

密

封

线

重庆大学《线性代数 II》课程

☒ A 卷☐ B 卷

2022 — 2023 学年 第 2 学期

开课学院：数统 课程号：MATH10862 考试日期：2023 年 06 月

考试方式：☐ 开卷 ☒ 闭卷 考试时间：120 分

考试提示：1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；2. 考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

温馨提示：您所有客观题（用 2B 铅笔）和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置，不在指定位置答题将不会计分，请您在答题卡上作答时注意字体尽量小，节约能够使用的空间！在该试卷纸上作答均不会计分！

一、单项选择题（客观题，请用铅笔在答题卡方格中填涂）（每小题 3 分，共 18 分）

1. D, 2. (B) 3. (C) 4. (C)
5. (B)
6. (A)

二、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 0
8. 1
9. 1
10. 9
11. 2
12. $y = k(1, 1, 1)^T$ ($\theta, 3$)

三、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13. 解：正确（2 分），因为 $Ax=0$ 有非零解，则

$|A|=0$ ，则 $|A^k|=|A|^k=0$ （3 分）

14. 解：错误（2 分）。如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

AB 有特征值 3，对应特征向量为 $x = (1, 1)^T$

但是 x 不是 BA 的特征向量，因为 $(BA)x = 3x$ ，

而 $(BA)x = (3, 0)^T \neq \lambda(1, 1)^T$ （3 分）

四、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15.

解 原式=

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \quad (2\text{分})$$

$$=abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} (2\text{分}) + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} (2\text{分})$$

=0 (2分) (如果用性质加上展开定理, 即使错误, 也须给一定的方法分数)

16.

$$|A|=2, A^*A=2E, AA^*X+4AA^{-1}=AA+AX (2\text{分})$$

$$(A-2E)X=4E-A^2=(2E-A)(2E+A) (2\text{分})$$

$$|2E-A|=8 \neq 0, \text{ 则}$$

解:

$$X=-2E-A (2\text{分}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} (2\text{分})$$

17. (12 分)

解 将 η 代入 $Ax=\beta$, 得到 $1-a+c-1=0, a=c$ (2 分)

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2a-1) & 2a-1 & 2a-1 \end{pmatrix} (2\text{分})$$

$$\text{当 } a=\frac{1}{2}, (A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2\text{分})$$

$$\text{同解方程组为 } \begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_2 = -3x_3 - x_4 + 1 \end{cases}$$

$$\text{通解为: } x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (2\text{分})$$

$$\text{当 } a \neq \frac{1}{2}, (A, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2a & 1-a & -a \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2\text{分})$$

$$\text{则通解为 } x = k \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2\text{分})$$

18. (12 分)

$$\text{解：二次型矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2-1) \quad (2\text{分})$$

故特征值为 2, 1, -1 (3 分)

其对应的特征向量为 $\xi_1 = (0, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (1, 0, 1)^T$, $\xi_3 = (1, 0, -1)^T$ (3 分)

单位化: $\eta_1 = (0, 1, 0)^T$, $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$, $\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ (2 分)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1\text{分}), \text{ 为不定 } (1\text{分})$$

五、证明题 (请在主观题指定区域解答) (每小题 7 分, 共 14 分)

$AB - E = A(B - E) + (A - E)$ (3 分), 则

19. 证明: $R(AB - E) \leq R(A - E) + R(A(B - E))$ (2 分)
 $\leq R(A - E) + R(B - E)$ (2 分)

20.
证明:

由于 $(E - A^{-1})^T = E^T - (A^T)^{-1} = E - A^{-1}$ (2分)

设 λ 为 A 的特征值, 则 $A - E$ 的特征值为 $\lambda - 1$,

$E - A^{-1}$ 的特征值为 $1 - \frac{1}{\lambda}$ (2分), 由于 A , $A - E$ 正定, 则

$\lambda > 0, \lambda - 1 > 0$ (2分), $1 - \frac{1}{\lambda} = \lambda - 1 \bigg/ \lambda > 0$ (1分)