

同济大学 2019~2020 年第一学期《线性代数》试卷

专业_____ 学号_____ 姓名_____

一、单选题 (每题 3 分, 共 15 分)

(1) 如果四阶行列式中每一列的四个元素之和等于 0, 则行列式的值为

- A. 1 B. 4 C. 0 D. 不能确定

(2) 若三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -1$, 则三阶行列式 $\begin{vmatrix} -x_1 & -2x_2 & -2x_3 \\ -y_1 & -2y_2 & -2y_3 \\ -z_1 & -2z_2 & -2z_3 \end{vmatrix} =$ ()

- A. -8 B. 8 C. -4 D. 4

(3) 若矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{l \times n}$, $C = (c_{ij})_{n \times m}$, 则下列运算中 () 无意义。

- A. ABC B. BCA C. $A+BC$ D. $A^T + BC$

(4) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$, 则 () 成立

- (A) $A = 0$; (B) 若 A 不可逆则 $A = 0$
 (C) $A = E$ (D) 若 A 可逆则 $A = E$

(5) n 阶方阵 A 经过若干次初等变换后化为矩阵 B , 则 .

- A. 必有 $|A| \neq |B|$; B. 必有 $|A| \neq |B|$
 C. 若 $|A|=0$ 则必有 $|B|=0$; D. 若 $|A|>0$ 则必有 $|B|>0$.

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

(1) 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, 则积 $C = AB$ 的元素 $c_{12} =$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^5 =$ _____

(3) 已知四阶行列式 D 中第二行上元素分别是 -1, 0, 2, 4, 第三行上的元素的余子式分别为 1, 2, a , 4, 则 $a =$ _____

(4) 已知二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则二阶方阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____

(5) 已知线性方程组 $AX = B$, 其中系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 为它的解, 则常数项矩阵 $B =$ _____

三、利用行列式的性质计算下列各行列式: (每题 10 分, 共 20 分)

1.
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

四、计算下列n阶行列式：（每题10分，共20分）

$$1. \begin{vmatrix} a & b & 0 & \varnothing & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \varnothing & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \varnothing & 0 & 0 \\ & & & \varnothing & & \\ 0 & 0 & 0 & \varnothing & a & b \\ b & 0 & 0 & \varnothing & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$2. D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \varnothing & & & & \otimes \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \otimes & & & \varnothing & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

五、问 λ 、 μ 取何值时，齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？（10分）

六、求解下列矩阵方程：（10分）

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

七 证明下列等式：（每题10分，共20分）

$$1. (A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$$

$$2. \text{若 } A \text{ 是 } n \text{ 阶可逆矩阵, } A^* \text{ 是 } A \text{ 的伴随矩阵, 证明 } |A^*| = |A|^{n-1}$$