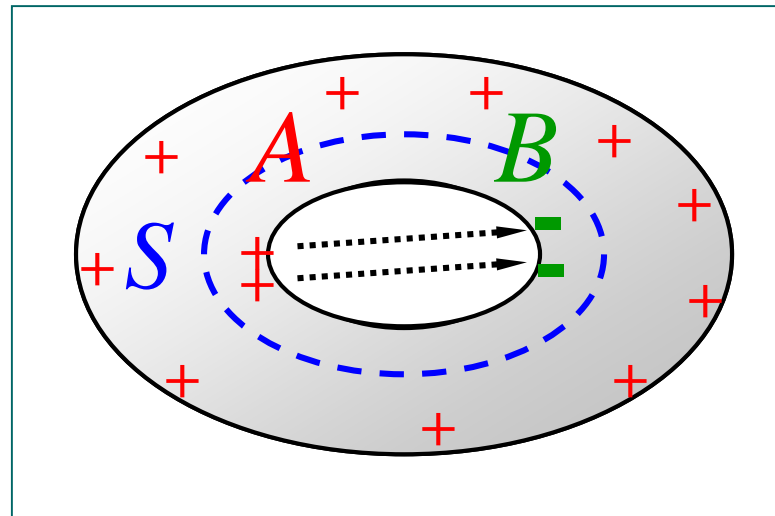
若内表面带电



$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

导体是等势体

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{所以内表面不} \text{带电}$$



结论 电荷分布在外表面上（内表面无电荷）

◆ 空腔内有电荷

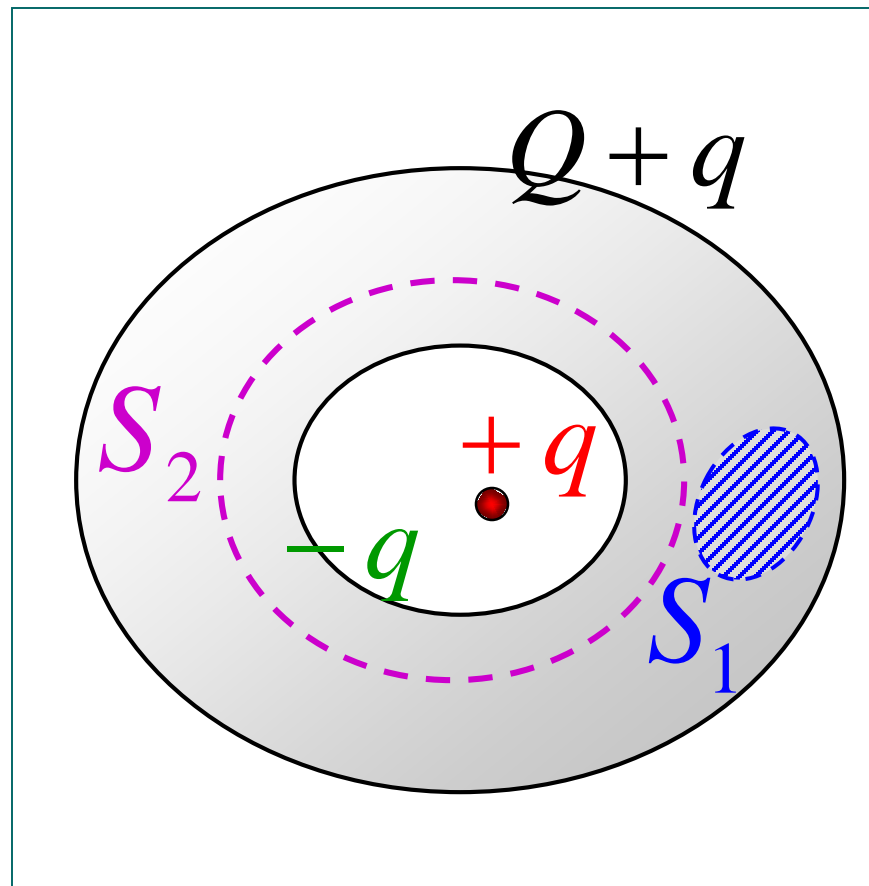
$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

电荷分布在表面上

内表面上有电荷吗？

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

$$q_{\text{内}} = -q$$



结论 当空腔内有电荷 $+q$ 时,内表面因静电感应出现等值异号的电荷 $-q$, 外表面有感应电荷 $+q$ (电荷守恒)。

3 导体表面电场强度与电荷面密度的关系

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

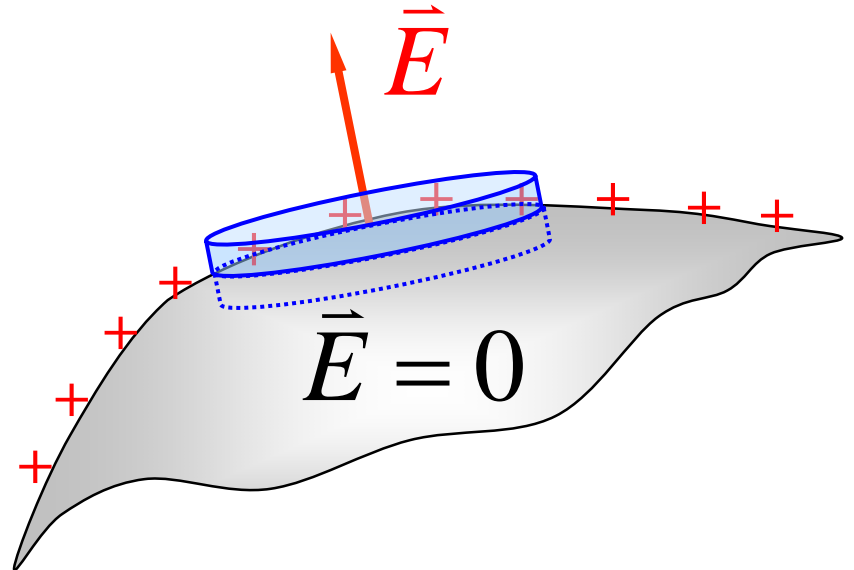
σ 为表面电荷面密度

$$E \cdot \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

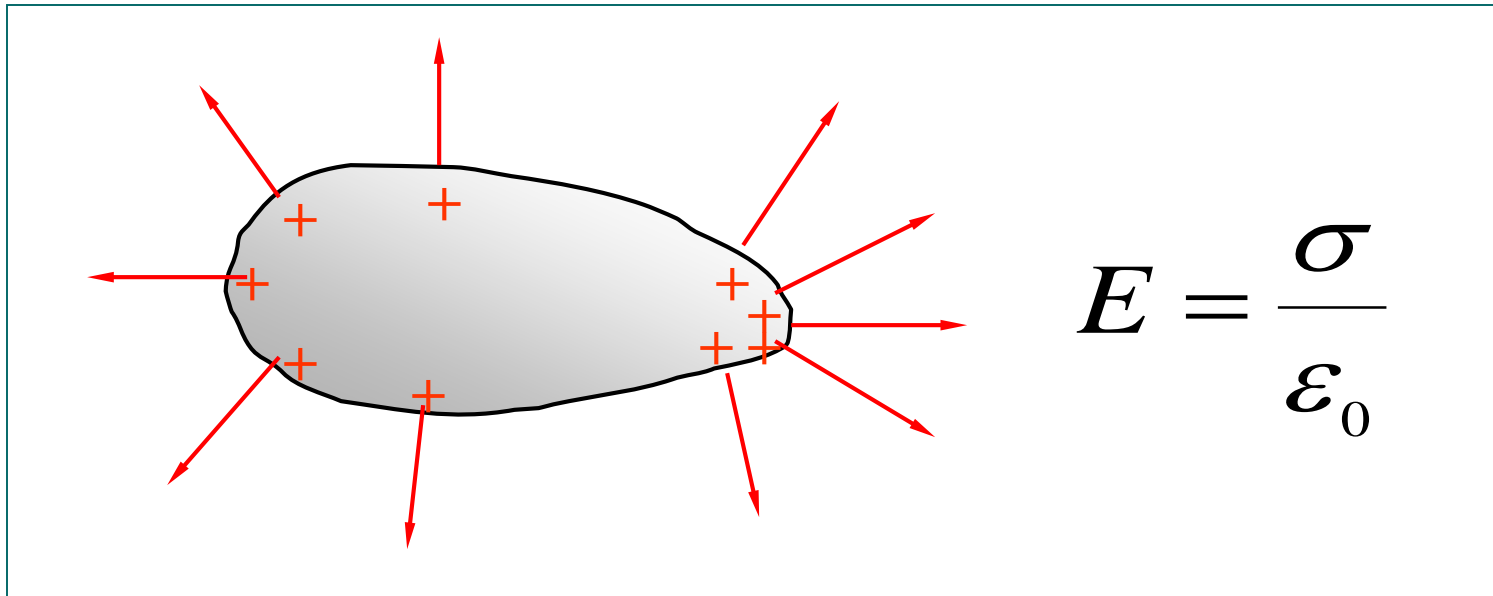
表面电场强度的大小与该表面电荷面密度成正比

作钱币形高斯面 S



4 导体表面电荷分布

$$\sigma \downarrow, E \downarrow; \quad \sigma \uparrow E \uparrow$$



注意 导体表面电荷分布与导体形状以及周围环境有关.

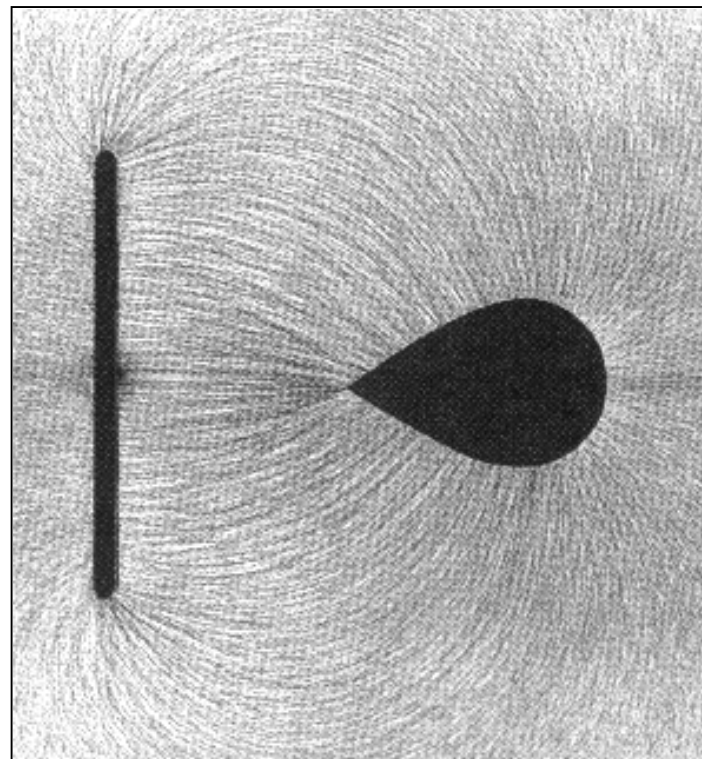
◆ 尖端放电现象

The phenomenon of point discharge

$$\sigma \uparrow E \uparrow$$

带电导体尖端附近电场最强

带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离而成为导体产生放电现象，即**尖端放电**。

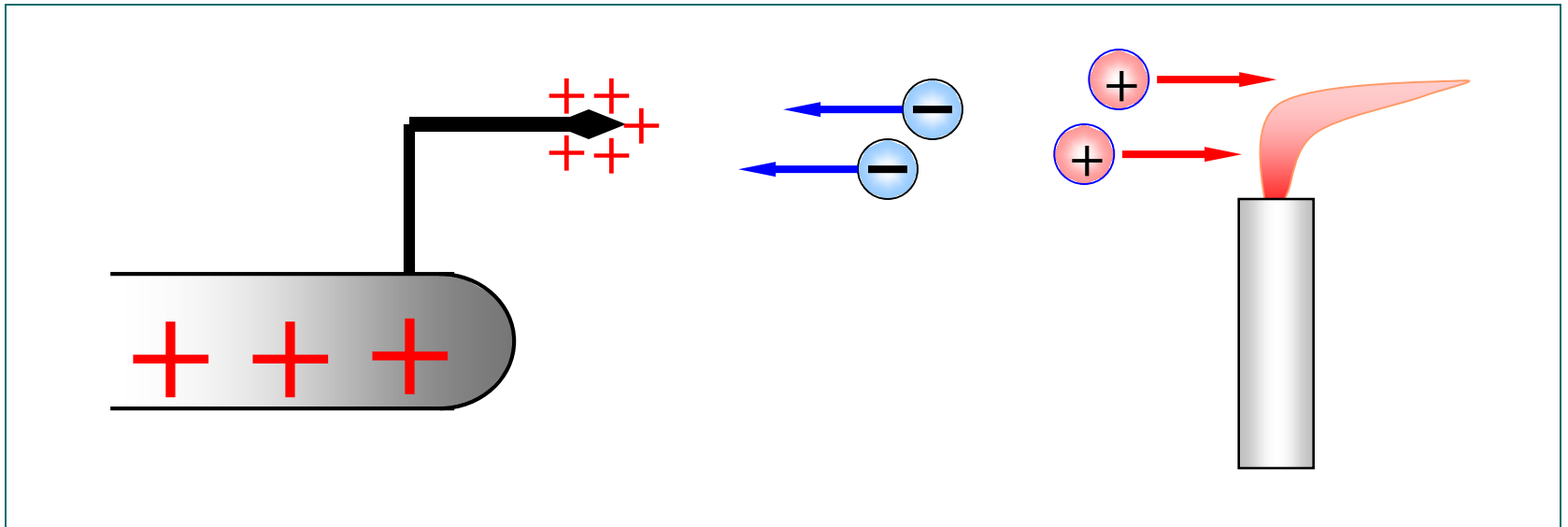


尖端放电现象的**利**与**弊**

尖端放电会损耗电能，还会干扰精密测量和对通讯产生**危害**。然而尖端放电也有很广泛的**应用**。

< 电风实验 >

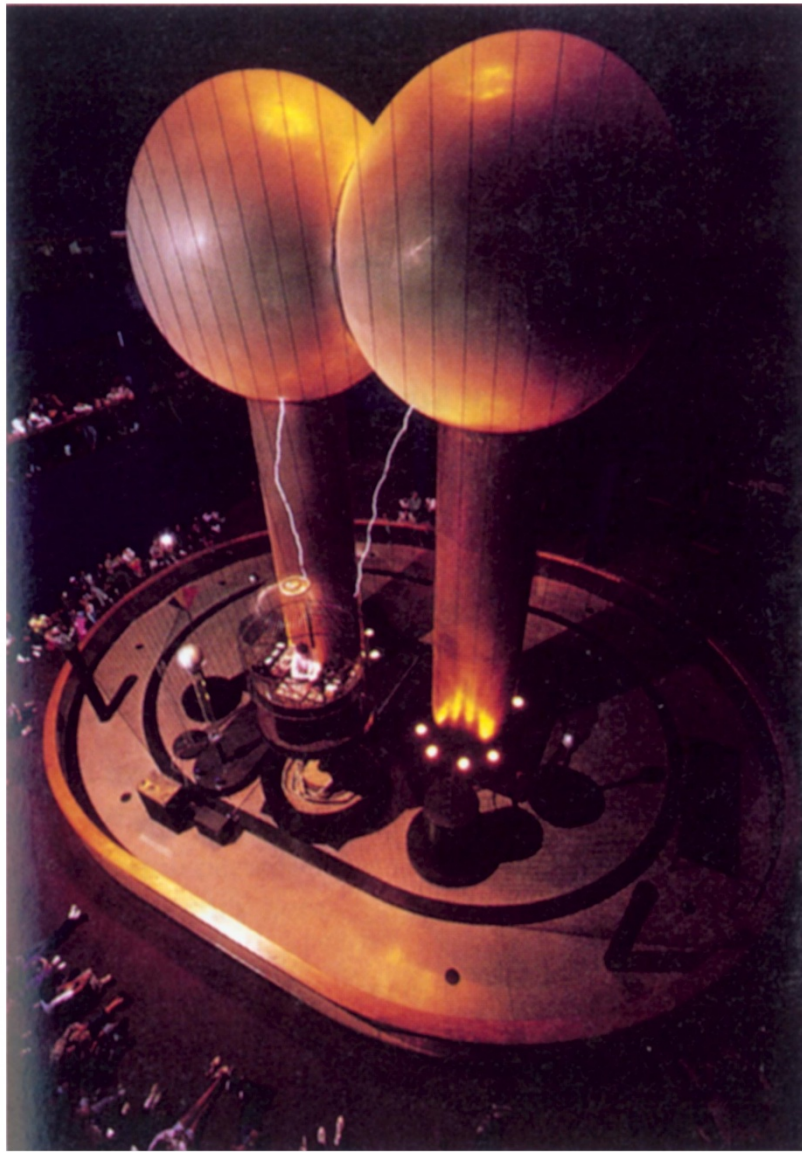
(electric wind)



< 避雷针 >

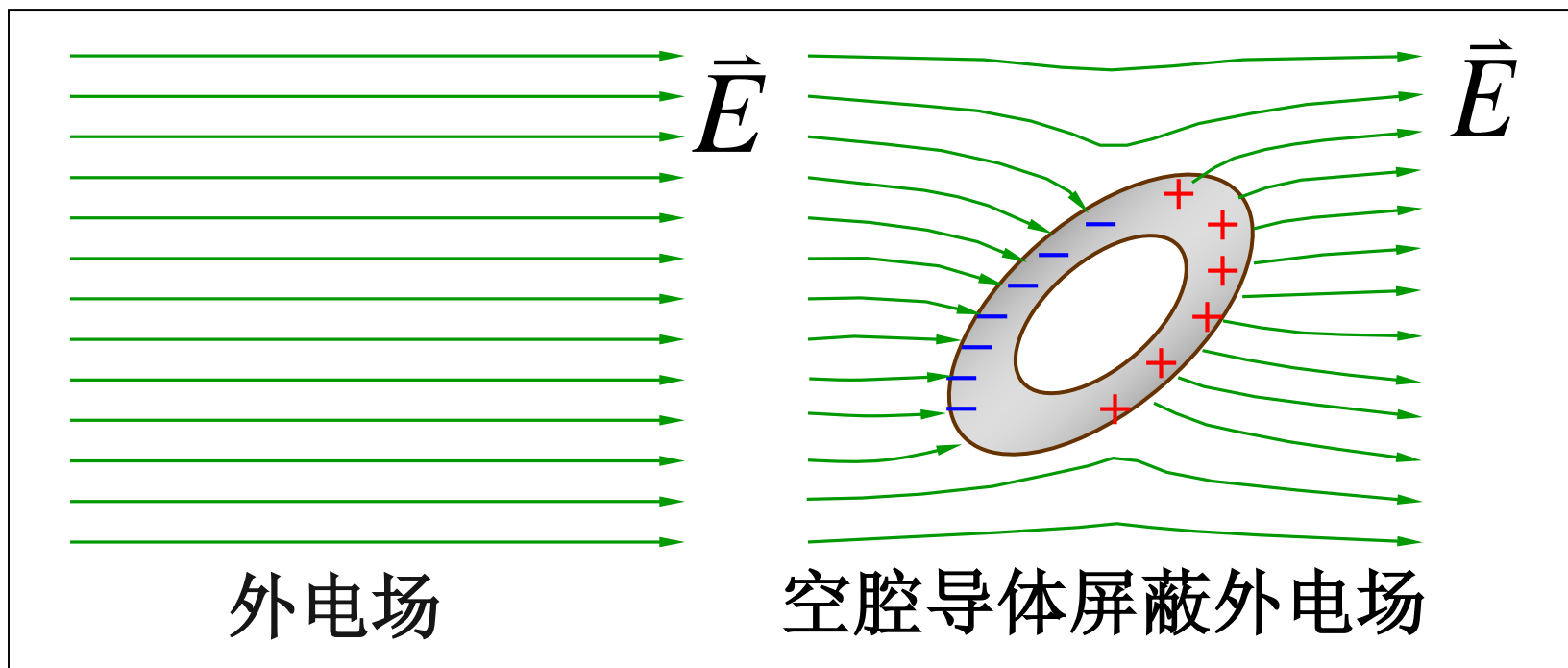
(lightning rod)

尖端放电现象的利用



二 静电屏蔽(electrostatic screening)

1 屏蔽外电场



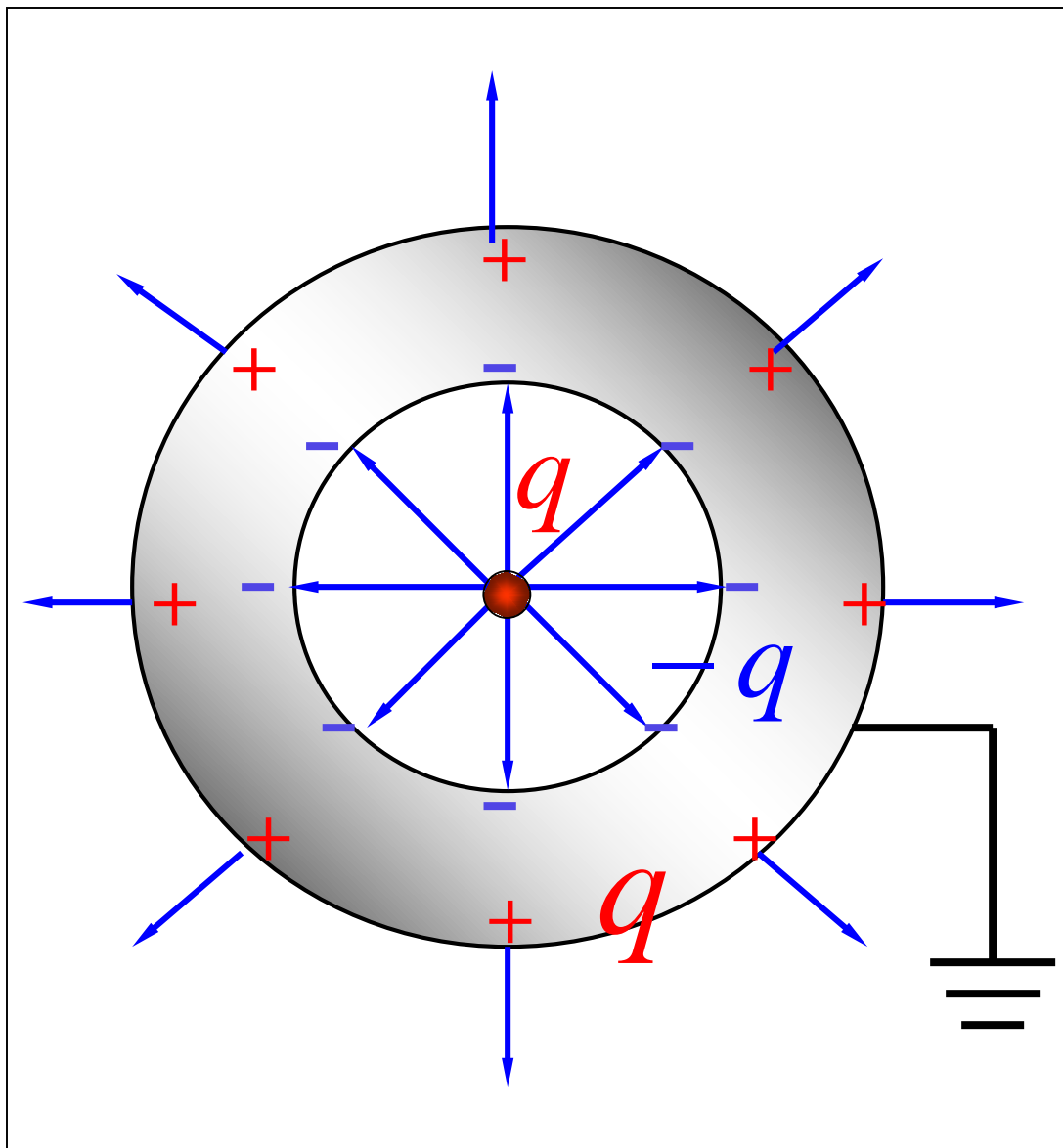
空腔导体可以屏蔽外电场，使空腔内物体不受外电场影响. 这时，整个空腔导体和腔内的电势也必处处相等.

2 屏蔽腔内电场

接地空腔导体
将使外部空间不受
空腔内的电场影响。

接地导体电势为零

问：空间各部
分的电场强度如何
分布？



例 有一外半径 $R_1 = 10\text{cm}$ 和内半径 $R_2 = 7\text{cm}$ 的金属球壳，在球壳内放一半径 $R_3 = 5\text{cm}$ 的同心金属球，若使球壳和金属球均带有 $q = 10^{-8}\text{C}$ 的正电荷，
问 两球体上的电荷如何分布？球心的电势为多少？

解 根据静电平衡的条件求电荷分布

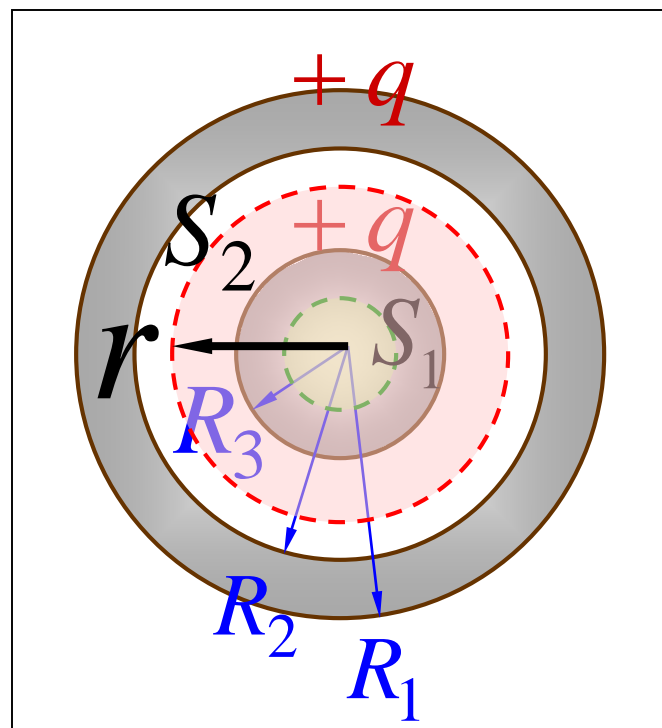
作球形高斯面 S_1

$$E_1 = 0 \quad (r < R_3)$$

作球形高斯面 S_2

$$R_3 < r < R_2, \quad \oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$



$$E_1 = 0 \quad (r < R_3)$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad (R_3 < r < R_2)$$

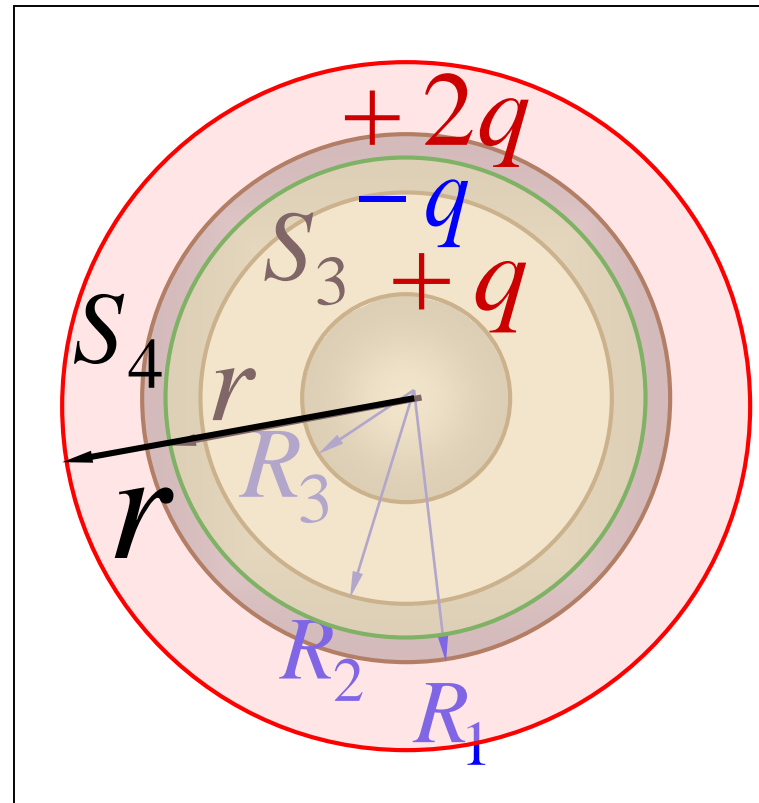
根据静电平衡条件

$$E_3 = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

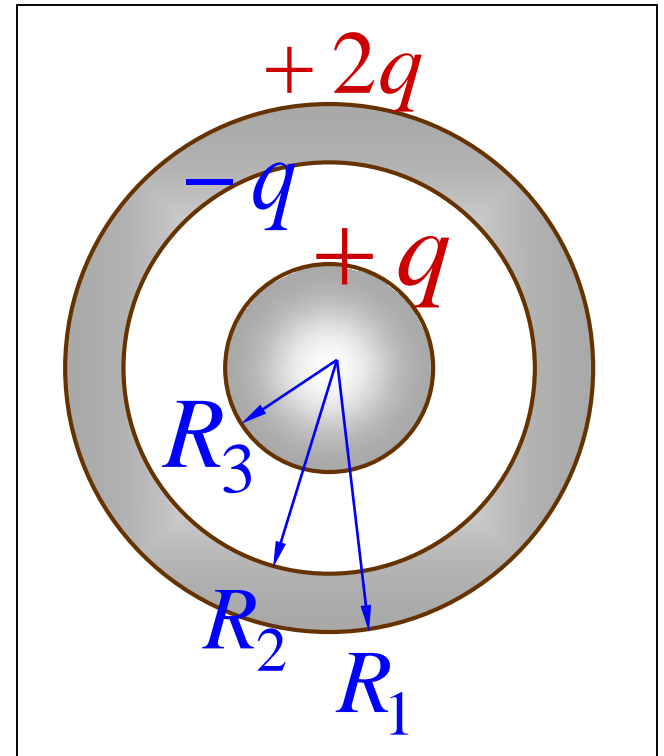
$$\oint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i / \varepsilon_0 = 0$$

$$r > R_1, \quad \oint_{S_4} \vec{E}_4 \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i / \varepsilon_0 = 2q / \varepsilon_0$$

$$E_4 = \frac{2q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r)$$



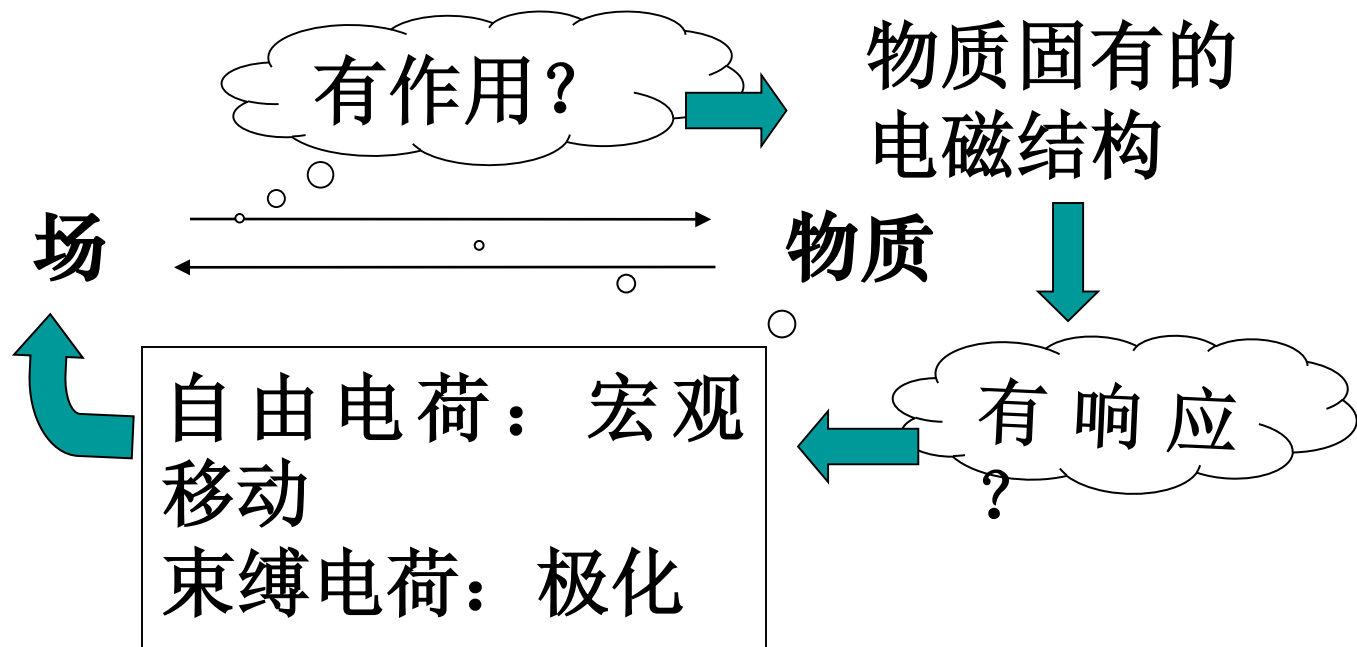
$$\left\{ \begin{array}{ll} E_1 = 0 & (r < R_3) \\ E_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} & (R_3 < r < R_2) \\ E_3 = 0 & (R_1 < r < R_2) \\ E_4 = \frac{2q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} & (R_1 < r) \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} V_o &= \int_0^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^{R_3} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{R_3}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}_4 \cdot d\vec{l} \\ V_o &= \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right) = 2.31 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

§ 9-2 电介质 电介质中的高斯定理

- 物质与场是物质存在的两种形式
- 物质性质：
 - 非常复杂（只能初步地讨论）
 - 要特别注意课程中讨论这种问题所加的限制



电介质(Dielectrics)

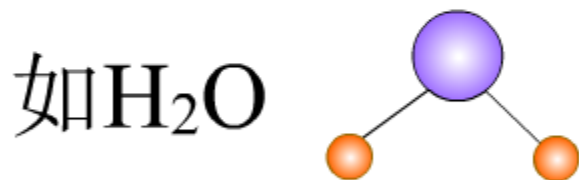
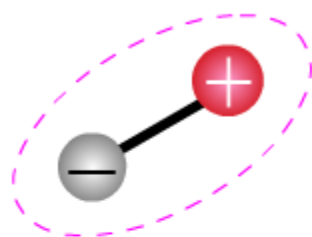
- 物质具有电结构
- 当物质处于静电场中
 - 场对物质的作用：对物质中的带电粒子作用
 - 物质对场的响应：物质中的带电粒子对电场力的作用的响应
- 导体、半导体和绝缘体有着不同的固有电结构
 - 不同的物质会对电场作出不同的响应，产生不同的后果，——在静电场中具有各自的特性。
 - 导体中存在着大量的自由电子——静电平衡
 - 绝缘体中的自由电子非常稀少——极化
 - 半导体中的参与导电的粒子数目介于两者之间.

一 电介质的极化(Polarization of dielectrics)

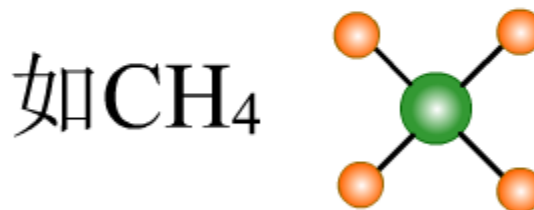
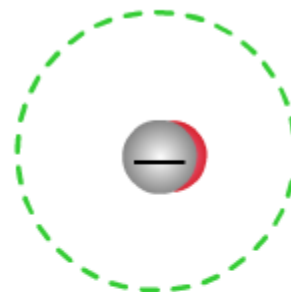
有极分子电介质：（水、有机玻璃等）

无极分子电介质：（氢、甲烷、石蜡等）

取向极化与位移极化



有极分子



无极分子

两类电介质分子

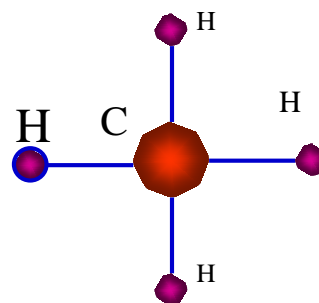
无极分子 —— $q = 0, p = 0$.



$$E = 0, p = 0$$



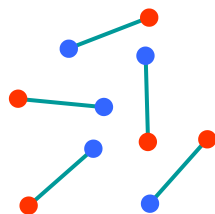
$$E \neq 0, p \neq 0$$



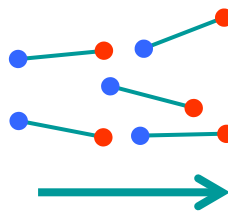
有极分子 —— $q = 0, p \neq 0$



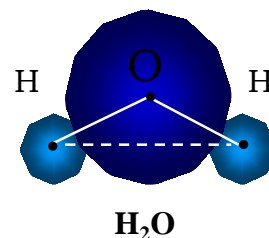
$$E = 0, p \neq 0$$



$$E = 0, \Sigma p = 0$$

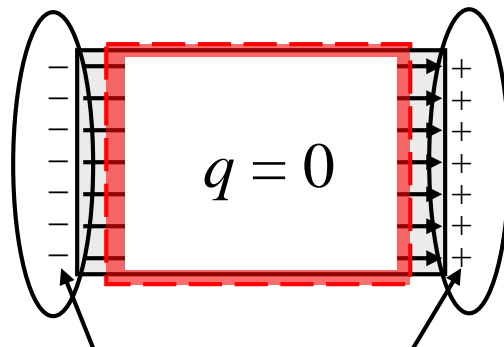
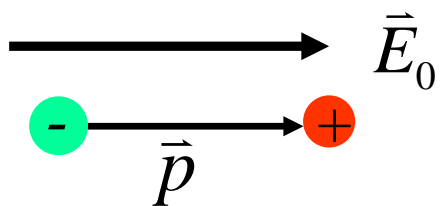


$$E \neq 0, \Sigma p \neq 0$$



有极分子可以看做是一个电偶极子。

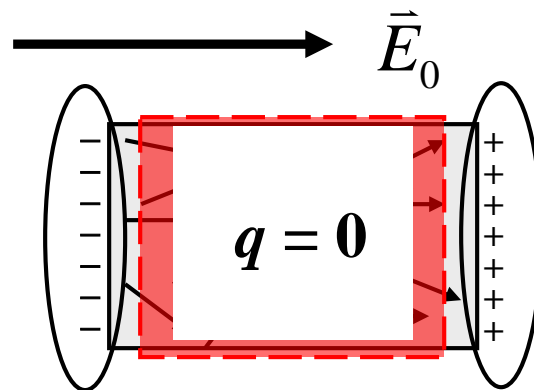
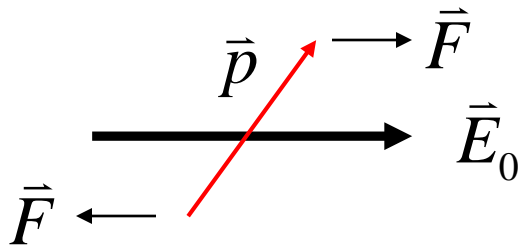
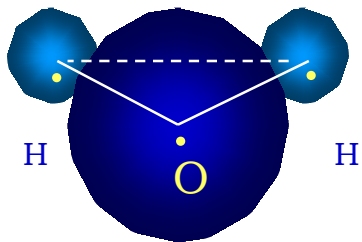
对无极分子：位移极化



极化电荷

极化电荷是
束缚电荷。

有极分子：取向极化



$$\bar{P} = \frac{\sum \bar{p}}{\Delta V}$$

\bar{P} : 电极化强度 \bar{p} : 分子偶极矩

\bar{P} 的单位: $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$

为了简化计算，假定每个分子的偶极矩都是 \bar{p} ，即用平均值代替个体值，这对大量分子进行讨论时是可以的。

在均匀介质内部，任作一个封闭曲面，面内电荷为0。即极化电荷只分布在非均匀介质中或介质的分界面上。

极化电荷

$$q'(\sigma', \rho')$$

极化后果：从原来处处电中性变成出现了宏观的极化电荷

- 可能出现在介质表面（均匀介质）面分布
- 可能出现在整个介质中（非均匀介质）体分布

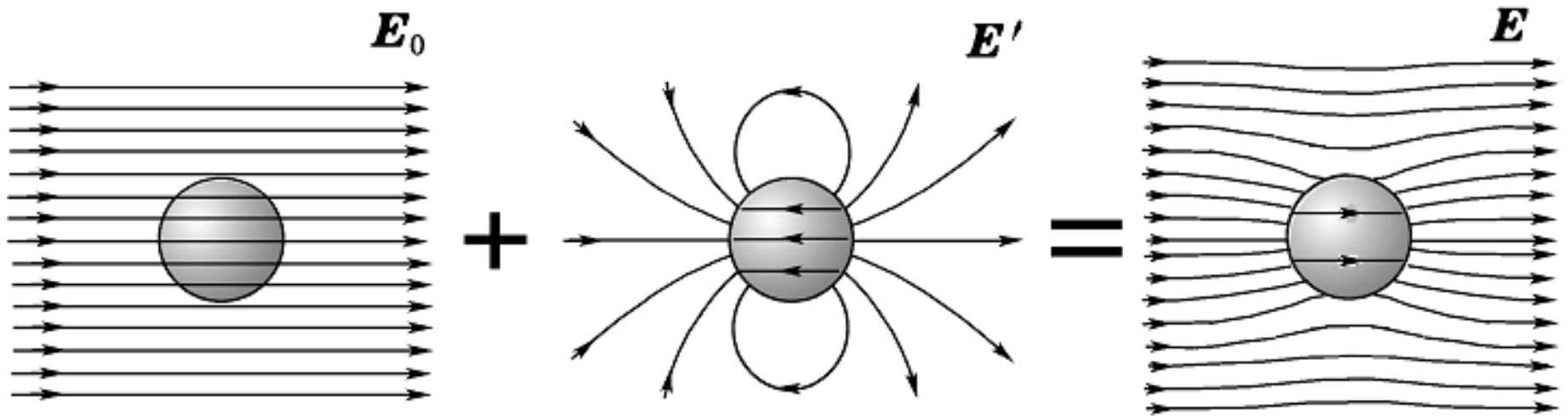
极化电荷会产生电场——附加场（退极化场）

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

The diagram illustrates the equation $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. A light blue box on the left labeled '外场' (External field) has a line pointing to \vec{E}_0 . A light blue box on the right labeled '极化电荷产生的场' (Field produced by polarization charges) has a line pointing to \vec{E}' .

- 极化过程中：极化电荷与外场相互影响、相互制约，过程复杂——达到平衡（不讨论过程）
- 平衡时总场决定了介质的极化程度

退极化场 E'



附加场 E' :

- 在电介质内部: 附加场与外电场方向相反, 削弱
- 在电介质外部: 附加场与外电场方向相同, 加强

二 电介质中的电场

当介质均匀地充满电场后，介质中任一点的合电场强度 E 为原来真空中的电场强度 E_0 的 ϵ_r 分之一，即

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

ϵ_r 相对介电常数

真空中点电荷在空间的场强为 $\vec{E}_0 = \frac{q_0 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

因此点电荷在均匀介质中场强为 $\vec{E} = \frac{q_0 \vec{r}}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^3}$

设此时极化电荷为 q' ，则极化电荷产生的场强为

$$\vec{E}' = \frac{q' \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

介质中的总场强应为两部分场强之和： $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

$$\text{即：} \frac{q_0 \vec{r}}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^3} = \frac{q' \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{q_0 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{q_0}{\epsilon_r} = q' + q_0 \Rightarrow q' = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} q_0$$

$$\because \epsilon_r \geq 1, \quad \therefore q' = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} q_0 \leq 0$$

定义 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ 为介质的介电常量

$$\vec{E} = \frac{q_0 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r^3} = \frac{q_0 \vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}$$

三 电介质中的高斯定理

- 有介质时，场和真空中的场有何异、同？
- 库仑定律+叠加原理 仍成立
- 静电场性质（有源、无旋）？——不变
为什么？
因为极化电荷也是静电荷（只是不能动）

介质中：

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s q$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s (q_0 + q')$$

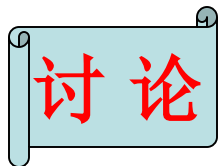
$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{(q_0 + q')}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q_0}{\varepsilon}$$

$$\oiint_S \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_0$$

定义 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ 电位移矢量

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

一介质中的高斯定理



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S\text{内}} q_0$$

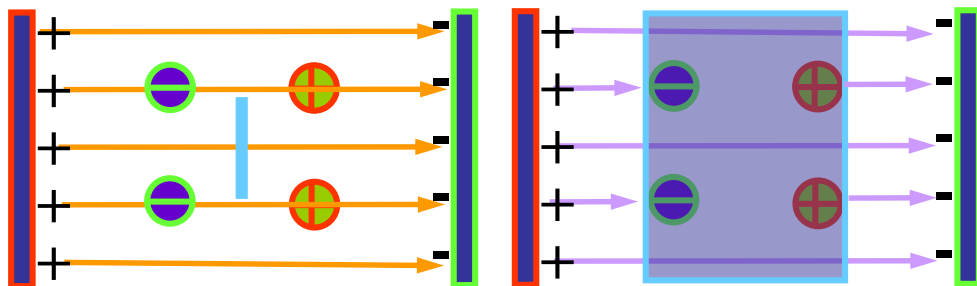
1. 高斯定理

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho_0 dV$$

2. 无限大各向同性均匀介质中

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{或} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

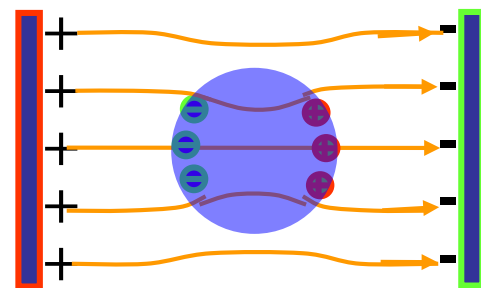
3. \vec{E} 线与 \vec{D} 线



(a) 电位移线

(b) 电场强度线

两种电力线



非均匀介质的 \vec{D} 线

§ 9-3 电容器(Capacitor)

1、孤立导体的电容

与热容量相似，不同的物体使其本身增加单位电势差所需要的电量也不一样。

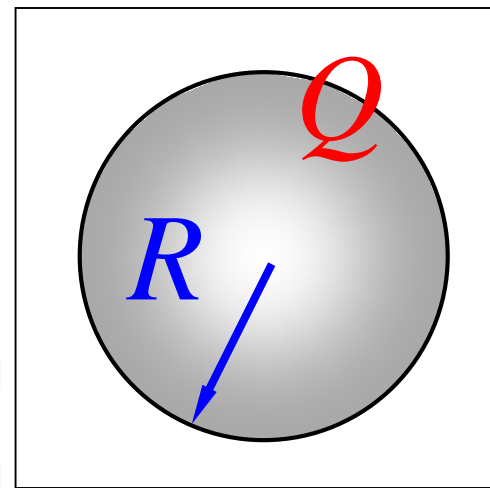
定义：导体所带电量与其电势的比值定义为该导体的电容。

单位 $1\text{F} = 1\text{C}/\text{V}$

$1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$

$1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$

$$C = \frac{Q}{V}$$



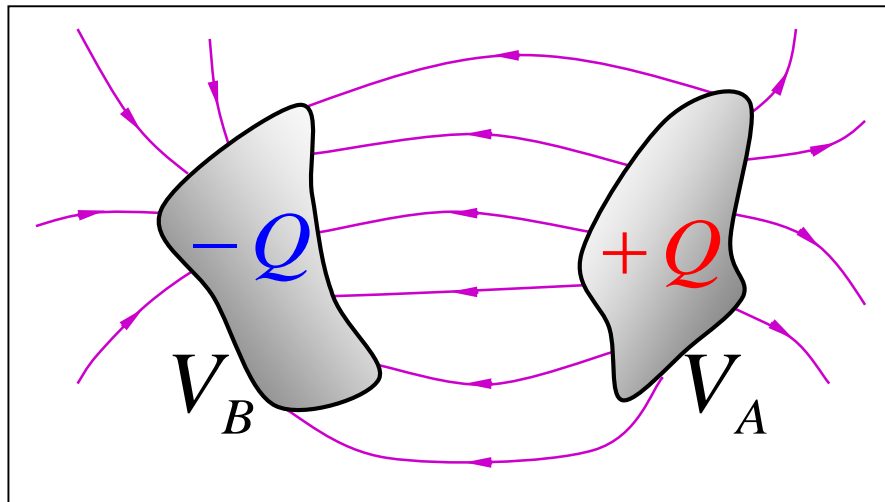
例如 孤立的导体球的电容

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \left(V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

◆ 地球 $R_E = 6.4 \times 10^6 \text{m}$, $C_E \approx 7 \times 10^{-4} \text{F}$

2、电容器

孤立导体的电势是相对于无穷远来说的，其电能无法应用。要利用导体中电荷储存的能量，就要有放电的地方。



如果有两个导体，它们分别带有等量而异号的电荷。这个系统储存的电势能，就可以通过两导体之间的放电而释放，这个导体系统就叫做电容器。

定义：导体所带电量与两导体的电势差的比值定义为该电容器的**电容量，简称电容**。也可以这样说，电容器的电容，就是两导体之间的电势差增加1个单位时，导体所需要增加的电量。

电容器电容的定义

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{U}$$

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电容的大小仅与导体的形状、相对位置、其间的电介质有关，与所带电荷量无关。

3、电容器电容的计算

步骤

- 1) 设两极板分别带电 $\pm Q$;
- 2) 求 \vec{E} ;
- 3) 求 U ;
- 4) 求 C .

一 常见电容器

➤ 平板电容器

(1) 设两导体板分别带电 $\pm Q$

(2) 两带电平板间的电场强度

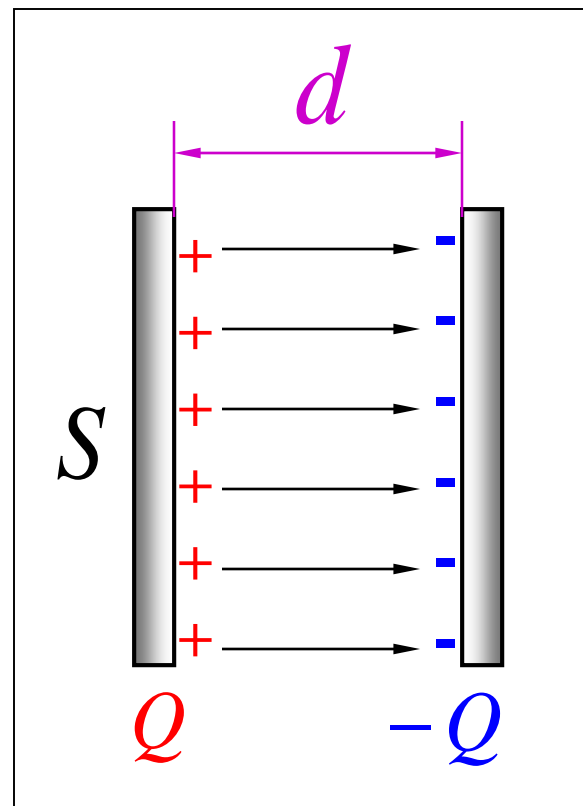
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

(3) 两带电平板间的电势差

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

(4) 平板电容器电容

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{S}{d}$$



【例】 平行平板电容器的极板是边长为 l 的正方形，两板之间的距离 $d = 1\text{mm}$. 如两极板的电势差为 100V ，要使极板上储存 $\pm 10^{-4}\text{C}$ 的电荷，边长 l 应取多大才行.

解
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{10^{-4}}{100} \text{F} = 10^{-6} \text{F}$$

$$S = l^2$$

$$l = \sqrt{\frac{Cd}{\varepsilon_0}} = 10.6\text{m}$$

➤ 圆柱形电容器

(1) 设两导体圆柱面单位长度上分别带电 $\pm \lambda$ $\lambda = Q/l$

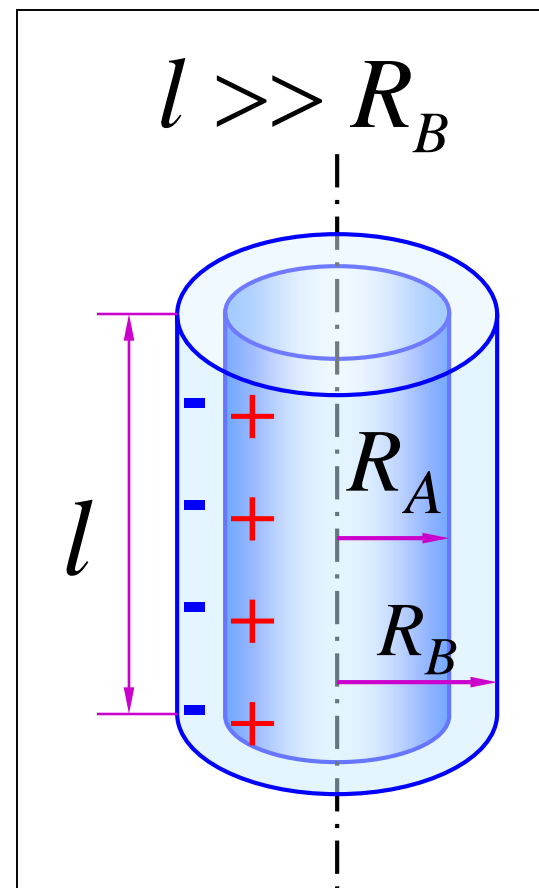
(2)
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}, \quad (R_A < r < R_B)$$

(3)
$$U = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

(4) 电容
$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\epsilon l / \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$d = R_B - R_A \ll R_A, \quad C \approx \frac{2\pi\epsilon l R_A}{d} = \frac{\epsilon S}{d}$

平行板电容器电容



► 球形电容器的电容

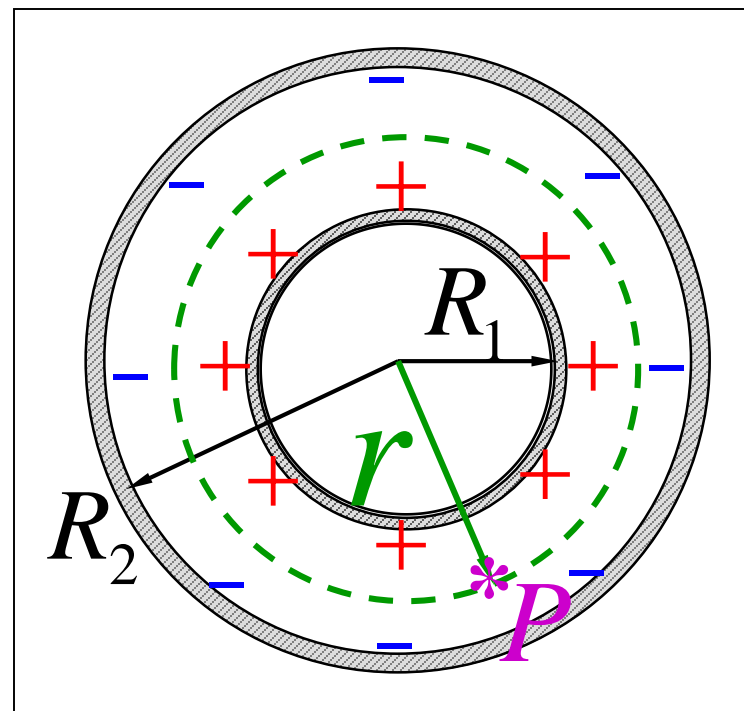
球形电容器是由半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心金属球壳所组成。

设内球带正电 ($+Q$)，外球带负电 ($-Q$)。

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r$$

$(R_1 < r < R_2)$

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad C = \frac{Q}{U}$$



$$R_2 \rightarrow \infty, \quad C = 4\pi\epsilon R_1$$

孤立导体球电容

【例】 两半径为 R 的平行长直导线中心间距为 d ,
且 $d \gg R$, 求单位长度的电容 .

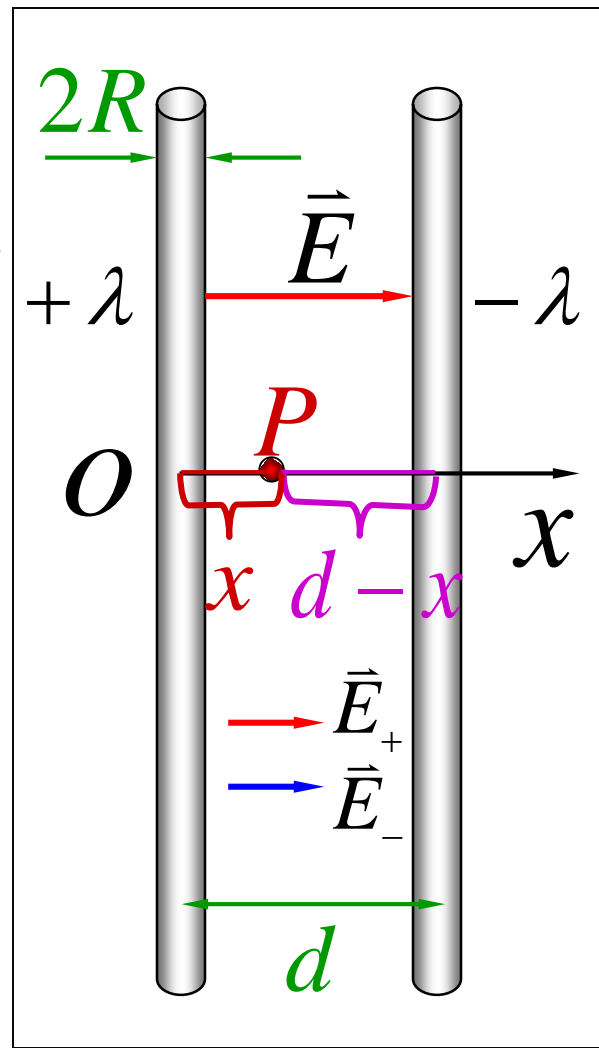
【解】 设两金属线的电荷线密度为 $\pm \lambda$

$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 (d-x)}$$

$$U = \int_R^{d-R} E dx = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$$

$$= \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{d}{R}$$

单位长度的**电容** $C = \frac{\lambda}{U} = \pi \varepsilon_0 / \ln \frac{d}{R}$



二 电容器的串联(Serial connection) 和并联(Parallel connection)

1 电容器的并联

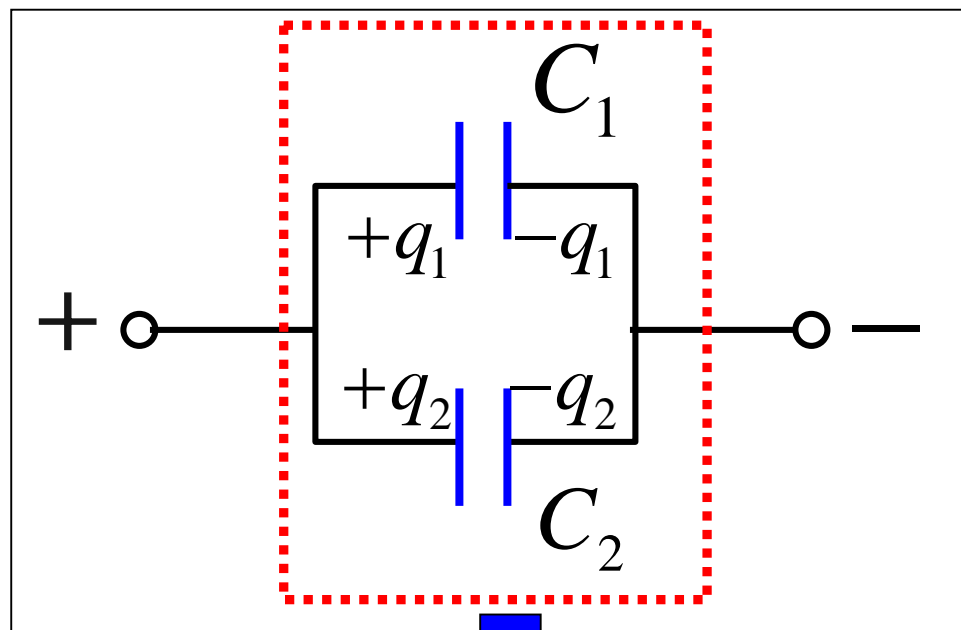
等价的电容器带电 Q

$$Q = q_1 + q_2$$

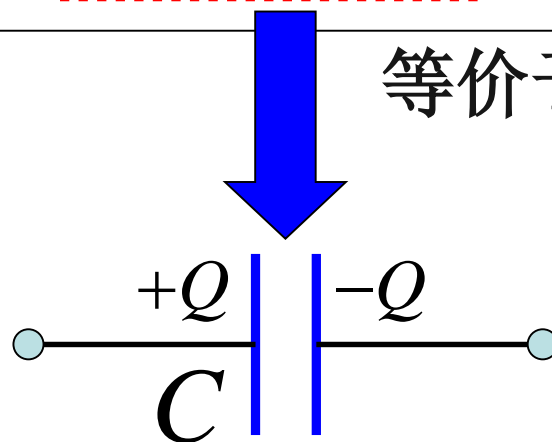
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U}$$

$$= \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U}$$

$$= C_1 + C_2$$



等价于



2 电容器的串联

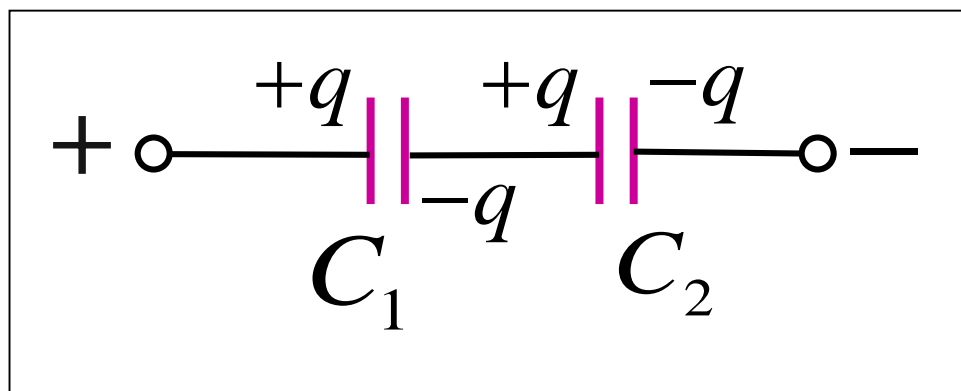
电容器带电 $Q = q$

$$C_1 = \frac{U_1}{q}, \quad C_2 = \frac{U_2}{q}$$

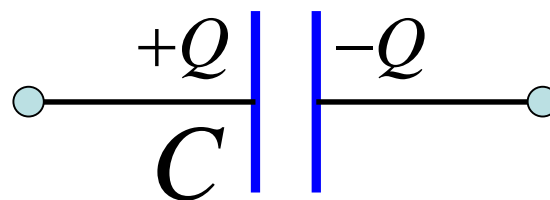
$$U = U_1 + U_2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{q}{U_1 + U_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



等价于



【例】 一平行平板电容器充满两层厚度各为 d_1 和 d_2 的电介质，它们的相对介电常数分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} ，极板面积为 S 。求电容器的电容

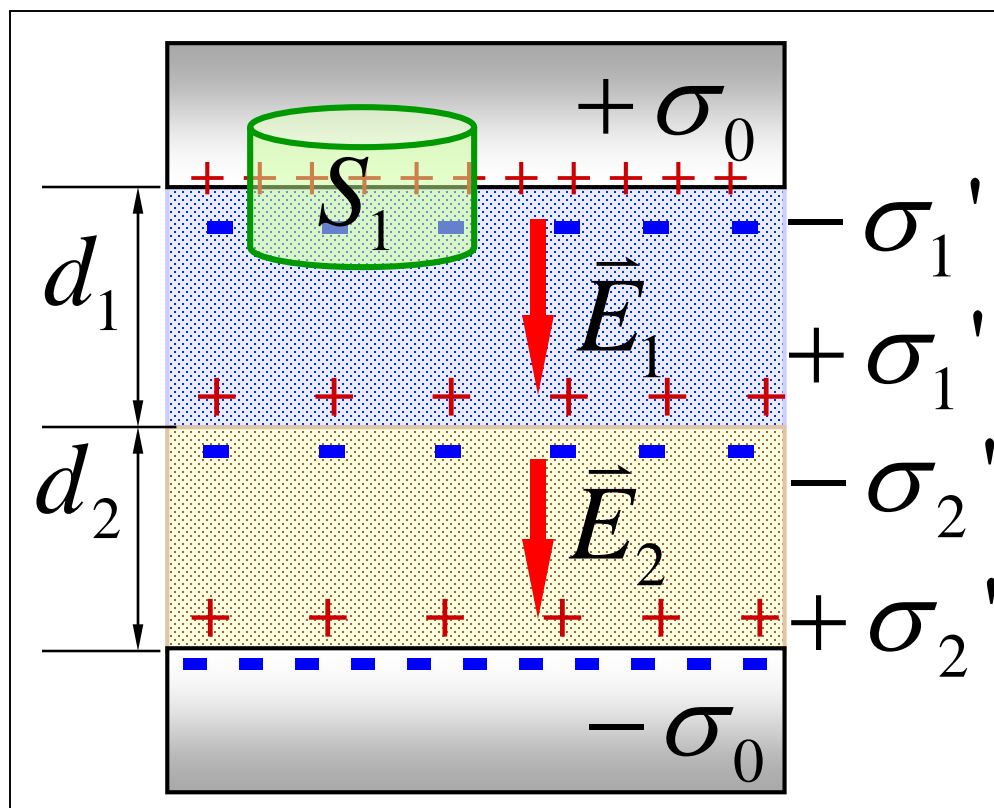
【解】 (1)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_0 S_1$$

$$D = \sigma_0$$

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$$

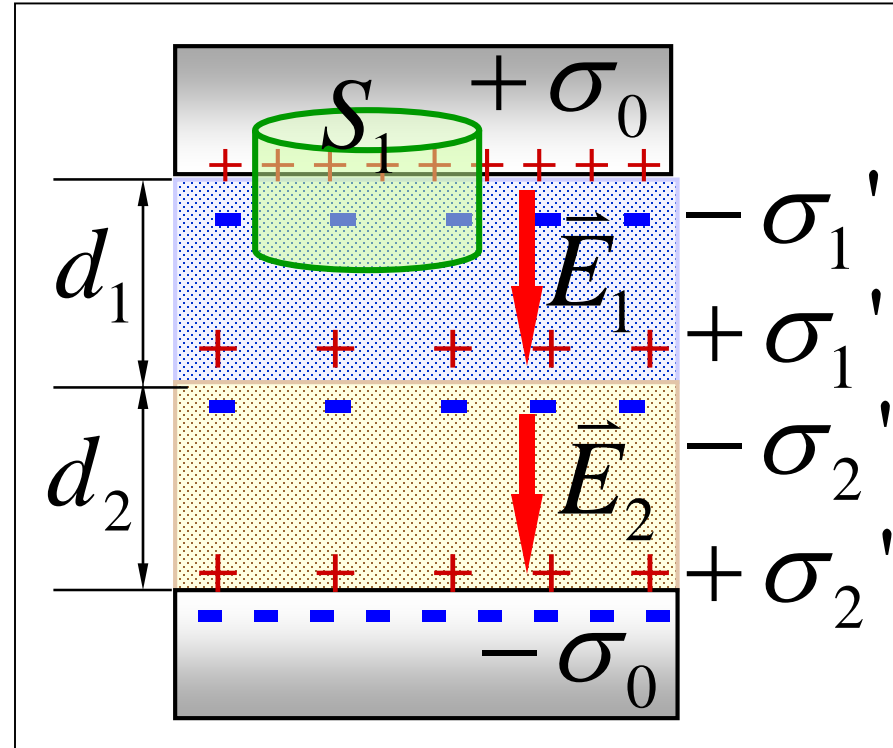


$$\left\{ \begin{aligned} E_1 &= \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \\ E_2 &= \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \end{aligned} \right.$$

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right)$$

$$C = \frac{Q_0}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}{\epsilon_{r1} d_2 + \epsilon_{r2} d_1}$$



§ 9-3 静电场的能量

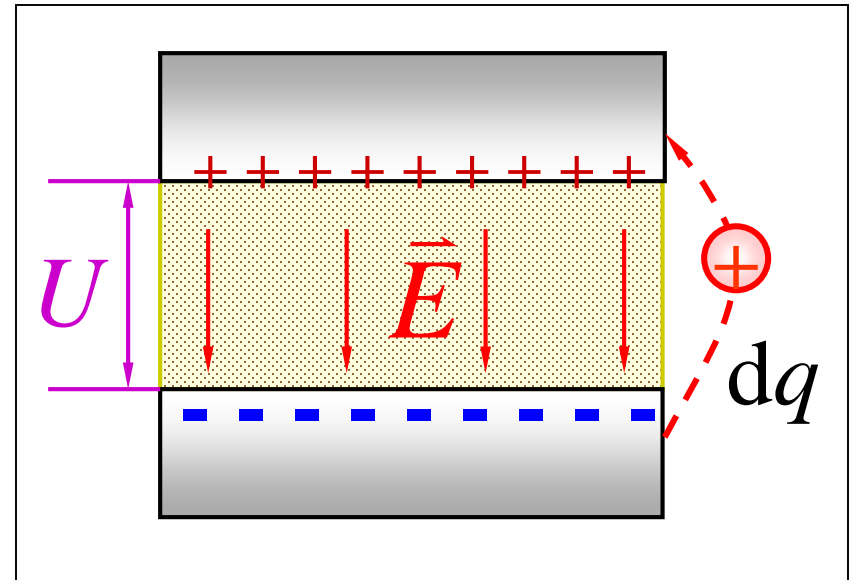
一 电容器的能量

$$dA = Udq = \frac{q}{C} dq$$

$$A = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$A = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$$



电容器贮存的电能 $W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$

二 静电场的能量

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd$$

电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED$

物理意义 电场是一种物质，它具有能量.

电场空间所存储的能量

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV$$

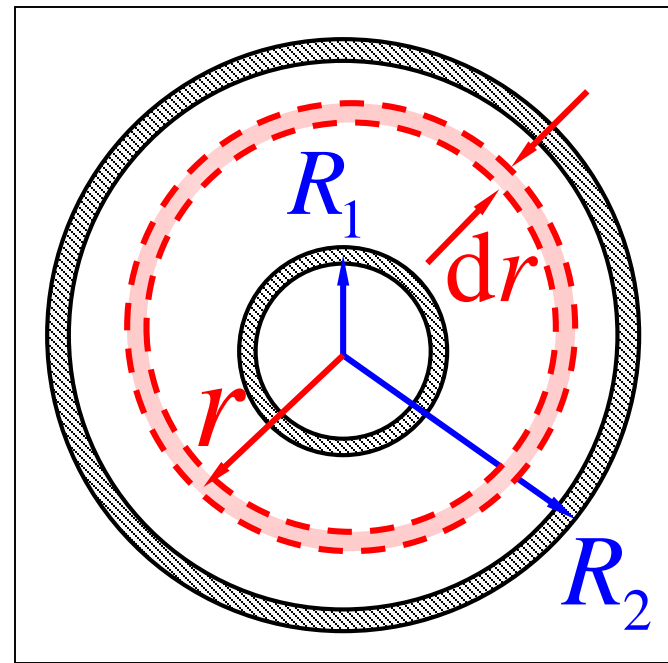
【例】 如图所示, 球形电容器的内、外半径分别为 R_1 和 R_2 , 所带电荷为 $\pm Q$. 若在两球壳间充以电容率为 ε 的电介质, 问此电容器贮存电场能量为多少?

【解】

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2} Q \vec{e}_r$$

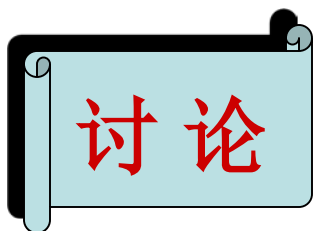
$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon r^4}$$

$$dW_e = w_e dV = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon r^2} dr$$



$$W_e = \int dW_e = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}}$$



(1) $W_e = \frac{Q^2}{2C}$

$$C = 4\pi\epsilon \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

(球形电容器电容)

(2) $R_2 \rightarrow \infty$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon R_1}$$

(孤立导体球贮存的能量)

【例】 如图圆柱形电容器，中间是空气，空气的击穿场强是 $E_b = 3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ，电容器外半径 $R_2 = 10^{-2} \text{ m}$ 。在空气不被击穿的情况下，内半径 $R_1 = ?$ 可使电容器存储能量最多。（空气 $\varepsilon_r \approx 1$ ）

【解】

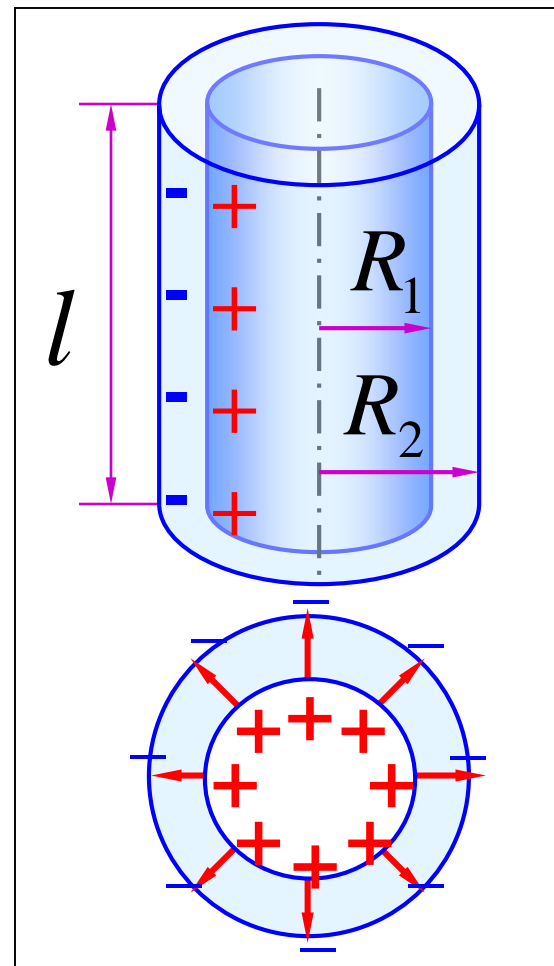
$$E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_b = \frac{\lambda_{\max}}{2\pi \varepsilon_0 R_1}$$

$$U = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \lambda U = \frac{\lambda^2}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



$$W_e = \frac{\lambda^2}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad E_b = \frac{\lambda_{\max}}{2\pi \varepsilon_0 R_1}$$

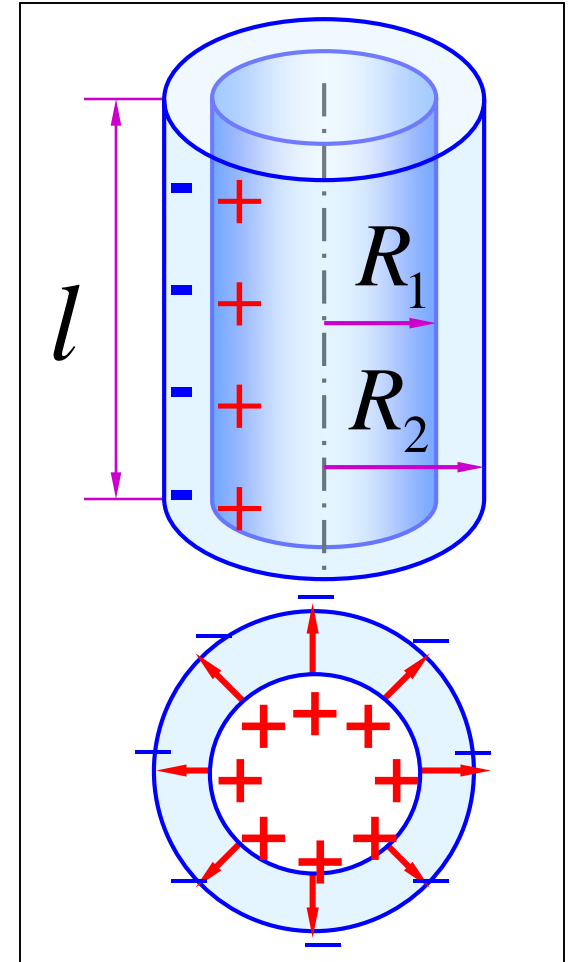
$$\lambda = \lambda_{\max} = 2\pi \varepsilon_0 E_b R_1$$

$$W_e = \pi \varepsilon_0 E_b^2 R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{dW_e}{dR_1} = \pi \varepsilon_0 E_b^2 R_1 (2 \ln \frac{R_2}{R_1} - 1) = 0$$

$$R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}} = \frac{10^{-2}}{\sqrt{e}} \text{ m} \approx 6.07 \times 10^{-3} \text{ m}$$

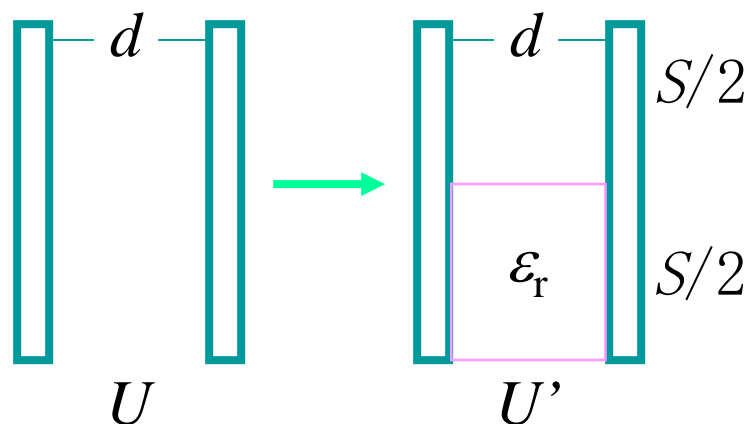
$$U_{\max} = E_b R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{E_b R_2}{2\sqrt{e}} = 9.10 \times 10^3 \text{ V}$$



【例】 平板电容器 (S, d , 空气 $\epsilon_r=1$) 充电到 U 断开电源, 一半浸入绝缘液体 ϵ_r 中。求: (1) C ; (2) σ_0 分布; (3) E_1, E_2 ; (4) ΔW 。

【解】 (1) 并联 $C = C_1 + C_2$

$$\begin{aligned}
 &= \epsilon_0 \frac{S/2}{d} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S/2}{d} \\
 &= (1 + \epsilon_r) \frac{\epsilon_0 S}{2d}
 \end{aligned}$$



(2) 两种介质: $D_1 \neq D_2$, $\sigma_{01} \neq \sigma_{02}$, 但 $E_1 = E_2$

$$D_1 = \sigma_{01}, \quad D_2 = \sigma_{02}$$

$$D_1 = \epsilon_0 E_1, \quad D_2 = \epsilon_0 \epsilon_r E_2$$

$$\therefore \sigma_{02} = \epsilon_r \sigma_{01}$$

$$\sigma_{02} = \epsilon_r \sigma_{01} \quad Q = C_0 U = \epsilon_0 S U / d$$

$$Q = (\sigma_{01} + \sigma_{02}) S / 2 = (1 + \epsilon_r) \sigma_{01} S / 2 = \epsilon_0 S U / d$$

$$\therefore \sigma_{01} = \frac{2\epsilon_0 U}{d(1 + \epsilon_r)} \quad \sigma_{02} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_r U}{d(1 + \epsilon_r)}$$

$$(3) \quad E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{01}}{\epsilon_0} = \frac{2U}{d(1 + \epsilon_r)} \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_r} = E_1$$

$$(4) \quad W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad C = \frac{1 + \epsilon_r}{2} C_0$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right) = \frac{Q^2}{2C_0} \left(\frac{2}{1 + \epsilon_r} - 1 \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S U}{d} U \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \\ &= - \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) S U^2}{2(\epsilon_r + 1) d} \end{aligned}$$