

重庆大学《高等数学 II-2》期末考试课程试卷

● A卷

○ B卷

2023—2024 学年 第二学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10822 考试日期: 2024.06.19

考试方式: ○ 开卷 ○ 闭卷 ● 其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;
2. 请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

一、单项选择题(每小题3分,共18分)

1. 直线 $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ 与平面 $\Pi: x-y+2z+4=0$ 的夹角为 ().

- (A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

【答案】D

2. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面

$2x+2y+z-1=0$, 则点 P 的坐标是 ().

- (A) $(1,-1,2)$ (B) $(-1,1,2)$ (C) $(1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

【答案】C

3. 设区域 $D = \{(x,y) | |x|+|y| \leq 1\}$, $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续正值函数,

a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = ().$

- (A) ab (B) $\frac{1}{2}ab$ (C) $a+b$ (D) $\frac{1}{2}(a+b)$

【答案】C

4. 设 Γ 是从点 $A(3,2,1)$ 到点 $B(0,0,0)$ 的直线段, 则

$\int_{\Gamma} x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz = ().$

- (A) $-\frac{87}{4}$ (B) $\frac{87}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

【答案】A

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ x-1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$ 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ ($-\infty < x < +\infty$), 其中

$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n=1,2,\dots$), 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right) = ().$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

【答案】B

6. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2, y = x, y = 0, z = 1$ 在第一卦限所围成的有界闭区域. 若 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = (\quad)$.

- (A) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$
 (C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^1 f(x, y, z) dz$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$

【答案】 D

二、填空题(每小题 3 分,共18分)

7. 设 $f(x, y, z) = e^x + y^2 z$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 则 $f'_x(0, 1, -1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

8. 初值问题 $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y = x^3 + 3x + 1$

9. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则 $\iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4\pi R^4$

10. 已知曲线 $L: y = x^2$, 其中 $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, 则 $\int_L x ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{13}{6}$

11. 二元函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 在点 $(0, 1)$ 处的最大方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

12. 微分方程 $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ 的通解为 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y = C_1 + e^x(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x), \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ (未标注任意常数不扣分)

三、计算题(每小题 7 分,共 28 分)

13. 求过直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ 且垂直于平面 $\Pi: 3x + 2y - z - 5 = 0$ 的平面方程.

【解】 由题设, 直线的方向向量为 $\vec{s} = \{2, -3, 2\}$, 平面的法向量为 $\vec{n}_1 = \{3, 2, -1\}$, 所求平面的法向量为 $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{n}_1 = \{-1, 8, 13\}$. (4 分)

于是, 所求平面方程为 $-(x-1) + 8(y+2) + 13(z-2) = 0$, 即

$$x - 8y - 13z + 9 = 0. \quad (7 \text{ 分})$$

14. 求二元函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

【解】 由题设, $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(x^2 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}, \frac{\partial f}{\partial y} = \left(1 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}$. (2 分)

$$\text{同时,} \begin{cases} f''_{xx}(x, y) = \left(2x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + y\right)e^{x+y}, \\ f''_{xy}(x, y) = \left(1 + x^2 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}, \\ f''_{yy}(x, y) = \left(2 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}. \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \text{ 则 } (x, y) = \left(-1, -\frac{2}{3}\right) \text{ 或 } (x, y) = \left(1, -\frac{4}{3}\right). \quad (4 \text{ 分})$$

(1) 当 $P_1(x, y) = P_1\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 时,

$$A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_1} = -e^{-\frac{5}{3}}, B_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{P_1} = e^{-\frac{5}{3}}, C_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{P_1} = e^{-\frac{5}{3}}.$$

于是, $A_1 C_1 - B_1^2 = -2e^{-\frac{5}{3}} < 0$. 从而, 点 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 一定不是 $f(x, y)$ 的极值点.

(2) 当 $P_2(x, y) = P_2\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 时,

$$A_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_2} = 3e^{-\frac{1}{3}}, B_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{P_2} = e^{-\frac{1}{3}}, C_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{P_2} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

于是, $\begin{cases} A_2 C_2 - B_2^2 = 2e^{-\frac{2}{3}} > 0, \\ A_2 > 0. \end{cases}$ 从而, 点 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 是 $f(x, y)$ 的唯一极小值点,

且极小值为 $f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -e^{-\frac{1}{3}}$. (7 分)

15. 计算 $I = \oint_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为椭圆 $4x^2 + y^2 - 8x = 4$ 的正向.

【解】 记 $P = \frac{x-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x+y}{x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \neq (0, 0). \quad (2 \text{ 分})$$

取曲线 $C^+ : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 方向为顺时针方向, 其中 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 并记曲线 C^+ 与 L 所围成的平面区域为 D , 曲线 C^+ 所围成的平面区域为 D' .

反复使用格林公式可得:

$$\begin{aligned} & \oint_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \oint_{L+C^+} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} - \oint_{C^+} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \iint_D 0 dx dy - \oint_{C^+} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{C^+} (x-y)dx + (x+y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D'} 2 dx dy \quad (6 \text{ 分}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2\pi\varepsilon^2 \\ &= 2\pi. \quad (7 \text{ 分}) \end{aligned}$$

16. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【解】 令 $u_n(x) = \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$, 则

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)x^{2n+2}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(2n+1)x^{2n}} \right| = \frac{1}{2}x^2 < 1.$$

由比值判别法可知:

当 $|x| < \sqrt{2}$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ 收敛;

当 $|x| > \sqrt{2}$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ 发散;

特别地, 当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}$ 发散.

综上所述, 原幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. (4 分)

令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$, $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 则

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} t^{2n}, \quad \forall t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n+1} \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = \frac{x}{2-x^2}, \quad \forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

因此, $S(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. (7 分)

四、综合题(每小题 9 分, 共 18 分)

17. 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy.$$

求 $f(t)$.

【解】 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4t^2\} = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2t\}$, 则

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right) \rho d\rho = 2\pi \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right) \rho d\rho.$$

于是, $f(t) = e^{4\pi t^2} + 2\pi \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right) \rho d\rho$. (3 分)

因此, $f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 8\pi t f(t)$, 即

$$f'(t) - 8\pi t f(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2}, \quad \text{其中} \begin{cases} P(t) = -8\pi t, \\ Q(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2}, \end{cases} \text{且 } f(0) = 1. \quad (5 \text{ 分})$$

利用公式法解上述一阶非齐次线性微分方程:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\int P(t) dt} \left[\int Q(t) e^{\int P(t) dt} dt + C \right] \\ &= e^{\int 8\pi t dt} \left[\int 8\pi t e^{4\pi t^2} e^{-\int 8\pi t dt} dt + C \right] \\ &= e^{4\pi t^2} (C + 4\pi t^2). \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 1$ 得 $C = 1$. 因此, $f(t) = e^{4\pi t^2} (1 + 4\pi t^2)$. (9 分)

18. 设 Σ 是二次曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (2x^3 - y)dydz + (2y^3 - z)dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy.$$

【解】取平面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 的下侧, 其中 Σ 与 Σ_1 所围空间区域记为

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \rho^2\}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (2x^3 - y)dydz + (2y^3 - z)dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (6x^2 + 6y^2 + 6z)dxdydz \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho^2} (\rho^2 + z)\rho dz$$

$$= 12\pi \int_0^1 \left[\rho^3 z + \frac{\rho z^2}{2} \right]_0^{1-\rho^2} d\rho$$

$$= 6\pi \int_0^1 (\rho - \rho^5) d\rho$$

$$= 6\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1$$

$$= 2\pi$$

(6 分)

于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \\ &= 2\pi - \iint_{\Sigma_1} (2x^3 - y)dydz + (2y^3 - z)dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy \\ &= 2\pi - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} -3(-dxdy) = 2\pi - 3 \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dxdy = 2\pi - 3\pi = -\pi. \end{aligned} \quad (9 \text{ 分})$$

五、证明题(每小题 9 分,共 9 分)

19. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^3 - u_n^3)$ 收敛.

【证一】设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在, 并可设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a, \text{ 且存在 } C > 0, \text{ 使得 } |u_n| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2 \text{ 分})$$

于是,

$$|u_{n+1}^3 - u_n^3| = |u_{n+1} - u_n| |u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_n + u_n^2| \leq 3C^2 |u_{n+1} - u_n| = 3C^2 (u_{n+1} - u_n). \quad (5 \text{ 分})$$

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$, 设其部分和为 S_n , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_1) = a - u_1,$$

即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 收敛. (8 分)

由比较判别法可知: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_{n+1}^3 - u_n^3|$ 收敛, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^3 - u_n^3)$ 收敛. (9 分)

【证二】设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在, 并可设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}^3 = a. \quad (4 \text{ 分})$$

令 $s_n = \sum_{k=1}^n (u_{k+1}^3 - u_k^3)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(u_2^3 - u_1^3) + (u_3^3 - u_2^3) + \cdots + (u_{n+1}^3 - u_n^3)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}^3 - u_1^3) = a^3 - u_1^3,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 收敛. (9 分)

六、应用题(每小题 9 分,共 9 分)

20. 设均匀平面薄板 D 由不等式 $x^2 \leq y \leq 1$ 所确定,其面密度为常数 k .

a) 求 D 的形心坐标 (\bar{x}, \bar{y}) ;

b) 求 D 关于过点 (\bar{x}, \bar{y}) 及 $(1,1)$ 的直线的转动惯量.

【解】(1)根据形心公式可知:
$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = 0, \\ \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy}{\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{5}, \end{cases} \quad \text{故平}$$

面薄板 D 的形心坐标为 $\left(0, \frac{3}{5}\right)$. (4 分)

(2)过点 $\left(0, \frac{3}{5}\right)$ 与 $(1,1)$ 的直线方程为 $l: 5y - 2x - 3 = 0$, 平面薄板 D

上任意一点 (x, y) 到该直线的距离为 $d = \frac{|5y - 2x - 3|}{\sqrt{29}}$. (6 分)

于是, D 关于直线 l 的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_l &= \iint_D d^2 k dx dy \\ &= k \iint_D \frac{(5y - 2x - 3)^2}{29} dx dy \\ &= \frac{k}{29} \iint_D (5y - 2x - 3)^2 dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{29} \iint_D (25y^2 + 4x^2 + 9 - 20xy - 30y + 12x) dx dy \\ &= \frac{k}{29} \iint_D (25y^2 + 4x^2 + 9 - 30y) dx dy \\ &= \frac{k}{29} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (25y^2 + 4x^2 + 9 - 30y) dy \\ &= \frac{352k}{3045}. \end{aligned} \quad (9 \text{ 分})$$

