

重庆大学《高等数学1》(工学)期中试卷

☒ A卷

☐ B卷

2020— 2021 学年 第 1 学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10013 考试日期: 20201115

考试方式: ☐ 开卷 ☒ 闭卷 ☐ 其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;
2. 考试作弊, 留校察看, 毕业当年不授学位; 请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等, 属严重作弊, 开除学籍。

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 \mathbb{R} 内连续且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; 则 (D)

(A) $a > 0, b < 0$; (B) $a > 0, b > 0$;

(C) $a \geq 0, b > 0$; (D) $a \geq 0, b < 0$.
2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 极限存在, 则两个极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 中 (C)

(A) 均存在; (B) 至少有一个存在;

(C) 可能均不存在; (D) 不可能一个存在且另一个不存在。
3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则下列命题错误的是 (D)

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$ (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
- (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

4. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某一邻域上有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导的一个充分条件是 (D)

- (A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right]$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a + h)}{h}$ 存在
- (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{h}$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a - 2h)}{h}$ 存在

5. 在 $x \rightarrow 0$ 的极限过程中, $(\sqrt{1 + x^3} - 1)\ln(1 + x^2)$ 是 x 的 (B) 阶的无穷小.
- (A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7.

6. 下列函数中在 $[1, +\infty)$ 无界的是 C

- (A) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (B) $f(x) = \arctan x^2 + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$
- (C) $f(x) = x \sin \sqrt{x} + 2^x e^{-x}$ (D) $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + 1} \arctan x$.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{\sqrt{n^6 + 1^3}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6 + 3^3}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + (2n-1)^3}} \right) = \underline{\hspace{2cm}} \frac{1}{3}$
2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^\alpha 2x}{x^3}$ 存在, 则 α 的取值范围是 $[3, +\infty)$
3. 设函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t \arctan t \end{cases}$ 所确定。则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{1}{2}$

命题人:

组题人:

审题人:

命题时间:

教务处理

4. 设 $x_n = 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n'' = \frac{1}{\sqrt{e}}$

5. 设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$, 则 $y' = e^{\sin x \ln(1+x^2)} (\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2})$

6. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x) \neq 0$, 且 $\forall x, y$ 有

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 则函数 $f(x)$ 的奇偶性为_____. 偶

三、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 - 4}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x^2} - 2}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} = -\frac{1}{4}$$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \arctan \frac{1}{x} \right)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\pi + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \arctan \frac{1}{x} \right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \arctan \frac{1}{x} \right) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \arctan \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$.

3. 设 $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = 2 \cos(\ln x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2 \sin(\ln x)}{x}$

4. 求 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x-1| \sin x}$ 的间断点, 并指出其类型.

解: $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, 1, k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{|x-1| \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)}{|x-1|} \cdot \frac{x}{\sin x} = -1$, 所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点;

因 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{|x-1| \sin x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)x}{(1-x) \sin x} = -\frac{1}{\sin 1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{|x-1| \sin x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)x}{(x-1) \sin x} = \frac{1}{\sin 1}$, 所以 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点;

因 $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x^2 - x}{|x-1| \sin x} = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{(x-1)x}{|x-1| \sin x} = \infty$, 所以 $k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

四、综合题 (每小题 8 分, 共 16 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b) = 1$. 求常数 a, b .

解: 据题意 $a > 0$.

$$1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-a^2)x^2 - (1+2ab)x + 1-b^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax+b)}$$

故 $1-a^2 = 0 \Rightarrow a = 1 (a > 0)$

$$1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(1+2b)x + 1-b^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - (x+b)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1+2b) + \frac{b^2-1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + (1 + \frac{b}{x})} = \frac{1+2b}{2}$$

故 $b = \frac{1}{2}$

2、讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$f_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\Delta x}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x} = 1$$

$$f_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\Delta x}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x} = 0$$

左右导数不等, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

五、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 设 $x_n = \frac{n^{10}}{3^n}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 极限存在并求此极限值.

$$\text{证: } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\exists N \in E^+, \forall n > N \text{ 有 } \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_{n+1} \leq \frac{1}{2} x_n < x_n$$

$$\forall n > N, x_n \searrow, x_n > 0$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 极限存在。令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}$$

取极限: $A = \frac{A}{3} \Rightarrow A = 0$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_i \in [a, b], i=1, 2, \dots, n$, 证明: $\exists \xi \in [a, b]$ 使

$$f(\xi) = \ln \frac{e^{f(x_1)} + e^{f(x_2)} + \dots + e^{f(x_n)}}{n}$$

证明: 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故 $e^{f(x)}$ 也在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $e^{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 m , 最大值 M , 于是

$$m \leq e^{f(x_i)} \leq M, i=1, 2, \dots, n$$

$$nm \leq e^{f(x_1)} + e^{f(x_2)} + \dots + e^{f(x_n)} \leq nM$$

$$m \leq \frac{e^{f(x_1)} + e^{f(x_2)} + \dots + e^{f(x_n)}}{n} \leq M$$

由连续函数的介值定理知: 存在 $e^{f(\xi)} = \frac{e^{f(x_1)} + e^{f(x_2)} + \dots + e^{f(x_n)}}{n}$

$$\text{即 } f(\xi) = \ln \frac{e^{f(x_1)} + e^{f(x_2)} + \dots + e^{f(x_n)}}{n}$$

六、应用题 (共 6 分)

证明: 曲线 $y^2 = 4a(a-x) (a > 0)$ 与曲线 $y^2 = 4b(b+x) (b > 0, b \neq a)$ 正交.

证明: 设两曲线交于点 (x, y) , 则有 $(x, y) = (a-b, \sqrt{4ab})$, 在此点

曲线 $y^2 = 4a(a-x) (a > 0)$ 的切线斜率为 $k_1 = -\frac{2a}{y}$

曲线 $y^2 = 4b(b+x) (b > 0)$ 的切线斜率为 $k_2 = \frac{2b}{y}$, 于是 $k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2} = -1$.