学院　专业、班　年级　学号　姓名　考试教室

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《线性代数 II》课程

◉ A卷　○ B卷

2021 — 2022 学年　第 2 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10862　考试日期：2022 年 06 月

考试方式：○ 开卷　◉ 闭卷　　考试时间：120 分

考试提示：1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试； 2.**考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。**

温馨提示：您所有客观题（用 2B 铅笔）和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置，不在指定位置答题将不会计分，敬请您在答题卡上作答时注意字体尽量小，节约能够使用的空间！在该试卷纸上作答均不会计分！

一、单项选择题（客观题，请用铅笔在答题卡方格中填涂）（每小题 3 分，共 18 分）

1．n 阶行列式 D_n 为零的充分条件是（　　　）

（A）D_n 中零元素的个数大于 n；

（B）D_n 中各行元素之和为零；

（C）D_n 中主对角线上元素全为零；

（D）D_n 中反对角线上的元素全为零。

2．设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第二行加到第一行得到 B，再将 B 的第一列的-1 倍加到第二列得到 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　　）

（A）$C=P^{-1}AP$.　　（B）$C=PAP^{-1}$.

（C）$C=P^TAP$.　　（D）$C=PAP^T$.

3. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times m$ 阶矩阵，E 为 m 阶单位矩阵。若 $AB=E$，则（　　　）

（A）秩 $R(A)=m$，秩 $R(B)=m$；

（B）秩 $R(A)=m$，秩 $R(B)=n$；

（C）秩 $R(A)=n$，秩 $R(B)=m$；

（D）秩 $R(A)=n$，秩 $R(B)=n$.

4．设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，$Ax=O$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论中正确的是（　　　）

（A）若 $Ax=O$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；

（B）若 $Ax=O$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多个解；

（C）若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=O$ 仅有零解；

（D）若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=O$ 有非零解。

5. 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=O$ 的一个基础解系，则 $A^*x=O$ 的基础

解系可为（　　）

(A) α_1，α_3.　　(B) α_1，α_2

(C) α_1，α_2，α_3.　　(D) α_2，α_3，α_4.

6. 设A为n阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若$A^3=O$，则（　　）

（A）E-A不可逆，E+A不可逆

（B）E-A不可逆，E+A可逆

（C）E-A可逆，E+A可逆

（D）E-A可逆，E+A不可逆

二、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 设行列式$D=\begin{vmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{vmatrix}$，$A_{ij}$是$D$中元素$a_{ij}$的代数余子式，

则$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}=$______________.

8. 设

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，且$a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n\neq 0$，则

$R(\mathbf{A})=$_______。

9. 设 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量$\alpha=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\end{pmatrix}^T$，已知

$A\alpha$与α线性相关，则$\lambda=$ ___________.

10. 设R^4的两个子空间$V_1=\left\{\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\,\middle|\,x_1-x_3+x_4=0\right\}$和

$V_2=\left\{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2\,\middle|\,\text{其中}\beta_1=(0,1,1,1,)^T,\ \beta_2=(1,1,0,1,)^T\lambda_1,\ \lambda_2\in R\right\}$，

则向量空间$V=\left\{\gamma\,\middle|\,\gamma\in V_1\text{且}\gamma\in V_2\right\}$的维数为___________.

11. 已知$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$有一个特征值为-2，则

$a=$___________ .

12. 设二次型$f(x,y,z)=x^2-y^2+5z^2+2axz+4yz$的正惯性指数为 2，则$\boldsymbol{a}$的取值范围是________________.

三、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，

若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13. 两个 n 阶正定矩阵 A 与 B 的乘积 AB 必然是一个正定矩阵。

14. 若对任意的$n\times 1$矩阵X，均有$AX=O$，则A必是零矩阵.

四、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15.（8 分）

计算行列式$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$。

16.（8 分）

设 4 阶方阵A的逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$，求满足$A^{-1}XA=E-A^{-1}X$的矩阵X。

17.（12 分）已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$ 有三个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵A的秩$R(A)=2$；

(Ⅱ)求a,b的值及方程组的通解。

18.（12 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} i\cdot j\ x_i x_j$

（1）求二次型的矩阵A；

（2）求正交矩阵Q，使得二次型经正交变换$x=Qy$化为标准形；

五、证明题（请在主观题指定区域解答）（每小题 7 分，共 14 分）

19.（7 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，证明：

（1）α_1能由α_2,α_3线性表示；

（2）α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

20.（7 分）设n阶方阵A既是正交矩阵又是正定矩阵。证明：A为n阶单位矩阵。