学院 专业、班 年级 学号 姓名 考试教室

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

重庆大学《高等数学 1》(电子信息类）期中试卷

◉A卷 ○B卷

2020— 2021 学年 第 1 学期

开课学院： 数统 课程号： MATH10012 考试日期： 20201115

考试方式： ○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间： 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+\cos bx}{x^2}=-2$，其中 a,b 为常数，则（ D ）

（A）$a=1,b=2$. （B）$a=1,b=-2$.

（C）$a=-1,b=2$. （D）$a=-1,b=\pm 2$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题错误的是（ D ）

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$ （B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在 （D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

3. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$ 存在，则两个极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$（ C ）

（A）均存在； （B）至少有一个存在 ；

（C）可能均不存在 ； （D）不可能一个存在且另一个不存在.

4. 设 $f(0)=0$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充分必要条件为(B)

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(\sqrt{1-h^3}-1)$ 存在; (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}(f(2h)-f(h))$ 存在

5. 当 $x\to 0$ 时 $(\sqrt{1+x^2}-1)\ln(1-\sin^4 x)$ 是 x 的（C ）阶无穷小.

（A）4; （B）5; （C）6; （D）7.

6. 若 $f(x)$ 可导， $y=f^2\left[f\left(x^2\right)\right]$，则 $dy=$（ A ）

（A） $4xf(f(x^2))f'(f(x^2))f'(x^2)dx$ （B） $4xf(f(x^2))f'(x^2)dx$

（C） $2xf(f(x^2))f'(f(x^2))dx$ （D） $2f(f(x^2))f'(f(x^2))f'(x^2)dx$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1^3}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+3^3}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+(2n-1)^3}}\right)=$________ $\dfrac{1}{2}$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^\alpha 2x}{x^3}$ 存在，则 α 的取值范围是____________ $[3,+\infty)$

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+y^2+1=e^{y+x}$ 所确定。则 $y'(0)=$_________ -1

4. 设 $x_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=$_________ $\dfrac{1}{e}$

5. 设 $y=(1+x^2)^{\sin x}$，则 $y'=$______ $e^{\sin x\ln(1+x^2)}(\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x\sin x}{1+x^2})$

6. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\forall x,y$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则函数 $f(x)$ 的奇偶性为______________. 奇

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=-\frac{1}{4}$$

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x}).$

解：$$\lim_{x\to 0^-}(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x})=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x})=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x})=\dfrac{\pi}{2}.$

3. 设 $\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\cdot\frac{1}{dx/dt}=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}$$

4．求 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$ 的间断点，并指出其类型

解：$f(x)$ 的间断点为 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{\pi x}=-\dfrac{1}{\pi}$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{\sin\pi x}\overset{x-1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t+1)t(t+2)}{-\sin\pi t}=-\dfrac{2}{\pi}$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{\sin\pi x}\overset{x+1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t-1)(t-2)t}{-\sin\pi t}=-\dfrac{2}{\pi}$，故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

$\lim\limits_{x\to k}f(x)=\infty(k\neq 0,\pm1)$， $x=k(k\neq 0,\pm1)$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点。

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1、设 $f(x)$ 在 R 上有定义,且 $f'(0)=a(a\neq 0)$, $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$;求 $f'(x)$.。

解：令 $x=y=0$

$$f(0)=\frac{f(0)+f(0)}{1-f(0)f(0)}\Rightarrow f(0)=0$$

由 $f'(0)=a(a\neq 0)\Rightarrow a=f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+f^2(x))f(\Delta x)}{(1-f(x)f(\Delta x))\Delta x}=a(1+f^2(x))$$

因为 $f'(0)=a(a\neq 0)$，故 $f(x)$ 在 0 处连续，$\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$

2、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。.

解： $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0=f(0)$，**故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。**

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{\Delta x}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=1,\quad f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{\Delta x}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=0$$

左右导数不等，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_i\in(a,b),t_i>0,i=1,2,\cdots,n$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$ 使

$$f(\xi)=\frac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+t_2+\cdots+t_n}.$$

证明：因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 m，最大值 M，于是

$m\leq f(x_i)\leq M,i=1,2,\cdots,n$，也有 $t_im\leq t_if(x_i)\leq t_iM,i=1,2,\cdots,n$

从而 $(t_1+t_2+\cdots+t_n)m\leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)\leq(t_1+t_2+\cdots+t_n)M$

$$m\leq\frac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+t_2+\cdots+t_n}\leq M$$

由连续函数的介值定理知：$\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\frac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+t_2+\cdots+t_n}.$

2. 设 $0<x_1<\sqrt{3},x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n},(n\geq 1).$ 证明：$\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在并求此极限值.

证：$x_2-x_1=\frac{3-x_1^2}{3+x_1}>0\Rightarrow x_1<x_2$

$$x_1<\sqrt{3}\Rightarrow x_1(3-\sqrt{3})<\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\Rightarrow 3+3x_1<3\sqrt{3}+\sqrt{3}x_1\Rightarrow\frac{3(1+x_1)}{3+x_1}<\sqrt{3}$$

故 $0<x_2<\sqrt{3}.$

同理：若 $0<x_k<\sqrt{3}\Rightarrow 0<x_{k+1}<\sqrt{3},x_k<x_{k+1}$

由数学归纳法：$x_n\nearrow,x_n<\sqrt{3}$

故 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在。令 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$

对 $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 取极限：

$$A=\frac{3(1+A)}{3+A}\Rightarrow A^2=3\Rightarrow A=\sqrt{3}(A\geq 0)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}.$$

六、应用题（共 6 分）

证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任意一点的切线与两坐标轴构成的三角形的面积为定值。

证明：设 (x_0,y_0) 曲线上的一点，则有 $y_0=\frac{a^2}{x_0}$。$y=\frac{a^2}{x}\Rightarrow y'|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}$

过点 (x_0,y_0) 的切线方程为 $y=\frac{a^2}{x_0}-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$

令 $x=0$ 得 y 轴上的截距 $y=\frac{2a^2}{x_0}$，令 $y=0$ 得 x 轴上的截距 $x=2x_0$

所以三角形的面积$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2}{x_0}\cdot 2x_0=2a^2$为定值。