学院________ 专业、班________ 年级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

重庆大学《高等数II-1》期中考试试卷

◉A卷 ○B卷

2023— 2024 学年 第一学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10821 考试日期: 2023-11-16

考试方式: ○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.考试作弊,留校察看,毕业当年不授学位;请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

一、 单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 在下列极限中,极限存在的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}$ C. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$ D. $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$

【答案】C

2. 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则正确的论断是( ).

A. $a_n<b_n$,对任意自然数n成立

B. $b_n<c_n$,对任意自然数n成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在

D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

【答案】D

3. 若函数$f(x)$在闭区间$[1,2]$上连续,则关于函数$f(x)$的不正确的论述是( ).

A. 有最大值 B. 有界 C. 有零点 D. 有最小值

【答案】C

4. 设分段函数$f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$则函数$f(x)$在点$x=1$处( ).

A. 不连续 B. 连续,但不可导

C. 可导,但导数不连续 D. 可导,且导数连续

【答案】A

5. 设$f(x)$是奇函数,且$f'(0)$存在,则$x=0$是$F(x)=\frac{f(x)}{x}$的一个( ).

A. 无穷间断点 B. 可去间断点

C. 振荡间断点 D. 跳跃间断点

【答案】B

6. 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2+1}, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导,则(　　).

A. $a=1,b=0$　　B. $a=-1,b=0$

C. $a=-1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

【答案】C

二、　填空题(每小题 3 分,共 18 分)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$______.

【答案】2

8. 方程 $x+x^2+\cdots+x^{2023}=1$ 在开区间 $(0,1)$ 内有且只有______个实根.

【答案】1

9. 当 $x\to 0^+$ 时,若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$ 与 $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则参数 α 的取值范围是______.

【答案】$(1,2)$

10. 设 $f(x)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个三阶可导周期函数,其周期 $T=2023$,且 $f'''(0)=2023$,则 $f'''(2023)=$______.

【答案】2023

11. 设 $f(x)$ 为可导函数,其中 $x>1$,则复合函数 $y=f(x^x)$ 的微分 $dy=$______.

【答案】$x^x(1+\ln x)f'(x^x)dx$

12. 设 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=4$,则 $f'(2)=$______.

【答案】4

三、　计算题(每小题 7 分,共 28 分)

13. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

【解】显然,$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$.　(4 分)

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\dfrac{1}{2}$.　(6 分)

由夹逼准则,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.　(7 分)

14. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3(1+\sin x)}} \qquad (4 分)$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3(1+\sin x)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3(1+\sin x)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+\sin x)}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}}. \qquad (7 分)$$

15. 求摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 所表示的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 设 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ 其中 $0 \le t \le 2\pi$.

于是 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, (4 分)

且 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{1-\cos t} = -\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$. (7 分)

16. 设 $f(x) = x\cos 2x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

【解】 $f^{(n)}(x) = C_n^0 x^{(0)}(\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 x^{(1)}(\cos 2x)^{(n-1)}$

$$+ C_n^2 x^{(2)}(\cos 2x)^{(n-2)} + \cdots + C_n^n x^{(n)}(\cos 2x)^{(0)} \qquad (4 分)$$

$$= 2^n x\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{n-1} n\cos\left[2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]. \qquad (6 分)$$

于是 $f^{(n)}(0) = 2^{n-1} n\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2}$. (7 分)

四、 综合题(每小题 9 分,共 18 分)

17. 设极限函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{x(1+x^{2n})}$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式.

(2) 讨论 $f(x)$ 的连续性;若有间断点,判断其类型.

【解】 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{x(1+x^{2n})}$, 则

当 $0 < |x| < 1$ 时, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{x(1+x^{2n})} = \dfrac{1}{x}$.

当 $|x| = 1$ 时, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\pm 1)^{2n}}{1\cdot[1+(\pm 1)^{2n}]} = 0$.

当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{x(1+x^{2n})} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^{2n}} - 1}{x\left(\frac{1}{x^{2n}} + 1\right)} = -\dfrac{1}{x}$.

综上, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| < 1; \\ 0, & |x| = 1; \\ -\dfrac{1}{x}, & |x| > 1. \end{cases}$ (3 分)

a) 因为 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1, \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x} = -1, \end{cases}$ 所以 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, 即 $x=-1$ 是所给函数的第一类(跳跃)间断点. (5 分)

b) 因为 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x} = 1, \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -1, \end{cases}$ 所以 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, 即 $x=1$ 是第一类(跳跃)间断点. (8 分)

c) 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$, 所以 $x=0$ 是第二类(无穷)间断点. (9 分)

18. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y - x = 1$ 确定.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f'(0)$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]$.

(3) 求 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在点 $y=1$ 处的导数.

【解】 设 $\cos(xy)+\ln y - x = 1$.

(1) 令 $x=0$, 则 $y=1$, 即 $f(0)=1$. (1 分)

(2) 方程两端对 x 求导: $-(y+xy')\sin(xy)+\dfrac{y'}{y}-1=0$. (4 分)

将 $x=0$ 与 $y=1$ 代入上式, 得 $f'(0)=y'(0)=1$. (5 分)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}-0}\cdot 2 = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2f'(0) = 2. \qquad (8 分)$$

(4) 由反函数求导公式 $x'(y)=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{y'(x)}$ 可知: $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在点 $y=1$ 处的导数为 $x'(1)=\dfrac{1}{y'(0)}=\dfrac{1}{1}=1$.

五、 证明题与应用题(每小题 9 分,共 18 分)

19. 已知 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right), \forall n\in\mathbb{N}^+$.

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求出此数列的极限.

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1})^{\csc^2(x_n-1)}$.

【证】 设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right), \forall n\in\mathbb{N}^+$.

(1) 因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(x_n+x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right)\geq\sqrt[3]{1}=1>0$, 所以数列 $\{x_n\}$ 有下界 0. (3 分)

(2) 因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{1}{x_n^3}\right)\leq 1$, 所以 $x_{n+1}\leq x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减.

综上所述,由单调有界准则知,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.　　(5 分)

(3) 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = K$, 则 $K=\frac{1}{3}\left(2K+\frac{1}{K^2}\right)$. 于是 $K^3=1$, 即 $K=1$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1. \qquad (7\text{ 分})$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1})^{\csc^2(x_n-1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}[1+(x_{n+1}-1)]^{\frac{1}{x_{n+1}-1}\cdot(x_{n+1}-1)\csc^2(x_n-1)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-1)\csc^2(x_n-1)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-1}{\sin^2(x_n-1)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{1}{x_n^2}\right)-1}{(x_n-1)^2}}$$

$$\underline{\underline{t=x_n}}\ e^{\lim\limits_{t\to1}\frac{\frac{1}{3}\left(2t+\frac{1}{t^2}\right)-1}{(t-1)^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to1}\frac{2t^3-3t^2+1}{3t^2(t-1)^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to1}\frac{(t-1)^2(2t+1)}{3t^2(t-1)^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to1}\frac{2t+1}{3t^2}}$$

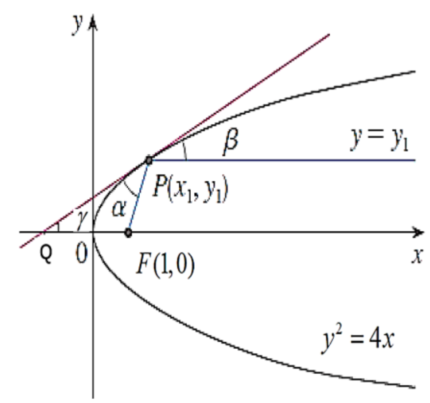
$$=e. \qquad (9\text{ 分})$$

20. 汽车的前灯、探照灯、反射式的天文望远镜以及日常生活中使用的手电筒,它们的反光镜都是采用旋转抛物面,即抛物线绕对称轴旋转一周而成的曲面.这种反光镜(抛物镜面)有一个很好的光学特性:把光源放在抛物线的焦点处,经镜面反射后的光线变成了与对称轴平行的光束.

现在我们用导数的几何意义来证明这个性质.如图所示,不妨设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$.

(1) 求抛物线上任一点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线 PQ 的方程,其中 Q 是该切线与 x 轴的交点.

(2) 证明: $\angle FPQ=\angle FQP$, 并由此说明对于抛物镜面来说,从焦点出发的入射光线经镜面反射后的反射光线一定与该镜面的对称轴(x 轴)平行.



【解】 如图所示,不妨设 $P(x_1,y_1)$ 是 x 轴上方的抛物线 $y_1=2\sqrt{x_1}$ 上任意一点,Q 是切线 PQ 与 x 轴的交点.

(1) 在点 P 处,切线 PQ 的斜率为 $y'\big|_{x=x_1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{x=x_1}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}$. 因此,所求切

线 PQ 的方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$, 即 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_1}$.　　(5 分)

(2) 欲证 $\angle FPQ=\angle FQP$, 只需证明线段 FP 与线段 FQ 相等即可.

令 $y=0$, 则 $x=x_1$, 即点 Q 坐标为 $Q(-x_1,0)$.

于是, $\begin{cases}|FP|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+4x_1}=x_1+1,\\ |FQ|=1+x_1.\end{cases}$

因此, $|FQ|=|FP|$, 即 $\angle FPQ=\angle FQP$.　　(8 分)

(3) 因为 $\begin{cases}\angle\alpha=\angle FPQ=\angle FQP=\angle\gamma,\\ \angle\beta=\angle\gamma,\end{cases}$ 所以 $\angle\alpha=\angle\gamma$. 也就是说,对于抛物镜面来说,从焦点出发的入射光线经镜面反射后的反射光线一定与该镜面的对称轴(x 轴)平行.　　(9 分)