

重庆大学《离散数学》课程试卷

重庆大学《离散数学》课程试卷

A卷  
B卷

2022—2023 学年 第 2 学期

开课学院：大数据与软件学院 课程号：SE10009 考试日期：2023.06.04

考试方式：开卷 闭卷 其他 考试时间：120 分钟

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总 分 |
| 得 分 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |

考试提示

1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；
2. 考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、选择题（30 分，每小题 2 分）

1. 下列语句中是命题的是 【 】  
A. 帮帮我，施瓦罗先生！      B. 人类从不掩饰掌控星空的欲望。  
C. 这葫芦里卖的是什么药？      D. 漆黑的虎克大人驾到！
2. 下列命题公式与  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$  真值表不相同的是 【 】  
A.  $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$       B.  $(R \wedge Q) \rightarrow P$   
C.  $(P \wedge Q) \rightarrow R$       D.  $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$



3. 以下公式哪个不是 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$ 的前束范式? 【 】
- A.  $(\exists y)(P(y) \rightarrow Q(y))$  B.  $(\exists x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y))$   
C.  $(\exists x)(\exists y)P(x) \rightarrow Q(y)$  D. 以上选项都是
4.  $A=\{\emptyset\}$ ,  $B=\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ,  $\mathcal{P}(X)$ 是 $X$ 的幂集, 则下列命题错误的是 【 】
- A.  $\{\emptyset\} \subseteq B$  B.  $\{\emptyset\} \in B$   
C.  $\{\{\{\emptyset\}\}\} \subseteq B$  D.  $\{\{\{\emptyset\}\}\} \in B$
5. 设 $A=\{a, b, c\}$ , 则下列不是集合 $A$ 的划分的是 【 】
- A.  $\{\{b, c\}, \{a\}\}$  B.  $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$   
C.  $\{\{c\}, \{b, a\}\}$  D.  $\{\{a, b, c\}\}$
6. 设 $A=\{a, b, c, d\}$ ,  $A$ 上的关系 $R=\{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$ , 则下列关于 $R$ 的闭包运算的式子中不成立的是 【 】
- A.  $R=s(R)$  B.  $r(R)=t(R)$   
C.  $r(R)=s(R)$  D. 以上选项都不成立
7. 在一个有2个元素的集合上, 可以有多少种不同的对称关系? 【 】
- A. 2 B. 4  
C. 6 D. 8
8. 群 $\langle \{0, 1, 2, 3\}, +_4 \rangle$ 的生成元是 (其中 $+_4$ 是模4加法) 【 】
- A. 2 B. 3  
C. 0 D. 以上选项都是
9.  $A=\{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\times_4$ 是模4乘法; 在 $\langle A, \times_4 \rangle$ 中, 2的逆元是 【 】
- A. 1 B. 2  
C. 3 D. 以上选项都不是
10.  $G$ 是8阶循环群, 则其不同的子群一共有多少个? 【 】
- A. 2 B. 3  
C. 4 D. 5

命题人: 刘斌

组题人: 刘斌

审题人: 胡春强

命题时间: 2023.05.11

教务处制



11.  $\langle G, * \rangle$  是一个群,  $\langle H, * \rangle$  是其子群,  $a, b \in H$ , 下列选项正确的是【 】

A.  $H*a = a*H$

B.  $|H*a| = |H*b|$

C.  $H*a = H*b$

D. 以上选项都正确

12. 结点数为奇数, 且所有结点度数都为奇数的图一定是【 】

A. 连通图

B. 哈密尔顿图

C. 平面图

D. 不存在的

13. 下图中, 图 G 的最小生成树 T 的树权为【 】

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

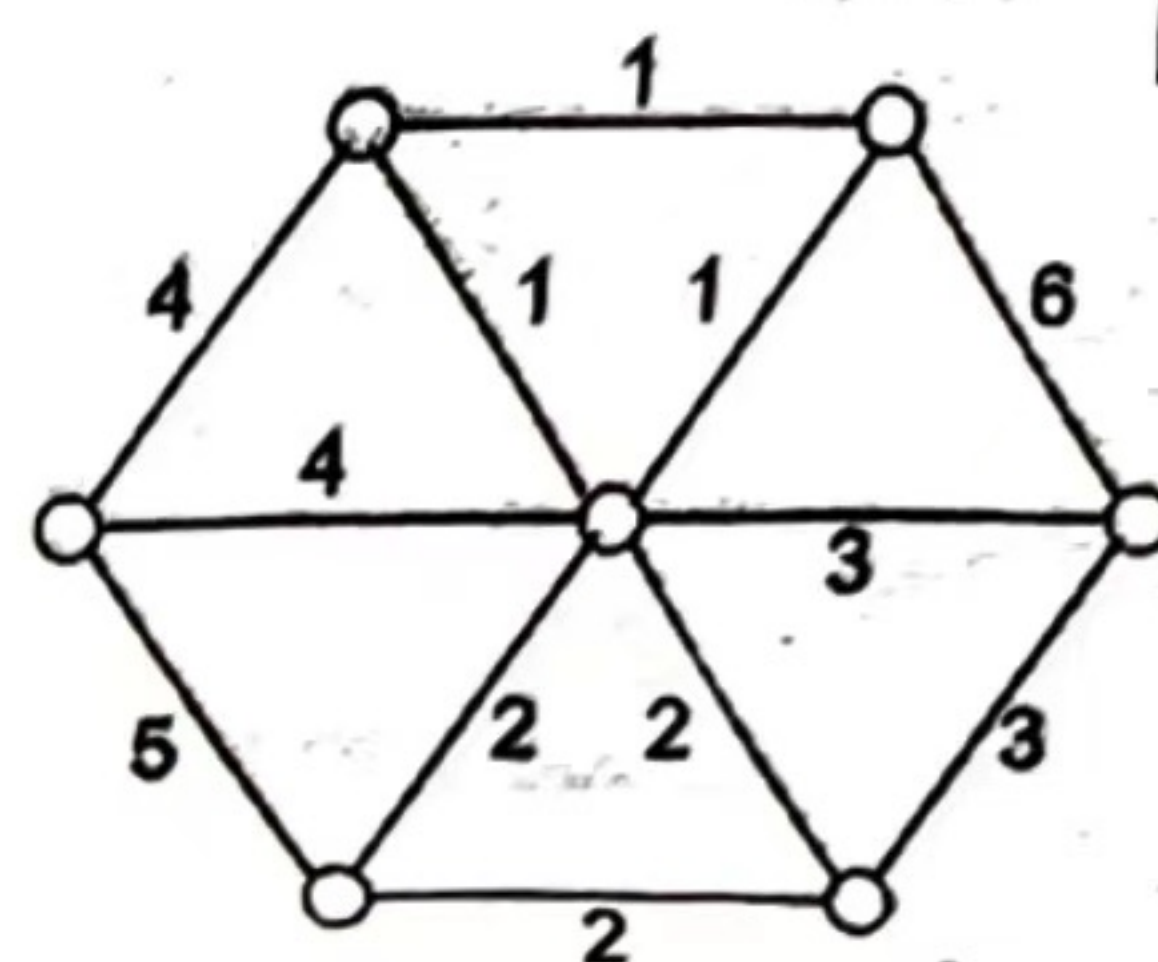
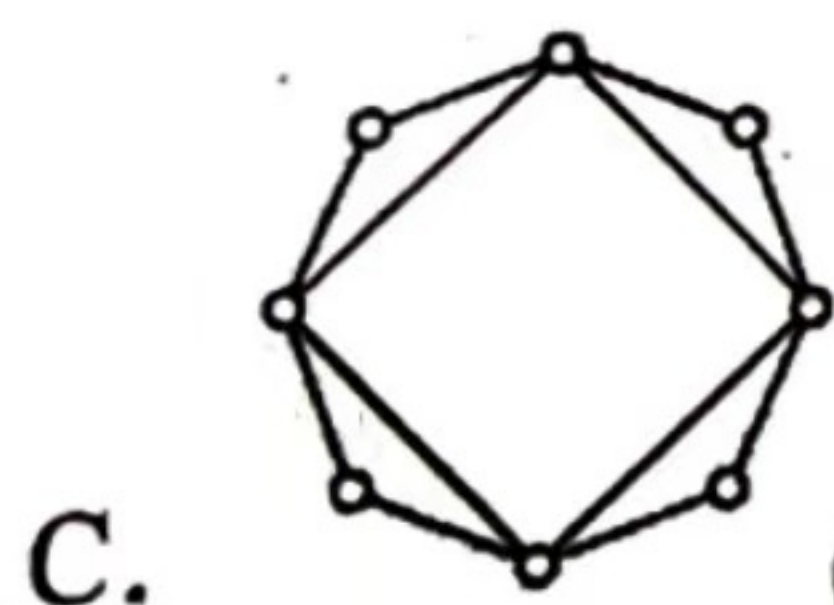
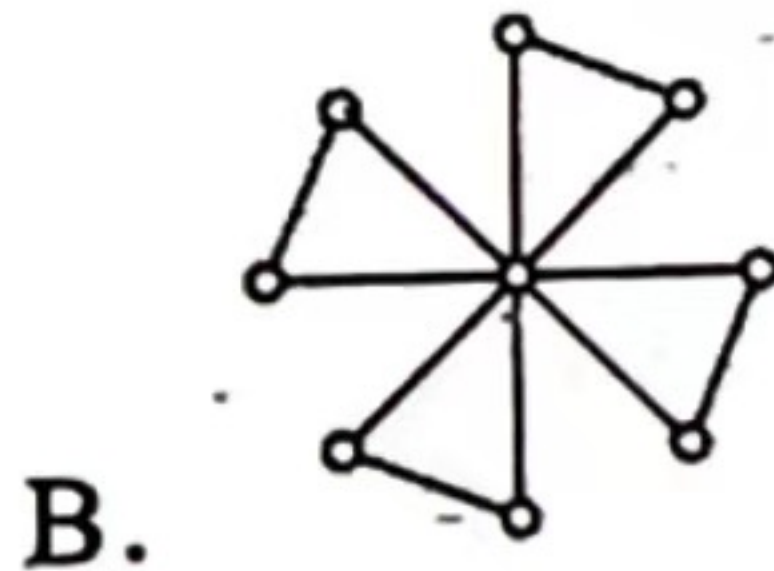
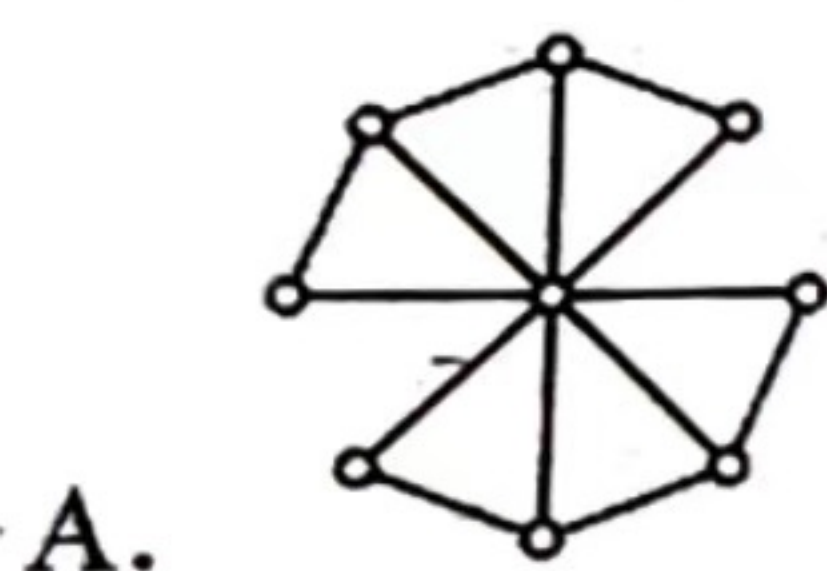
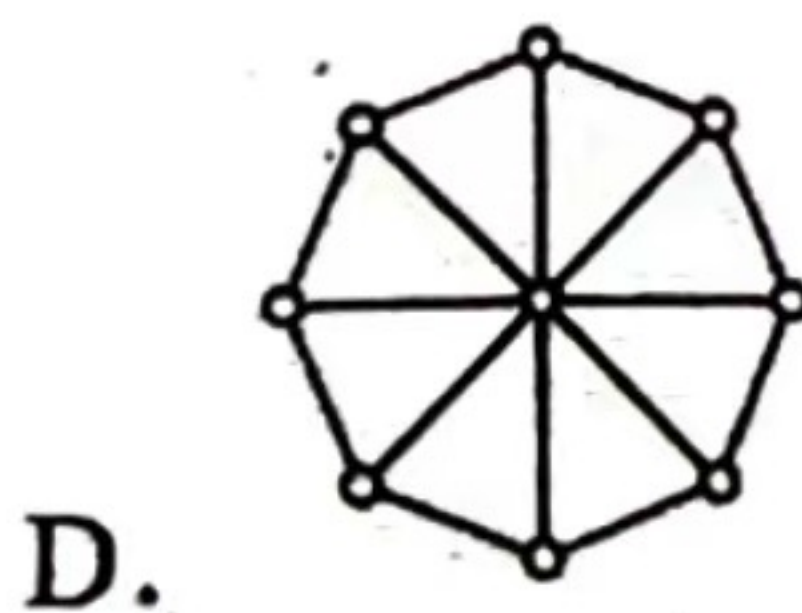


图 G

14. 下面四图中, 是哈密尔顿图, 但不是欧拉图的是【 】



(15 题的图 G')



15. 设图  $G'$  为 14 题中的 C 选项, 已知  $\delta(G')$ ,  $\Delta(G')$ ,  $\lambda(G')$ ,  $k(G')$ ,  $x(G')$ ,  $W(G')$  分别表示  $G'$  的最大度、最小度、边连通度、点连通度、着色数和连通分支个数, 则  $\delta(G') + \Delta(G') + \lambda(G') + k(G') + x(G') + W(G') =$ 【 】

A. 14

B. 17

C. 16

D. 15



## 二、解答题 (28 分, 每小题 7 分)

16. 用等值演算法求  $\neg P \vee Q \rightarrow P \wedge R$  的主析取范式 and 主析取范式的编码形式, 以及该主析取范式的对偶式的主析取范式及其编码形式。(注意: 需按照 PQR 的顺序编码, 两个主析取范式、编码形式都需要写出)

17. 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A$  上偏序关系  $R$  的关系矩阵如下

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(1) 画出  $R$  的哈斯图。

(2) 列出子集  $H = \{1, 2, 3\}$  的极大元和最小元、下界和上确界 (若有多个需全部列出; 若不存在则填“无”)

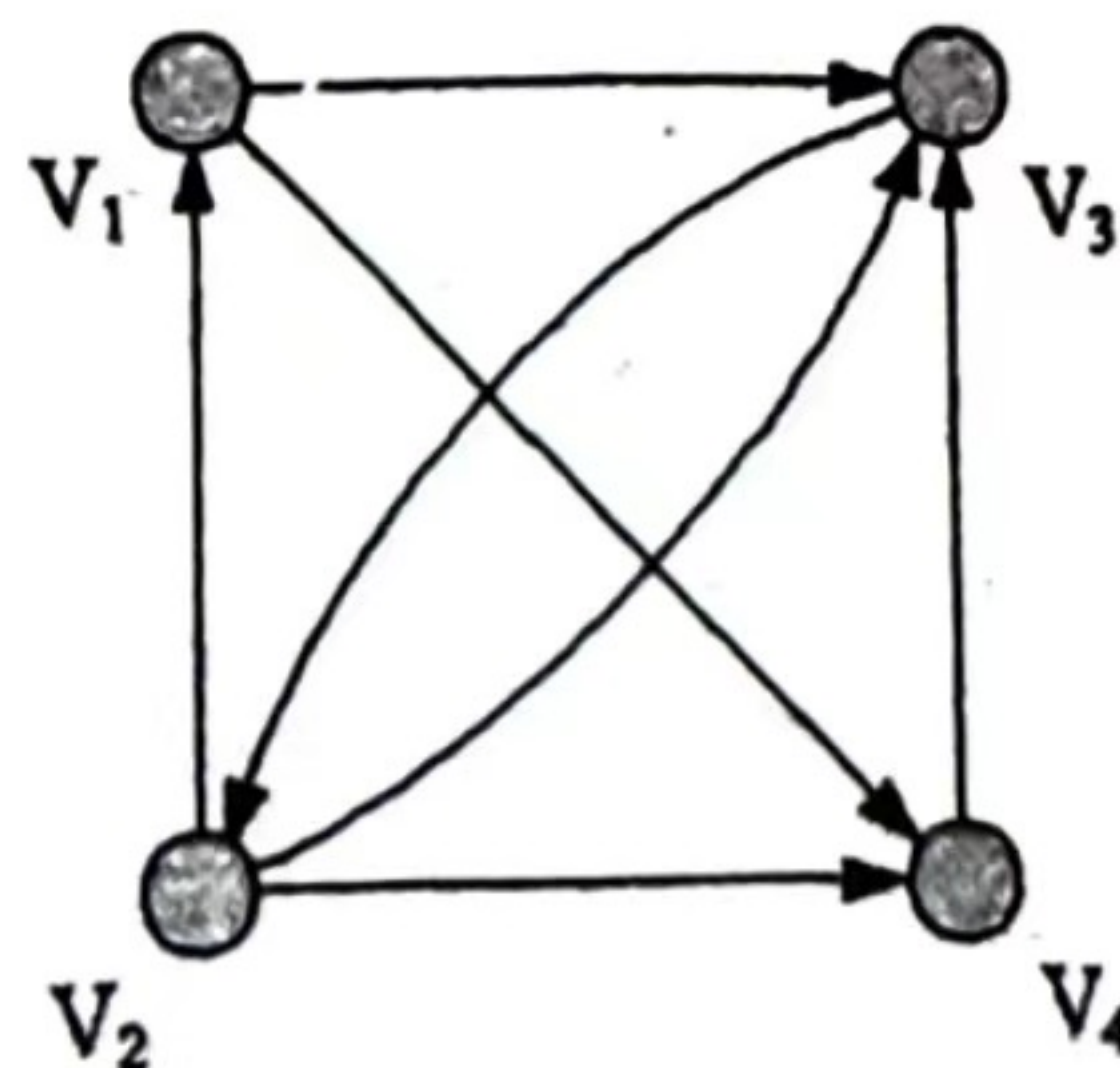
18.  $\langle \{e, a, b, c\}, * \rangle$  为克莱因四元群, 其中  $e$  是幺元, 其余元素的逆元都为自己, 其运算表如右图所示。

(1) 列出其所有子群;

(2) 列出子群  $\{e, a\}$  所有不同的右陪集。

| $*$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

19. 有向图  $G$  如下图所示, 试求图  $G$  的邻接矩阵  $A$ , 可达性矩阵  $P$  及长度为 3 的路和回路的个数。





### 三、证明题 (32 分, 每小题 8 分)

20. 用逻辑推理规则证明:

$$\forall x(W(x) \rightarrow \neg B(x)), \forall x(B(x) \vee R(x)), \exists x(\neg R(x)) \Rightarrow \neg \forall x(W(x))$$

21. 设  $R$  为非空集合  $X$  上的关系,

(1) 证明: 若  $R$  是自反的和传递的, 则  $R \circ R = R$ ;

(2) 思考(1)中结论的逆命题为真吗? 若为真, 请证明, 否则请举出反例。

22. 设  $\langle H_1, * \rangle$  和  $\langle H_2, * \rangle$  都是群  $\langle G, * \rangle$  的子群, 令  $H = H_1 \cap H_2$ ,

证明:  $\langle H, * \rangle$  也是群  $\langle G, * \rangle$  的子群。

23. 在一个简单连通平面图  $G$  有  $v$  个结点、 $e$  条边, 且每个面至少由 4 条边围成。

证明: (1)  $e \leq 2v - 4$ ;

(2) 图中必存在一个结点, 其度数小于等于 3。



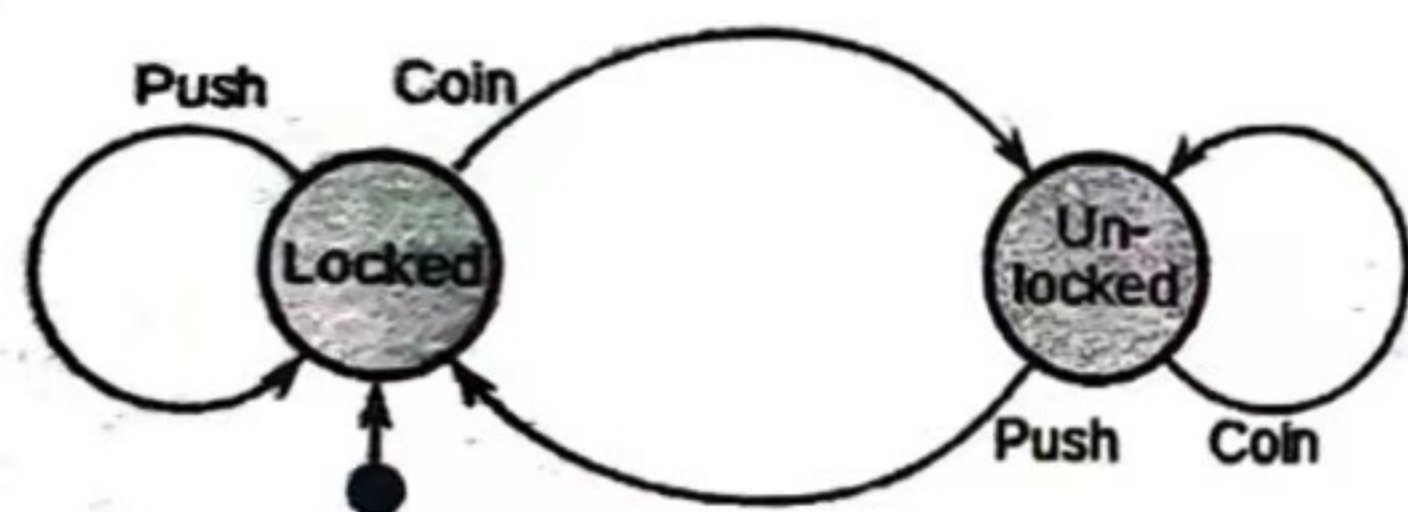
## 四、综合题（10分）

24. 利用有限状态自动机设计一台奇偶校验器。

有限状态机，（Finite-state machine, FSM），又称有限状态自动机，简称状态机，是表示有限个状态以及在这些状态之间的转移和动作等行为的数学模型。一台有限状态机通常可以有三种数学表达方式：状态图，状态表，状态转换函数和输出函数。

状态图通常以圆圈代表状态，用有向边代表状态之间的转换关系，在边上添加文字描述表示触发状态转换的输入条件以及可能的输出。例如下图就是大家常见的地铁进站入口处的旋转闸机的状态图：

状态表



| 当前状态 →<br>条件 ↓ | 状态 A | 状态 B     | 状态 C |
|----------------|------|----------|------|
| 输入条件 X         | ...  | ...      | ...  |
| 输入条件 Y         | ...  | 状态 C, 输出 | ...  |

上图有两个状态：上锁和解锁。黑色实心圆点表示闸机初始状态是上锁，有向边上标注的文字表示输入的动作（本例没有输出，所以省去了输出）。

状态表则是用表格的形式来定义状态以及转换关系和输出，例如上表。该表中的“状态 C，输出”表示当前状态处于状态 B 时，如果输入条件为 Y，则状态转移至 C，并输出某个行为或结果（本例并未具体指明输出）。

根据状态表，我们可以写出状态转换函数，例如  $f(B, Y) = C$ 。同样可以写出输出函数，例如  $g(B, Y) = \text{输出}$ 。根据闸机的状态图我们也可以写出一个转换函数  $f(\text{Locked}, \text{Coin}) = \text{Unlocked}$ 。反之亦然。

现在，请根据上面介绍的知识，设计一台奇偶校验器，判断当前输入的 0-1 字符串中 1 的个数为奇数还是偶数。如果 1 的个数是奇数，则输出一个 1，反之则输出一个 0。例如输入字符串 01101，对应的输出字符串则为 01001。要求先定义出所有可能的状态，状态转换函数和输出函数，然后再画出状态图和状态表。