重庆大学《线性代数 II》课程试卷

1、单项选择题(客观题，请用铅笔在答题卡方格中填涂)(每小题 3 分，共 18 分）

（1）(C)（2）.（ D ）（3）.（A ）（4）.（ A ）

（5）. （ B ）（6）.（ C ）

2、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7.27/8 8. 11/2 9. －27

10.3

11.R(A)=R(B)=2

12 [-2,2]

3、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13

解答：正确（2 分），因为三阶矩阵有三个不同特征值，则该矩阵可以对角化，其秩就为 2（4 分），则 $AX=0$ 基础解系中有 1 个向量（5 分）。

14 解答：正确（2 分），设 $\lambda_1\beta+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$，即

$$\lambda_1(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$$

$$\lambda_1k_1\alpha_1+(\lambda_1k_2+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_1k_3+\lambda_3)\alpha_3=0,$$

由于 α_1，α_2，α_3 线性无关，故有 $\begin{cases}\lambda_1k_1=0\\ \lambda_1k_2+\lambda_2=0\\ \lambda_1k_3+\lambda_3=0\end{cases}$。若 $k_1\neq0$，解之得，

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 5 分

故 β,α_2,α_3 也线性无关.（或者用矩阵运算来说明也可）

4、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15（8 分）

解：$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=(4分)4\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$$

$$=-4(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)(2分)=(2分)-48$$

16（8 分）

解 $ABA^*A=2BA^*A+EA\Rightarrow|A|AB=|A|2B+A$（2 分）

而 $|A|=\left|\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=3$，

则 $3AB=6B+A\Rightarrow3(A-2E)B=A\Rightarrow B=\frac{1}{3}(A-2E)^{-1}A$（2 分）

$$(A-2E|A)=\begin{pmatrix}0&1&0&2&1&0\\1&0&0&1&2&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&2&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&2&1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}$$ （2 分）

故　$B=\frac{1}{3}(A-2E)^{-1}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$（2 分）

$\boxed{17}$（12 分）

解：

$$\left(A\middle|\beta\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix}$$ ---

4 分

① 当 $a\neq1$ 或者 $b\neq3a$ 时，方程无解（6 分）

② a=1 且 b=3 时，方程有无穷多个解，

通解为：$k_1(1,-2,1,0,0)^T+k_2(1,-2,0,1,0)^T$

$+k_3(5,-6,0,0,1)^T+(-2,3,0,0,0)^T$

（基础解系有可能不一样）

-----12 分

$\boxed{18}$ 解：二次型的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=$$

于是 $\begin{cases}a+4+4=\lambda\\-2-8-8=-2\lambda\\2+8+2b=2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=4\\\lambda=9\end{cases}$（2 分）

求其特征值分别为：λ=0, 0, 9（5 分）

0 其对应的特征向量为：$\alpha_1=(2,1,0)^T$，$\alpha_2=(-2,0,1)^T$（8 分）

利用施密特正交化得到：

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt5}(2,1,0)^T$，$\beta_2=\frac{1}{3\sqrt5}(-2,4,5)^T$，$\beta_3=\frac{1}{3}(1,-2,2)^T$(10分).

故标准形为　$x^TAx=9y_3^2$(11分),正交矩阵为:

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac23\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix}$$(12分)（此处的正交矩阵可能不一样但仍然正确）

5、证明题（请在主观题指定区域解答）（每小题 7 分，共 14 分）

$\boxed{19}$

证明：$A^2=E\Rightarrow(A+E)(A-E)=0\Rightarrow R(A+E)+R(A-E)\le n$，（2 分）

$|A|^2=|A^2|=|E|=1\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow A$ 可逆

$\Rightarrow R(A)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=n$，（3 分）

设 $E=\left(e_1,\cdots,e_n\right)$，则 $A+E=\left(\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n\right)$，$A-E=\left(\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n\right)$，

设 $R\left(A+E\right)=r$，$R\left(A-E\right)=s$，

易知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n,\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n$ 线性表示，（5 分）

故 $n=R\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)\le R\left(\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n,\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n\right)$

$\le R\left(\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n\right)+R\left(\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n\right)=R\left(A+E\right)+R\left(A-\right.$

，（7 分）

综上：$R\left(A+E\right)+R\left(A-E\right)=n$.

$\boxed{20}$

证明：因为设

$A=E-\alpha\alpha^T$,则$A^2=A$，那么A的特征值只有0或者1（2分),

且$A^T=A$,即A为对称阵一定可对角化（4分），

而R$(\alpha\alpha^T)$=1，即R（A-E)=1,则其特征值为0,1,1（7分），故R（A)=2