考试教室　姓名　学号　年级　专业、班　学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《线性代数 II》课程

◉A卷 ○B卷

2022 — 2023 学年　第 1 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10862　考试日期：2022 年 12 月

考试方式：○开卷 ◉闭卷　考试时间：120 分

考试提示：1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

温馨提示：您所有客观题（用 2B 铅笔）和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置，不在指定位置答题将不会计分，敬请您在答题卡上作答时注意字体尽量小，节约能够使用的空间！在该试卷纸上作答均不会计分！

一、单项选择题（客观题，请用铅笔在答题卡方格中填涂）（每小题 3 分，共 18 分）

1. （ C ）2. （A ）

3. （ D ）4. （ D ）

5. （ B ）

6. （ D ）

二、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 1 。8. 1 。9. -5 。

10. 5 11. 4 。12. $a>2.5$ 。

三、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13. 解：错误（2 分）。当

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},AB=AC$$（3 分）

但 $B\neq C$

14. 解答：正确（2 分），因为 $A^2=O$，则

$R(A)+R(A)\le 5$，则 $R(A)\le 2$，则 $A^*=O$，则 $R(A^*)=0$（3 分）

四、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15.（8 分）

解

$$\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1&n-1&n-1&\cdots&n-1&n-1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\text{(2分)}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\text{(2分)}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}\text{(2分)}$$

$$=(-1)^{(n-1)}(n-1)\quad\text{(2分)}$$

16.（8 分）

解：

由 $\left(2E-C^{-1}B\right)A^{T}=C^{-1}\Rightarrow\left(2C-B\right)A^{T}=E\Rightarrow A=\left(\left(2C-B\right)^{T}\right)^{-1}$

（2 分）

$$\left(2C-B\right)^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$ （2 分）

$$\begin{pmatrix}1&&&&1&&&\\2&1&&&&1&&\\3&2&1&&&&1&\\4&3&2&1&&&&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&&&&1&&&\\0&1&&&-2&1&&\\0&2&1&&-3&0&1&\\0&3&2&1&-4&&&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&&&&1&&&\\0&1&&&-2&1&&\\0&0&1&&1&-2&1&\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{pmatrix}$$，（2 分）

$$A=\begin{pmatrix}1&&&\\-2&1&&\\1&-2&1&\\&1&-2&1\end{pmatrix}$$ （2 分）

17.（12 分）

解：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^{2}&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^{2}-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&(a-1)(a-2)&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}$$（6分，方法正确答案错误请给一半分数）

当 $a\neq1,2$ 时，$R(A)=3\neq R(\bar{A})=4$，方程组无解。（1 分）

当 $a=2$ 时，$R(A)=3=R(\bar{A})=3$，方程组有唯一解。（1 分）

当 $a=1$ 时，$R(A)=2=R(\bar{A})$，方程组有无穷多个解（1 分）

$$\bar{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ （2 分）

同解方程组为：$\begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_2=0 \end{cases}$，故通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$（1 分，有可能答案不唯一）

18.（12 分）

解：

二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$且特征值为1,2,0

（1）由$|A|=0 \Rightarrow a=b$

由

$|A-E|=0$及$a=b \Rightarrow a=b=0,$此时易知$|A-2E|=0$满足，

故$a=b=0$

(2) 解（$A-E$）$X=0$得$\xi_1=(0,1,0)^T, q_1=\xi_1$

解（$A-2E$）$X=0$得$\xi_2=(1,0,1)^T$，单位化为$q_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\xi_2$

解$AX=0$得$\xi_3=(-1,0,1)^T$，单位化为$q_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\xi_3$

所求正交阵

$$Q=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$（有可能列有顺序变化）

五、证明题（请在主观题指定区域解答）（每小题 7 分，共 14 分）

19.（7 分）

证明：由β，γ都不能由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s线性表示，及向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s线性无关，知α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s，β与α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s，γ均线性无关，秩均为$s+1$。α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s，β，γ线性相关及向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s线性无关，向量组的秩为$s+1$，故α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s，β与α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s，γ均为同一向量组得最大线性无关组，故等价。

20.（7 分）

证明：

B^TAB为正定矩阵$\Leftrightarrow \forall x\neq 0, x^T\left(B^TAB\right)x>0$(2分）$\Leftrightarrow \left(Bx\right)^T A\left(Bx\right)>0$(2分）

$\xleftrightarrow{A正定} Bx\neq 0$（2分）$\Leftrightarrow R(B)=n$(1分）