学院______ 专业、班______ 年级______ 学号______ 姓名______ 考试教室______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《线性代数 II》课程

◉ A卷 ○ B卷

2022 — 2023 学年 第 2 学期

开课学院： 数统 课程号： MATH10862 考试日期： 2023 年 06 月

考试方式： ○ 开卷 ◉ 闭卷 考试时间： 120 分

考试提示：1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试； 2.**考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。**

温馨提示：您所有客观题（用 2B 铅笔）和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置，不在指定位置答题将不会计分，敬请您在答题卡上作答时注意字体尽量小，节约能够使用的空间！在该试卷纸上作答均不会计分！

一、单项选择题（客观题，请用铅笔在答题卡方格中填涂）（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆方阵，A 的第二行乘以 2 得到矩阵 B，则 A^{-1} 的（ ）得到 B^{-1}。

（A）第二行乘以 2； （B）第二列乘以 2；

（C）第二行乘以 $\frac{1}{2}$； （D）第二列乘以 $\frac{1}{2}$。

2. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2-3A+2E=O$，则矩阵 $2E-A$ 与 $E-A$（ ）

（A）同时为可逆矩阵； （B）最多有一个为可逆矩阵；

（C）同时为不可逆矩阵； （D）至少有一个为零矩阵.

3. 设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，α_2，α_3，α_4 线性相关，且则下列命题中不一定成立的是（ ）

（A）α_1 不能被 α_2，α_3，α_4 线性表示；

（B）α_4 能被 α_1，α_2，α_3 线性表示；

（C）α_2 不能被 α_1，α_3，α_4 线性表示；

（D）α_1，α_2，α_3，α_4 线性相关。

4. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix}$，伴随矩阵 A^* 为非零矩阵，且 $A^*x=0$ 有非零解，则（ ）

（A）$a=2$； （B）$a=2$ 或 $a=-4$；

（C）$a=-4$； （D）$a\neq 2$ 或 $a\neq -4$。

5. 设 A 是三阶方阵，$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 的特征值为 1，-1，0 的充分必要条件是（ ）

（A）存在可逆矩阵 P，Q，使得 $A=P\Lambda Q$；

（B）存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{-1}$；
（C）存在正交矩阵Q，使得$A=Q\Lambda Q^{-1}$
（D）存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{T}$

6. 设A为$m\times n$阶实矩阵，$R(A)=n$，则（　　）

(A) A^TA合同于 E　　(B) AA^T合同于 E

(C) A^TA相似于 E　　(D) AA^T相似于 E

二、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 设$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-1&0&2&3\\1&2&0&3\\5&4&6&7\end{vmatrix}$，则$A_{41}+2A_{42}+3A_{44}=$______.

8. 线性空间$V=\{(x,y,z)\mid\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\}$的维数是______.

9. 已知方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则$a=$______.

10. 设A为三阶矩阵，且$|A+2E|=|2A+E|=|A-3E|=0$，则其伴随阵的行列式$|A^*|=$______.

11. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩=__________.

12. 设α_1，α_2，α_3，α_4，β均为 4 维列向量，已知线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)x=\beta$的通解为$x=k_1(1,1,0,1)^T+k_2(1,0,2,1)^T+(1,3,2,0)^T$，则线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)y=\beta$的通解为__________.

三、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13. 设A是 n 阶矩阵，已知$Ax=0$有非零解，对任意的正整数k，方程组$A^kx=0$也有非零解。

14. 设A，B均为 n 阶矩阵，则AB的每个特征向量都是BA的特征向量。

四、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15.（8 分）设$abcd=1$，计算行列式

$$\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

16. （8 分）已知三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，求满足 $A^*X+4A^{-1}=A+X$ 的矩阵 X，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵。

17.（12 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & c & 1 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，如果 η 是 $Ax=\beta$ 的一个解，试求 $Ax=\beta$ 的通解。

18.（12 分）

求正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^{\ 2}+2x_1x_3$ 化为标准形，写出标准型并判定其正定性。

五、证明题（请在主观题指定区域解答）（每小题 7 分，共 14 分）

19. （7 分）设 A,B 同为 n 阶矩阵，证明：

$$R(AB-E)\le R(A-E)+R(B-E)$$

20.（7 分） 已知 A 与 $A-E$ 均为 n 阶正定矩阵，证明：$E-A^{-1}$ 为正定矩阵。