学院　专业、班　年级　学号　姓名　考试教室

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《线性代数 II》课程

◉ A 卷　○ B 卷

2021 — 2022 学年　第 2 学期

开课学院：<u>数统</u>　课程号：<u>MATH10862</u>　考试日期：<u>2022 年 06 月</u>

考试方式：○ 开卷　◉ 闭卷　　考试时间：<u>120</u> 分

考试提示：1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试； 2.**考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。**

温馨提示：您所有客观题（用 2B 铅笔）和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置，不在指定位置答题将不会计分，敬请您在答题卡上作答时注意字体尽量小，节约能够使用的空间！在该试卷纸上作答均不会计分！

一、单项选择题（客观题，请用铅笔在<u>答题卡</u>方格中填涂）（每小题 3 分，共 18 分）

1.（B）2.（ B ）3.（A）4.（ D）5.（ D）6.（ C）

二、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7. <u>-11</u>. 8. <u>1</u>　9 <u>-1</u>. 10. <u>1</u>.

11. <u>0</u> .

12. <u>(-3, 3)</u> .

三、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13. 错误（3 分），如 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$，但是 $AB=\begin{pmatrix}8&13\\19&31\end{pmatrix}$，

不是对称矩阵，故不正定（5 分）。

14. 正确（3 分），理由如下：

取 $X_1=(1\ 0\ 0\ldots0)^T$ ， $X_2=(0\ 1\ 0\ldots0)^T$， ⋯， $X_n=(0\ 0\ 0\ldots1)^T$，

有 $AX_1=AX_2=\cdots=AX_n=0$，所以 A 的任一列均为零向量，所以 A 是零矩阵（5 分）.

四、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15.（8 分）

解：

$$\begin{vmatrix}1+a&1&\cdots&1\\1&1+a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&1&\cdots&1+a\end{vmatrix}.= \text{（4分）}(n+a)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1+a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&1&\cdots&1+a\end{vmatrix}$$

$$=\text{（6分）}(n+a)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&a\end{vmatrix}=\text{（8分）}\ a^{n-1}(n+a)$$

16.（8 分）

解：由 $A^{-1}XA=E-A^{-1}X$ 得到：

$X=E-XA^{-1}$（注意有可能有另外的解析式出来）（2分），

于是，$X=\left(E+A^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&0&0\\-3&-5&0&0\\0&0&3&2\\0&0&4&3\end{pmatrix}$（8分）

17.（12 分）

解：由于有三个线性无关的解，那么齐次方程组有两个线性无关的解，故 4-R(A)》2，则 R(A)《2，由于 A 中有一个二阶子

式不为零，则 R(A) 》2, 故 $R(A)=2$（4 分）

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&a+1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&b+4a-5&4-2a\end{pmatrix}$$ **（8 分）**

由方程组有解且 $R(\bar{A})=R(A)=2$，得到 $a=2.b=-3$（10 分）

$\bar{A}=$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ **（11 分）**

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$

则通解为 $(2,3,0,0)^T+k_1(-2,1,1,0)^T+k_2(4,-5,0,1)^T$ **（12 分）**

18.（12 分）

解：（1）因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}i\cdot j\,x_ix_j=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$$

故$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$------（2分）（注意：方法正确二次型第一部写错了也要给一半的方法分数）

（2）$|A-\lambda E|=-\lambda^2(\lambda-14)$

故特征值为$14,0,0$------（6分）

$\lambda_1=14$对应的特征向量为$\alpha_1=(1,2,3)^T$

$\lambda_2=\lambda_3=0$对应的特征向量为$\alpha_2=(-2,1,0)^T$，$\alpha_3=(-3,0,1)^T$

------（9分）

正交化单位化后：$e_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)^T e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T$，

$e_3=\frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5)^T$-----（10分）

正交矩阵$Q=(e_1,e_2,e_3)$----（11分），f的标准型为$14y_1^2$----（12分）

五、证明题（请在主观题指定区域解答）（每小题 7 分，共 14 分）

19.（7 分）

证明：（1）因$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$线性无关，故$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$也线性无关，又$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性相关，所以$\vec{\alpha}_1$能由$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性表示。（4 分）

（2）反证，若$\vec{\alpha}_4$能由$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性表示，利用（1），则$\vec{\alpha}_4$能由$\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$

线 性 表 示 ， 这 与 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 线 性 无 关 的 已 知 矛 盾 。

（7 分）

20.（7 分）证明：因为 A 正定，其特征值都是实数且为正数，又因为 A 为正交矩阵，那么 A 的特征值只能是 ± 1（4 分），因此 A 相似于对角矩阵。即存在可逆矩阵

$$P,\text{使得}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}=E$$ **（6 分）**

故A=$P^{-1}EP$=E(7分）