

电 磁 学

研究电磁运动现象及其规律

- 研究电荷、电流产生电场、磁场的规律，电场和磁场相互联系；
- 电磁场对电荷、电流的作用，电磁场对物质的各种效应；
- 电磁波的产生与传播。

电磁场是一种特殊的物质

- 物质的电结构是物质的基本组成形式；
- 电磁场是物质世界的重要组成部分；
- 电磁作用是物质的基本相互作用。

电磁学的应用

- 渗透到物理学的各个领域;
力学、声学、光学、固体物理、半导体物理、光电子学、激光物理、量子物理、地球物理、天体物理……
- 研究化学、生物学的重要基础;
电化学、量子化学、生物电、参量探测……
- 科学技术的理论基石。
电机、电器、电气、通信、雷达、电脑、电测……

电磁学发展简史



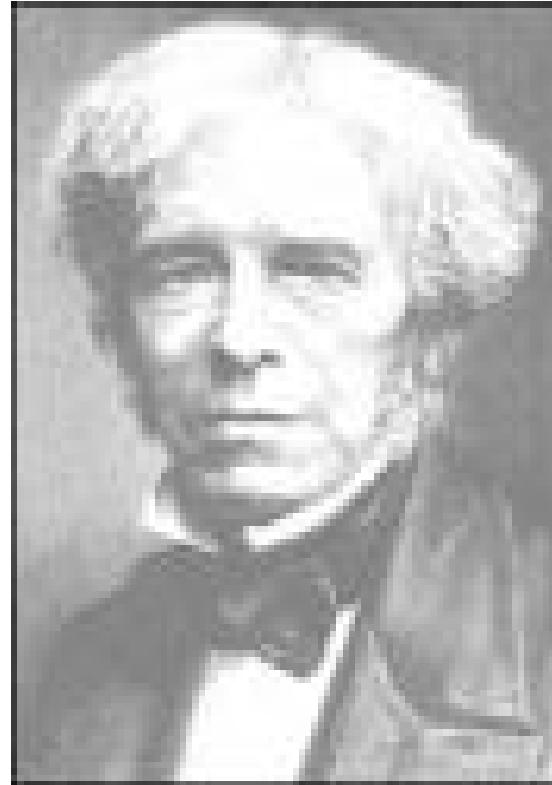
1600年 英国 吉尔伯特
对电、磁现象定性研究



1785年 法国 库仑
建立第一个定量规律
库仑定律



1820年 丹麦 奥斯特
发现电流磁效应
电磁有相互联系



1831年 英国 法拉第
发现电磁感应现象
建立电磁感应定律



1865年 英国

麦克斯韦

建立电磁场理论

除此：伽伐尼、欧姆、安培、赫兹等
都作出了重大贡献

第八章

§8-1 电荷 电荷守恒 库仑定律

§8-2 电场 电场强度及其计算

§8-3 电场线 电场强度通量 高斯定理

§8-4 静电场环流定理

§8-5 电势能 电势

§8-6 场强与电势梯度的关系

§ 8-1 电荷 电荷守恒 库仑定律

一、电荷(charge)与电荷守恒

电荷的正负性：

电荷 < 正电荷
负电荷 (同性相斥，异性相吸)

电荷量：电荷带电的多少或参与电磁相互作用的强弱。

电荷量的单位：C (库仑)

$$1C = 1A \square 1s$$

电荷守恒定律

在正常状态下，物体是电中性的，物体里正、负电荷的代数和为零。如果在一个孤立系统中有两个电中性的物体，由于某些原因，使一些电子从一个物体移到另一个物体上，则前者带正电，后者带负电，不过两物体正、负电荷的代数和仍为零。总之，在孤立系统中，不管系统中的电荷如何迁移，系统电荷的代数和保持不变，这就是电荷守恒定律。 电荷守恒定律也是自然界的基本守恒定律。

电荷的相对论不变性

一个电荷的电量与它的运动状态无关，即系统所带电荷与参考系的选取无关。 即具有相对论不变性。

二、电荷的量子性(Quantization)

1887年J.J.汤姆孙从实验中测出电子的荷质比。1913年R.A.密立根终于从实验中测定所有电子都具有相同的电荷，而且带电体的电荷是电子电荷的整数倍。

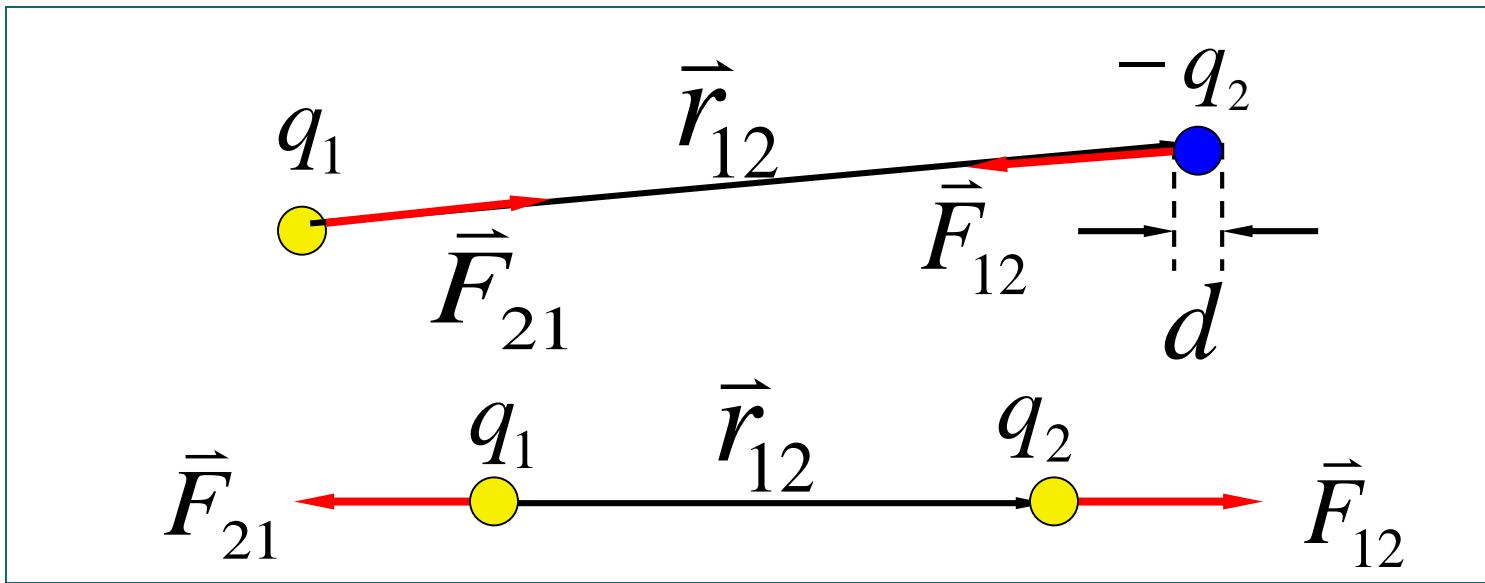
电荷的这种只能取离散的、不连续的量值的性质，叫做电荷的量子化，电子的电荷绝对值 e 为元电荷，或称电荷的量子。

$$e = 1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$q = ne \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

强子的夸克模型具有分数电荷 ($\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$)，但实验上尚未直接证明。

点电荷(point charge)模型



- 线度远小于距离，
- 大小与形状可忽略，
- 集中全部电荷的带电体。

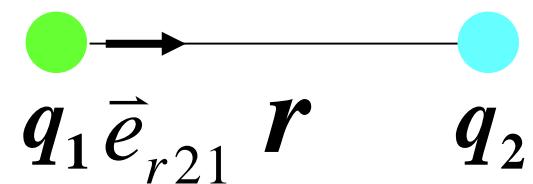
$$(d \ll r_{12})$$

二、库仑定律(Coulomb's Law)

在真空中两个点电荷之间的相互作用力的大小与两个电荷电量的乘积成正比，与他们距离的平方成反比；作用力方向是同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引。

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \vec{e}_{r21}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}$$



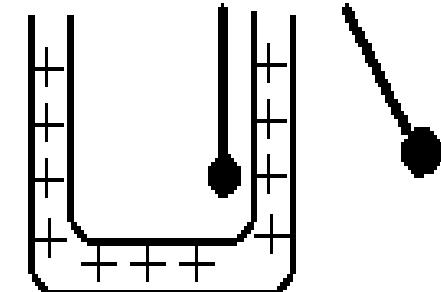
\vec{F}_{21} —— 电荷 q_1 作用于电荷 q_2 的力。

\vec{e}_{r21} —— 单位矢量，由施力物体指向受力物体。

ϵ_0 —— 真空介电常数。 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$

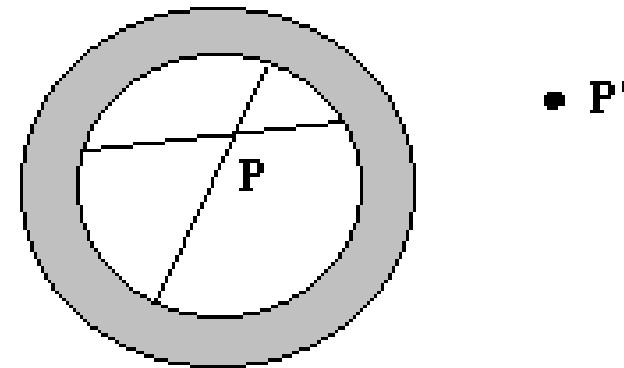
库仑定律的建立

- Franklin首先发现金属小杯内的软木小球完全不受杯上电荷的影响；
- 在Franklin的建议下， Priestel做了实验 —— 提出问题



猜测答案

- 现象与万有引力有相同规律
- 由牛顿力学可知：球壳对放置在壳外的物体有引力，而放置在球壳内任何位置的物体受力为零。
- 类比：电力与距离平方成反比
(1766年做的实验，未被重视)



$$F_{\text{引}} \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\sim F_{\text{电}} \propto \frac{1}{r^{2^12}}$$

设计实验

- 1769年Robison首先用直接测量方法确定电力定律，得到两个同号电荷的斥力
- 两个异号电荷的引力比平方反比的方次要小些。
(研究结果直到1801年发表才为世人所知)

Cavendish实验

1772年Cavendish遵循Priestel的思想设计了实验“验证电力平方反比律”，如果实验测定带电的空腔导体的内表面确实没有电荷，就可以确定电力定律是遵从平方反比律的即

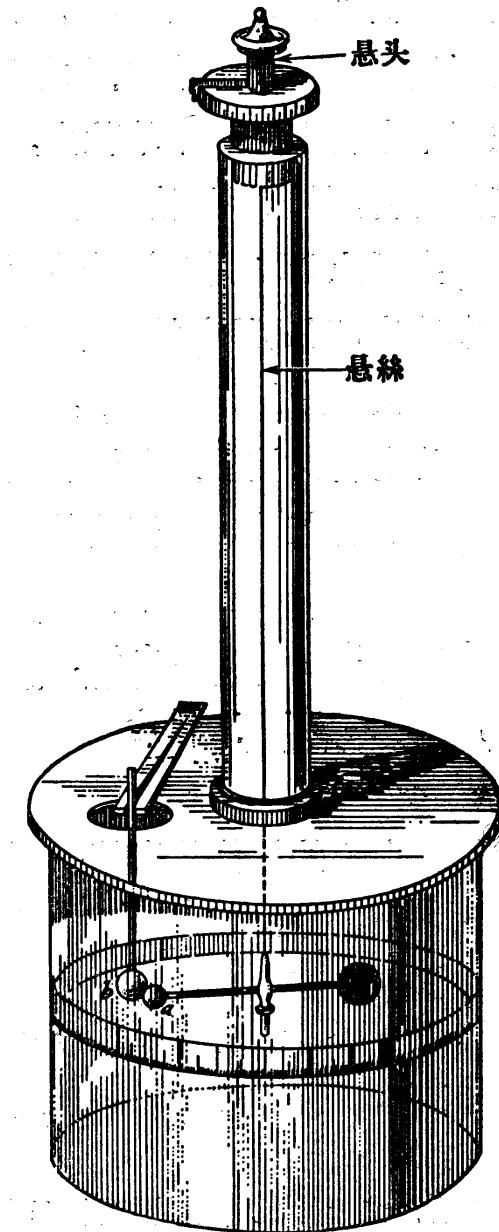
$$f \propto r^{-2 \pm \delta} \quad \delta \text{越小, 内表面电荷越少}$$

- 他测出不大于0.02（未发表，100年以后Maxwell整理他的大量手稿，才将此结果公诸于世。）

1785年Coulomb测出结果

- 精度与十三年前Cavendish的实验精度相当
 - 库仑是扭称专家；
 - 电斥力——扭称实验，数据只有几个，且不准确（由于漏电）——不是大量精确的实验；
- 电引力——单摆实验得
- 电引力单摆周期正比于距离
- 与万有引力单摆周期类比，得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{Gm}} r \sim F_{\text{电}} \propto r^{-2+\delta}, \delta < 10^{-2}$$



讨论

- 平方反比律精度非常高，最近的结果： $\delta \leq 2 \times 10^{-16}$
- 上述公式并非都是大量实验的结果，是在事实基础上理性思维的结果。
- 分析点电荷受力：只能沿联线，否则空间旋转 180° 就不对称了。
 - (a) 
 - (b) 
 - (c) 
- 静止电荷—相对观察者静止。可推广至静止电荷对运动电荷的作用（例：原子核→电子），反之不然。
- 成立条件：真空中，点电荷，静止
- 适用范围： $10^{-15} m < r < 10^7 m$
- 库仑力遵守牛顿第三定律 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

【例】 在氢原子内, 电子和质子的间距为 $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$. 求它们之间电相互作用和万有引力, 并比较它们的大小.

【解】 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$F_e = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N} \quad F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

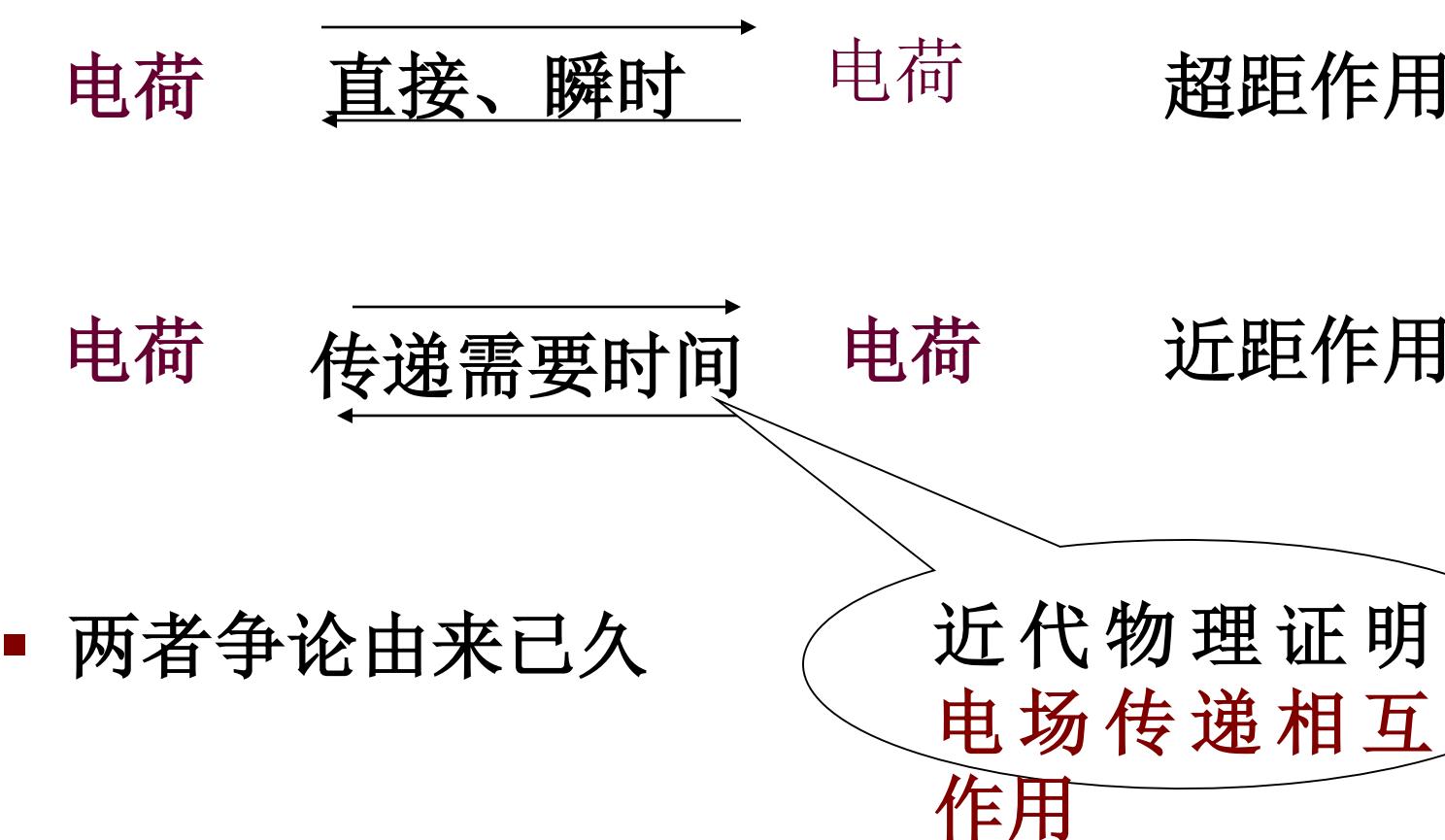
$\left. \begin{array}{l} F_e \\ F_g \end{array} \right\} = \frac{F_e}{F_g} = 2.27 \times 10^{39}$

(微观领域中, 万有引力比库仑力小得多, 可忽略不计.)

§ 8-2 电场 电场强度及其计算

一、电场(Electric Field)

实验证实了两静止电荷间存在相互作用的静电力，但其相互作用是怎样实现的？

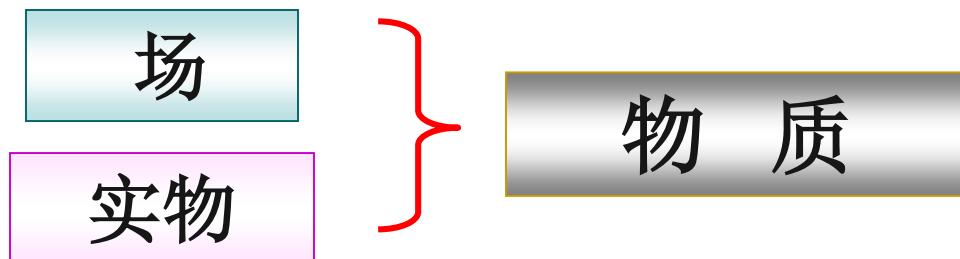


场：物理量在空间的分布

- 物理量：标量场、矢量场
- 例如：温度场，速度场，引力场
- 空间分布： (x, y, z) 的函数 $T(x, y, z)$
- 具有空间兼容性：场可以叠加



场是一种特殊形态的物质



物质性表现为具有能量、动量和质量等

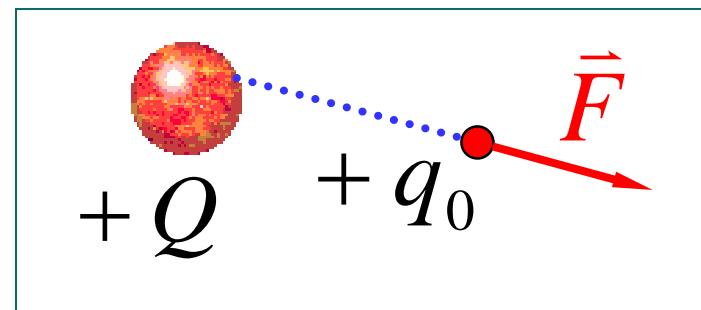
二、电场强度(Electric Field Intensity)

静电场对外表现有以下重要性质：

1. 引入电场的任何带电体都受电场作用力——电场力；
2. 带电体在电场中移动时，电场力对带电体做功。

试验电荷：

1. 体积足够小，可看作点电荷
2. 电量足够小，故对原电场几乎无影响



描述电场性质的物理量不应依赖于试探电荷 q_0

所以定义

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场中某点处的**电场强度** \vec{E} 等于位于该点处的**单位试验电荷**所受的力，其方向为**正电荷**受力方向.

- ◆ 单位 $N \cdot C^{-1} \cdot V \cdot m^{-1}$

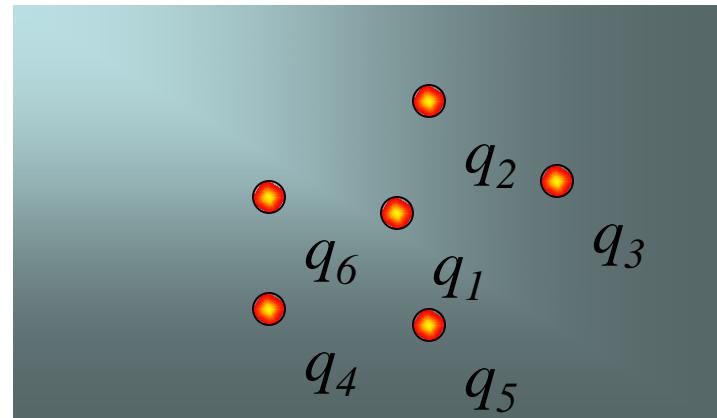
- ◆ 电荷 q 在电场中受力 $\vec{F} = q\vec{E}$

三、电场力及其计算方法

若一个点电荷 q 处于某电场中，所在点处的场强为 E ，则该点电荷所受到的电场力为：

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

点电荷系所受的电场力：



$$\begin{aligned}\vec{F} &= q_1 \vec{E}_1 + q_2 \vec{E}_2 + q_3 \vec{E}_3 + q_4 \vec{E}_4 + \dots \\ &= \sum q_i \vec{E}_i\end{aligned}$$

点电荷组所受的电场力等于各个点电荷所受电场力的矢量和。

连续带电体所受的电场力:

对于连续带电体所受的电场力要使用微积分的方法进行运算。

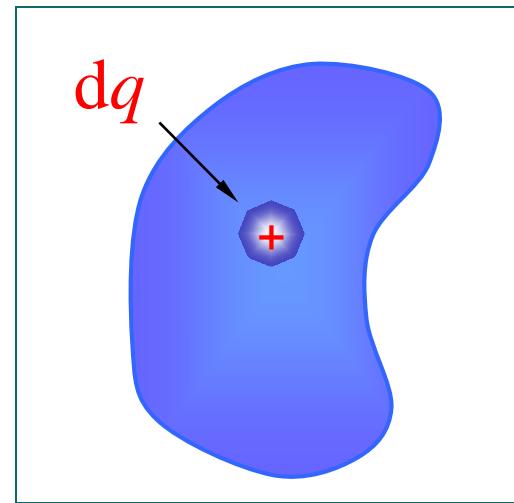
电荷元: dq

受力: $d\vec{F} = \vec{E}dq$

合力: $\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \vec{E}dq$

电荷元的选取与积分:

$$1, \text{ 电荷呈体分布: } \rho = \frac{dq}{dV} \quad dq = \rho dV$$

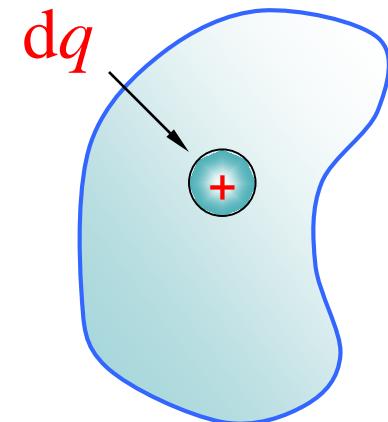


$$\vec{F} = \int_V \vec{E} \rho dV$$

2, 电荷呈面分布 $\sigma = \frac{dq}{dS}$ 电荷面密度。

$$dq = \sigma dS$$

$$\vec{F} = \int_S \vec{E} \sigma dS$$

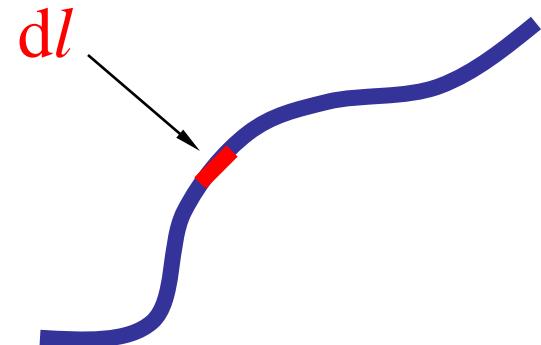


3, 电荷呈线分布

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \text{电荷线密度}$$

$$dq = \lambda dl$$

$$\vec{F} = \int_L \vec{E} \lambda dl$$

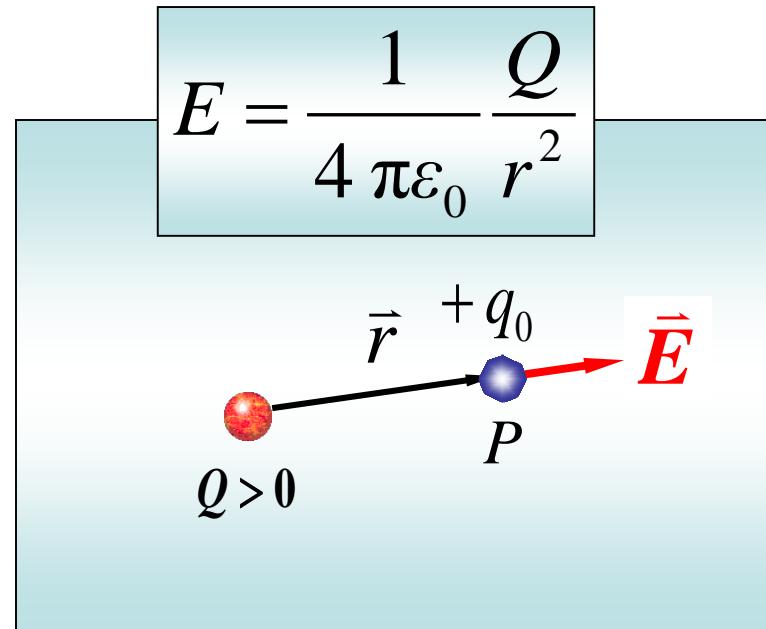
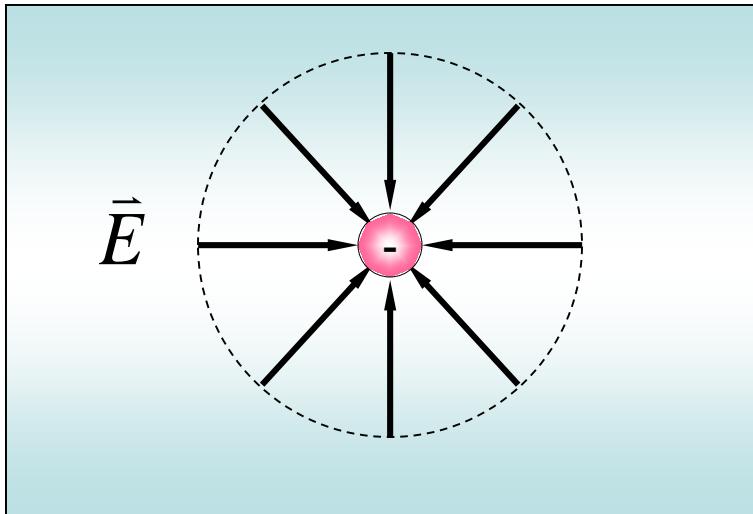


四 点电荷产生的电场与场强叠加原理

(1) 点电荷产生的场强

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$



P 点处场强: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q\hat{\vec{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

**(1) $Q > 0$ \vec{E} 与 \vec{r} 同向
 $Q < 0$ \vec{E} 与 \vec{r} 反向**

(2) 以 Q 为球心 r 为半径

球面上的 \vec{E} 的关系

(3) $r \rightarrow \infty, E \rightarrow 0$

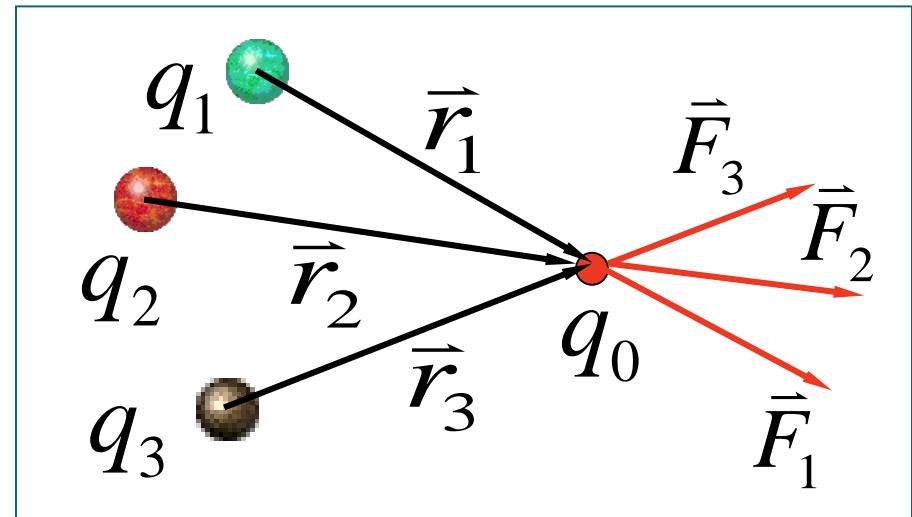
$r \rightarrow 0, E \rightarrow \infty$ 不成立

(2) 电场强度叠加原理(Superposition of Electric field)

两个点电荷之间的作用力并不会因为第三个点电荷的存在而改变。

点电荷 q_i 对 q_0 的作用力

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^3} \vec{r}_i$$



由力的叠加原理得 q_0 所受合力 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

故 q_0 处总电场强度 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0}$

电场强度的叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

电场强度的叠加原理：

任意带电体系所激发的电场中某点的电场强度，等于该体系各个部分单独存在时在该点激发的电场强度的矢量和。

(3) 点电荷系的电场

对包含 n 个点电荷的点电荷系，第*i*个点电荷 q_i 在场点 P 产生的场强为：

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \vec{e}_{r1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \vec{e}_{r2} + \dots = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

(4) 电荷连续分布情况

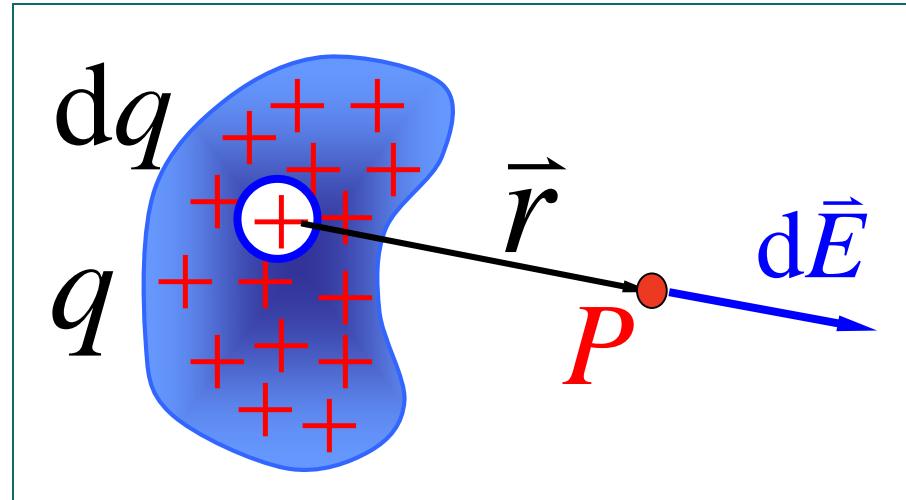
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} dq$$

电荷呈体分布：

$$dq = \rho dV$$

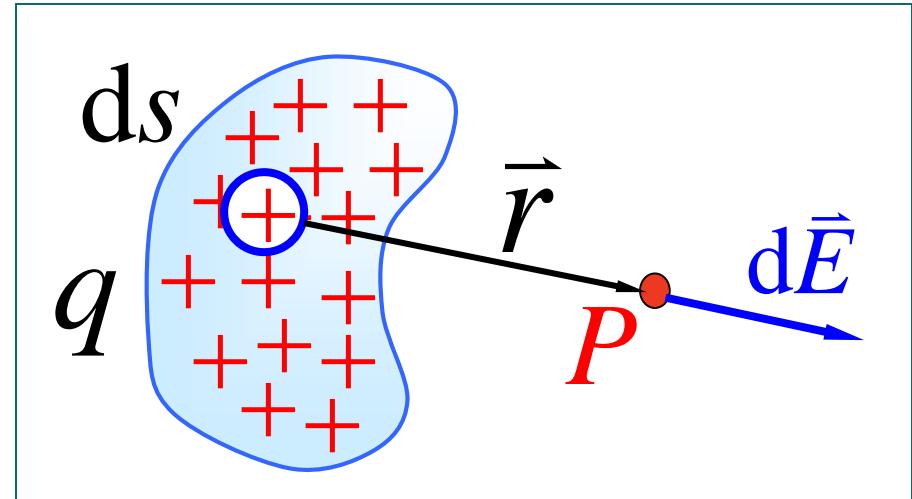
$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\rho \vec{e}_r}{r^2} dV$$



电荷呈面分布：

$$dq = \sigma dS$$

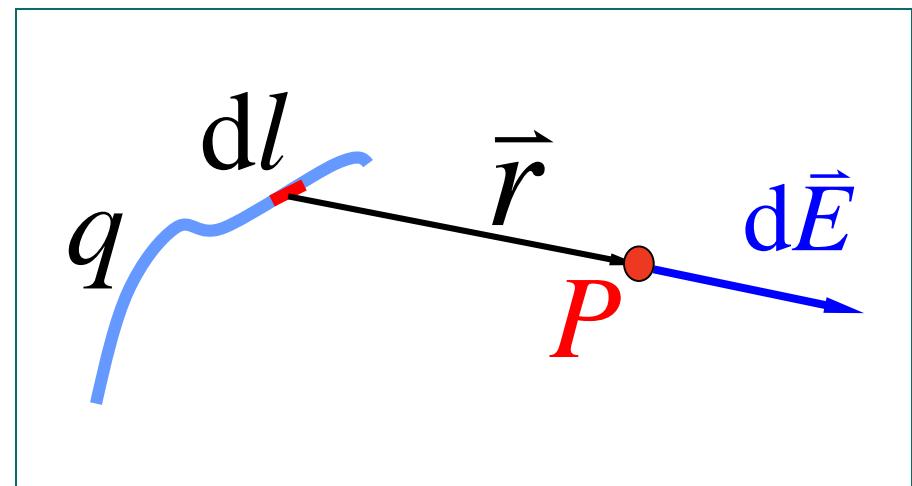
$$\vec{E} = \int_S \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sigma \vec{e}_r}{r^2} dS$$



电荷呈线分布：

$$dq = \lambda dl$$

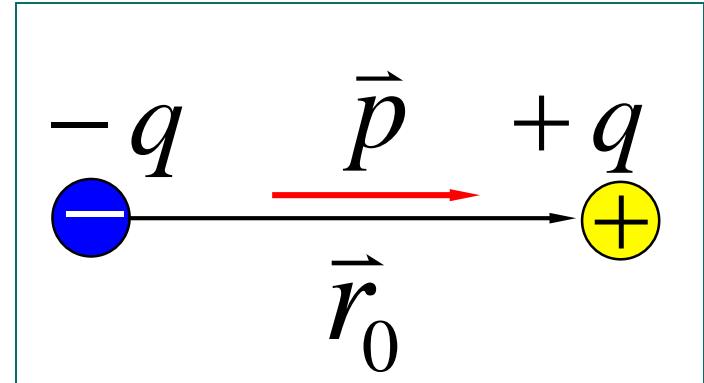
$$\vec{E} = \int_l \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\lambda \vec{e}_r}{r^2} dl$$



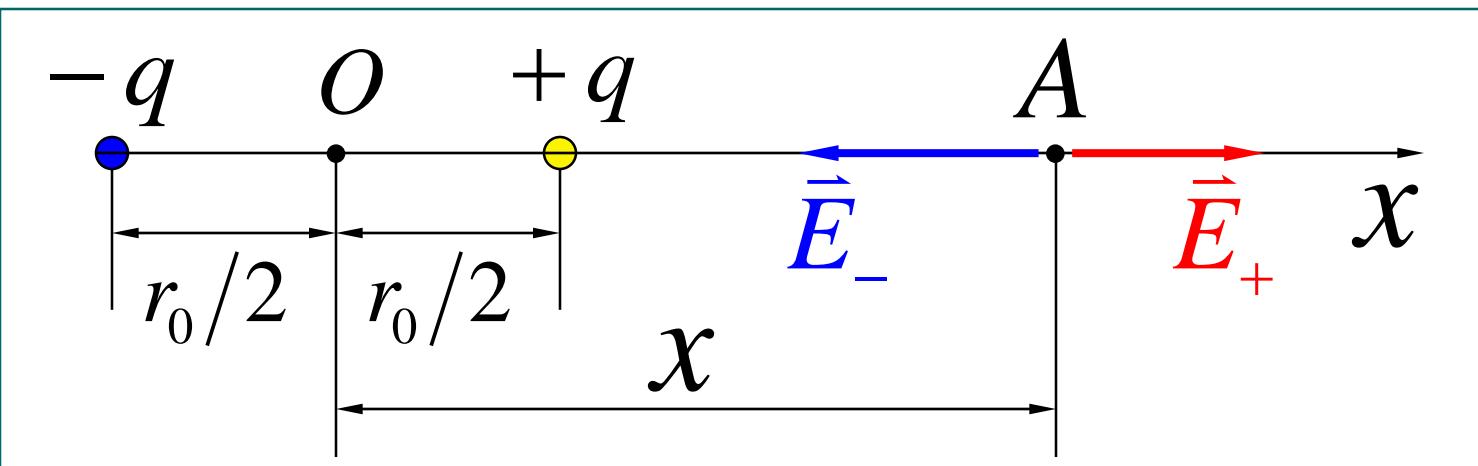
电偶极子(electric dipole)的电场强度

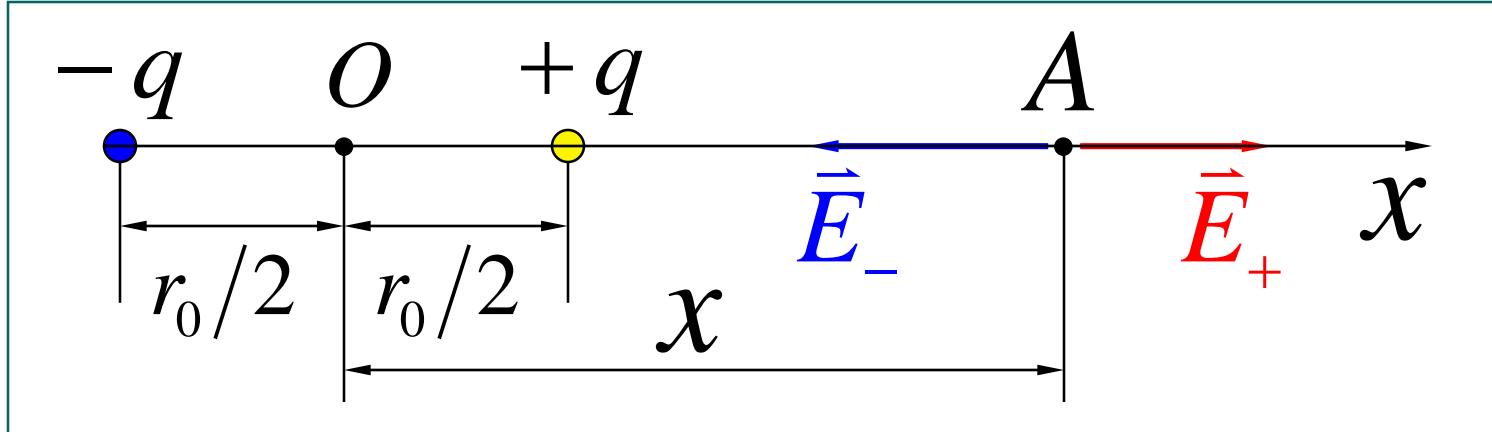
电偶极子的轴 \vec{r}_0

电偶极矩(电矩) $\vec{p} = q\vec{r}_0$



(1) 电偶极子轴线延长线上一点的电场强度





$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{(x - r_0/2)^2} \vec{i} \quad \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{(x + r_0/2)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{2xr_0}{(x^2 - r_0^2/4)^2} \right] \vec{i}$$

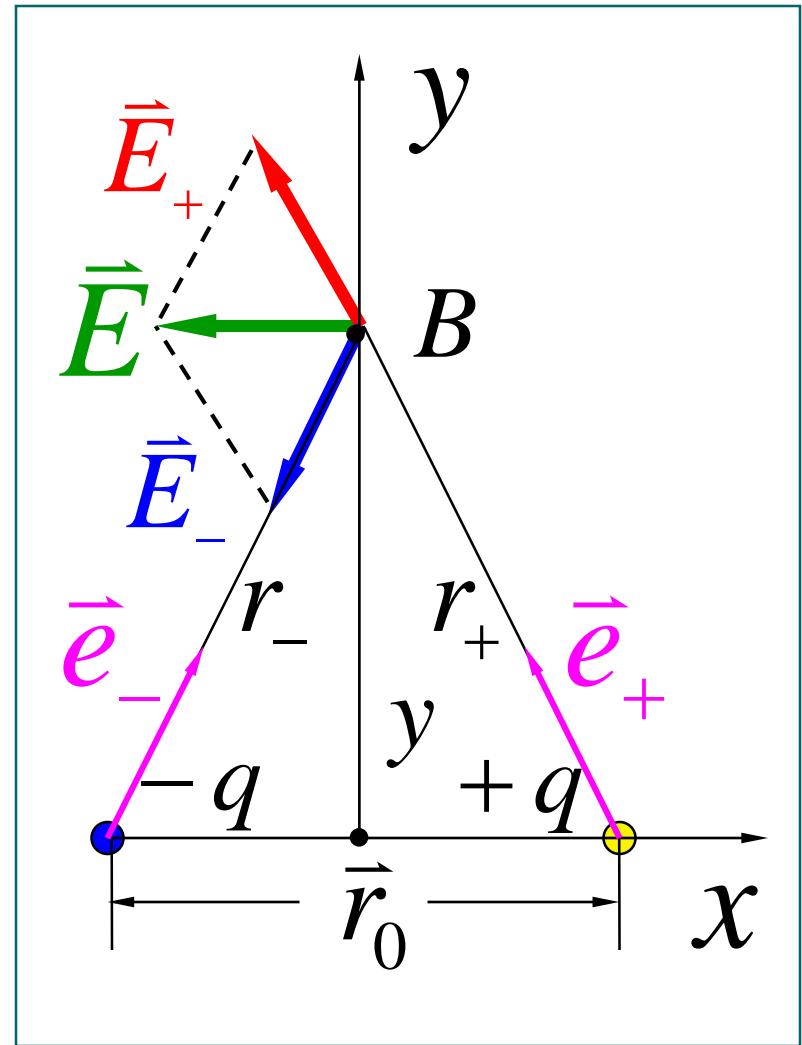
$$\text{若 } x \gg r_0 \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2r_0 q}{x^3} \vec{i} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\bar{p}}{x^3}$$

(2) 电偶极子轴线的中垂线上一点的电场强度

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r_+^2} \vec{e}_+ \\ \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r_-^2} \vec{e}_- \end{array} \right.$$

$$r_+ = r_- = r = \sqrt{y^2 + (\frac{r_0}{2})^2}$$

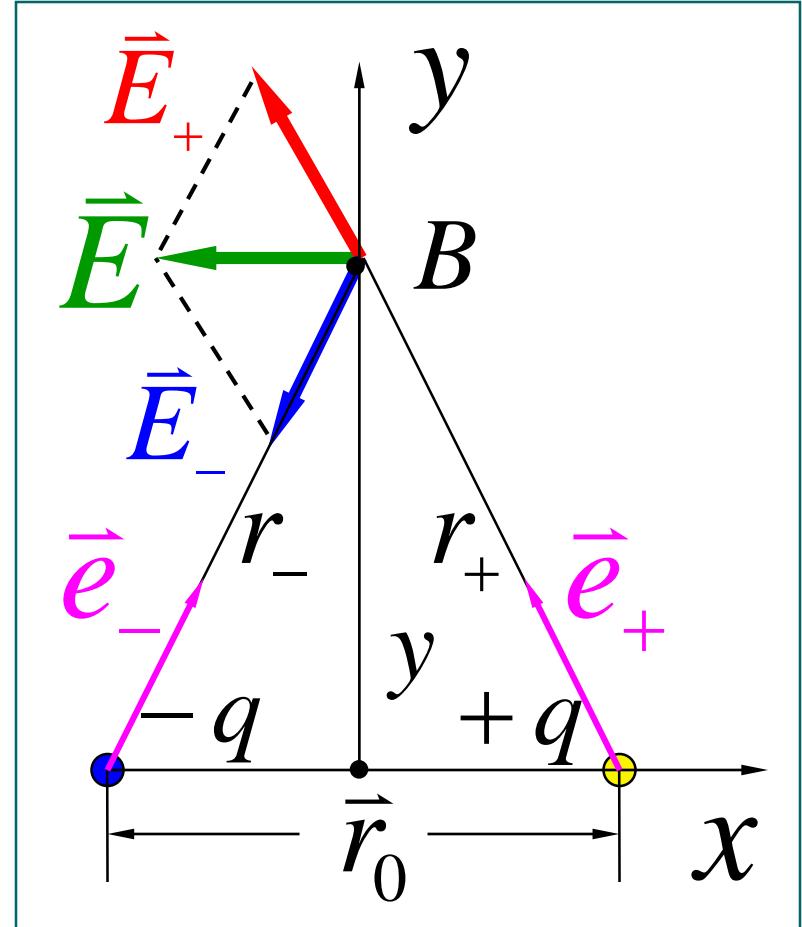
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_+ = (-r_0/2\vec{i} + y\vec{j})/r \\ \vec{e}_- = (r_0/2\vec{i} + y\vec{j})/r \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^3} \left(y \vec{j} - \frac{r_0}{2} \vec{i} \right) \\ \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^3} \left(y \vec{j} + \frac{r_0}{2} \vec{i} \right) \\ \vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{qr_0}{r^3} \vec{i} \\ = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{qr_0}{(y^2 + \frac{r_0^2}{4})^{3/2}} \vec{i} \end{array} \right.$$

若 $y \gg r_0$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{qr_0}{y^3} \vec{i} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\bar{p}}{y^3}$$



【例】求一均匀带电直线在其中垂线上的一点的场强.

已知: L, λ ($\lambda > 0$)

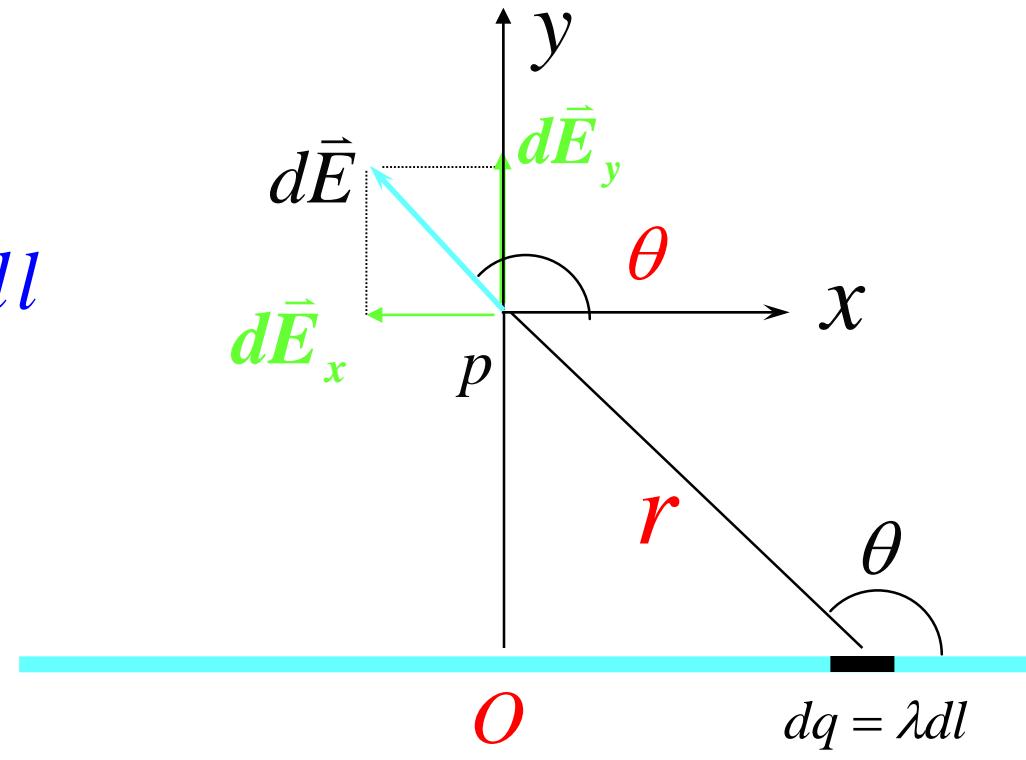
解题步骤

1. 选电荷元 $dq = \lambda dl$

2. 确定 $d\vec{E}$ 的方向

3. 确定 $d\vec{E}$ 的大小

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2}$$



4. 建立坐标, 将 $d\vec{E}$ 投影到坐标轴上

$$dE_x = dE \cos \theta \quad dE_y = dE \sin \theta$$

$$E = \int dE_y$$

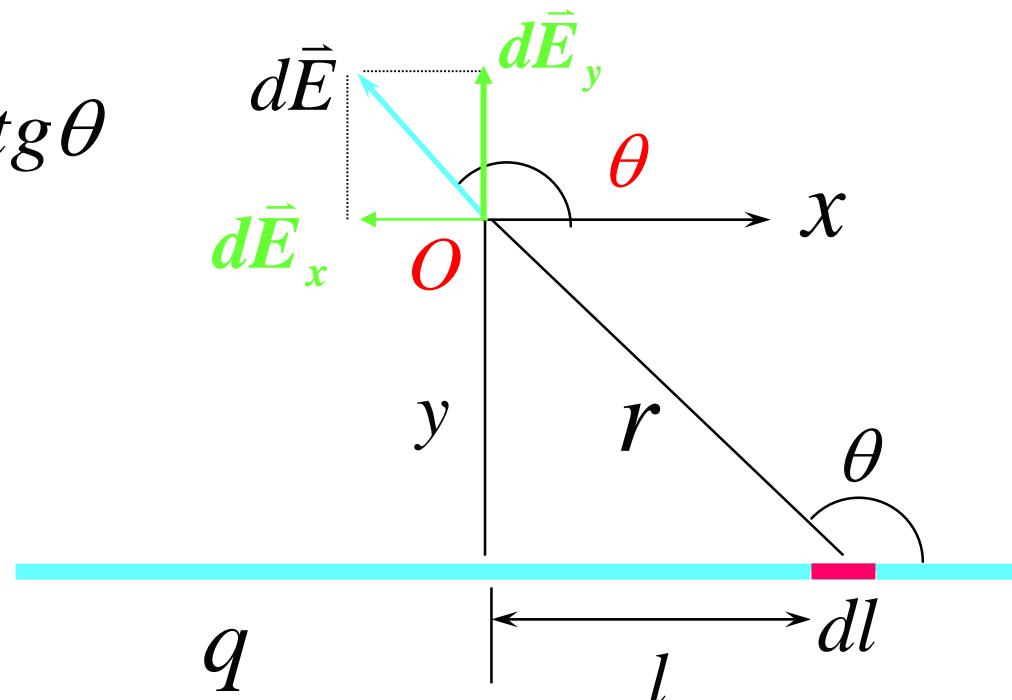
5. 选择积分变量

r 、 θ 、 l 是变量，而线积分只需要一个变量
选 θ 作为积分变量

$$l = y \operatorname{ctg}(\pi - \theta) = -y \operatorname{ctg} \theta$$

$$\therefore dl = y \csc^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + l^2 \\ &= y^2 + y^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \\ &= y^2 \csc^2 \theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} dE_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \sin \theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y \csc^2 \theta d\theta}{y^2 \csc^2 \theta} \sin \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

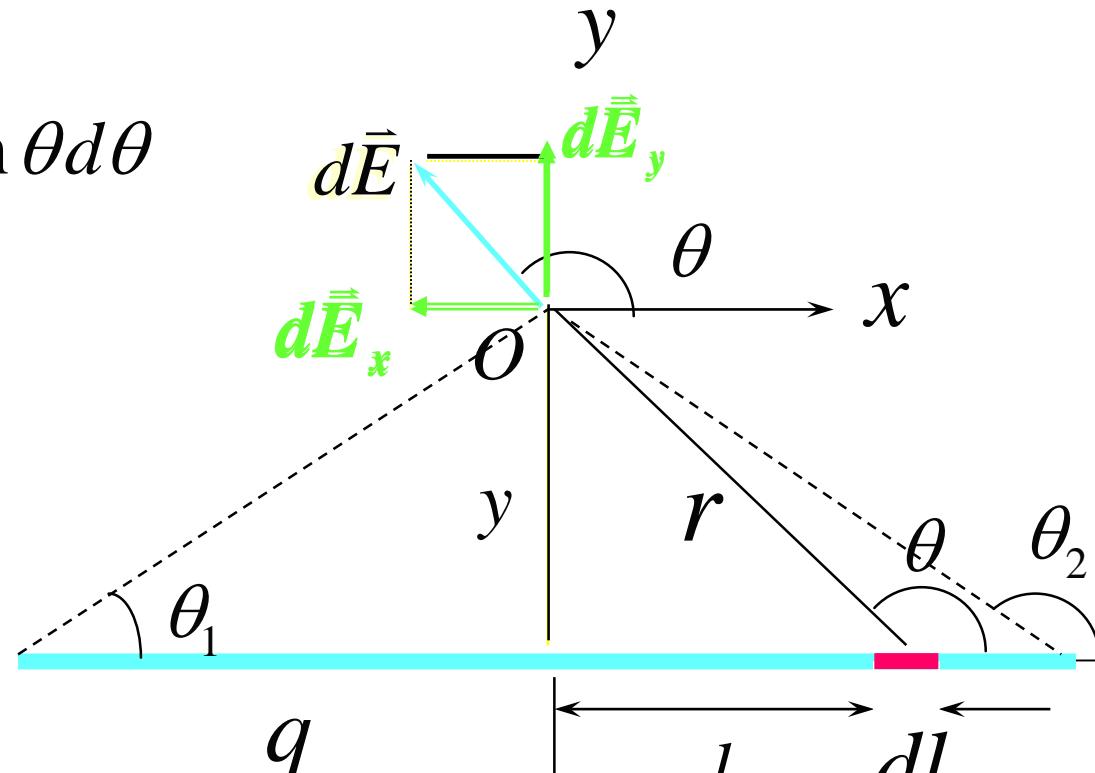
$$E = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

$$\cos \theta_1 = -\cos \theta_2 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \times \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}}$$



$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \times \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}}$$

讨论

当 $y \ll L$

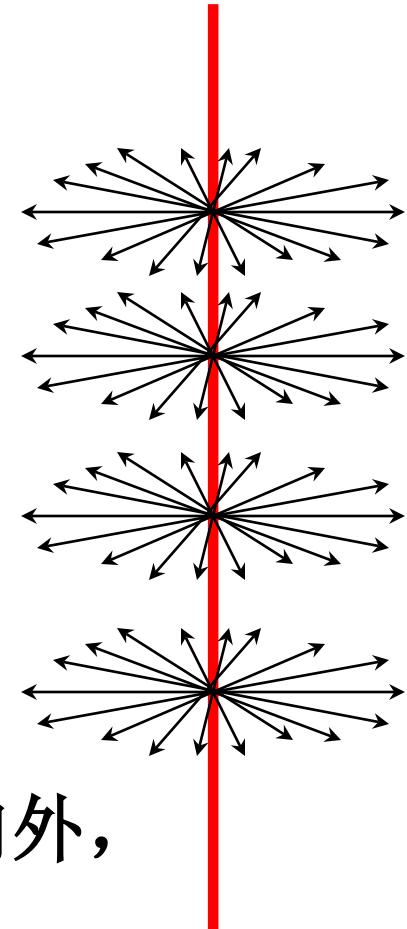
$$E \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

无限长均匀带电直线的场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

当 $\lambda > 0, E_y > 0, \vec{E}$ 方向垂直带电导体向外,

当 $\lambda < 0, E_y < 0, \vec{E}$ 方向垂直带电导体向里。

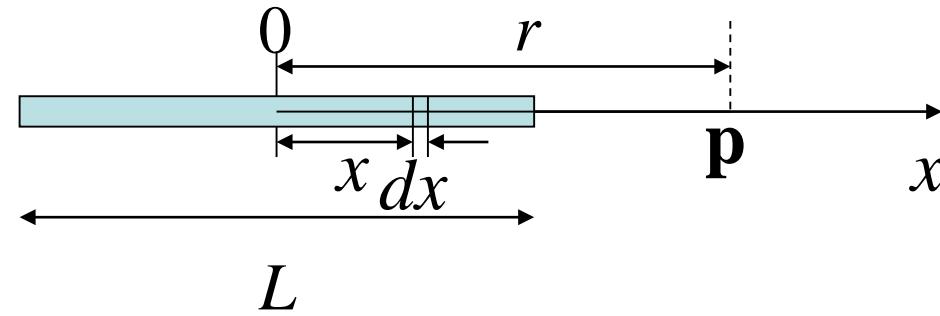


【例】 一均匀带电直线长为L，线电荷密度为 λ 。求直线的延长线上距L中点为 $r(r>L/2)$ 处的场强。

【解】

$$dq = \lambda dx$$

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(r-x)^2}$$

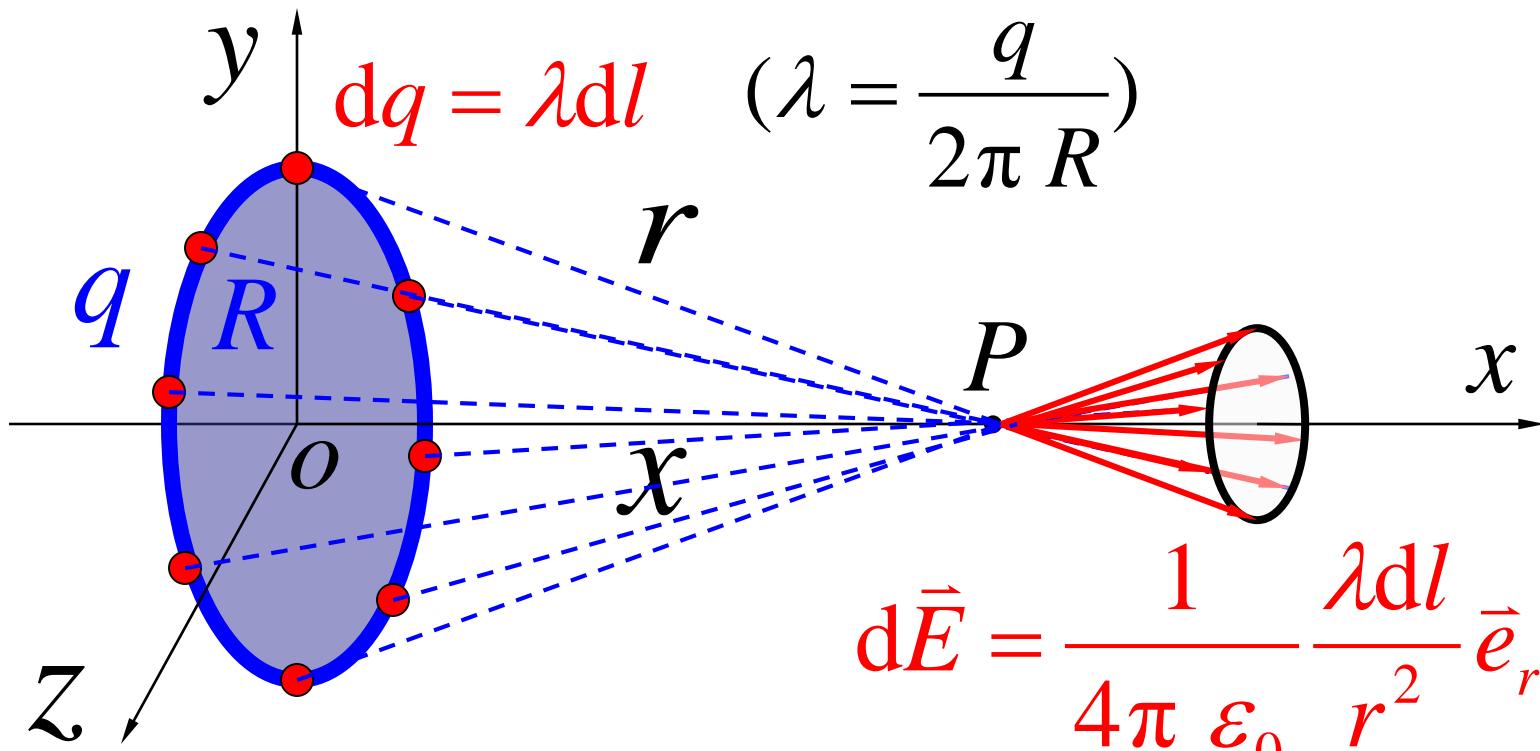


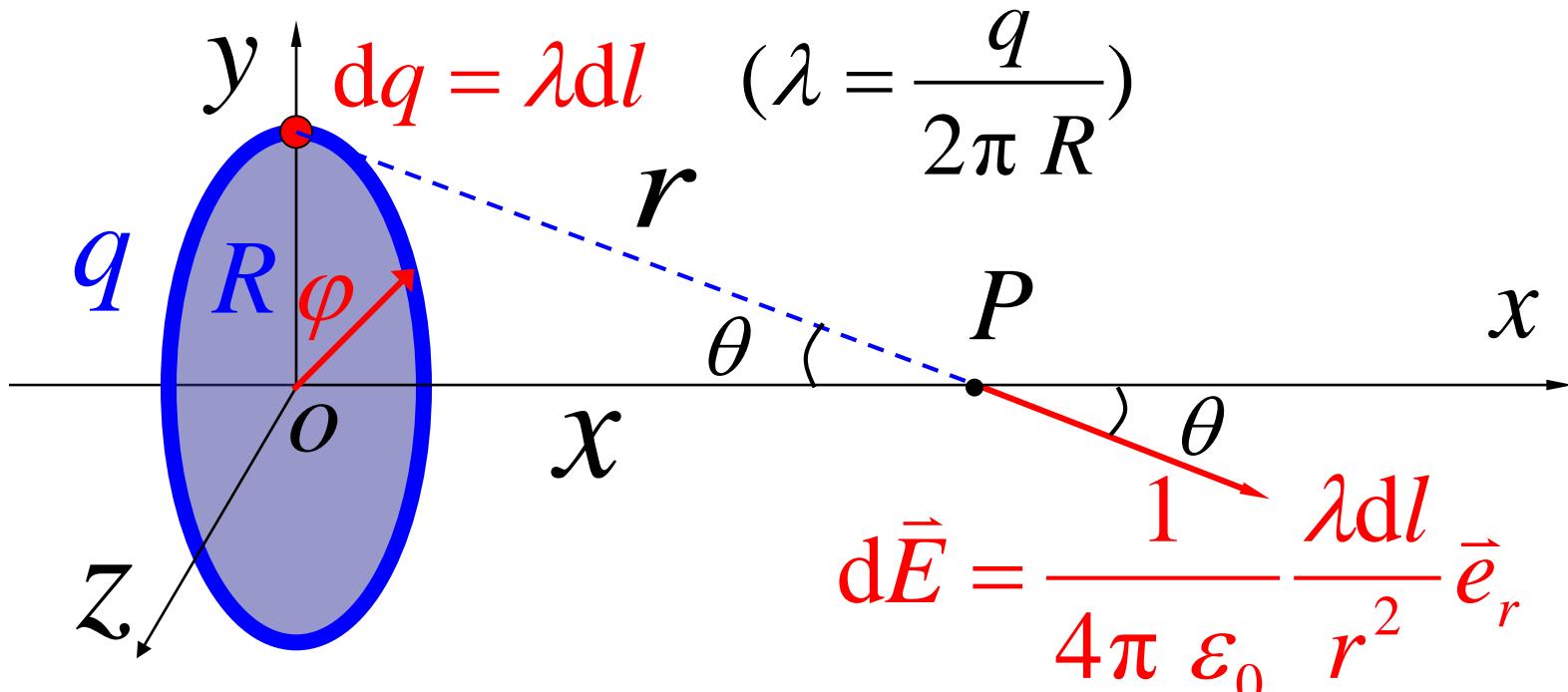
$$\begin{aligned} E &= \int dE = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(r-x)^2} \\ &= \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0(r^2 - \frac{L^2}{4})} \end{aligned}$$

【例】 正电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的圆环上.
计算在环的轴线上任一点 P 的电场强度.

【解】

$$\bar{E} = \int d\bar{E} \quad \text{由对称性有 } \bar{E} = E_x \vec{i}_x$$





$$\begin{aligned}
 E &= \int_l dE_x = \int_l dE \cos \theta = \int_l \frac{\lambda dl}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{x}{r} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{x \lambda R d\varphi}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = \frac{qx}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$E = \frac{qx}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$



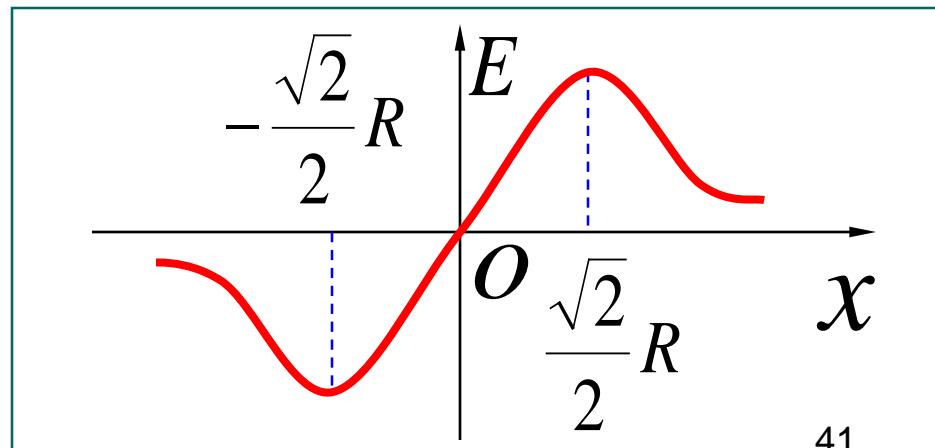
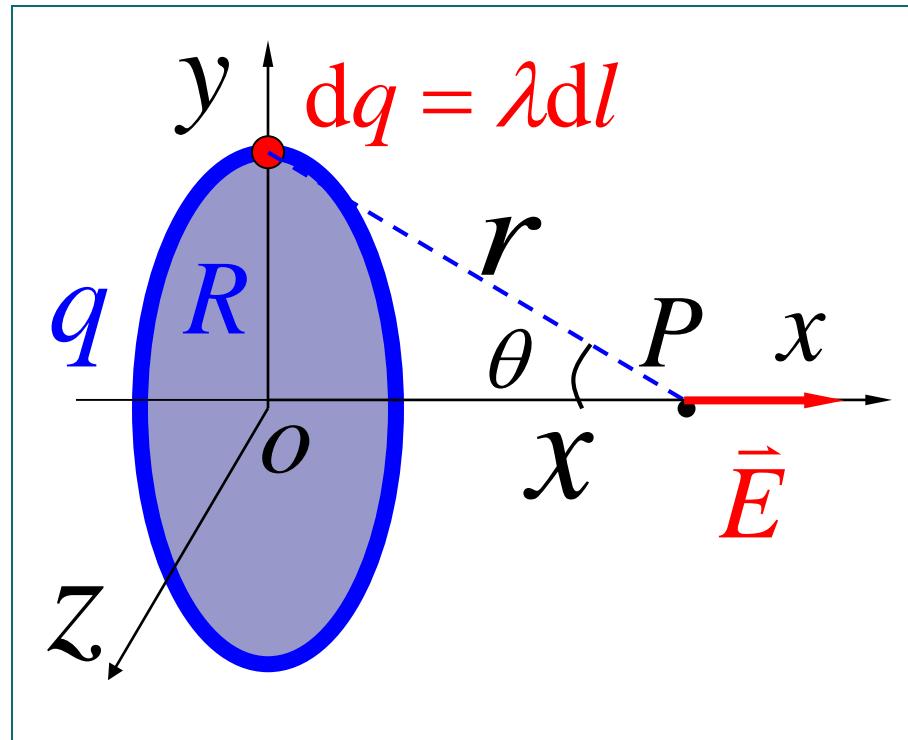
(1) 若 $x \gg R$

$$E \approx \frac{q}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

(点电荷电场强度)

(2) 当 $x \approx 0$ 时 $E \approx 0$

$$\frac{dE}{dx} = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$$



【例】均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

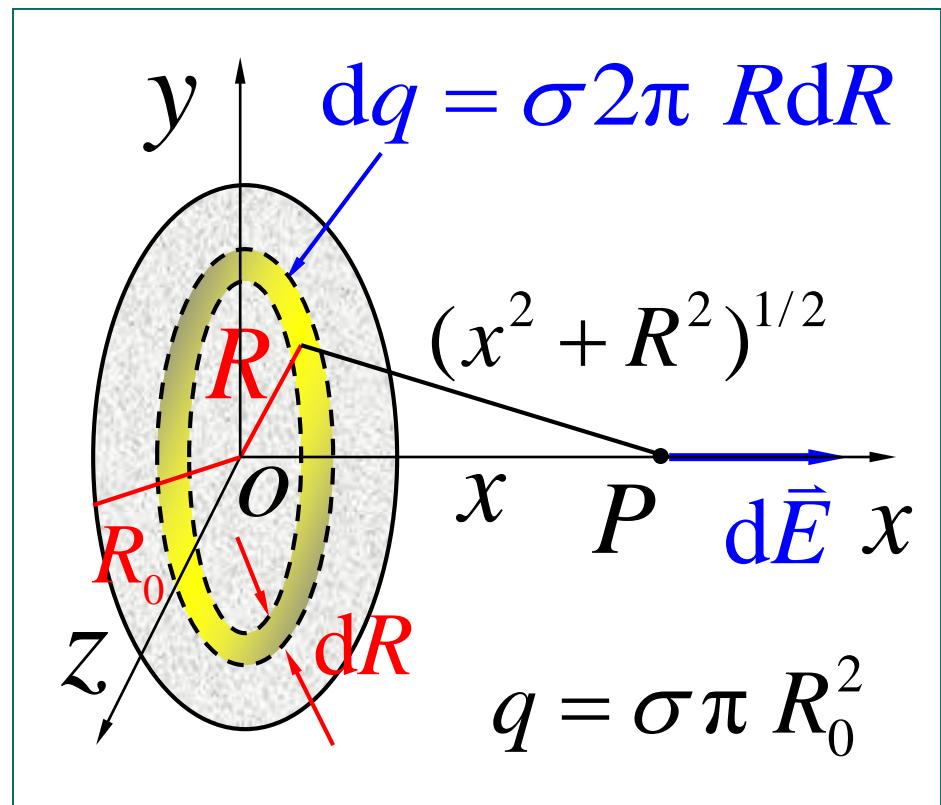
有一半径为 R_0 , 电荷均匀分布的薄圆盘, 其电荷面密度为 σ . 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.

【解】由前例

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$dE_x = \frac{dq \cdot x}{4\pi \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{xRdR}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

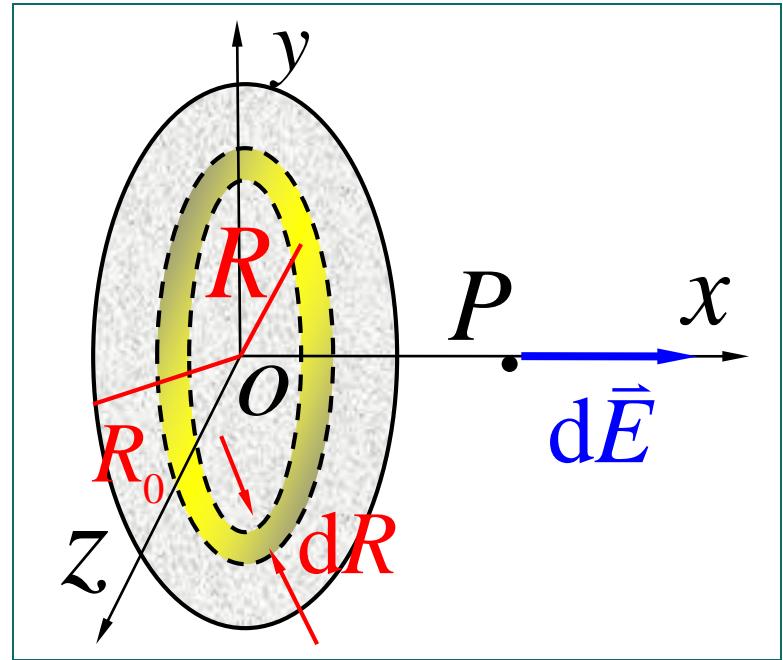


$$dE_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{xR dR}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE_x$$

$$= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{R dR}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right)$$



$$E = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right)$$

讨论

$$\begin{cases} x \ll R_0 & E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \left[\text{无限大均匀带电平面的电场强度} \right] \\ x \gg R_0 & E \approx \frac{q}{4\pi \epsilon_0 x^2} \quad (\text{点电荷电场强度}) \end{cases}$$

$$\left[\left(1 + \frac{R_0^2}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_0^2}{x^2} + \dots \right]$$

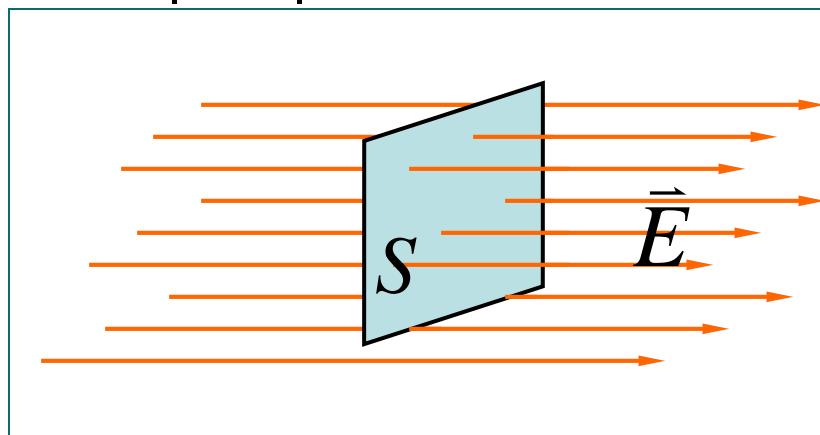
§ 8-3 电场线 电场强度通量 高斯定理

一、电场线(Electric Field lines)

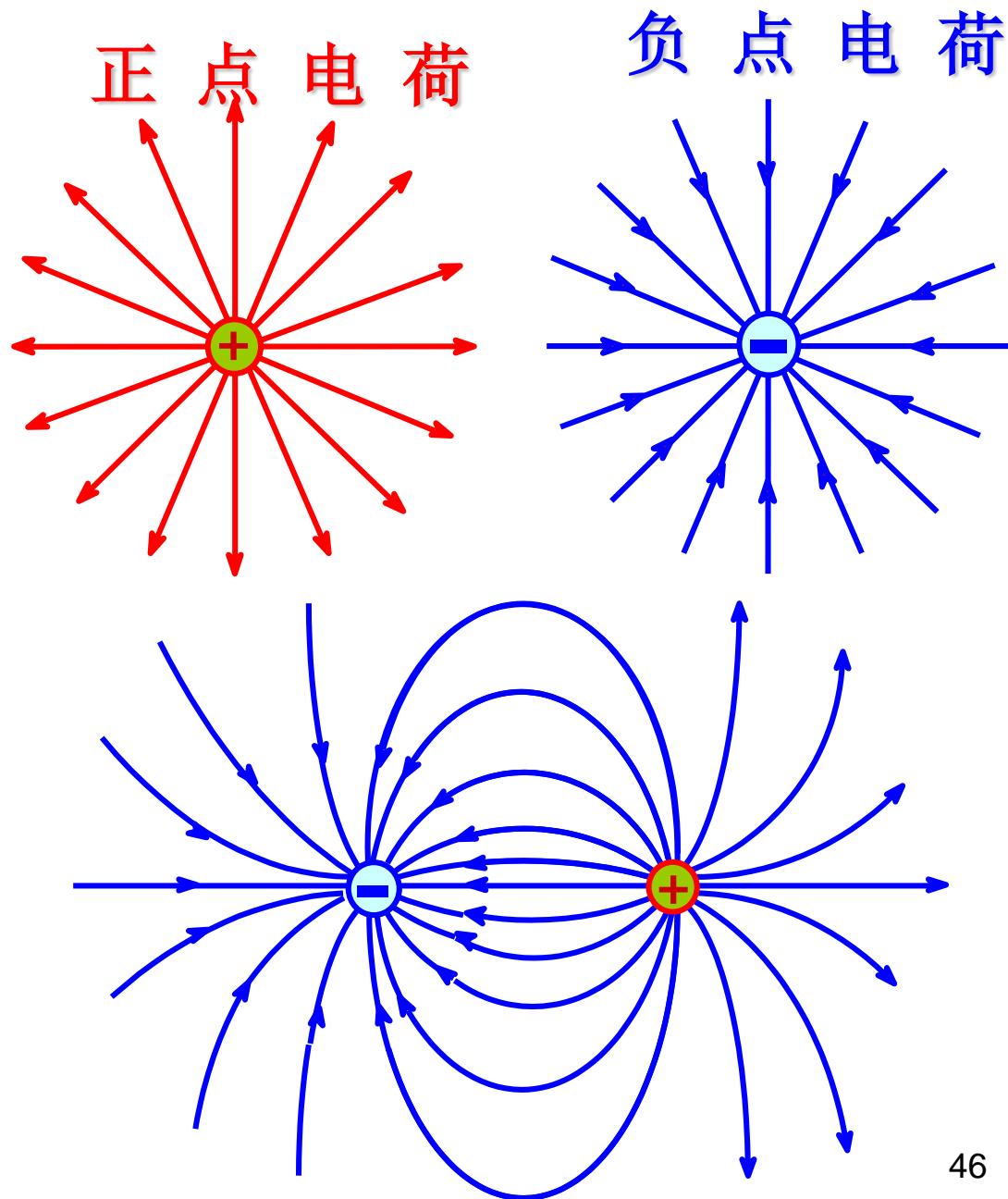
又称电力线(**electric line of force**)

规定

- 1) 曲线上每一点切线方向为该点电场方向
- 2) 通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小 $|\vec{E}| = E = dN / dS$

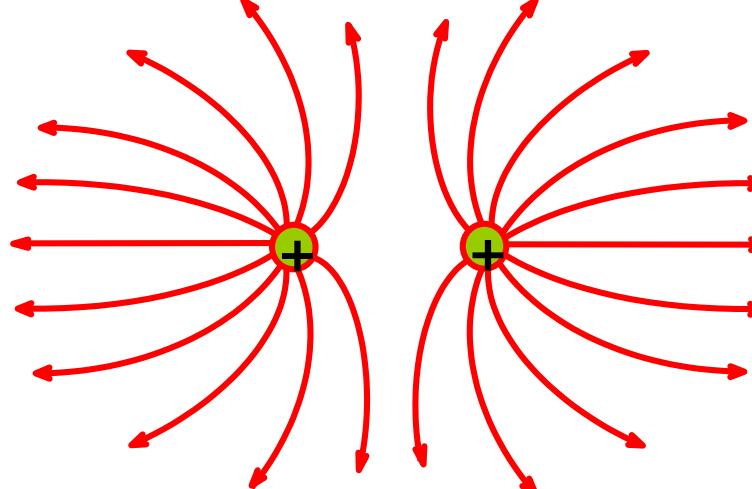


点电荷的电场线

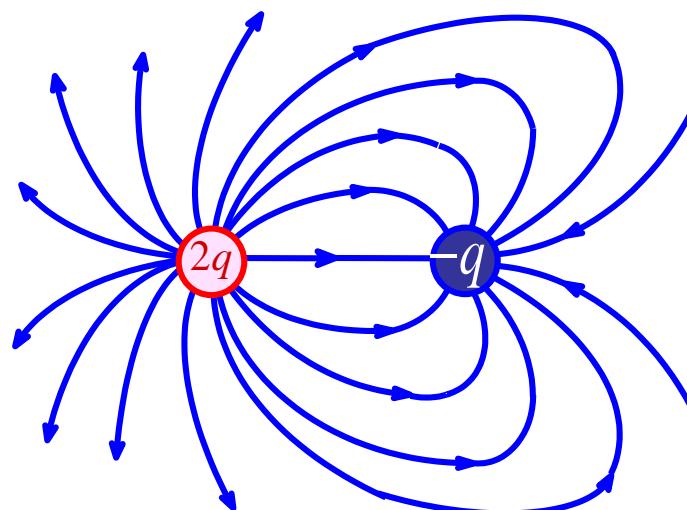


一对等量异号点电荷的电场线

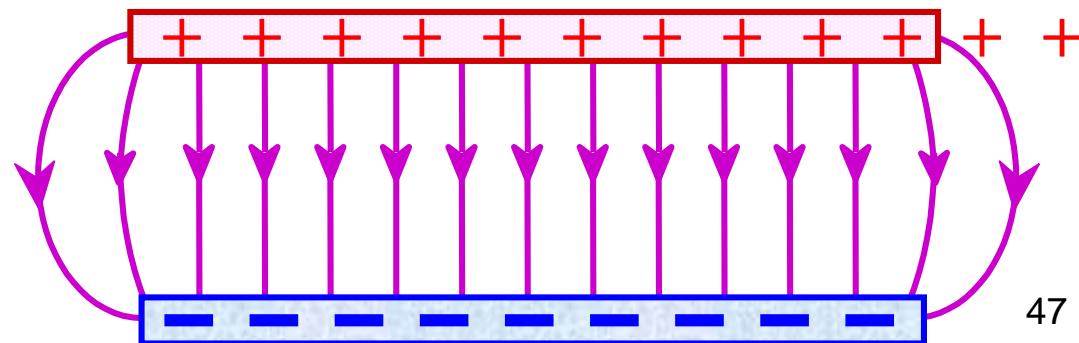
一对等量正点电荷的电场线



一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



电场线特性

- 1) 始于正电荷, 止于负电荷(或来自无穷远, 去向无穷远). ——有源性
- 2) 电场线不相交.
- 3) 静电场电场线不闭合. ——无旋性

关于电场线的几点说明

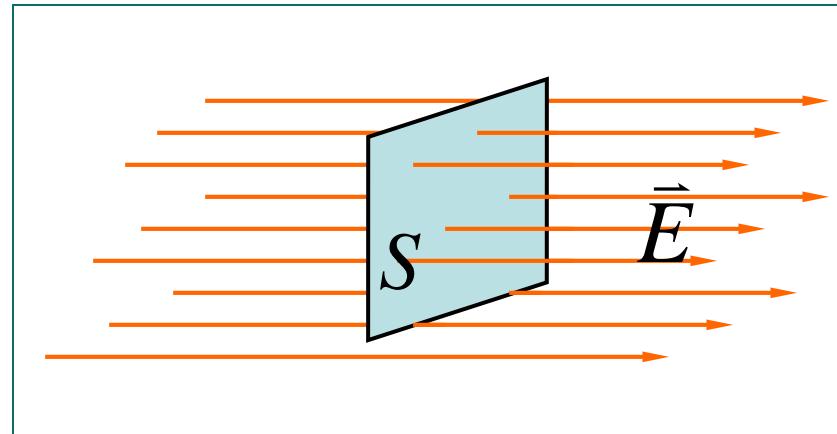
- 电场线是人为画出的, 在实际电场中并不存在;
- 电场线可以形象地、直观地表现电场的总体情况;
- 电场线图形可以用实验演示出来。

二 电场强度通量(electric flux)

通过电场中某一个面的电场线数叫做通过这个面的电场强度通量，简称电通量。

- ◆ 均匀电场， \vec{E} 垂直平面

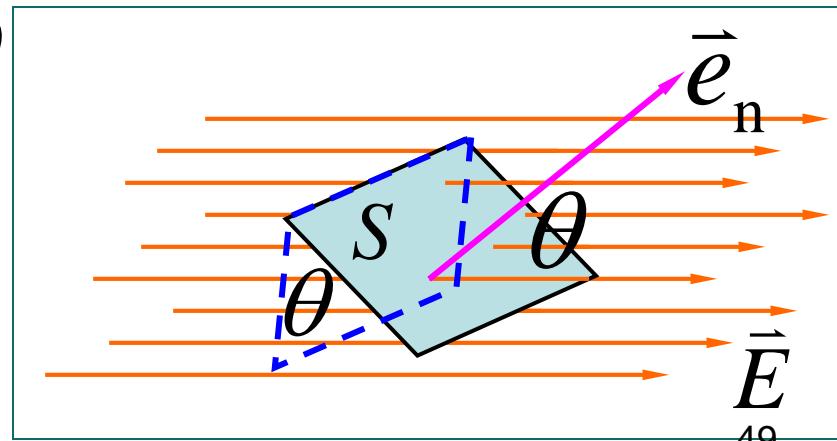
$$\Phi_e = ES$$



- ◆ 均匀电场， \vec{E} 与平面夹角 θ

$$\Phi_e = ES \cos \theta$$

$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S}$$



◆ 非均匀电场强度电通量

$$d\bar{S} = dS \cdot \vec{e}_n$$

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\bar{S}$$

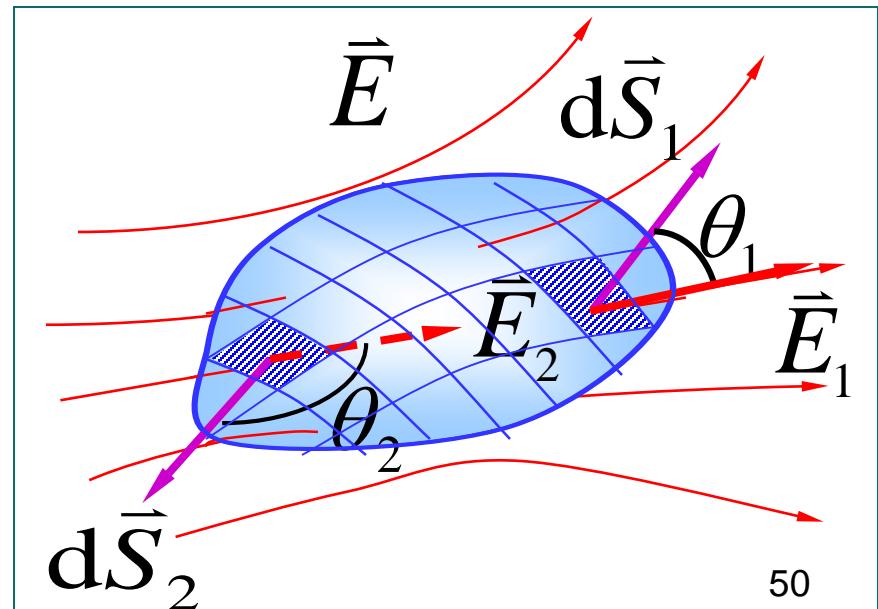
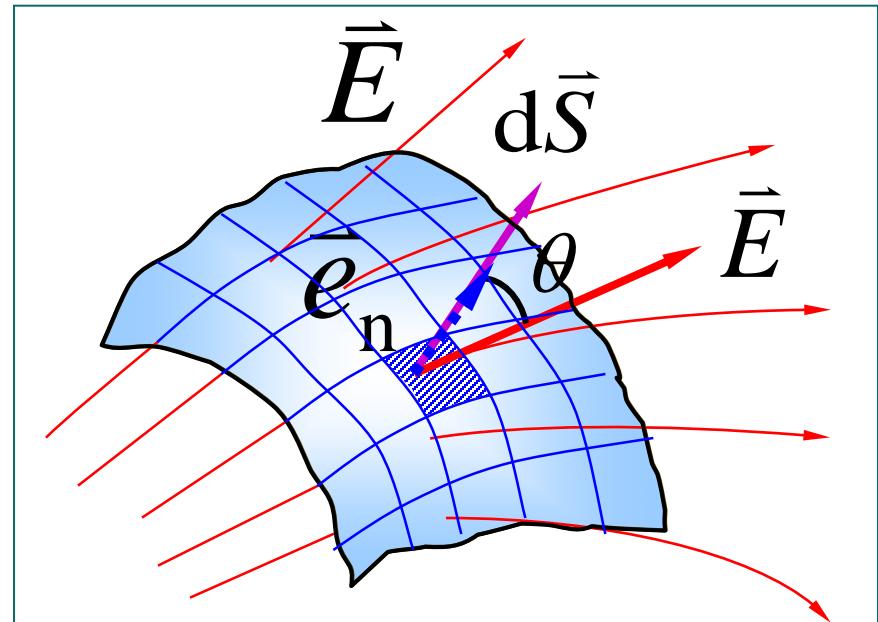
$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S E \cos \theta dS$$

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\bar{S}$$

◆ S 为封闭曲面，取 \vec{e}_n 方向向外

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad d\Phi_{e1} > 0$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad d\Phi_{e2} < 0$$



【约定】

闭面外法线为正，则

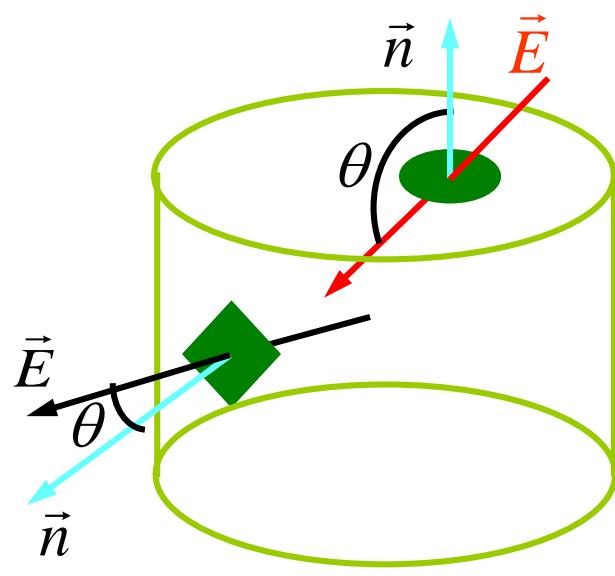
\vec{E} 线穿出闭面通量为正；

\vec{E} 线穿入闭面通量为负。

【例】（参见右图）

1) A点, $\theta < 90^\circ$, Φ_e 为正(出);

2) B点, $\theta > 90^\circ$, Φ_e 为负(入)。



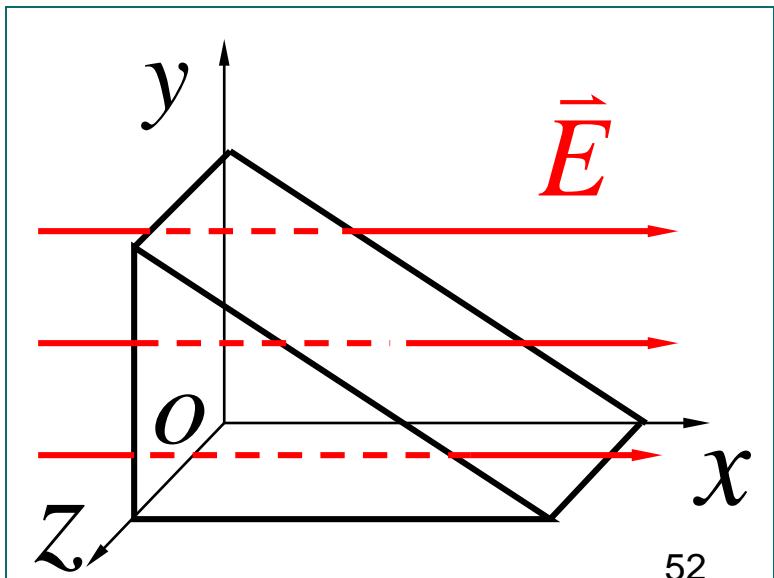
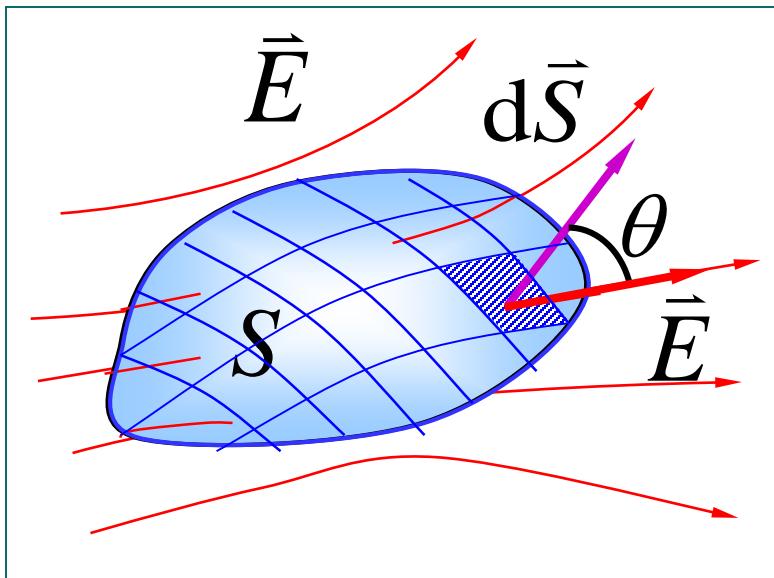
闭面的电通量

◆ 闭合曲面的电场强度通量

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cos \theta dS$$

【例】 如图所示，有一个三棱柱体放置在电场强度 $\vec{E} = 200\vec{i}\text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ 的匀强电场中。求通过此三棱柱体的电场强度通量。



【解】

$$\Phi_e = \Phi_{e\text{前}} + \Phi_{e\text{后}}$$

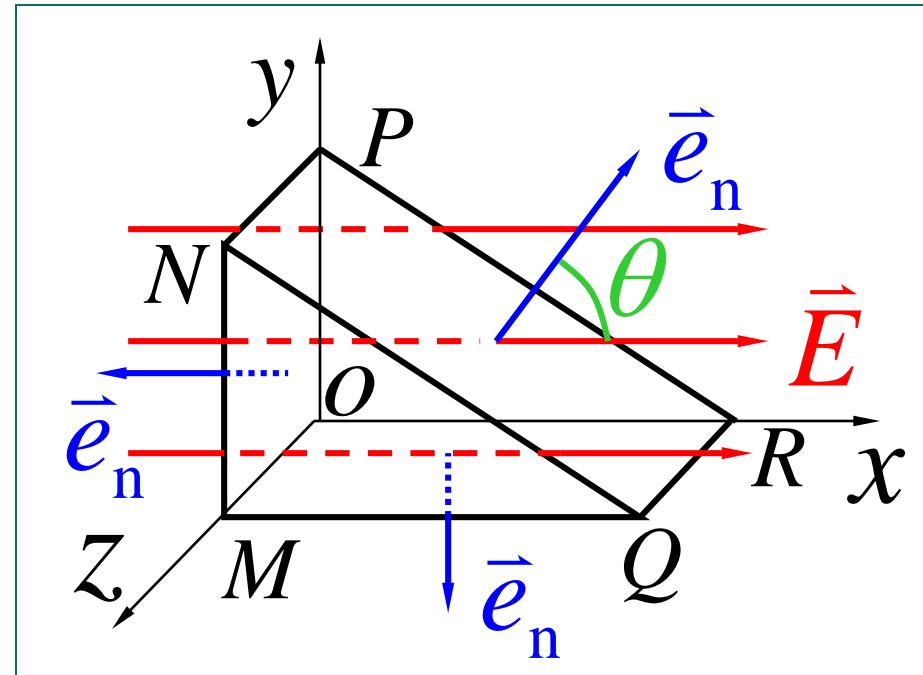
$$+ \Phi_{e\text{左}} + \Phi_{e\text{右}} + \Phi_{e\text{下}}$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{e\text{前}} &= \Phi_{e\text{后}} = \Phi_{e\text{下}} \\ &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Phi_{e\text{左}} = \int_{S\text{左}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES_{\text{左}} \cos\pi = -ES_{\text{左}}$$

$$\Phi_{e\text{右}} = \int_{S\text{右}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES_{\text{右}} \cos\theta = ES_{\text{左}}$$

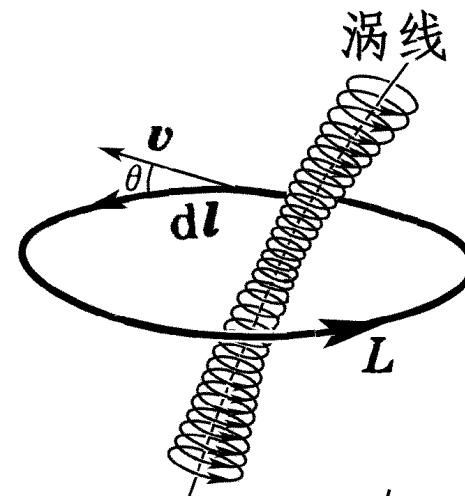
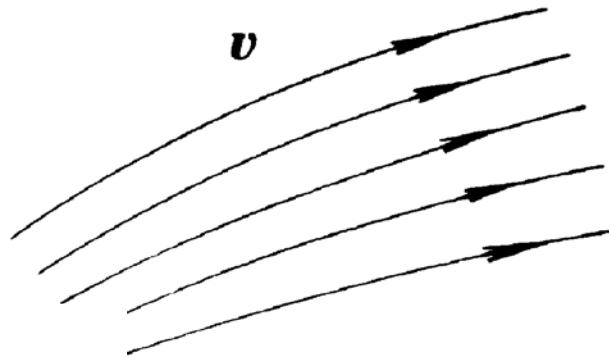
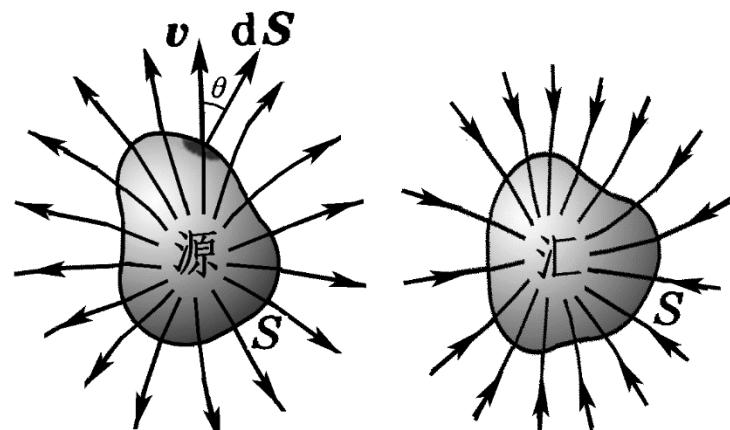
$$\Phi_e = \Phi_{e\text{前}} + \Phi_{e\text{后}} + \Phi_{e\text{左}} + \Phi_{e\text{右}} + \Phi_{e\text{下}} = 0$$



为什么要研究通量、环流？

- 温度 T 温度分布——温度场（标量场）
- 流速 v 流速分布——流速场（矢量场）
- 电荷产生的场具有什么性质?
 - 已知电荷可以根据场强定义和叠加原理求场分布
 - 已知场分布也可求得其他带电体在其中的运动
 - 物理学家不满足于这些，各种各样的电荷的场分布五花八门，只是表面现象，其本质是什么？
 - 期望从不同的角度揭示电场的规律性
 - 经过探索通过与流体类比找到用矢量场论来描述电场

流速场



$$\text{通量} \iint_S \nu \cdot dS = 0? \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$\text{环流} \oint_L \nu \cdot dl \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

有源（或汇）、有旋、两者兼而有之

三 高斯定理(Gauss's law)



德国数学家、天文学家和物理学家，有“数学王子”美称，他与韦伯制成了第一台有线电报机和建立了地磁观测台。

高斯 (C.F.Gauss 1777–1855)

高斯长期从事于数学并将数学应用于物理学、天文学和大地测量学等领域的研究，主要成就：

- (1)物理学和地磁学：关于静电学、温差电和摩擦电的研究、利用绝对单位（长度、质量和时间）法则量度非力学量以及地磁分布的理论研究。
- (2)光学：利用几何学知识研究光学系统近轴光线行为和成像，建立高斯光学。
- (3)天文学和大地测量学中：如小行星轨道的计算，地球大小和形状的理论研究等。
- (4)试验数据处理：结合试验数据的测算，发展了概率统计理论和误差理论，发明了最小二乘法，引入高斯误差曲线。
- (5)高斯还创立了电磁量的绝对单位制。

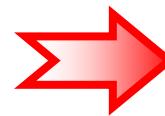
高斯定理(Gauss's law)

在真空中, 通过任一闭合曲面的电场强度通量, 等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ϵ_0 .
(与面外电荷无关, 闭合曲面称为高斯面)

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

- 请思考:
- 1) 高斯面上的 \vec{E} 与那些电荷有关 ?
 - 2) 哪些电荷对闭合曲面 S 的 Φ_e 有贡献 ?

高斯定理的导出 { 库仑定律
电场强度叠加原理



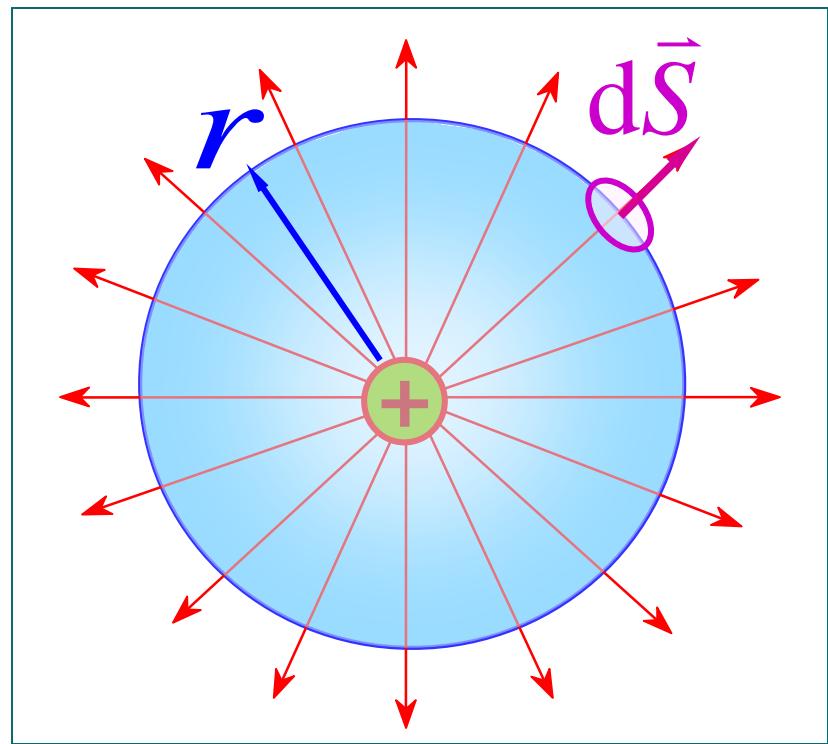
高斯定理

◆ 点电荷位于球面中心

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_e = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dS$$

$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$



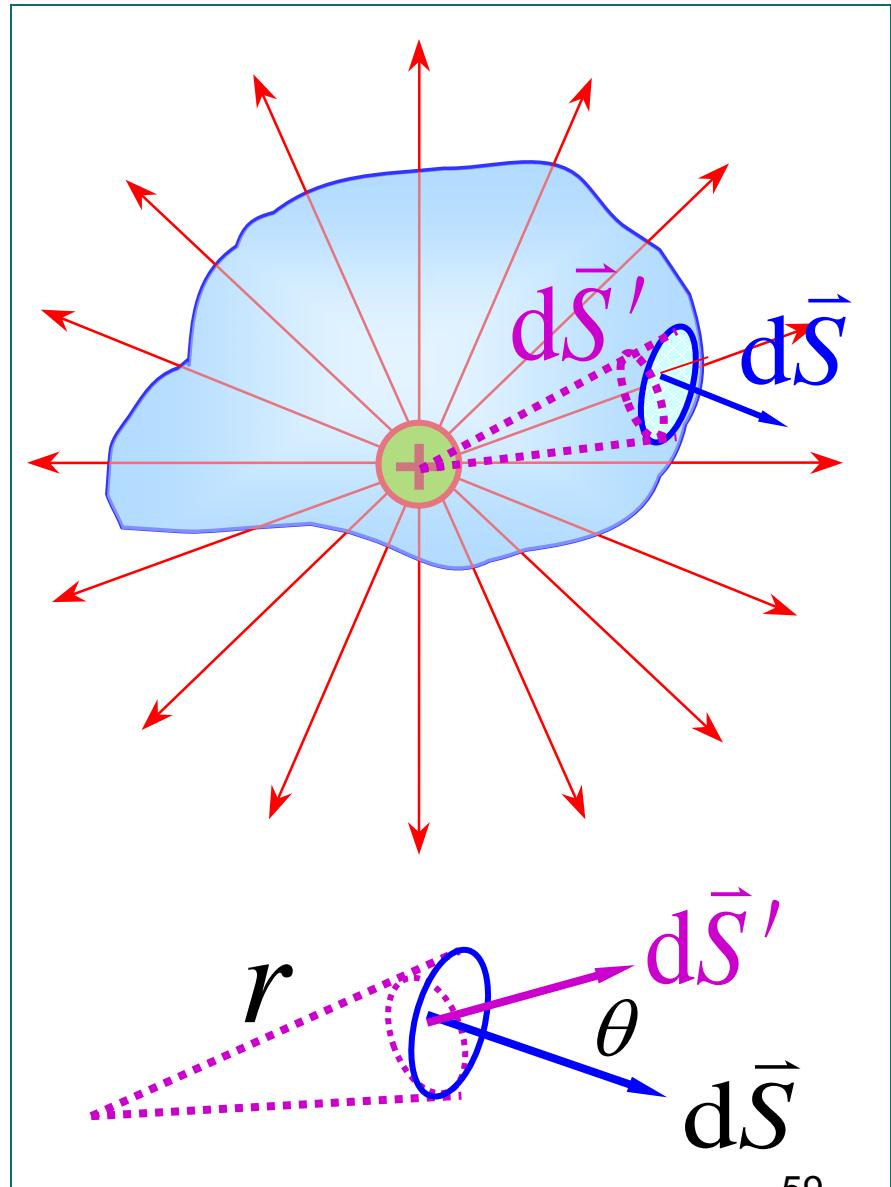
◆ 点电荷在任意封闭曲面内

$$\begin{aligned} d\Phi_e &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dS \cos \theta \\ &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{dS'}{r^2} \end{aligned}$$

其中立体角

$$\frac{dS'}{r^2} = d\Omega$$

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$



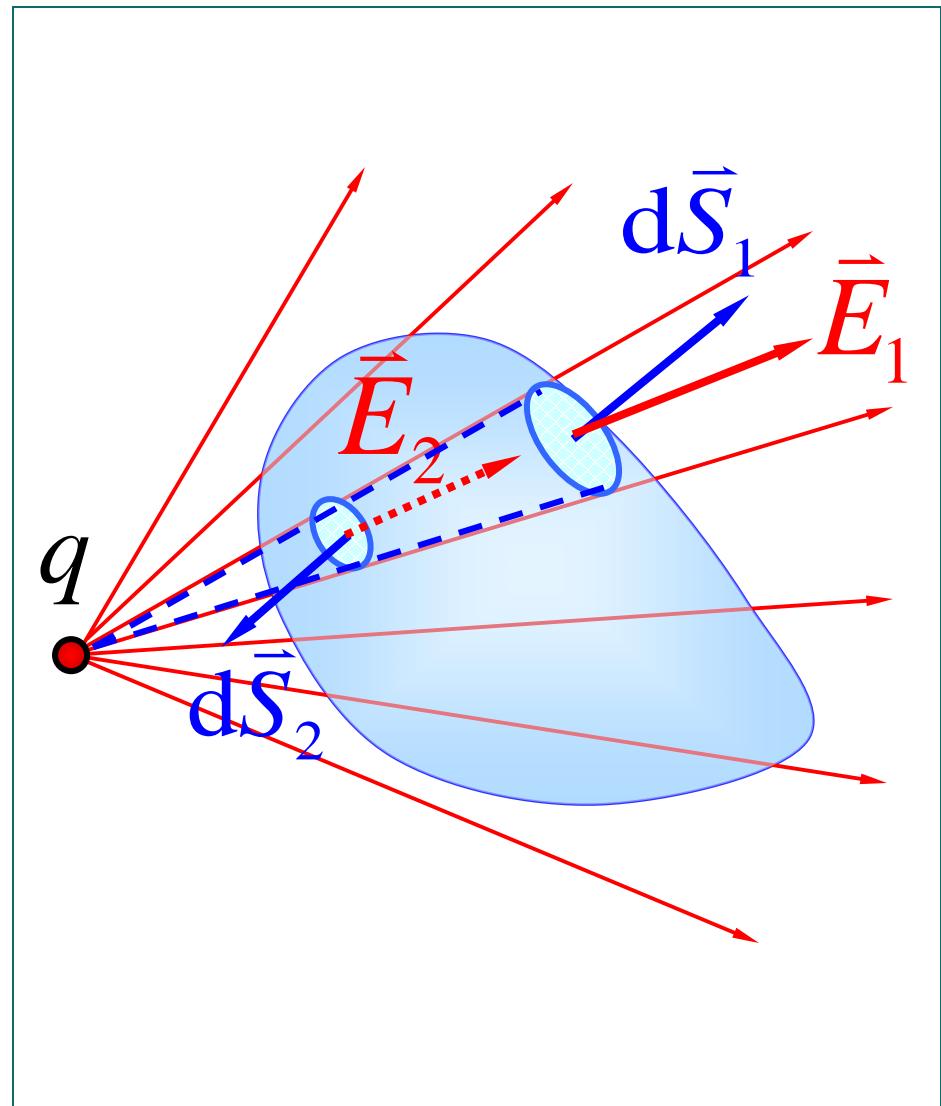
◆ 点电荷在封闭曲面之外

$$d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 > 0$$

$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 < 0$$

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$$

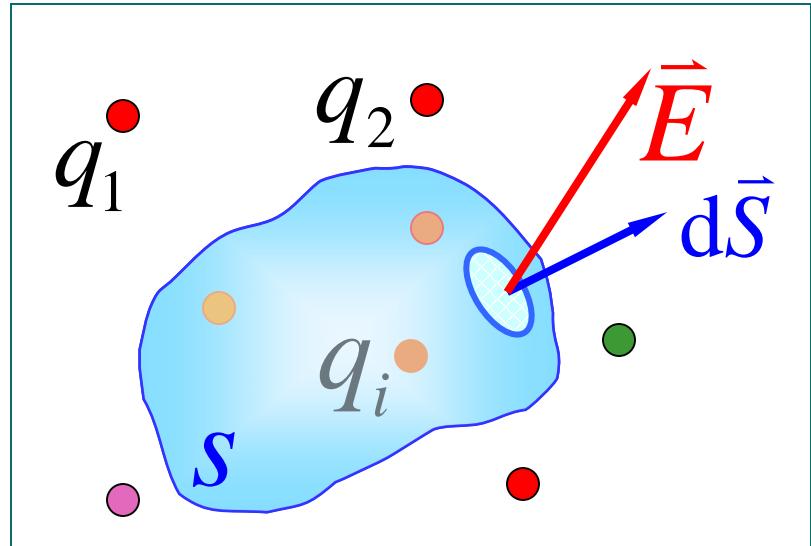
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$



◆ 由多个点电荷产生的电场

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$



$$= \sum_{i(\text{内})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} + \sum_{i(\text{外})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \sum_{i(\text{外})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\therefore \Phi_e = \sum_{i(\text{内})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i(\text{内})} q_i$$

$$\text{高斯定理 } \Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

有源(source)场与无源场

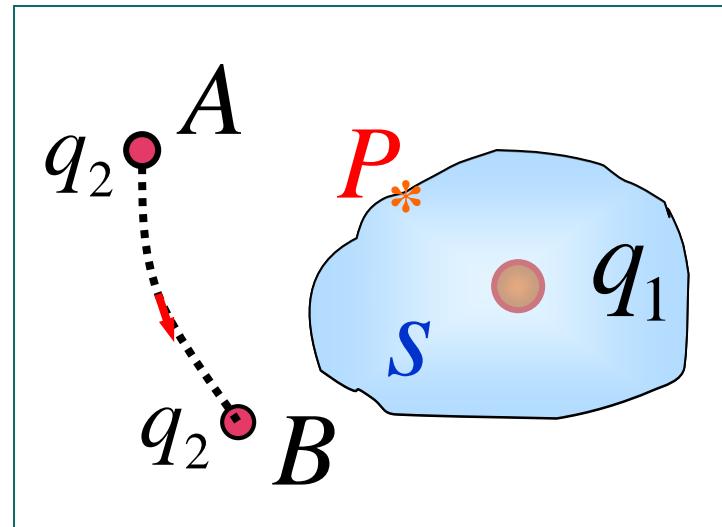


- 1) 高斯面为封闭曲面.
- 2) 高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度.
- 3) 仅高斯面内的电荷对高斯面的电场强度通量有贡献.
- 4) 静电场是有源场, 电荷是电场的源.

讨论

- 静电场是有源场；
(有势场，保守力场，无旋场)
- 电力线的连续性；
(起于正电荷，终止于负电荷；不中断，不闭合)
- 两电力线不相交；
(电力管，密度与场强对应)
- 应用：求解电场。
(详见下一部分)

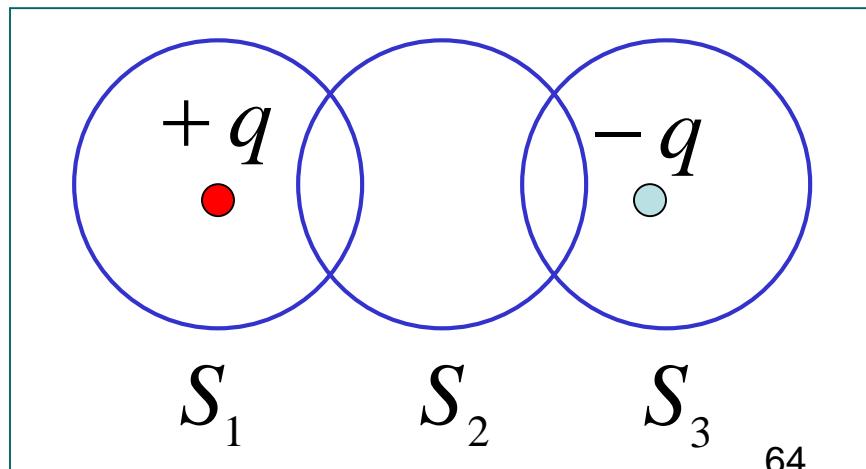
- 将 q_2 从 A 移到 B
点 P 电场强度是否变化?
穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化?



- 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面 S_1, S_2, S_3 ，**求**通过各闭合面的电通量。

$$\Phi_{e1} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{e2} = 0 \quad \Phi_{e3} = \frac{-q}{\epsilon_0}$$



四 高斯定理的应用

(用高斯定理求解的静电场必须具有一定的**对称性**)

其步骤为

- ◆ 对称性分析；
- ◆ 根据对称性选择合适的高斯面；
- ◆ 应用高斯定理计算.

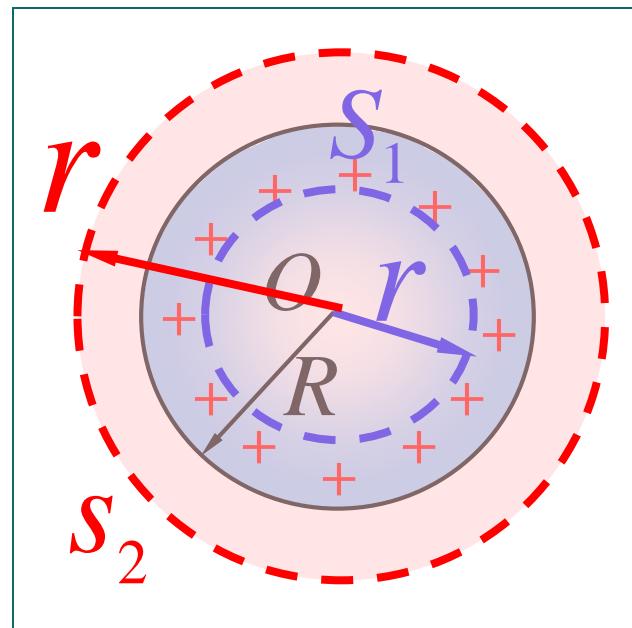
【例】均匀带电球壳的电场强度

一半径为 R , 均匀带电 Q 的薄球壳. 求球壳内外任意点的电场强度.

解 (1) $0 \leq r < R$

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{E} = 0$$

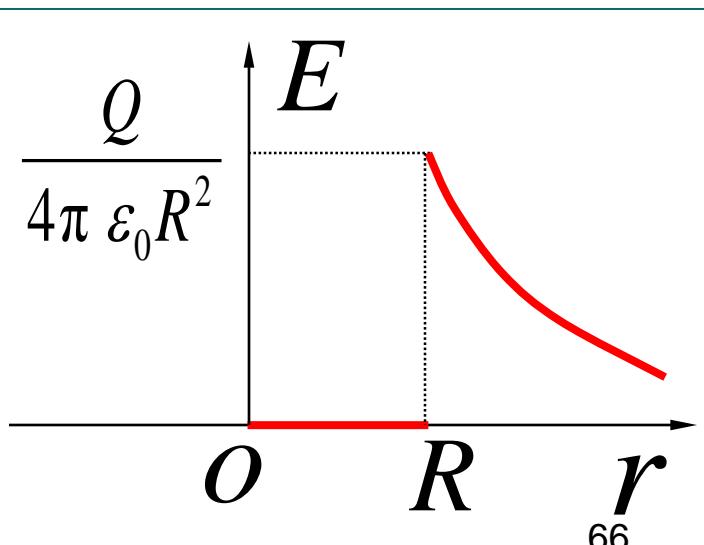


(2) $r > R$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$



【例】 均匀球体电荷的场强分布。

【解】 设球体电荷半径为 R ，电量 q 沿球体均布。

1. 设球体外任一点 P 至球心 r ，以 r 为半径作同心球面 S_1 ，则 P 点在 S_1 上，如图所示。由于静电场的分布是球对称的，所以穿过高斯面 S_1 的电通量

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} E \cos \theta dS$$
$$= E \iint_{S_1} dS = E 4\pi r^2$$

根据高斯定理

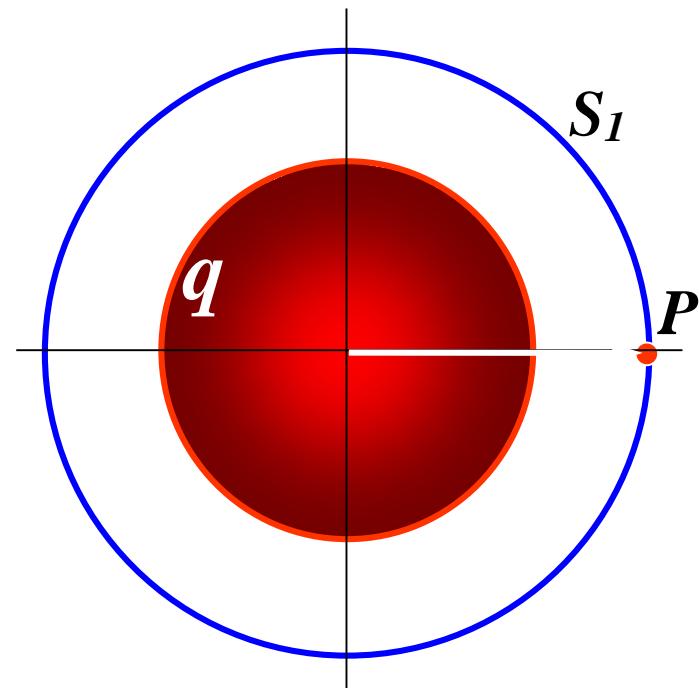
$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

比较两式得

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

或

$$\vec{E} = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



球体电荷外的场

同位于中心的点电荷 q 的场₆₇

2. 设球体内任一点Q至球心 r ，以 r 为半径作同心球面 S_2 ，则Q点在 S_2 上，如图1.24。由于静电场的分布是球对称的，所以穿过高斯面 S_2 的电通量

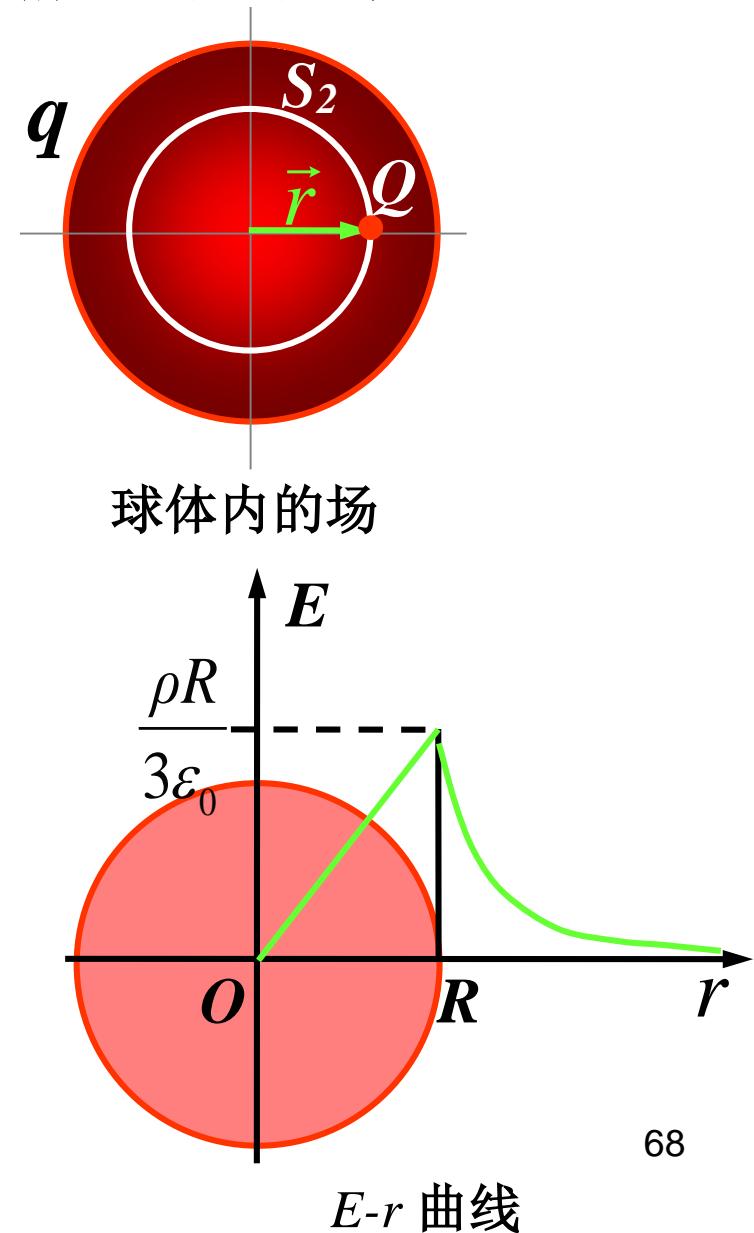
$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} E \cos \theta dS \\ = E \iint_{S_2} dS = E 4\pi r^2$$

根据高斯定理

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{qr^3}{\epsilon_0 R^3}$$

比较两式得 $E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

综上 $E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$



【讨论】

- 高斯面的选取; (对称, 过 P 点)
- 对称分析; (E 为常量, $\cos\theta$ 为常量)
- 同类问题: 多重球面、球壳、球体电荷, 电荷非均匀分布等;
- 不同心球形电荷, 可用场强叠加原理和高斯定理求解;
- 特殊解法: 补偿法 (根据场强叠加原理)。

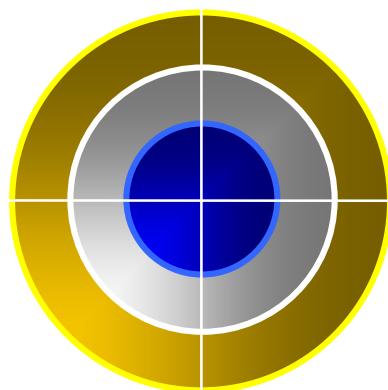
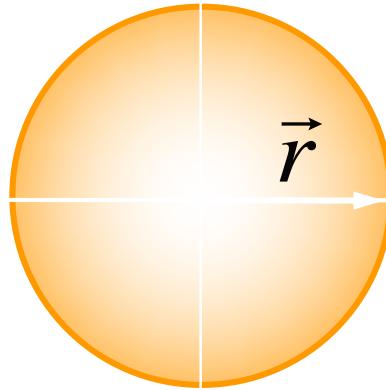


图1.26 多重球形



$$\rho = kr, \quad k \text{ 是常量}$$

图1.27 非均匀球体

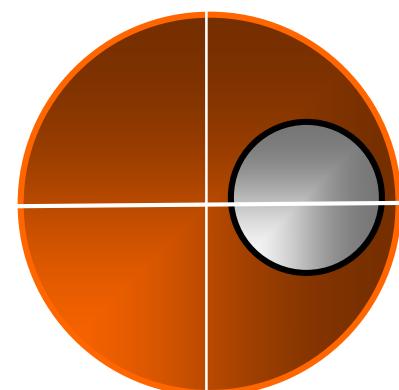


图1.28 补偿法

【例】均匀长圆柱面电荷的电场分布。

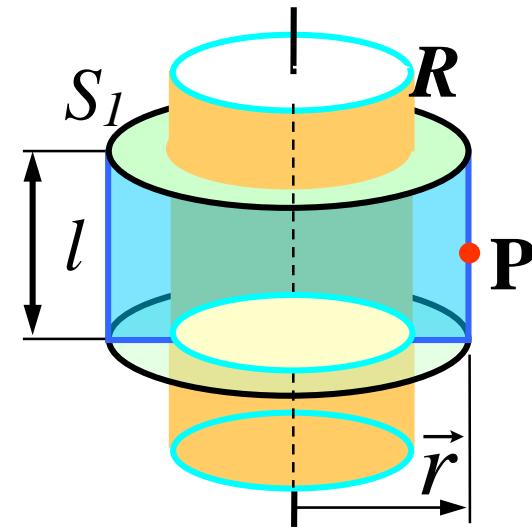
【解】设圆柱面电荷面密度 σ 为常量，柱面半径为 R 。

1. 设圆柱面电荷外任一点 P 至圆柱面轴线的距离为 r ，作半径为 r 的同轴圆柱面 S_1 ，侧面过 P 点，柱高 l ，如图。设 S_1 侧面场强大小为 E_1 ，方向沿径向，分析可得

$$\Phi_e = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1 2\pi r l$$

据高斯定理 $\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{2\pi R l \sigma}{\epsilon_0}$

比较得 $E_1 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$ ，方向沿径向。



柱面外的场

2. 设圆柱面内任一点Q至圆柱面轴线的距离为 r ，作半径为 r 的同轴圆柱面 S_2 ，侧面过Q点，柱高 l ，如图设 S_2 侧面场强大小为 E_2 ，方向沿径向，分析可得

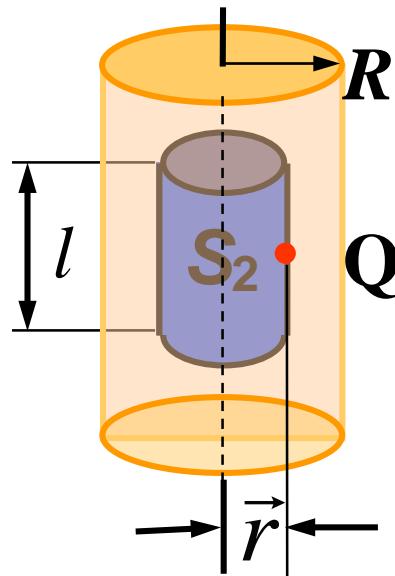
$$\Phi_e = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_2 2\pi r l$$

据高斯定理

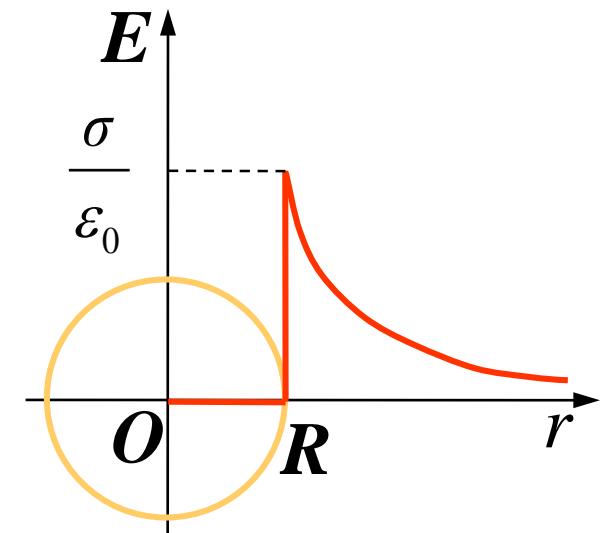
$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = 0$$

所以 $E_2 = 0$

$$\text{综上} = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$



柱面内的场



$E-r$ 曲线

【例】均匀长圆柱体电荷的电场分布。

【解】设圆柱电荷体密度 ρ 为常量，柱面半径为 R 。

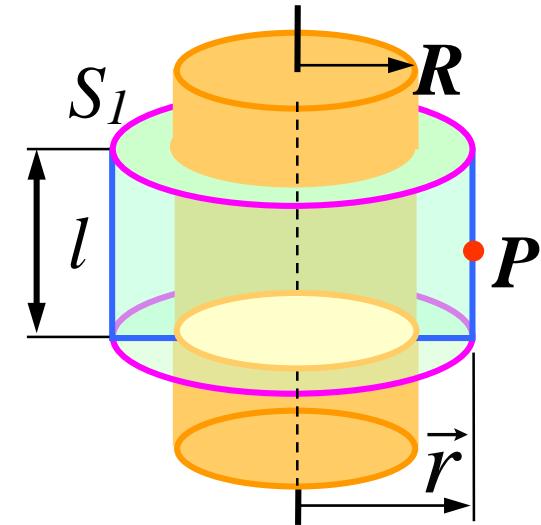
1. 设圆柱体电荷外任一点 P 至圆柱体轴线的距离为 r ，作半径为 r 的同轴圆柱面 S_1 ，侧面过 P 点，柱高 l ，如图。设 S_1 侧面场强大小为 E_1 ，方向沿径向，分析可得

$$\Phi_e = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1 2\pi r l$$

据高斯定理

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{\pi R^2 l \rho}{\epsilon_0}$$

比较得 $E_1 = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}$ ，方向沿径向。



柱体外的场
72

2. 设圆柱体内任一点Q至圆柱体轴线的距离为 r ，作半径为 r 的同轴圆柱面 S_2 ，侧面过Q点，柱高 l ，如图。设 S_2 侧面场强大小为 E_2 ，方向沿径向，分析可得

$$\Phi_e = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_2 2\pi r l$$

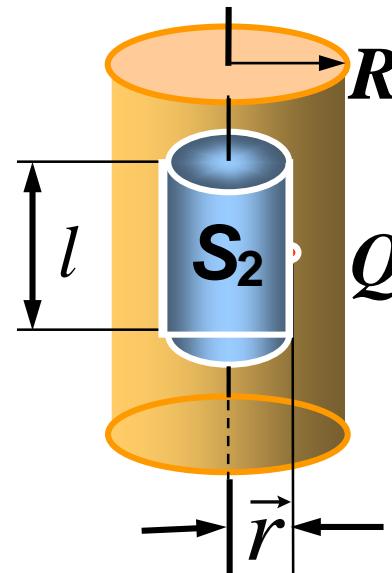
据高斯定理

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{\pi r^2 l \rho}{\epsilon_0}$$

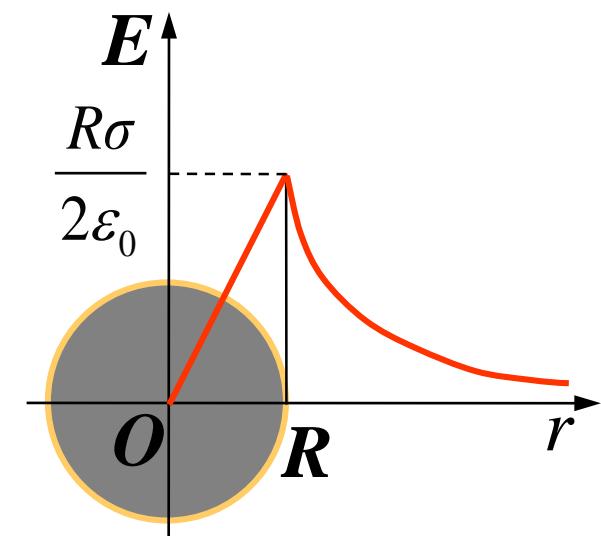
所以

$$E_2 = \frac{r \rho}{2 \epsilon_0}$$

$$\text{综上 } E = \begin{cases} \frac{R^2 \rho}{2 \epsilon_0 r} & (r \geq R) \\ \frac{r \rho}{2 \epsilon_0} & (r < R) \end{cases}$$



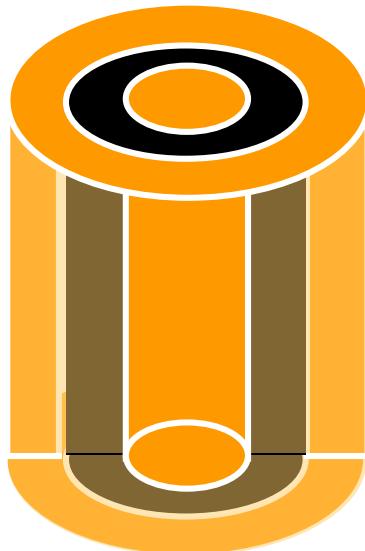
柱体内的场



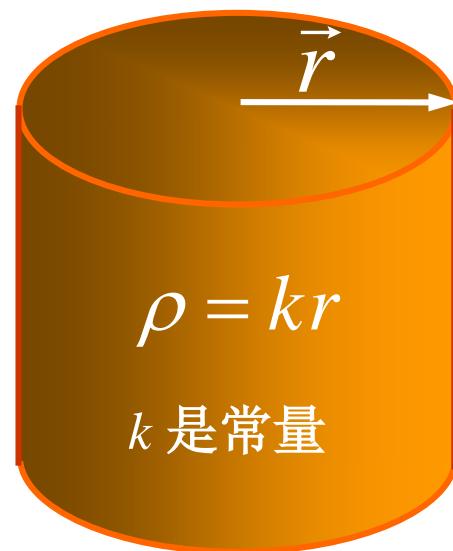
$E-r$ 曲线₇₃

【讨论】

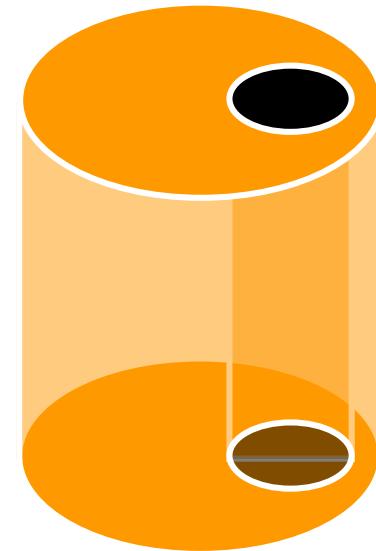
1. 高斯面的选取；(P 点在端面行吗？)
2. 对称分析；(有限长直线电荷行吗？)
3. 同类问题：多重圆柱面、体电荷，电荷非均匀分布等；
4. 不同轴长直电荷，可用场强叠加原理和高斯定理求解；
5. 特殊解法：补偿法（根据场强叠加原理）。



多重圆柱形



非均匀圆柱体



补偿法

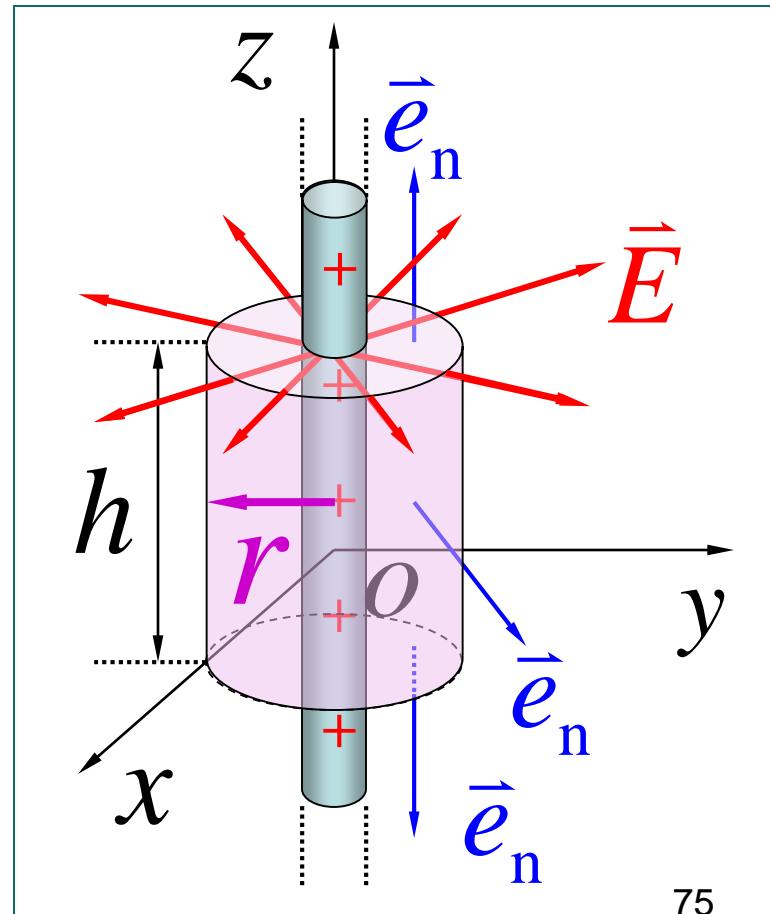
【例】无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为 λ ，求距直线为 r 处的电场强度。

解 对称性分析：轴对称

选取闭合的柱形高斯面

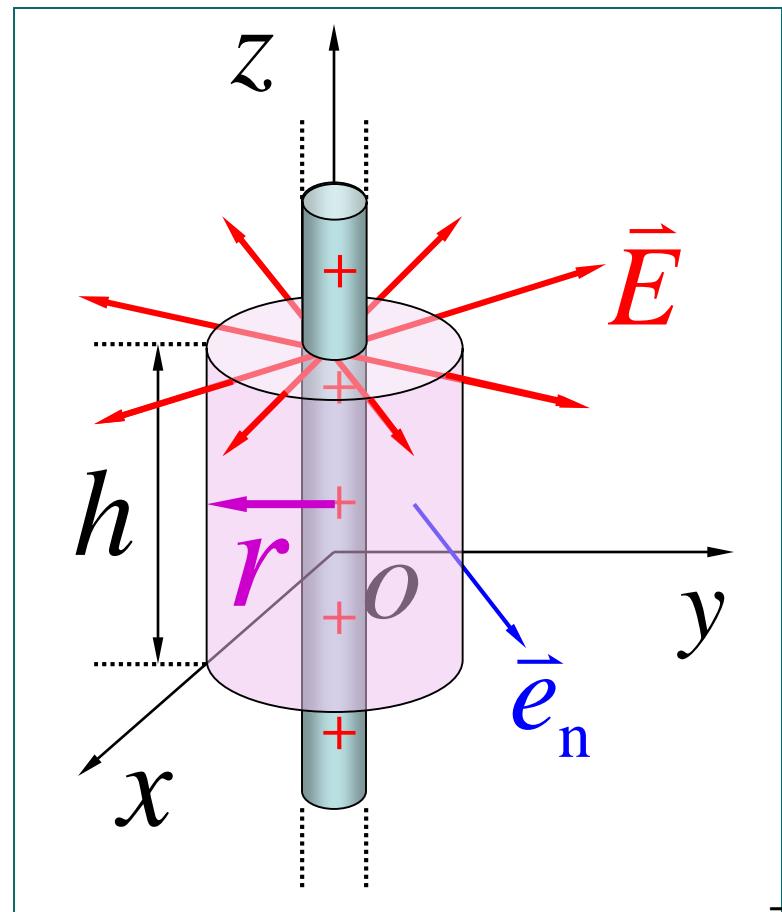
$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \\ \int_{s(\text{柱面})} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{s(\text{上底})} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{s(\text{下底})} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \\ = \int_{s(\text{柱面})} \vec{E} \cdot d\vec{S} &\end{aligned}$$



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E dS = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$



例 无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处的电场强度。

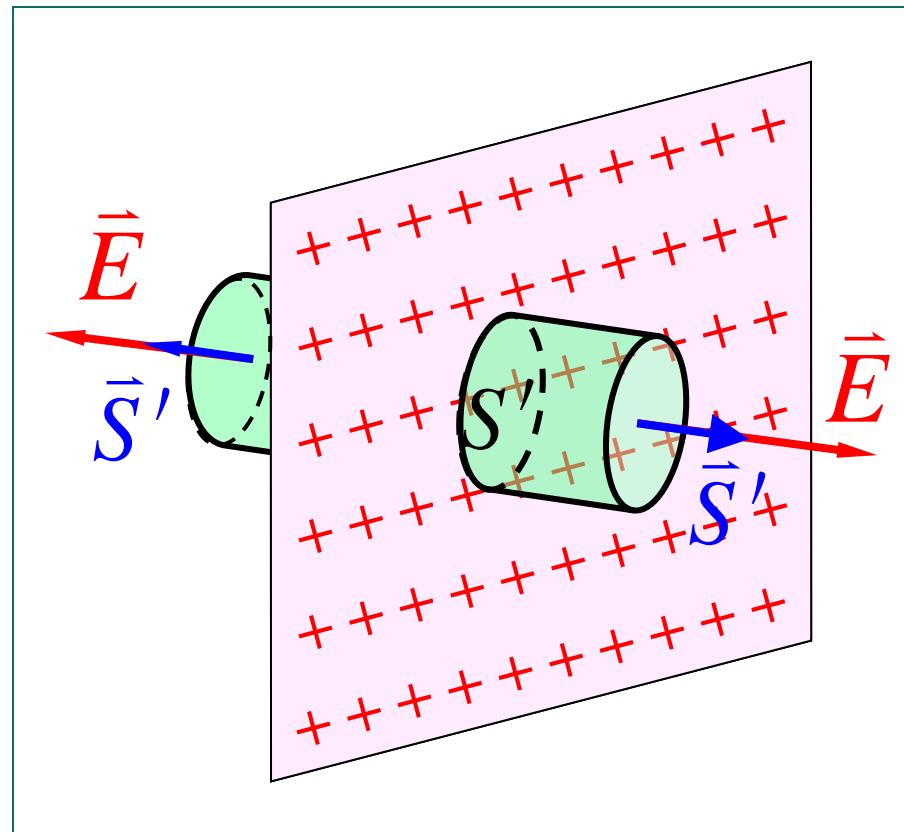
解 对称性分析： \vec{E} 垂直平面
选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\epsilon_0}$$

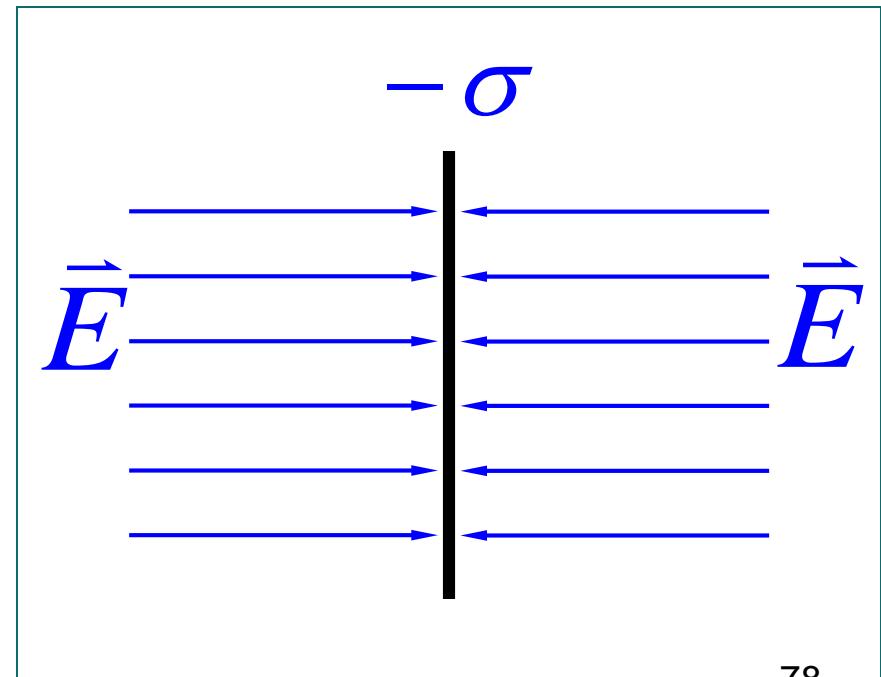
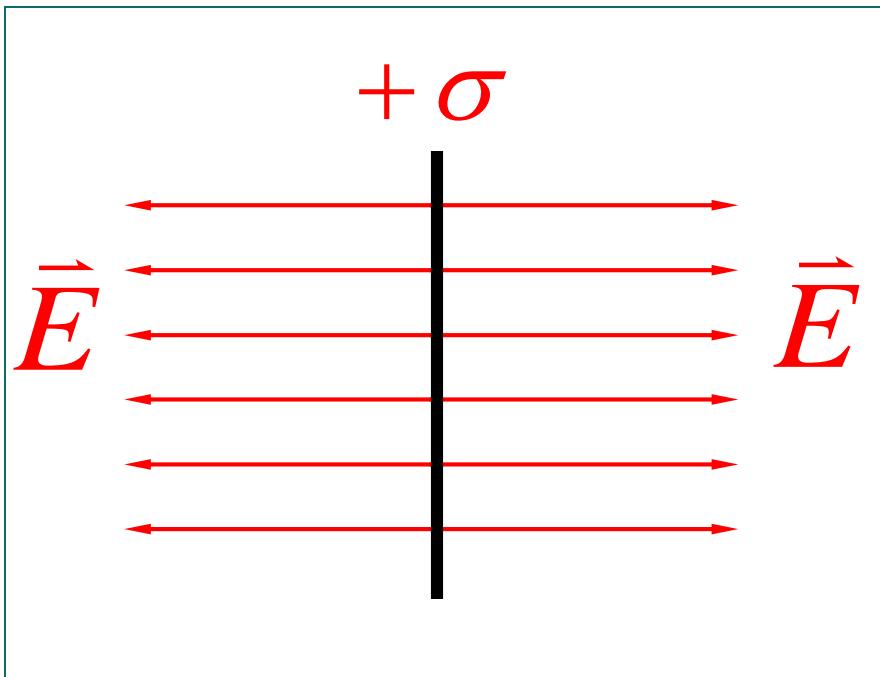
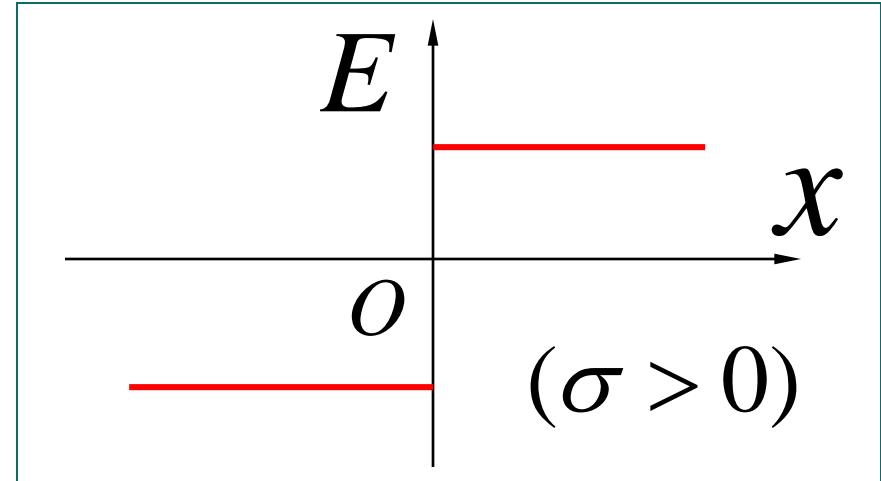
底面积

$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\epsilon_0}$$

$$E = \sigma / 2\epsilon_0$$

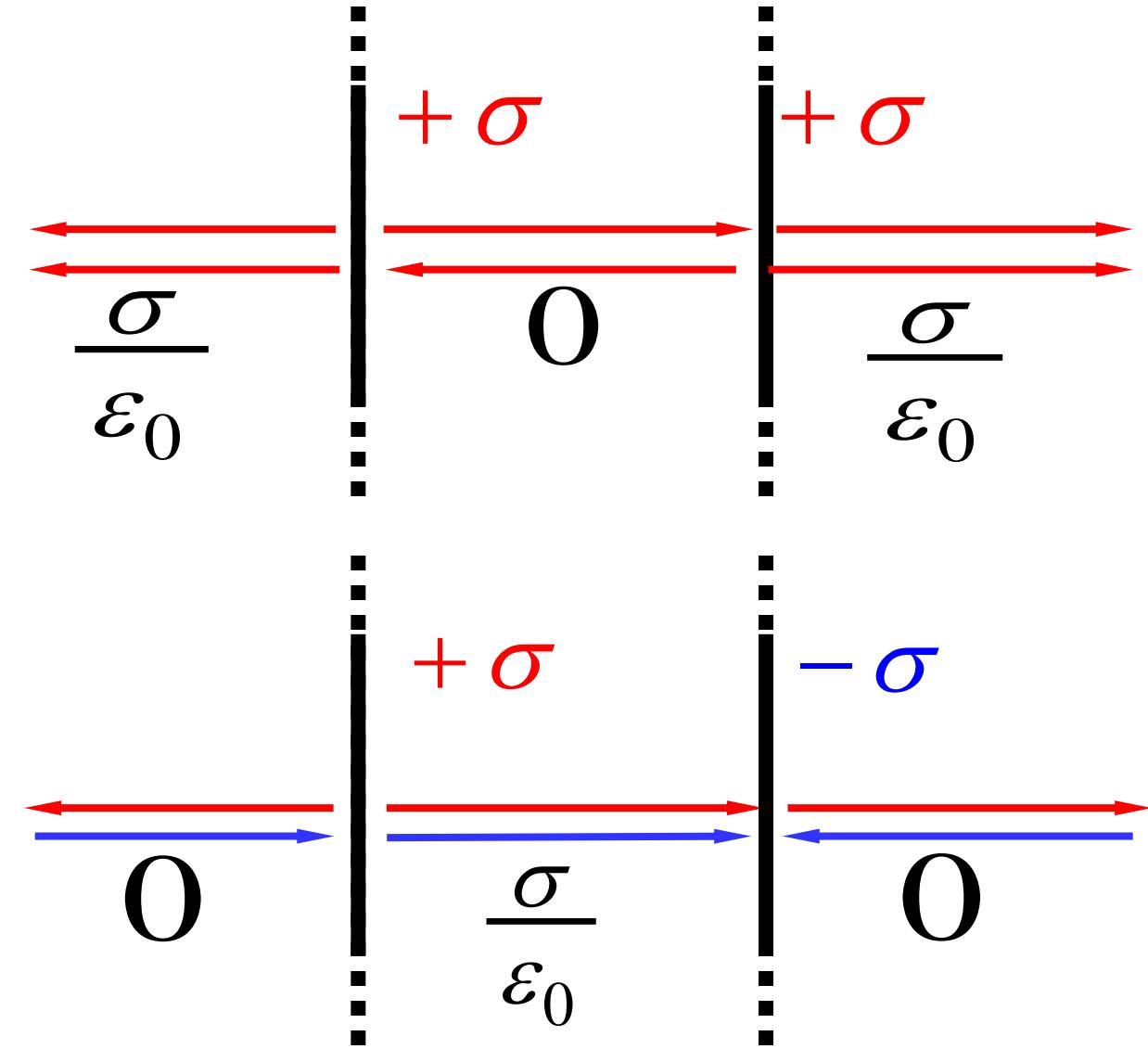


$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



讨论

无限大带电平面
的电场叠加问题



§ 8-4 静电场的保守性 环流定理

一、电场力做功的特点

□ 点电荷静电力的功

如图所示，试验电荷 q_0 在电荷 q 的场中由 a 点运动至 b 点，计算电场力所做的功：

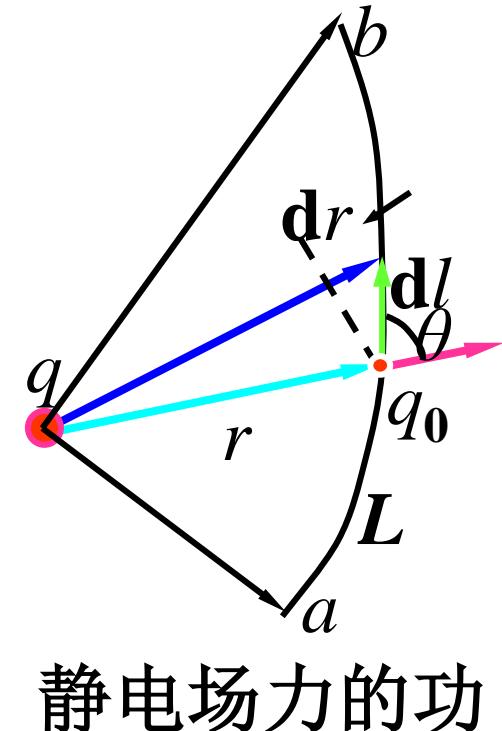
$$q_0 \text{ 在场中受力} \quad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$q_0 \text{ 的位移 (元)} \quad d\vec{l}$$

$$\text{电场力作元功 } dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q_0 E \cos \theta dl$$

$$\text{其中 } \cos \theta dl = dr \quad \text{则} \quad dA = q_0 E dr$$



故

$$A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 E dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$

$$A = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

静电场力做功与路径无关, 只由始末位置决定。

□ 点荷系静电场力的功

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= q_0 \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + q_0 \int_a^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots + q_0 \int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$A = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}} \right)$$

$$A = \int_{r_A}^{r_B} d \left(-\frac{qq_0}{4 \pi \epsilon_0 r} \right)$$

被积函数可以写成
某个函数的全微分

1、被积函数可以写成某个函数的全微分的形式；

2、积分与路径无关；

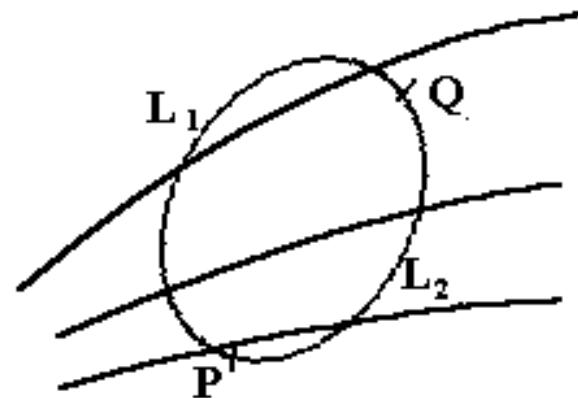
3、回路积分等于0；

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

三种描述等价

二、静电场的环路定理

静电场力做功与路径无关 等价于静
电场力沿任意闭合回路做功恒等于零



$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

在任意电场中取一闭合回路，将试探电荷沿路径L
从 $P - Q - P$ ，电场力所做的功为

$$\begin{aligned} A &= q_0 \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{P(L_1)}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} + q_0 \int_{Q(L_2)}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= q_0 \int_{p(L_1)}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} - q_0 \int_{p(L_2)}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{aligned}$$

在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分等于零。⁸³

讨论

1. 在证明Gauss定理中，说电力必须与 r^2 成反比，那么在环路定理的证明中是否也必须要求与 r^2 成反比？

答：不一定

如弹性力 $f = kr$ 也有类似性质

■ 哪些力具有做功与路径无关这种性质？

- 引力 \longrightarrow 引入引力势能
- 重力 \longrightarrow 引入重力势能 \longrightarrow 势函数
- 弹性力 \longrightarrow 引入弹性势能 (位)
- 静电力 \longrightarrow 引入静电势能

§ 8-5 电势能 电势

一、电势能

静电场力是保守力(**conservative force**)，静电场是保守场(**conservative field**)。可以引入势能来描述一个过程中电场力所作的功。

$$W = \int_A^{(0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^{(0)} dG(\vec{r})$$

定义为**电势能**(electric potential energy)

电势能的大小是相对的，电势能的差是绝对的。

一般令参考点为 ∞ 处，即 q_0 在 ∞ 时，电势能 $W_\infty=0$ ，则A点的电势能

$$W_A = q_0 \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

依此 1. W_a 等于电荷 q_0 自 a 点移至 ∞ 远电场力的功；

或 2. W_a 等于电荷 q_0 自 ∞ 远移至 a 点外力作的功。

讨论

1. 电势能属于电场 (q 激发) 和电荷 (q_0) 共有；
2. 电势能是标量，但是有正、有负；
3. 电势能的参考点是可任选的。

二、电势

W_a 不仅与电场有关，还与 q_0 有关，不是仅描述电场的量。

定义：

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

—— 电势



1. 电势 U_a 等于单位正电荷自 a 点移至 ∞ 远电场力的功，或等于单位正电荷自 ∞ 远移至 a 点外力的功；

2. 电势是标量，但是有正、有负；
3. 原则上，零电势点是可任选的； 理论上，一般取 ∞ 远处电势为零； 实际中，一般选大地为零；
4. 电势差（电压）

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



注意

电势差是绝对的，与电势零点的选择无关；
某点电势大小是相对的，与电势零点的选择有关。

5. 电场力的功 $A_{ab} = q(U_a - U_b) = qU_{ab}$
6. 单位：伏特（V）

原子物理中能量单位 $1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$

三、电势的计算方法

1. 点电荷场的电势

$$U = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

2. 点荷系场的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\infty} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_r^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_r^{\infty} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \\ &= U_1 + U_2 + \cdots + U_n \end{aligned}$$

—— 电势叠加原理

所以
$$U = \int_r^\infty \sum_i \frac{q_i dl}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

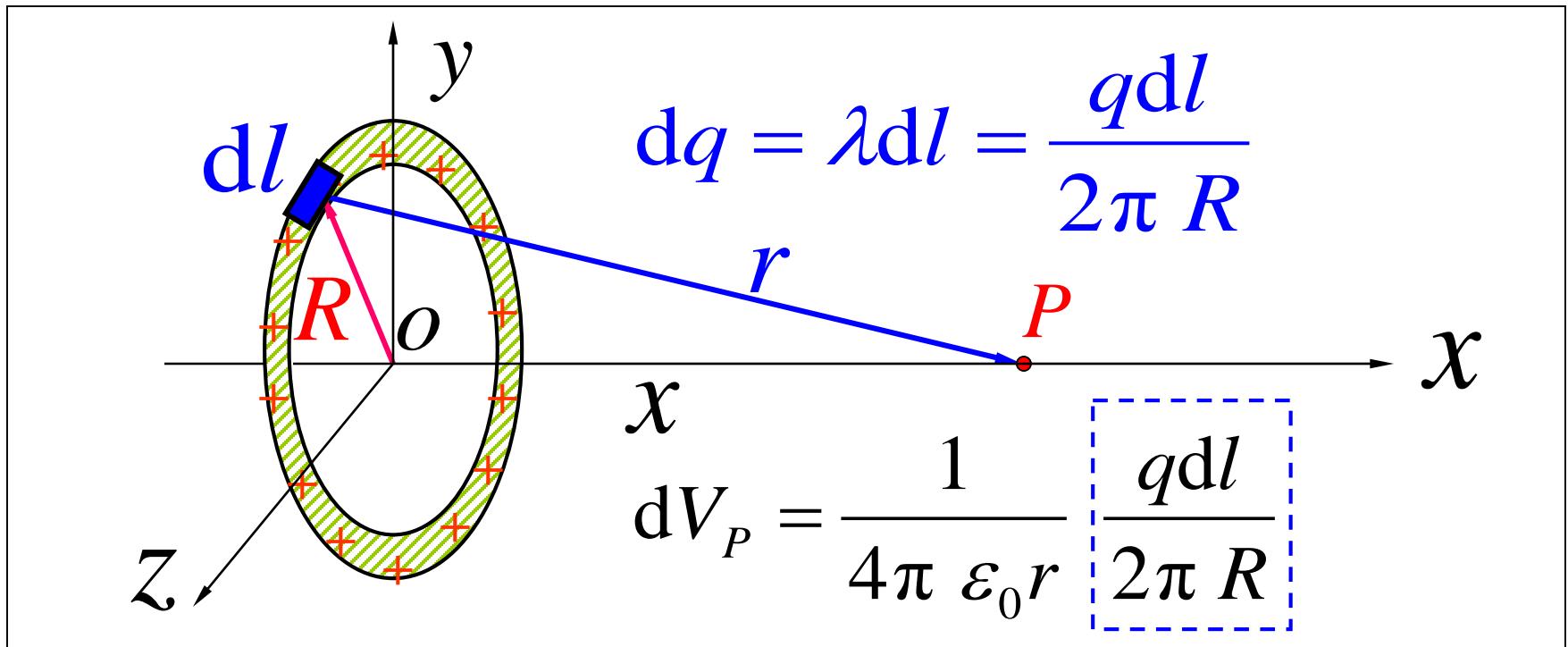
点电荷系所激发的电场中某点的电势，等于各点电荷单独存在时在该点建立的电势的代数和。

3. 连续电荷场的电势

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{线电荷分布} & dq = \lambda dl \\ \text{面电荷分布} & dq = \sigma dS \\ \text{体电荷分布} & dq = \rho dV \end{array} \right.$$

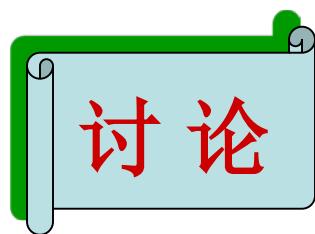
一般计算方法
$$\left\{ \begin{array}{l} U_a = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \end{array} \right.$$

【例】 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上。
求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势。



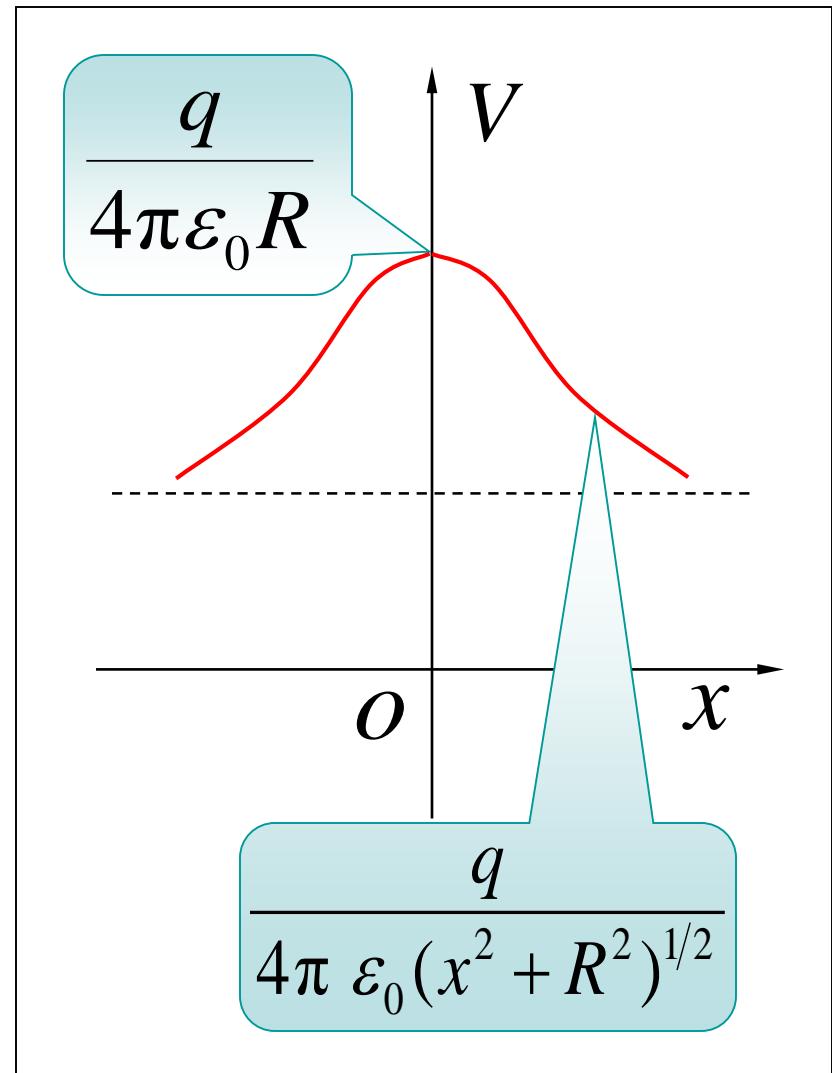
$$V_P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r} \int \frac{q dl}{2\pi R} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$V_P = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

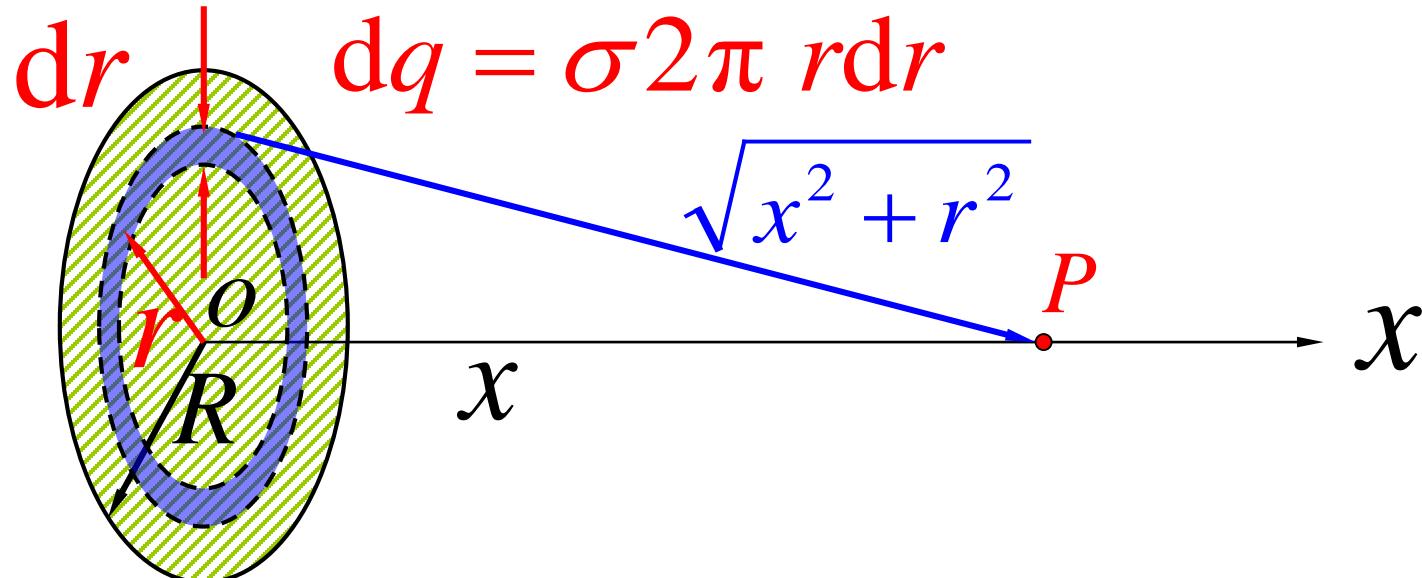


◆ {

$x = 0, \quad V_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}$	$x \gg R, \quad V_P = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 x}$
--------------------------------------------------	----------------------------------------------------



【例】 均匀带电薄圆盘轴线上的电势



$$V_P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$

讨论电势在 $x \gg R$ 时的渐近行为

$$\sqrt{x^2 + R^2} = x\sqrt{1 + \delta}$$

$$\delta = R^2 / x^2$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{3}{4}\delta^2 + \dots \right) \approx x + \frac{R^2}{2x}$$

此处还可以用

$$V \approx Q/4\pi\epsilon_0 x \quad (\text{点电荷电势})$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + R^2} - x)(\sqrt{x^2 + R^2} + x)}{\sqrt{x^2 + R^2} + x} = \frac{R^2}{\sqrt{x^2 + R^2} + x}$$

【例】均匀带电球壳的电势.

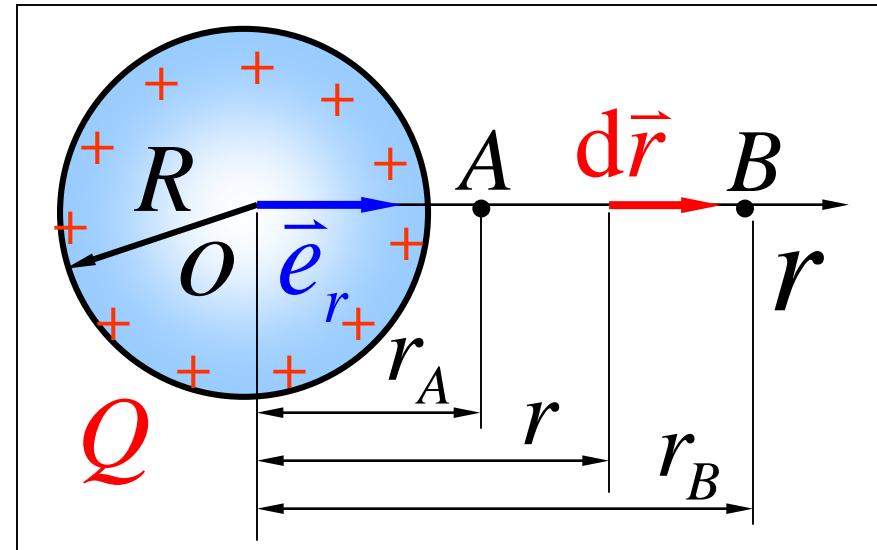
真空中，有一总电量为 Q ，半径为 R 的带电球壳。试求（1）球壳外两点间的电势差；（2）球壳内两点间的电势差；（3）球壳外任意点的电势；（4）球壳内任意点的电势。

【解】

$$\begin{cases} r < R, \quad \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, \quad \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{cases}$$

$$(1) \quad V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

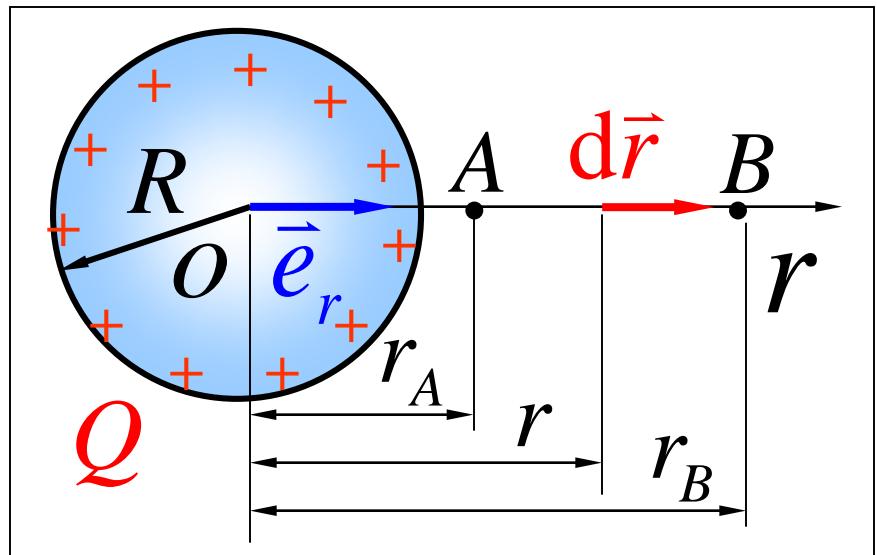


(2) $r < R$

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = 0$$

(3) $r > R$

令 $r_B \rightarrow \infty$, $V_\infty = 0$



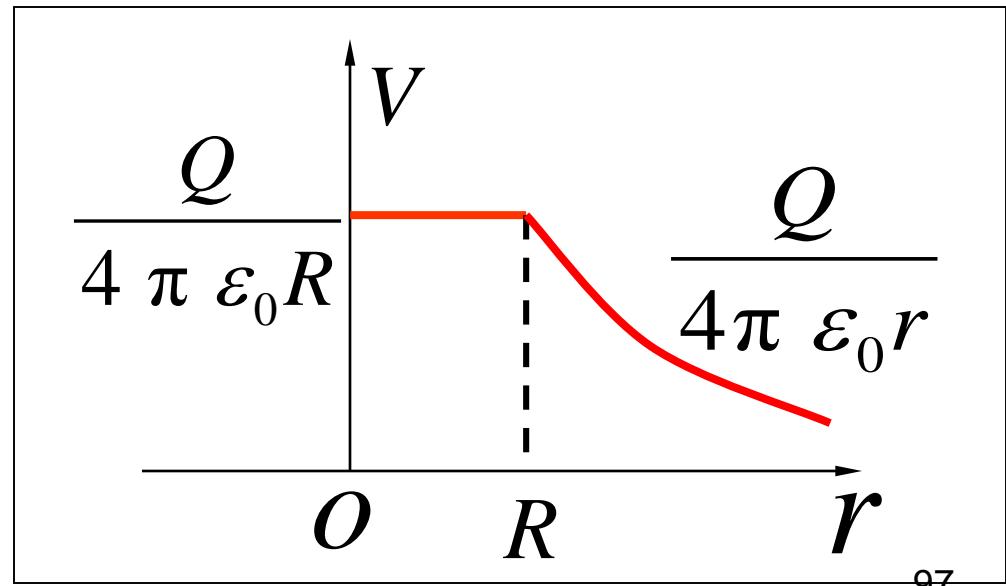
◆ 由 $V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$ 可得 $V_{\text{外}}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$

◆ 或 $V_{\text{外}}(r) = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$

(4) $r < R$

- ◆ 由 $V_{\text{外}}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$ 可得 $V(R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} = V_{\text{内}}$
- ◆ 或 $V_{\text{内}}(r) = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\text{外}}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \\ V_{\text{内}}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \end{array} \right.$$

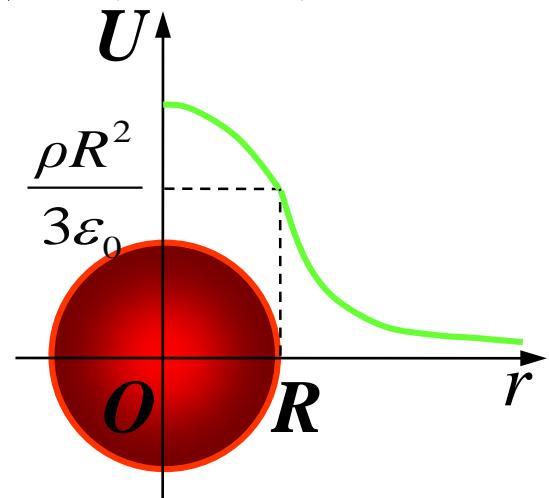


【例】计算半径 R , 电量 Q 均匀带电球体内外的电势。

【解】

球外 ($r > R$) : $E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



球体电荷 $U-r$ 线

球内 ($r \leq R$) : $E_2 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

$$U_2 = \int_r^R \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_r^R \frac{r dr}{R^3} + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R^2 - r^2}{2R^3} + \frac{1}{R} \right) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

【例】“无限长”带电直导线的电势

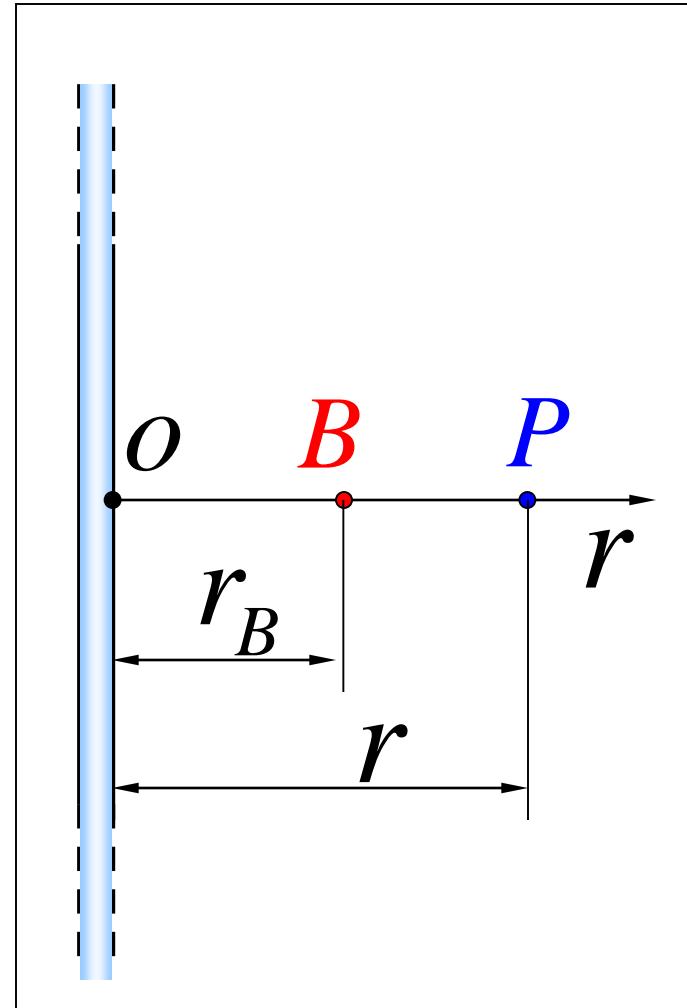
【解】

$$V_A = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_B$$

令 $V_B = 0$

$$\begin{aligned} V_P &= \int_r^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r} \end{aligned}$$

能否选 $V_\infty = 0$?



【例】两个均匀带电的同心球面，半径分别为 R_a 和 R_b ，带电总量分别为 Q_a 和 Q_b ，求图中 I、II、III区内的电势分布

【解一】已知场强求电势

$$E_1 = 0$$

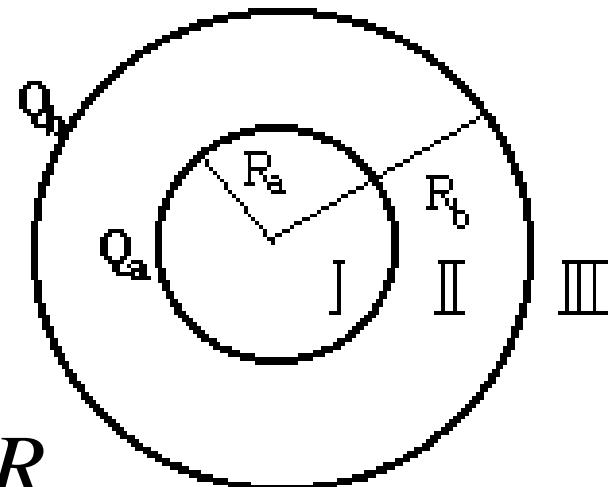
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{r^2}$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a + Q_b}{r^2}$$

$$0 < r < R_a$$

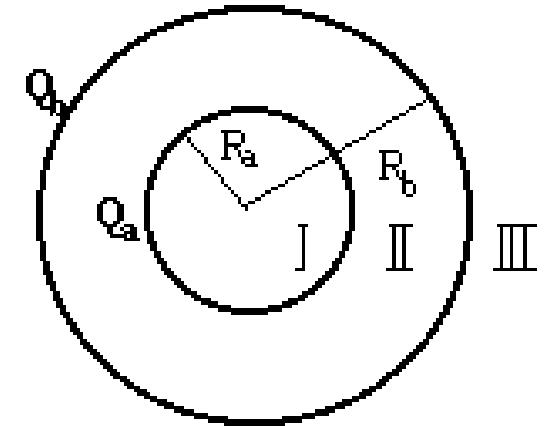
$$R_a < r < R_b$$

$$r > R_b$$



III

$$U_3 = \int_r^\infty \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a + Q_b}{r}$$



II

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_b} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_b}^\infty \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b} \right) + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_a}{r} + \frac{Q_b}{R_b} \right)$$

I

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_a} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{R_a}^{R_b} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_b}^\infty \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$= 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_a}{R_a} - \frac{Q_b}{R_b} \right) + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_a}{R_a} + \frac{Q_b}{R_b} \right)$$

【解二】电势叠加

内壳单独存在

$$\begin{cases} r < R_a & U_{in} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a} \\ r > R_a & U_{out} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r} \end{cases}$$

外壳单独存在

$$\begin{cases} r < R_b & U_{in} = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b} \\ r > R_b & U_{out} = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 r} \end{cases}$$

各区域的电势分布是内外球壳单独存在时的电势的叠加

I : $U_{1in} + U_{2in}$

II : $U_{1out} + U_{2in}$

III: $U_{1out} + U_{2out}$

§ 8-5 场强与电势梯度的关系

一、等势面(Equipotential surface)

空间电势相等的点连接起来所形成的面称为等势面. 为了描述空间电势的分布, 规定任意两相邻等势面间的电势差相等.

- 在静电场中, 电荷沿等势面移动时, 电场力做功

$$W_{ab} = q_0(V_a - V_b) = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- 在静电场中, 电场强度 \vec{E} 总是与等势面垂直的, 即电场线是和等势面正交的曲线簇.

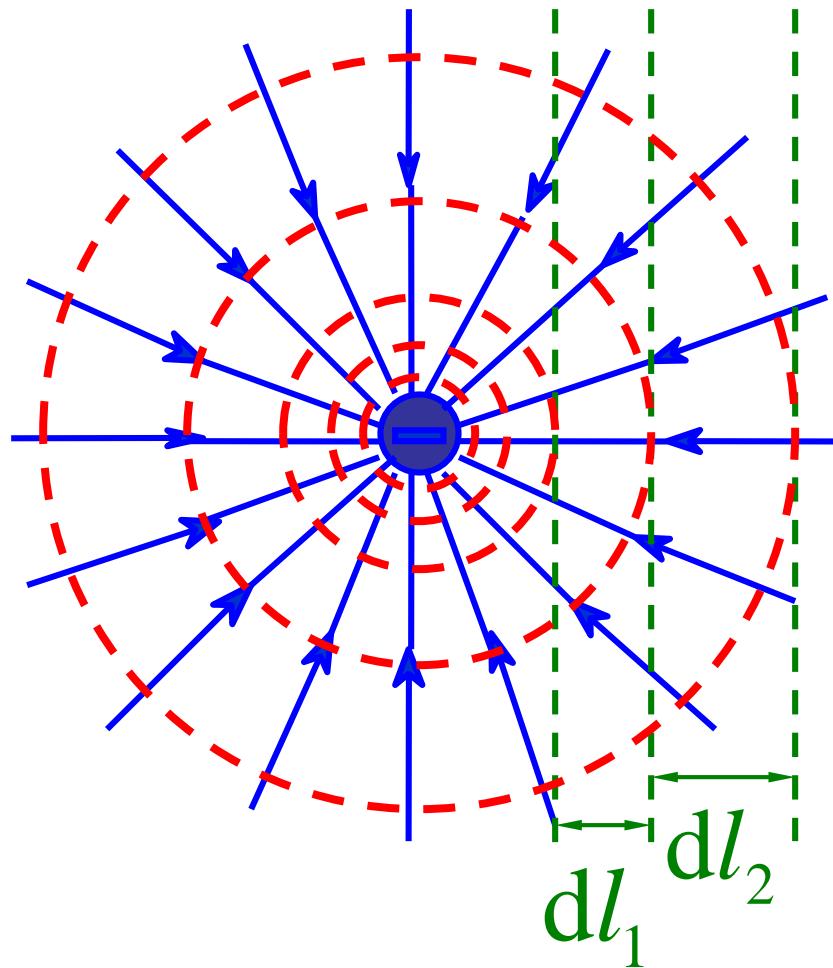
$$W_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$q_0 \neq 0 \quad \vec{E} \neq 0 \quad d\vec{l} \neq 0$$

$$\therefore \vec{E} \perp d\vec{l}$$

- ◆ 按规定，电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小。

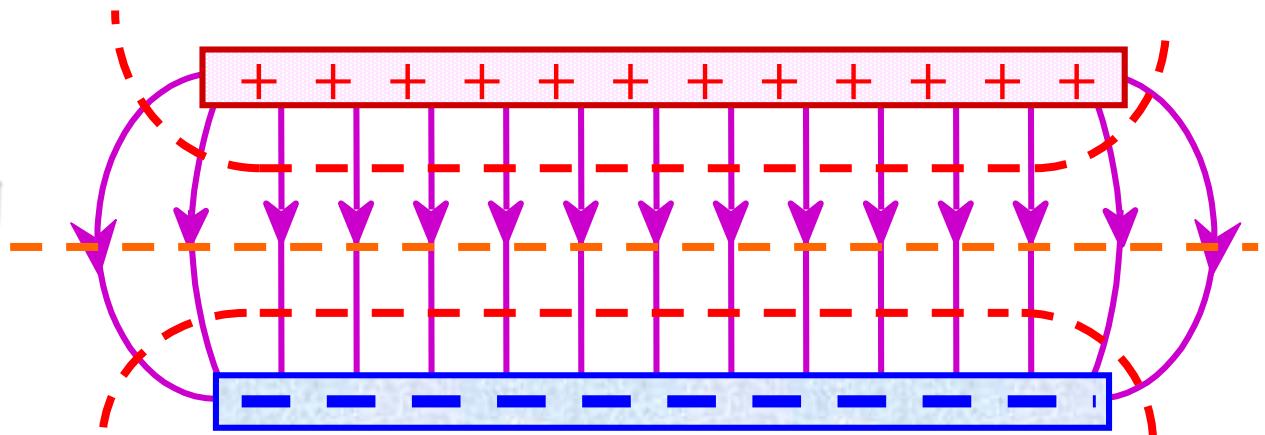
点电荷的等势面



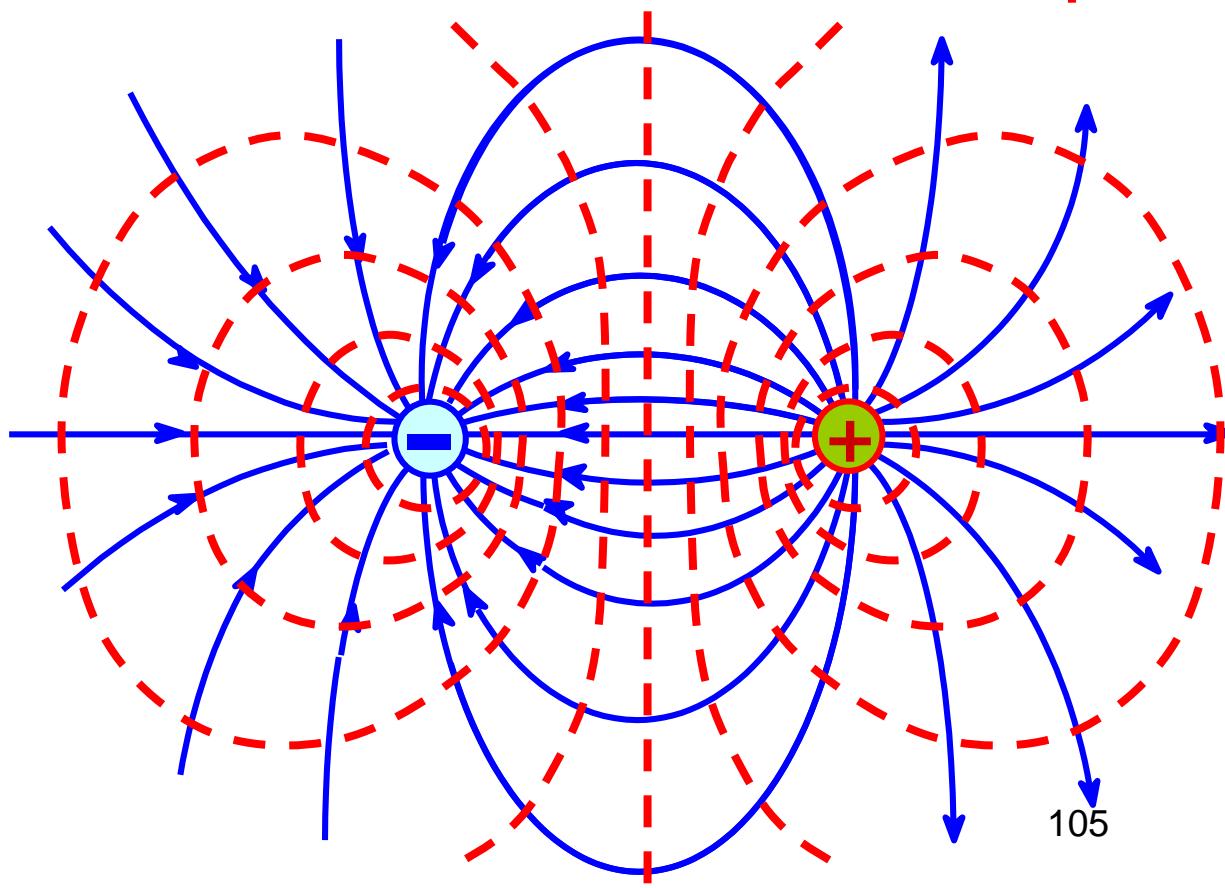
$$dl_2 > dl_1$$

$$E_2 < E_1$$

两平行带电平板的
电场线和等势面



一对等量异号点电荷
的电场线和等势面



二、场强分量与电势方向导数的关系

相邻等势面 a 和 b 的电势依次为 U 和 $U+dU$ 且 $dU > 0$ 。

因为

$$dl \cos \varphi = dn$$

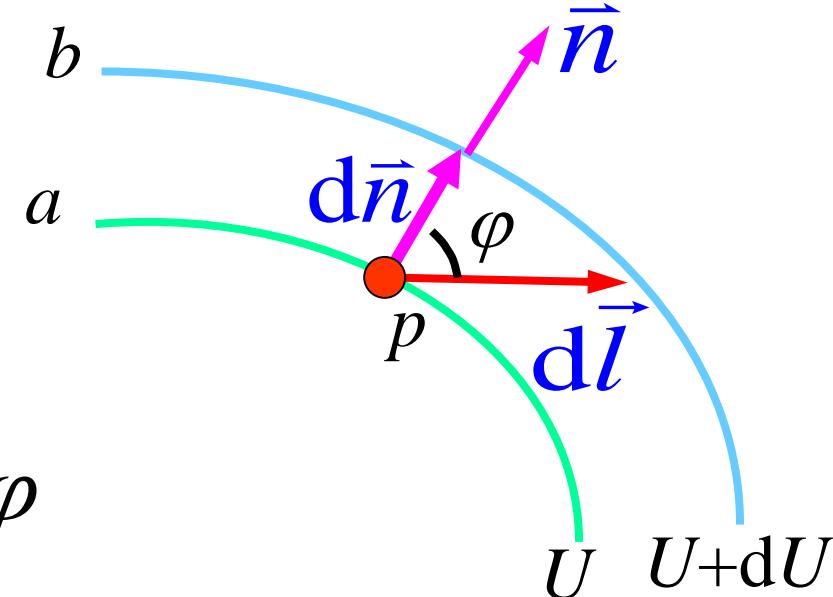
所以

$$\frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn} \cos \varphi$$

【定义】：电势梯度矢量

电势梯度

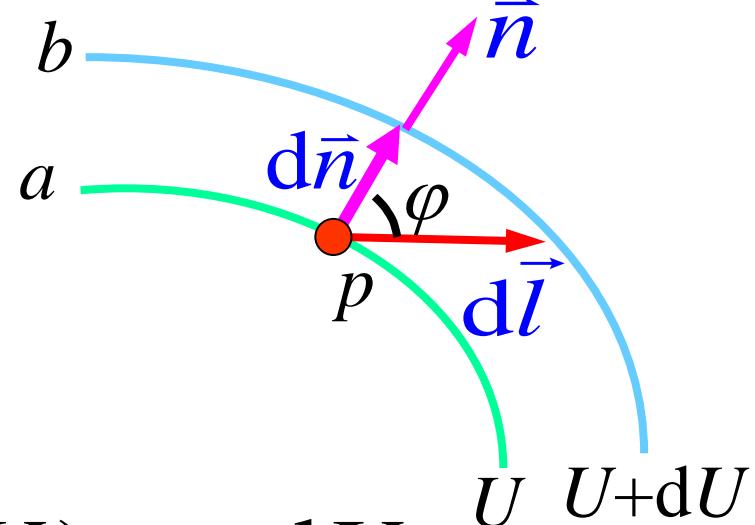
$$\text{grad}U = \frac{dU}{dn} \vec{n} \quad \text{或} \quad \nabla U = \frac{dU}{dn} \vec{n}$$



讨 论

$$\nabla U = \frac{dU}{dn} \vec{n}$$

由图知 $E dn = U - (U + dU) = -dU$



则 $E = -\frac{dU}{dn}$ 或 $\vec{E} = -\frac{dU}{dn} \vec{n}$

1. 场强方向与电势增长率最大的方向相反；
2. 场强大小与电势增长率最大值相等。

【注】： $\frac{dU}{dl}$ 是矢量 $\frac{dU}{dn} \vec{n}$ 在 $d\vec{l}$ 方向的分量。

三、场强与电势梯度的关系

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) = -\nabla V$$

其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

标量函数 $f(x,y,z)$ 的梯度定义为：

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\nabla V$$

电场强度等于电势梯度的负值。

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

讨 论

(1) 空间某点电场强度的大小取决于该点领域内电势 V 的空间变化率.

(2) 电场强度的方向恒指向电势降落的方向.

◆ 直角坐标系中

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad}V$$

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (\text{电势梯度})$$

◆ 为求电场强度 \vec{E} 提供了一种新的途径

求 \vec{E} 的三种方法

{ 利用电场强度叠加原理
利用高斯定理
利用电势与电场强度的关系。

讨 论

二 电场线和等势面的关系

1) 电场线与等势面处处正交.

(等势面上移动电荷, 电场力不做功.)

2) 等势面密处电场强度大; 等势面疏处电场强度小.

讨论

1) 电场弱的地方电势低; 电场强的地方电势高吗?

2) $V = 0$ 的地方, $\vec{E} = 0$ 吗 ?

3) \vec{E} 相等的地方, V 一定相等吗? 等势面上 \vec{E} 一定相等吗 ?