线性代数（II）总复习

教材：段正敏 等（主编），线性代数（第三版），高等教育出版社，2019

第一章　行列式

1. 定义，性质（P7-9），按行（列）展开（定理 1.4.2 及推论）
2. 代数余子式，范德蒙德行列式

第二章　矩阵

1. 矩阵的乘法、转置，方阵的行列式，逆矩阵的运算规律
2. 矩阵的秩的概念与八条基本性质
3. 可逆矩阵，求矩阵的逆 A^{-1}（初等行变换）. P41: 例 3
4. 伴随矩阵，关于 $A^{-1}, A^{*}, |A|$ 之间的关系
5. 用初等行变换求矩阵的秩、方阵的逆，解方程 $AX=B$ 和 $Ax=b$，矩阵方程求解. P53: 习题二第 12 题
6. 克拉默法则、分块（反）对角矩阵的逆
7. 初等方阵、（反）对称矩阵、正交矩阵

第三章　向量组的线性相关性及线性空间

1. 向量组的线性相关、线性无关（定义、性质）
2. 向量组的最大线性无关组与秩（定义、性质、利用初等行变换求解）
3. 施密特标准正交化方法. P74: 例 1
4. 向量空间、向量在基下的坐标、基变换与坐标变换、线性变换. P79: 例 6

第四章　线性方程组

1. 齐次线性方程组有非零解、仅有零解的充要条件（特别地当 m=n 时）. P101: 例 1、2
2. 求 Ax=0 的通解，基础解系. P104-105: 例 3、4
3. 判断非齐次线性方程组 Ax=b 有 0, 1, ∞个解. P109-110: 例 1、2
4. 求 Ax=b 的通解. P111: 例 3; P113-114: 例 6、7; P120: 习题四第 4 题
5. 线性方程组（齐次、非齐次）解的性质与结构（P102-104, P110-111）

第五章　矩阵的相似对角化

1. 求矩阵的特征值和特征向量. P124: 例 1
2. 方阵的特征值和特征向量的性质（P128-129）. P130: 例 4; P134: 例 1
3. 矩阵的相似，定理 5.2.2（P132，对角化充要条件）. P135: 例 2
4. 求 A^{k}（对角化方法）. P134
5. 实对称阵的相似对角化. P137-139: 例 1、2

第六章　二次型

1. 合同的定义. P151，矩阵的相似与合同的区别
2. 化二次型为标准型（特征值法）. P151-153: 例 1; P154: 例 2
3. 惯性定理（P158），正定二次型、正定矩阵. P160: 例 2

##

考试题型：填空、单选、判断、计算（一、二）、证明【参见：模拟试题一、二】
基本运算：行列式计算、矩阵的初等行变换

线性代数知识点及考查内容

第一章 行列式

1. 逆序数概念
2. n 阶行列式的定义，利用定义简单计算：对角线法则（只适用于二阶与三阶行列式！)、对角行列式、反对角行列式、三角形行列式
3. 行列式的性质
4. 余子式、代数余子式概念
5. 按行（列）展开定理、范德蒙德行列式
6. 行列式的综合计算（考试的行列式题目相对比较简单，一般不难）

第二章 矩阵

1. 矩阵的定义，对角矩阵、数量矩阵、单位矩阵，对称矩阵，上（下）三角矩阵的概念
2. 矩阵的基本运算：加法、数乘、乘法、转置运算定义及其运算规律
3. 方阵的行列式及其运算规律
4. 分块矩阵的概念及其运算，分块方阵的逆（掌握书上的对角和反对角分块矩阵）
5. 矩阵的 k 阶子式，秩的概念和性质
6. 初等变换与初等方阵的概念和关系，初等变换与矩阵秩的关系
7. 将矩阵化为行阶梯形、行最简形、标准形并求秩
8. 矩阵逆的概念和性质（方阵可逆的充要条件）
9. 伴随矩阵概念、性质及其与矩阵逆的关系
10. 利用初等行变换求矩阵的秩、方阵的逆，解方程 AX=B 和 Ax=b（A 可逆）
11. 克拉默法则

第三章 向量组的线性相关性及线性空间

1. n 维向量的概念，基本运算定义、运算规律
2. 向量的内积概念、性质、柯西-施瓦茨不等式
3. 线性相关、线性无关的定义及其相关定理
4. 向量组 A 由 B 线性表示、向量组等价的概念以及向量组等价的矩阵表示、判别条件
5. 最大线性无关组、秩的概念（用矩阵的初等行变换求向量组的秩和最大无关组）
6. 矩阵的行秩、列秩和矩阵的秩的关系
7. 正交向量组的概念及性质
8. 正交矩阵的概念及其充要条件
9. 施密特正交化过程
10. 向量空间定义、基与坐标
11. 基变换，过渡矩阵与坐标变换公式
12. 一般线性空间的定义，能够判断一些简单的例子是否构成线性空间
13. 一般线性空间的基和维数，能够写出一些简单的线性空间的基和维数
14. 线性变换

第四章 线性方程组

1. 齐次、非齐次线性方程组的相关定义，线性方程组的同解定理
2. 齐次线性方程组仅有零解、有非零解的充要条件
3. 非齐次线性方程组无解、有唯一解、有无穷多个解的充要条件

4. 齐次线性方程组解的结构（解的性质、基础解系、通解的求法）
5. 非齐次线性方程组解的结构（解的性质、通解的求法）
6. 含参数线性方程组解的讨论

第五章 矩阵的相似对角化

1. 方阵的特征值和特征向量、特征多项式、特征方程等概念及求法
2. 特征值、特征向量的相关性质及其证明
3. 相似矩阵的概念与性质
4. 相似对角化的概念、相关定理和计算（矩阵可相似对角化的条件及方法）
5. 实对称阵的特征值与特征向量的性质
6. 实对称阵相似对角化的相关定理和计算（利用正交阵将对称阵对角化方法）
7. 对角化方法求A^n（$A^n=P\Lambda^n P^{-1}$）

第六章 二次型

1. 二次型的概念，二次型的标准形的概念
2. 合同的定义（矩阵相似与合同的区别和联系？相似则特征值相同；合同具有相同的正、负惯性指数）
3. 化二次型为标准形：特征值法（着重掌握！）、拉格朗日配方法、初等变换法
4. 惯性定理
5. 正定二次型（矩阵）的定义，负定、半负定、半正定二次型（矩阵）的定义
6. 顺序主子式概念以及顺序主子式与正定矩阵的关系——赫尔维茨定理

计算题主要考察内容：

1. 行列式的计算（通常考察比较简单和基础的）
2. 矩阵方程的求解（一般涉及伴随和逆矩阵）
3. 向量组的秩和最（极）大线性无关组（初等行变换）
4. 过渡矩阵、基变换与坐标变换公式
5. 求解含参数的线性方程组（无解，有唯一解，有无穷多个解（通解））
6. 特征值法化二次型为标准形（包含了计算特征值和特征向量、施密特正交化过程、单位化），实对称阵的相似/合同对角化

证明题（侧重基本概念、性质、定理）：

1. 向量组的线性相关性
2. 正定矩阵（对称阵+正定的定义）、正交矩阵
3. 特征值与特征向量的概念及性质
4. 线性方程组（齐次、非齐次）解的性质

……

上述内容供复习参考，请认真备考！！！

附 1：**课堂各章小结**

第一章 行列式

1、用对角线法则计算二阶和三阶行列式
2、n 阶行列式的定义及性质
3、代数余子式的定义及性质
4、利用行列式的性质及按行（列）展开计算 n 阶行列式

第二章 矩阵

1、矩阵的线性运算（加法和数乘）、乘法、转置、方阵的行列式及其运算规律
2、可逆矩阵的概念、性质以及矩阵可逆的充要条件
3、伴随矩阵的概念和性质
4、克拉默法则
5、分块矩阵及其运算规律（行列式、逆）
6、矩阵的秩的概念和基本性质
7、矩阵的初等变换、矩阵等价、行阶梯形、行最简形、标准形、初等方阵
8、用初等行变换求矩阵的秩、方阵的逆，解方程 AX=B 和 Ax=b（A 可逆）

第三章 向量组的线性相关性及线性空间

1、向量内积、正交向量组、施密特正交化
2、线性组合、线性表示，向量组线性相关、线性无关的概念、判别条件、性质等
3、向量组 A 由向量组 B 线性表示、等价的概念、判别条件
4、向量组的最大无关组和秩，矩阵的秩与行秩、列秩的关系，用矩阵的初等行变换求向量组的秩和最大无关组
5、向量空间的概念，向量空间的基和维数，向量在基下的坐标，基变换的过渡矩阵、坐标变换公式（用初等行变换求解）
6、一般向量（线性）空间（多项式函数空间 P_n、矩阵空间），向量在基下的坐标，线性变换（恒等变换、零变换、矩阵变换）

第四章 线性方程组

1、齐次线性方程组仅有零解、有非零解的充要条件
2、非齐次线性方程组无解、有唯一解、有无穷多个解的充要条件
3、基础解系，解的性质（齐次、非齐次）
4、通解的求法
5、含参数线性方程组解的讨论

第五章 矩阵的相似对角化

1、方阵的特征值与特征向量的定义、性质及求法
2、相似矩阵的概念与性质，矩阵可相似对角化的条件及方法
3、实对称阵的特征值与特征向量的性质
4、利用正交阵将对称阵对角化方法
5、对角化方法求 A^n（$A^n=P\Lambda^n P^{-1}$）

第六章 二次型

1、二次型及其矩阵表示，矩阵的合同关系（相似 与 合同!）

2、用正交变换化二次型为标准形（特征值法）

3、惯性定理

4、二次型、对称阵的正定性及其判别法（正惯性指数、特征值、赫尔维茨定理）

计算小题
- 第一章：行列式的计算
- 第二章：矩阵方程求解（涉及A^{-1}, A^{*}）
- 第三章：向量组的秩与最大线性无关组
  过渡矩阵、向量在基下的坐标

计算大题
- 第四章：线性方程组求解 *（含参讨论）

  ↓

- 第五章：求方阵的特征值与特征向量

  $|A-\lambda E|=0,\quad (A-\lambda_i E)\vec{x}=\vec{o}$

  ↓

  （正交）相似对角化

  ↓

- 第六章：特征值法化二次型为标准形
  （实对称阵）

↑

基本运算：矩阵的初等行变换、行列式计算

【熟练掌握！！！】

附 2：**二版教材要点**

教材：段正敏（主编），线性代数（第二版），高等教育出版社，2015

第一章　行列式

1. 定义，性质（P7-9），按行（列）展开（定理 1.4.2 及推论）
2. 代数余子式，范德蒙德行列式

第二章　矩阵

1. 矩阵的乘法、转置，方阵的行列式，逆矩阵的运算规律
2. 矩阵的秩的概念与八条基本性质
3. 可逆矩阵，求矩阵的逆 A^{-1}（初等行变换）. P45：例 3
4. 伴随矩阵，关于 $A^{-1}, A^{*}, |A|$ 之间的关系
5. 用初等行变换求矩阵的秩、方阵的逆，解方程 $AX=B$ 和 $Ax=b$，矩阵方程求解. P58：习题 2 第 12 题
6. 克拉默法则、分块（反）对角矩阵的逆
7. 初等方阵、（反）对称矩阵、正交矩阵

第三章　向量空间

1. 向量组的线性相关、线性无关（定义、性质）
2. 向量组的最大线性无关组与秩（定义、性质、利用初等行变换求解）
3. 施密特标准正交化方法. P79：例 1
4. 向量空间、向量在基下的坐标、基变换与坐标变换、线性变换. P85：例 6

第四章　线性方程组

1. 齐次线性方程组有非零解、仅有零解的充要条件（特别地当 m=n 时）. P106：例 1、2
2. 求 Ax=0 的通解，基础解系. P110-111：例 3、4
3. 判断非齐次线性方程组 Ax=b 有 0, 1, ∞ 个解. P115-116：例 1、2
4. 求 Ax=b 的通解. P118：例 3; P120：例 6、7; P128：习题 4 第 4 题
5. 线性方程组（齐次、非齐次）解的性质与结构（P107-110, P117-118）

第五章　矩阵的相似对角化

1. 求矩阵的特征值和特征向量. P132：例 1
2. 方阵的特征值和特征向量的性质（P136-138）. P139：例 4; P144：例 1
3. 矩阵的相似，定理 5.2.2（P141，对角化充要条件）. P145：例 2
4. 求 A^{k}（对角化方法）. P144
5. 实对称阵的相似对角化. P147-148：例 1、2

第六章　二次型

1. 合同的定义. P160，矩阵的相似与合同的区别
2. 化二次型为标准型（特征值法）. P161：例 1; P163：例 2
3. 惯性定理（P167），正定二次型、正定矩阵. P170：例 2

\##

考试题型：填空、单选、判断、计算（一、二）、证明

基本运算：行列式计算、矩阵的初等行变换

1、行列式

1. n阶行列式共有n^2个元素，展开后有$n!$项求和（$D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$）；
2. 行列式的性质：(1) 行列式 D 与它的转置行列式D^T相等（$D=D^T$）；(2) 对换行列式的两行（列），行列式变号；(3) 行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式；(4) 行列式中如果有两行（列）元素完全相同或对应成比例，则此行列式为零；(5) 若行列式的某一列（行）中各元素均为两项之和，则此行列式等于按这列（行）拆开的两个行列式之和；(6) 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）的对应元素上去，行列式不变；
3. 代数余子式的性质：
   ①、A_{ij}与a_{ij}的大小无关，只与a_{ij}的位置有关；
   ②、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为$|A|$（按行（列）展开）；
   ③、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；
4. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$；
5. 设n阶行列式D：
   将D上、下翻转或左右翻转，所得行列式为D_1，则$D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将D顺时针或逆时针旋转90°，所得行列式为D_2，则$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将D主对角线翻转后（转置），所得行列式为D_3，则$D_3=D$；
   将D副对角线翻转后，所得行列式为D_4，则$D_4=D$；
6. 行列式的重要公式：
   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；
   ②、副（反）对角行列式：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ③、上、下三角行列式（$|◥|=|◣|$）：主对角元素的乘积；
   ④、$|◤|$和$|◢|$：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|$、$\begin{vmatrix}C & A_m\\ B_n & O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O & A_m\\ B_n & C\end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|A||B|$；
   ⑥、范德蒙德行列式：大指标减小指标的连乘积，$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$；
   ⑦、特征值（$|A-\lambda E|=0$）；
7. 对于n阶行列式$|A|$，恒有：$|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$，其中$S_k$为$k$阶主子式；
8. 证明$|A|=0$的方法：
   ①、$|A|=-|A|$；
   ②、反证法；
   ③、构造齐次线性方程组$Ax=0$，证明其有非零解；
   ④、利用秩，证明$r(A)<n$；
   ⑤、证明 0 是其特征值；

2、矩阵

1. A 是 n 阶可逆矩阵：
   $\Leftrightarrow |A|\neq 0$（是非奇异矩阵）；
   $\Leftrightarrow r(A)=n$（是满秩矩阵）；
   $\Leftrightarrow$ 存在同阶方阵 B，使 $AB=E\ (or\ \ BA=E)$（定义 $AB=BA=E$）；
   $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组线性无关；
   $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解；
   $\Leftrightarrow \forall b\in R^n$，$Ax=b$ 有唯一解（克拉默法则：$x_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}$，$i=1,2,\cdots,n$）；
   $\Leftrightarrow$ A 与 E 等价；
   $\Leftrightarrow$ A 可表示成若干个初等矩阵的乘积；
   $\Leftrightarrow$ A 的特征值全不为 0；
   $\Leftrightarrow$ A^TA 是正定矩阵；
   $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组是 R^n 的一组基；
   $\Leftrightarrow$ A 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵；
2. 对于 n 阶矩阵 A：$AA^*=A^*A=|A|E$（基本性质）无条件恒成立；
3. $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$ $\qquad (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ $\qquad (A^*)^T=(A^T)^*$
   $(AB)^T=B^TA^T$ $\qquad (AB)^*=B^*A^*$ $\qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $\qquad (\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}\ (\lambda\neq 0)$
4. 方阵的行列式：$|A^T|=|A|$，$|\lambda A_n|=\lambda^n|A_n|$，$|AB|=|A||B|$；
5. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；
6. 记对角矩阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则 $\Lambda^k=diag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，从而 $\varphi(\Lambda)=a_0E+a_1\Lambda+\cdots+a_m\Lambda^m=diag(\varphi(\lambda_1),\varphi(\lambda_2),\cdots,\varphi(\lambda_n))$，其中 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$；
   若 $A=PBP^{-1}$（或 $P^{-1}AP=B$），则 $A^k=PB^kP^{-1}$（特别当 $B=\Lambda$），$\varphi(A)=P\varphi(B)P^{-1}$；
7. 关于分块矩阵的重要结论，其中均 A、B 可逆：
   若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：
   Ⅰ、$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$；
   Ⅱ、$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$，特别有 $diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s)^{-1}=diag(1/\lambda_1,1/\lambda_2,\cdots,1/\lambda_s)$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\neq 0$；
   ②、$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（主对角分块）
   ③、$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（副对角分块）
   ④、$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

⑤、$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m \times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的：$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$；

   等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

   对于同型矩阵 A、B，若 $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim B$；

2. 行最简形矩阵：

   ①、只能通过初等行变换获得；

   ②、每行首个非 0 元素必须为 1；

   ③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

   ①、若 $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, X)$，则 A 可逆，且 $X = A^{-1}$；

   ②、对矩阵 (A, B) 做初等行变换，当 A 变为 E 时，B 就变成 $A^{-1}B$，即：$(A, B) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1}B)$；

   ③、求解线性方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax = b$，如果 $(A, b) \overset{r}{\sim} (E, x)$，则 A 可逆，且 $x = A^{-1}b$；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

   ①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

   ②、$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，左乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各行元素；右乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各列元素；

   ③、对调两行或两列，符号 $E(i, j)$，且 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$；

   ④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$，且 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$；

   ⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且 $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$；

5. 矩阵秩的基本性质：

   ①、$0 \le r(A_{m \times n}) \le \min(m, n)$；

   ②、$r(A^T) = r(A)$；

   ③、若 $A \sim B$，则 $r(A) = r(B)$（初等变换不改变矩阵的秩）；

   ④、若 P、Q 可逆，则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

   ⑤、$\max(r(A), r(B)) \le r(A, B) \le r(A) + r(B)$；（※）

   ⑥、$r(A + B) \le r(A) + r(B)$；（※）

   ⑦、$r(AB) \le \min(r(A), r(B))$；（※）

   ⑧、如果 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = O$，则：（※）

Ⅰ、B的列向量全部是齐次线性方程组$Ax=0$的解；

Ⅱ、$r(A)+r(B)\le n$；

⑨、若A、B均为n阶方阵，则$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为1的矩阵：一定可以分解为列矩阵（向量）$\times$行矩阵（向量）的形式，再采用结合律；

②、型如$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^ma^mb^{n-m}$；

注：Ⅰ、$(a+b)^n$展开后有$n+1$项；

Ⅱ、$C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$，$C_n^0=C_n^n=1$；

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$，$\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$，$rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化（若$A=P\Lambda P^{-1}$（或$P^{-1}AP=\Lambda$），则$A^k=P\Lambda^kP^{-1}$）；

7. 伴随矩阵$A^*=(A_{ij})^T$：

①、伴随矩阵的秩：$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)<n-1\ (or\ \ r(A)\le n-2)\end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\dfrac{|A|}{\lambda}$ $(AX=\lambda X, A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow A^*X=\dfrac{|A|}{\lambda}X)$；

③、$A^*=|A|A^{-1}$、$|A^*|=|A|^{n-1}$、$(kA)^*=k^{n-1}A^*\ (k\ne0)$；

8. 关于A矩阵秩的描述：

①、$r(A)=n$，A中有n阶子式不为0，$n+1$阶子式（如果有）全部为0；

②、$r(A)<n$，A中所有n阶子式全部为0；

③、$r(A)\ge n$，A中有n阶子式不为0；

9. 线性方程组：$Ax=b$，其中A为$m\times n$矩阵，则：

①、m与方程的个数相同，即方程组$Ax=b$有m个方程；

②、n与方程组的未知数个数相同，方程组$Ax=b$为n元方程；

10. 线性方程组$Ax=b$的求解：

①、对增广矩阵$B=(A,b)$进行初等行变换（只能使用初等行变换）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 线性方程组解的性质：ξ_1,ξ_2是$Ax=0$的解$\Rightarrow\forall k_1,k_2\in R$，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$也是$Ax=0$的解，

η_1,η_2是$Ax=b$的解$\Rightarrow\eta_1-\eta_2$是对应$Ax=0$的解；

η是$Ax=b$的解，ξ是对应$Ax=0$的解$\Rightarrow\xi+\eta$是$Ax=b$的解；

12. 线性方程组解的判定：

（1）齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$只有零解（零解一定存在）$\Leftrightarrow r(A)=n$（A的列向量组线性无关）；

$A_{m\times n}x=0$有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n$（A的列向量组线性相关）；（通解$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$）

（2）非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$无解$\Leftrightarrow r(A)<r(A,b)$，有唯一解$\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)=n$，

有无穷多个解$\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)<n$；（通解$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$）

13. 由n个未知数m个方程的方程组构成n元线性方程组：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b$（向量方程，$A$为$m\times n$矩阵，$m$个方程，$n$个未知数）；

③、$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$（全部按列分块，其中$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\beta$（线性表示）；

⑤、有解的充要条件：$r(A)=r(A,\beta)\le n$（n为未知数的个数）；

4、向量组的线性相关性

1. m个n维列向量所组成的向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$构成$n\times m$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$；

   m个n维行向量所组成的向量组B：$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$构成$m\times n$矩阵$B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

   含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$有、无非零解；（齐次线性方程组）

   ②、向量的线性表示 $\Leftrightarrow Ax=b$是否有解；（线性方程组）

   ③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵$A_{m\times n}$与$B_{l\times n}$行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组$Ax=0$和$Bx=0$同解；

4. $r(A^TA)=r(A)$；

5. n维向量线性相关的几何意义：

   ①、α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$；

   ②、α,β线性相关 $\Leftrightarrow \alpha,\beta$坐标成比例或共线（平行）；

   ③、α,β,γ线性相关 $\Leftrightarrow \alpha,\beta,\gamma$共面；

6. 线性相关与线性无关的定理：

   （1）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$唯一线性表示；

   （2）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$必线性相关；（部分相关则整体相关）

   若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$必线性无关；（整体无关则部分无关）

   （3）若r维向量组A的每个向量上添上$n-r$个分量，构成n维向量组B：

   若A线性无关，则B也线性无关；反之若B线性相关，则A也线性相关；

   简言之：无关组延长后（增维）仍无关，相关组缩短后（减维）仍相关，反之均不确定；

   （4）向量个数比向量维数大的向量组线性相关（特别有，任意 n+1 个 n 维向量必线性相关）；

7. 向量组A（个数为r）能由向量组B（个数为s）线性表示，且A线性无关，则$r\le s$；

   向量组A能由向量组B线性表示（即存在矩阵K，使$A=BK$），则$r(A)\le r(B)$；

   向量组B能由向量组A线性表示

   $\Leftrightarrow AX=B$有解；$\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$；

   向量组A与向量组B等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$；

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$；

   ①、矩阵行等价：$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解；

   ②、矩阵列等价：$A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B$（右乘，$Q$ 可逆）；

   ③、矩阵等价：$A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：

   ①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；

   ②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

   ③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

   ④、矩阵 A 的秩等于行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，则：

    ①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；

    ②、C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A^T 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解，

    ①、$ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow$ $Bx=0$ 只有零解；

    ②、$Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow$ $ABx=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n\times r}:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可由向量组 $A_{n\times s}:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为：

    $$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K \quad (B=AK)$$

    其中 K 为 $s\times r$，且 A 线性无关，则 B 线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=r$；（B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性）

    （必要性：$\because r=r(B)=r(AK)\le r(K),\ r(K)\le r,\ \therefore r(K)=r$；充分性：反证法）

    注：当 $r=s$ 时，K 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $Q_{n\times m}$，$AQ=E_m$ $\Leftrightarrow r(A)=m$、Q 的列向量线性无关；

    ②、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $P_{n\times m}$，$PA=E_n$ $\Leftrightarrow r(A)=n$、P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

    $\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立；（定义）

    $\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解，即 $Ax=0$ 有非零解；

    $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

    $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(A)=s$；

15. 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 r，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为：$r(S)=n-r$；

    应用：(1) $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解 $\Rightarrow r(A)\ge r(B)$；(2) $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Rightarrow r(A)=r(B)$；

16. 若 η^* 为 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E$（或 $AA^T=E$）或 $A^{-1}=A^T$（定义），性质：

   ①、A 的列（行）向量都是单位向量，且两两正交，即 $a_i^Ta_j=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\ne j\end{cases}$ $(i,j=1,2,\cdots n)$；

   ②、若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1}=A^T$ 也为正交阵，且 $|A|=\pm1$；

   ③、若 A、B 正交阵，则 AB 也是正交阵；

   注意：求解正交阵，千万不要忘记施密特正交化和单位化；

2. 施密特正交化：给定线性无关组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$

   $b_1=a_1$；

   $b_2=a_2-\dfrac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$；

   ………

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1};$$

3. 特征值和特征向量的性质（如：$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$，$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 是矩阵 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ 的特征值，$\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，$\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值，$\lambda\neq 0$ 是 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 的特征值 $\Rightarrow$ λ 是 $B_{n\times m}A_{m\times n}$ 的特征值），三角矩阵的特征值为对角元，A 和 A^T 有相同的特征值；
4. n 阶方阵 A 能相似于对角阵 $\Leftrightarrow$ 对 A 的每一个 $k\ (k\geq 2)$ 重特征根 λ，有 $r(A-\lambda E)=n-k$（即 A 有 n 个线性无关的特征向量）；
5. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；
   对于实对称阵，不同特征值对应的特征向量正交；
6. ①、A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ A 经过初等变换得到 B；
   $\Leftrightarrow PAQ=B$，P、Q 可逆；
   $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，$A$、$B$ 同型；
   ②、A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^TAC=B$，其中 C 可逆；
   $\Leftrightarrow x^TAx$ 与 x^TBx 有相同的正、负惯性指数；
   ③、A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP=B$ $\Rightarrow$ 特征值相同；
7. 实对称阵相似一定合同、合同未必相似；
   若 C 为正交矩阵，$C^{-1}AC=C^TAC=B \Rightarrow A\sim B$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；
8. A 为对称阵，则 A 为二次型矩阵；
9. 惯性定理、赫尔维茨定理（实对称阵 A 负定 $\Leftrightarrow$ A 的奇数阶顺序主子式为负且偶数阶顺序主子式为正）；
10. n 元二次型 x^TAx 正定：
    $\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n；
    $\Leftrightarrow A$ 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=E$；
    $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值均为正数；
    $\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式均大于 0（$\Leftrightarrow A$ 正定）；
    $\Rightarrow a_{ii}>0, |A|>0$；(必要条件)

（注：上述知识点，着重掌握课程学习过的内容！）【理解+记忆】

##

【线代解题的八种定势思维】（仅供借鉴，“概不负责”！）

1、题设条件与代数余子式 Aij 或伴随矩阵 A*有关，则立即联想到用行列式按行（列）展开定理以及 AA*=A*A=|A|E。

2、若涉及到 A、B 是否可交换，即 AB=BA，则立即联想到用逆矩阵的定义去分析。

3、若题设 n 阶方阵 A 满足 f(A)=0，要证 aA+bE 可逆，则先分解出因子 aA+bE 再说。

4、若要证明一组向量 a1,a2,…,as 线性无关，先考虑用定义再说。

5、若已知 AB=O，则将 B 的每列作为 Ax=0 的解来处理再说。

6、若由题设条件要求确定参数的取值，联想到是否有某行列式为零再说。

7、若已知 A 的特征向量ζ，则先用定义 Aζ =λ ζ 处理一下再说。

8、若要证明抽象 n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵，则用定义处理一下再说。

##

【编后语】本文档根据网上下载资料整理、补充汇编而成，仅供线性代数课程复习借鉴参考，特别感谢网络资源提供者。预祝大家考出好成绩！切记遵守考纪！！ C.R. Chen