中山大学《线性代数》2020-2021 学年第一学期期末试卷

满分 100 分

一、单项选择题（每小题 2 分，共 40 分）。

1．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$，则下列矩阵运算无意义の是　　【　　】

A．BAC　　B．ABC　　C．BCA　　D．CAB

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-E=0$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则必有【　　】

A．$A=A^{-1}$　　B. $A=-E$　　C．$A=E$　　D. $\det(A)=1$

3. 设 A 为 3 阶方阵，且行列式 $\det(A)=\frac{1}{2}$，则 $\det(-2A)=$　　【　　】

A. 4　　B. -4　　C. -1　　D. 1

4. 设 A 为 3 阶方阵，且行列式 $\det(A)=0$，则在 A の行向量组中【　　】

A. 必存在一个行向量为零向量

B. 必存在两个行向量，其对应分量成比例

C．存在一个行向量，它是其它两个行向量の线性组合

D．任意一个行向量都是其它两个行向量の线性组合

5．设向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，则下列向量组中线性无关の是【　　】

A．a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_1　　B．$a_1,a_2,2a_1-3a_2$

C．$a_2,2a_3,2a_2+a_3$　　D．a_1,a_2,a_1+a_3

6. 向量组(I)：$a_1,\cdots,a_m(m\geq 3)$ 线性无关の充分必要条件是【　　】

A. (I)中任意一个向量都不能由其余 m-1 个向量线性表出

B. (I)中存在一个向量，它不能由其余 m-1 个向量线性表出

C. (I)中任意两个向量线性无关

D. 存在不全为零の常数 $k_1,\cdots,k_m$，使 $k_1a_1+\cdots+k_ma_m\neq 0$

7．设 a 为 $m\times n$ 矩阵，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解の充分必要条件是　　【　　】

A. Aの行向量组线性相关　　　　B. Aの列向量组线性相关

C. Aの行向量组线性无关　　　　D. Aの列向量组线性无关

8. 设a_i、b_i均为非零常数（i=1，2，3），且齐次线性方程组$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 \end{cases}$

の基础解系含2个解向量，则必有 【　　】

A. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$　　B. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$　　C. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$　　D. $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$

9. 方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+x_3=1 \\ 3x_1+3x_2+2x_3=a \end{cases}$ 有解の充分必要の条件是 【　　】

A. a=-3　　B. a=-2　　C. a=3　　D. a=2

10. 设η_1，η_2，η_3是齐次线性方程组$Ax=0$の一个基础解系，则下列向量组中也为该方程组の一个基础解系の是【　　】

A. 可由η_1，η_2，η_3线性表示の向量组　　B. 与η_1，η_2，η_3等秩の向量组

C. $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$，$\eta_3-\eta_1$　　D. η_1，$\eta_1+\eta_3$，$\eta_1+\eta_2+\eta_3$

11. 已知非齐次线性方程组の系数行列式为0，则 【　　】

C. $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$，$\eta_3-\eta_1$　　D. η_1，$\eta_1+\eta_3$，$\eta_1+\eta_2+\eta_3$

11. 已知非齐次线性方程组の系数行列式为0，则 【　　】

A. 方程组有无穷多解　　B. 方程组可能无解，也可能有无穷多解

C. 方程组有唯一解或无穷多解　　D. 方程组无解

12. n阶方阵A相似于对角矩阵の充分必要条件是A有n个 【　　】

A. 互不相同の特征值　　B. 互不相同の特征向量

C. 线性无关の特征向量　　D. 两两正交の特征向量

13. 下列子集能作成向量空间R^nの子空间の是 【　　】

A. $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_1a_2=0\}$　　B. $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid \sum_{i=1}^{n}a_i=0\}$

C. $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in z, i=1,2,\cdots,n\}$　　D. $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid \sum_{i=1}^{n}a_i=1\}$

14. F^3の两个子空间$V_1=\{(x_1,x_2,x_3)|2x_1-x_2+x_3=0\}$，$V_2=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_3=0\}$，则子空间$V_1\cap V_2$の维数为

【　　】

A. 二维　　B. 一维

C. 三维　　D. 零维

15. 设$M_n(R)$是R上全体n阶矩阵の集合，定义$\sigma(A)=\det A, A\in M_n(R)$，则$\sigma$ 是$M_n(R)$到Rの【　　】

A. 一一映射　　　　B. 满射

C. 一一对应　　　　D. 既不是满射又不是一一对应

15. 令 $\xi=(x_1,x_2,x_3)$ 是 R^3 の任意向量，则下列映射中是 R^3 の线性变换の是 【　　】

A. $\sigma(\xi)=\xi+\alpha,\alpha\neq 0$　　　　B. $\tau(\xi)=(2x_1+x_2+x_3,x_2+x_3,0)$

C. $p(\xi)=(x_1,x_2^2,x_2^3)$　　　　D. $w(\xi)=(\cos x_1,\cos x_2,0)$

17. 下列矩阵中为正交矩阵の是 【　　】

A. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$　　　　B. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$　　　　D. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{bmatrix}$

18. 若 2 阶方阵 A 相似于矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&-3\end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 则方阵 E－A 必相似于矩阵【　　】

A. $\begin{bmatrix}1&0\\1&4\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}-1&0\\1&-4\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}0&0\\-2&4\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-1&0\\-2&-4\end{bmatrix}$

19. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ の秩等于【　　】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

20. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&a\\0&a&8\end{bmatrix}$ 正定, 则实数 a の取值范围是【　　】

A. $a<8$　　　　B. $a>4$

C. $a<-4$　　　　D. $-4<a<4$

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）。

21. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$, 记 A^T 为 A の转置，则 $A^TB=$__________。

22. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$ 则行列式 det（AA^T）の值为________.

23. 行列式 $\begin{vmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{vmatrix}$ の值为______________.

24．若向量组$a_1=(1,\ 2,\ 3)$，$a_2=(4,\ t,\ 6)$，$a_3=(0,\ 0,\ 1)$线性相关，则常数t=______.

25.向量组（1，2)，(3，4)，　(4，6）の秩为__________.

26.齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$の基础解系所含解向量の个数为______

27.已知$x_1=(1,\ 0,\ 2)^T$、$x_2=(3,\ 4,\ 5)^T$是3元非齐次线性方程组$Ax=b$の两个解向量，则对应齐次线性方程$Ax=0$有一个非零解ξ=________.

28.矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$の全部特征值为 ______________。

29．设λ是3阶实对称矩阵A の一个一重特征值，$\xi_1=(1,\ 1,\ 3)^T$、$\xi_2=(4,\ a,\ 12)^T$是Aの属于特征值λの特征向量，则实常数a=________.

30．$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3$の相伴矩阵A=

三、计算题（每小题8分，共40分）

31．计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 7 & 2 \end{vmatrix}$の值。

32．设$A\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$求$A^{-1}$。

33．求方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases}$の基础解系与通解。

34．a取何值时，方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=a \end{cases}$有解？在有解时求出方程组の通解。

35．设向量组a_1,a_2,a_3线性无关。试证明：向量组$\beta_1=a_1+a_2+a_3,\beta_2=a_1-a_2,\beta_3=a_3$线性无关。

一、单项选择题（本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分）

1.A　2.A　3.B　4.C　5.D　6.A　7.B　8.C　9.D　10.D

11.B　12.C　13.B　14.B　15.B　16.B　17.C　18.D　19.D　20.D

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

21. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$　22. 1　23. 360　24. 8　25. 2

26. 1　27. $(2,4,3)^T$(或它の非零倍数)　28. 1、4、-6

29. 4　30. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

31. $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}$············1 分　$=3\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}$············3 分　$=96.$············6 分

32. 解法 1: $(A|E)=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$············2 分 $\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$············4 分

$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$············5 分　$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，······6 分.

解法 2:　det（A）=-1

$A^{*}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$············5 分　$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$············6 分

27. $A^{*}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$…………2 分

一个基础解系：$\xi=(-2,\ 1,\ 0,\ 0)^{T}$，$\xi=(2,\ 0,\ -1,\ 1)^{T}$…………5 分

通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$ （k_1、k_2 是任意常数）…………6 分

33. $\overline{A}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & a-2\end{bmatrix}$,

故当且仅当 a=2 时，有解。

当 $a=2$ 时，得 $\begin{cases}x_1=3-2x_2\\ x_3=-2+x_2\end{cases}$ （x 是任意），

所以 $x=\begin{bmatrix}3\\0\\-2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ （k是任意常数）…………6 分 或 $\begin{cases}x_1=-1-2x_3\\ x_2=2+x_3\end{cases}$ （x_3任意），

即 $x=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ （k是任意常数）.…………6 分