

# 重庆大学《高等数学 II-I》期末课程试卷

☒ A卷

☐ B卷

2021 — 2022 学年 第 1 学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10821 考试日期: 2022.01

考试方式: ☐ 开卷 ☒ 闭卷 ☐ 其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

## 考试提示

1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;
2. 请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等, 属严重作弊, 开除学籍。

### 一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设有数列  $\{x_n\}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在是数列  $\{x_n\}$  有界的
  - A. 必要而非充分条件.
  - B. 充分而非必要条件.
  - C. 充要条件.
  - D. 既非充分也非必要条件.
2. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列函数中是  $x$  的三阶无穷小的是
  - A.  $x^3(e^x - 1)$ .
  - B.  $1 - \cos x$ .

C.  $\sin x - \tan x$ .

D.  $\ln(1+x)$ .

3. 曲线  $y = x \sin x + 2 \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$ ) 的拐点是

- A.  $(0, 2)$ .
- B.  $(\pi, -2)$ .
- C.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .
- D.  $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$ .

4. 若  $f''(x) > 0$ , 则下述关系正确的是

- A.  $f'(2) > f'(1) > f(2) - f(1)$ .
- B.  $f(2) - f(1) > f'(2) > f'(1)$ .
- C.  $f'(2) > f(2) - f(1) > f'(1)$ .
- D.  $f'(1) > f(2) - f(1) > f'(2)$ .

5. 曲线  $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$  ( $x > 0$ ) 的渐近线条数为

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

6. 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 则

- A.  $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ .
- B.  $\int_0^\pi f(\sin x) dx = \int_0^\pi f(\cos x) dx$ .
- C.  $\int_0^\pi f(\sin 2x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ .
- D.  $\int_0^\pi f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ .

### 二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设  $x = g(y)$  是  $f(x) = \ln x + \arctan x$  的反函数, 则  $g'(\frac{\pi}{4}) =$  \_\_\_\_\_.
2. 曲线  $y = x^2 + x$  ( $x < 0$ ) 上曲率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的点的坐标是 \_\_\_\_\_.
3. 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx =$  \_\_\_\_\_.
4. 已知  $f(0) = 1, f(2) = 3, f'(2) = 5$ , 则  $\int_0^1 x f''(2x) dx =$  \_\_\_\_\_.

命题人:

组题人:

审题人:

命题时间:

教务处制

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin a + \sin\left(a + \frac{b}{n}\right) + \cdots + \sin\left(a + \frac{n-1}{n}b\right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 对数螺线  $\rho = e^{2\theta}$  上从  $\theta = 0$  到  $\theta = 2\pi$  的一段弧长为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

### 三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 求函数  $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$  的单调区间与极值.

2. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \sin x}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$$

求  $\int_0^{1+\frac{\pi}{4}} f(x-1) dx.$

3. 求  $\int x(\arctan x)^2 dx.$

4. 讨论  $k$  取不同值时，方程  $x - \frac{\pi}{2} \sin x - k = 0$ ，在开区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内根的个数.

### 四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设  $f(x)$  连续，且  $f(0) = 0, f'(0) = 2$ ，求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x-t) dt}{\sin x - x \cos x}.$$

2. 设  $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \ (n=0,1,2,\cdots).$

(1) 证明：数列  $\{a_n\}$  单调减少，且  $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} \ (n=2,3,\cdots);$

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$

### 五、证明题与应用题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设有直线  $x = t \ (1 \leq t \leq 3)$ ，它与曲线  $y = e^x, y = e$  所围平面图形绕  $x$  轴旋转所得的旋转体的体积为  $V_1$ ，它又与曲线  $y = e^x, y = e^3$  所围平面图形绕  $x$  轴旋转所得的旋转体体积为  $V_2$ .

(1) 求  $V_1(t)$  与  $V_2(t)$ ;

(2) 证明存在唯一的  $\xi \in (1,3)$ ，使得  $V_1(\xi) = 2V_2(\xi).$

2. 某人由甲地开车出发，沿直线行驶，经过 2 h 到达乙地停止，一路通畅.若开车的最大速度为 100 km/h.

(1) 若汽车在  $t = t_0$  达到最大速度，求速度  $v = v(t)$  在  $t = t_0$  处的二阶 Taylor 展开式;

(2) 求证：该汽车在行驶途中加速度的变化率的最小值不大于  $-200 \text{ km/h}^3.$