考试教室______ 姓名______ 学号______ 年级______ 专业、班______ 学院______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

命题人：　组题人：　审题人：　命题时间：　教务处制

重庆大学《高等数学 II-I》期末课程试卷

○ A卷　◉ B卷

2021 — 2022 学年 第 一 学期

开课学院：数统 课程号：MATH10821 考试日期：2022.02

考试方式：○ 开卷 ◉ 闭卷 ○ 其他　　考试时间：120 分

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18分）

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ ）D

（A）没有渐进线　（B）仅有水平渐近线

（C）仅有铅直渐近线　（D）既有水平渐近线，又有铅直渐近线。

2. 下列结论正确的是（ ）C

（A）10^{-100} 是无穷小　（B）$x\cos x$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷大

（C）$x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时是无穷小　（D）$\ln x$ 当 $x\to 0^+$ 时是无穷小

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|\le x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的（ ）. **C**

（A）间断点；　（B）连续而不可导点；

（C）可导的点，且 $f'(0)=0$；　（D）可导的点，且 $f'(0)\neq 0$.

4. 设 $f'(x)=[\varphi(x)]^2$，其中 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒为负，其导数 $\varphi'(x)$ 为单调减小的函数，且 $\varphi'(x_0)=0$，则下列结论正确的是（ ）A

(A) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；　(B) x_0 是 $y=f(x)$ 的极大值点；

(C)曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的；　(D) $f(x_0)$ 是 $y=f(x)$ 的最大值；

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则下列论断正确的是（ ）. B

(A) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 必是奇函数

（B）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 必是偶函数

（C）若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $F(x)$ 必以 T 为周期

（D）若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $F(x)$ 不以 T 为周期

6. 设 $M=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx$，$N=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，$P=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则有（ ）. D

(A) $N<P<M$　(B) $M<P<N$

(C) $N < M < P$　　　　(D) $P < M < N$

二、、填空题（每小题 3 分，共 18分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________ . 2

2. 设 $y=x^x$，则 $\mathrm{d}y=$__________. $(\ln x+1)\,x^x dx$

3. 曲线 x^3+2x+3 在点（0，3）的曲率为_______。0

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ =___________. $\sqrt{2}-1$

5. 已知曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与直线 $x=1$、x 轴及 y 轴围成一个开口曲边梯形，则该曲边梯形的面积等于 _________ .2

6.设$|x|<1$,存在θ∈（0，1）使得$arcsinx=\frac{x}{\sqrt{1-(\theta(x)x)^2}}$,则$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=$___________. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三、计算题（每小题 7 分, 本题共 28 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解　令 $\dfrac{1}{x}=t$,则原式

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

。

2. 求 $y=x^3e^{-x}$ 的单调区间与极值。

解　$y=x^3e^{-x}$,

$y'=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2e^{-x}(3-x)$

$x<3, y'>0; x>3, y'<0;$

函数在$(-\infty,3)$单调增加；在$[3,+\infty)$单调减少。

有极大值 $27e^{-3}$

3.求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $x=\sec t$，则

$$\text{原式}=\int\frac{1}{\sec^3 t\tan t}\sec t\tan t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C.,$$

4 . $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导， $f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$.

解 两边对 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$ 求导得. $f'(x)g(f(x))=2xe^x+x^2e^x$,注意 $g(f(x))=x$,

即 $f'(x)=(2+x)e^x$

$f(x)=\int(2+x)e^x dx+c=(1+x)e^x+c$

由 $f(0)=0\Rightarrow c=-1$

所以 $f(x)=(x+1)e^{x}-1$.

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

（1）求 D 的面积 A；（2）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

解（1）根据题意，先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，切线方程：$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$

由于切线过原点，解出 $x_0=e$，从而切线方程为：$y=\dfrac{1}{e}x$

则平面图形面积 $A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\dfrac{1}{2}e-1$

（2）三角形绕直线 x = e 一周所得圆锥体体积记为 V_1，则 $V_1=\dfrac{1}{3}\pi e^2$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 x = e 所围成的图形绕直线 x = e 一周所得旋转体体积为 V_2

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\pi(3e-\frac{3e^2+1}{2})$$

$$V=\pi(\frac{11}{6}e^2+\frac{1}{2}-3e)$$

2. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $0<f''(x)<1$，讨论函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上有无极值与零点。

解 由已知 $f(1)=-1, f'(1)=1, 0<f''(x)<1$，$f'(1)-f'(0)=f''(x_0)<1$，$f'(0)>0$

而 $f'(x)$ 单增，故 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上导数均大于零，无极值。

由牛顿莱布尼茨公式及单调性，

$$f(2)-f(1)=\int_1^2 f'(x)dx>1$$

知 $f(2)>0$，由零点定理知在区间 $(0,2)$ 上有零点。

五、证明与应用题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[2,4]$ 上连续，在开区间 $(2,4)$ 内可导，且

$$f(2)=\int_3^4(x-1)^2f(x)dx$$

证明：在开区间 $(2,4)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{1-\xi}$

证明　令 $F(x)=(x-1)^2f(x)$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[2,4]$ 上连续，在开区间 $(2,4)$ 内可导且 $F(2)=f(2)$.

又由积分中值定理知存在 $\eta\in[3,4]$ 使得

$$\int_3^4(x-1)^2f(x)dx=(\eta-1)^2f(\eta)=F(\eta)=f(2)=F(2)$$

所以由罗尔定理知, 存在 $\xi\in(2,\eta)\subset(2,4)$,使得

$$F'(\xi)=2(\xi-1)f(\xi)+(\xi-1)^2f'(\xi)=0 \quad 即\ f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{1-\xi}$$

2. 设质点在时间 t=0 时开始作直线运动，至 t=1 时停止，其间走过路程 1，试证必有某一时刻 t 的加速度的绝对值大于等于 4。

证 设 s(t)为位移函数，$s'(t),s''(t)$为速度与加速度。设在时刻t_0速度达到最大值，，

$s(\frac{1}{2})$，$s(1)-s(\frac{1}{2})=1-s(\frac{1}{2})$必有一个小于等于二分之一，由拉格朗日中值定理知

$s'(t_0)\geq 2$，由题设知$s'(0)=s'(1)=0$，$\min\{t_0,1-t_0\}\leq\frac{1}{2}$，在$[0,t_0],[t_0,1]$对$s'(t)$

使用拉格朗日中值定理得$\xi\in(0,1),\left|s''(\xi)\right|\geq 4$，故结论成立。