学院______ 专业、班______ 年级______ 学号______ 姓名______ 考试教室______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

◉ A卷　○ B卷

重庆大学《线性代数 II》课程试卷

2022 — 2023 学年　第 1 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10862　考试日期：2022 年 12 月

考试方式：○ 开卷　◉ 闭卷　　考试时间：120 分

> **考试提示：**1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；2.**考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。**

温馨提示：您所有客观题（用 2B 铅笔）和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置，不在指定位置答题将不会计分，敬请您在答题卡上作答时注意字体尽量小，节约能够使用的空间！在该试卷纸上作答均不会计分！

一、单项选择题（客观题，请用铅笔在答题卡方格中填涂）（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 A 为 n 阶方阵，下列交换错误的是（　　）

（A）$AA^*=A^*A$；

（B）$A^mA^p=A^pA^m$（m,p 为整数）；

（C）$AA^T=A^TA$；

（D）$(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$。

2. 设 A，P 均为 3 阶方阵，P^T 为 P 的转置，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $P=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$ 则 $Q^TAQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

3. 设 A，B 为 n 阶方阵，且 $(AB)^2=E$. 则必有（　　）

（A）$A^{-1}=B$　　（B）$AB=-E$

（C）$AB=E$　　（D）$A^{-1}=BAB$

4. 设 A 为 m 阶矩阵，设 B 为 n 阶矩阵，且 $|A|=a,|B|=b$，若 $C=\begin{pmatrix}O&3A\\-B&O\end{pmatrix}$，则 $|C|=$（　　）

（A）$-3ab$；（B）3^mab；（C）$(-1)^{mn}3^mab$；（D）$(-1)^{(m+1)n}3^mab$。

5. 设 A，B 是四阶非零方阵，且 $AB=O$，下列成立的是(　　)

（A）若 $R(A)=1$，则 $R(B)=3$
（B）若 $R(A)=3$，则 $R(B)=1$
（C）若 $R(A)=2$，则 $R(B)=2$
（D）若 $R(A)=4$，则 $R(B)=1$

6. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，若 η_1，$\eta_2,\cdots$，η_t 是齐次方程 $A^TX=0$ 的基础解系，则 $R(A)$ 为（　　）

(A) t　　(B) $n-t$　　(C) $n-m$　　(D) $m-t$

二、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 已知 D 为 5 阶行列式，且 $a_{51}a_{23}a_{45}a_{p4}a_{q2}$ 带正号，则 p 为 ________。

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 为 A 的行列式中 a_{ij} 元的代数余子式，则 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}=$________。

9. 已知 $\alpha=(a,1,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&a&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，α 在矩阵 A 中对应的特征值为________。

10. 已知由向量组 $\alpha_1=(1，2，3)$，$\alpha_2=(3，-1，2)$，$\alpha_3=(2，3，t)$ 生成空间的维数为 2，则 $t=$________

11. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，将 A 的第二列加到第一列得到矩阵 B，$\boldsymbol{A}^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 $|A^*B|=$________。

12. 设二次型 $f(x,y,z)=ax^2+4y^2+az^2+6xy+2yz$ 是正定的，则 $\boldsymbol{a}$ 的取值范围是________。

三、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13. 若方阵 A,B,C 满足 $AB=AC$，则 $B=C$.

14. 若 A 是 5 阶方阵，且 $A^2=O$，则其伴随阵 A^* 的秩 $R\left(A^*\right)=0$.

四、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15.（8 分）计算行列式

$$\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$

16.（8 分）

（8 分）已知三阶矩阵A满足$\left(2E-C^{-1}B\right)A^T=C^{-1}$,求$A$.其中

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

17.（12 分） 求参数a取何值时，下列方程组有唯一解或无解或有无穷多个解. 当有无穷多个解时，求其通解.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$$

18.（12 分） 已知二次型

$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$经过正交变换可化为

$f=y_1^2+2y_2^2$。

（1）求参数a,b的值。

（2）求所用正交变换矩阵Q。

五、证明题（请在主观题指定区域解答）（每小题 7 分，共 14 分）

19.（7 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$线性相关，且$\beta,\gamma$都不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，证明：

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$等价。

20.（7 分） 设A为m阶实对称矩阵且正定，B为$m\times n$阶实矩阵，B^T为B的转置矩阵，试证明：B^TAB为正定矩阵的充分必要条件是B的秩$R(B)=n$。