考试教室 姓名 学号 年级 专业、班 学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《离散数学》课程试卷

◉ A卷 ○ B卷

2023 — 2024 学年 第 2 学期

开课学院：大数据与软件学院 课程号：SE10009 考试日期：2024年6月17日

考试方式：○ 开卷 ◉ 闭卷 ○ 其他 考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、不定项选择题（每小题 3 分，总共 32 分）

评分规则：选中一个正确选项记为正确 1 项，错选漏选多选一个选项均记为错误 1 项。
若正确 0 项，得分为 0；
若错误 0 项，得分为 3；
若正确项数量大于等于错误项数量，得分为 2；
若正确项数量小于错误项数量，得分为 1。

1. 给定公式(Q→P) ∨ (P∧Q)，下列选项中与之等价的公式有： 【ABD】

A. Q→P　　B. P∨¬Q　　C. P

D. (¬P∧¬Q) ∨ (P∧¬Q) ∨ (P∧Q)　　E. Q

2. 假设论域为实数集 R，下列谓词公式中，真值为假的是： 【BC】

A. $\forall x\exists y(xy=0)$　　B. $\forall x\exists y(xy=1)$　　C. $\forall y\exists x(xy=1)$

D. $\forall x\forall y(xy=yx)$　　E. $\exists x\exists y(x+y=x-y)$

3. 已知“有的鸟是鸵鸟，但鸵鸟不会飞”是真命题，下面哪些命题不能根据这个已知确定真假？ 【CE】

A. 有的鸟是鸵鸟　　B. 有的鸟不会飞　　C. 有的鸟会飞

D. 所有的鸟都会飞　　E. 所有的鸟都不会飞

4. 假设$X=\{\{\emptyset\},\{a\},\{b\}\}$，则下列选项表达正确的是： 【DE】

A. $\{a,b\}\subseteq X$　　B. $\{\{a\},\{b\}\}\in X$　　C. $\emptyset\in X$

D. $\{\emptyset\}\in X$　　E. $\emptyset\in\{\emptyset\}$

5. 假设$<A;\preccurlyeq>$是一个偏序集，其中集合$A=\{1,2,3,4,6,12\}$，$\preccurlyeq$是整除关系，则在集合A中，元素 6 能盖住的元素是： 【BC】

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 12

6. 已知两个函数$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$，则下列选项表达正确的是： 【BE】

A. 若$g\circ f$不是满射函数，则f不是满射函数

B. 若g不是满射函数，则$g\circ f$不是满射函数

C. 若f是满射函数，则$g\circ f$是满射函数

D. 若g是满射函数，则$g\circ f$是满射函数

E. 若f和g是满射函数，则$g\circ f$是满射函数

命题人：黄宏宇 组题人：胡春强 审题人：杨小帆 命题时间：2024.6.11 教务处制

7. 假设 S= {0, 1}，+是普通加法，则关于<S, +>描述正确的是：　　　【E】

A. 是广群　　B．是半群　　C．是独异点

D．是群　　E. 以上都不对

8. 假设$X=\{0,1\}$，其幂集是$\mathcal{P}(X)$，∪是并集运算，下列关于$<\mathcal{P}(X)$，∪ $>$的描述，正确的是：　　　【A】

A. ∅是幺元　　B. 0 是幺元　　C. 1 是幺元

D. $\{0,1\}$是幺元　　E. 没有幺元

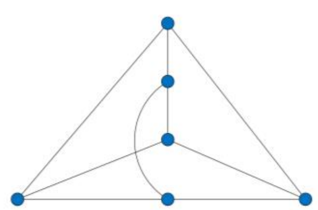
9. 令 Z_8={[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]}，令$+_8$表示模 8 加法，考虑<Z_8, $+_8$>的 4 阶子群，下列哪些选项与[1]在同一个左陪集内？　　　【ACE】

A. [3]　　B. [4]　　C. [5]　　D. [6]　　E. [7]

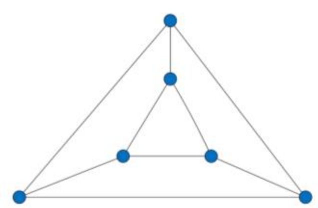
10. 假设一个简单无向连通图 G 含有 4 个顶点，其中 3 个顶点的度数分别为 2，3，3，则第 4 个顶点的度数不可能是：　　　【ABDE】

A. 0　　B. 1　　C.2　　D. 3　　E. 4

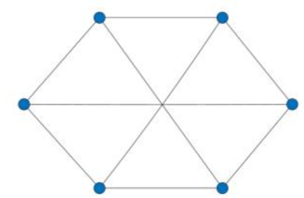
11. 给定图 G，请从下列候选图 A~E 中选出与图 G 同构的图：　　　【BCE】



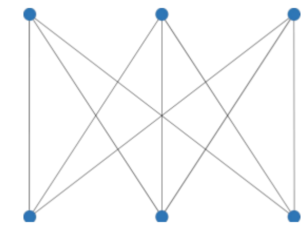
G



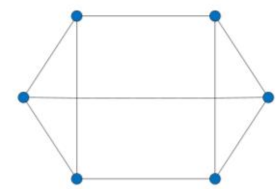
A



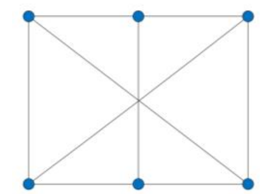
B



C



D



E

12. 给定一个无向简单图 G = (V, E)，其中|V| = v>2，|E| = e>2。以下哪些选项是判断图 G 是一棵树的充分必要条件？　　　【CD】

A. 图中每一个点都是割点　　B. 图中每一条边都是割边

C. 连通且不含回路　　D. 连通且 e = v-1　　E. e ≤ 3v-6

二、计算题（每小题 8 分，总共 32 分）

13. 求谓词公式$\neg((\forall x)F(x,y)\rightarrow(\exists y)G(x,y))\vee(\exists x)H(x)$的前束合取范式和前束析取范式。

原式 $\Leftrightarrow (\forall x F(x,y) \wedge \forall y \neg G(x,y)) \vee \exists x H(x)$　　（2 分）

$\Leftrightarrow (\forall x F(x,y) \wedge \forall y \neg G(x,y)) \vee \exists z H(z)$　　（2 分）

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z((F(x,y) \wedge \neg G(x,y)) \vee H(z))$　　（2 分）

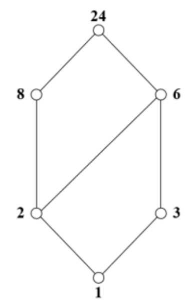
$\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z((F(x,y) \vee H(z)) \wedge (\neg G(x,y) \vee H(z))$　　（2 分）

14. 设集合 A={1, 2, 3, 6, 8, 24}，偏序关系≼={<x, y> | x, y∈A，且 x|y}。

(1) 试画出偏序集<A, ≼>的哈斯图。

(2) 指出子集 B={2, 3, 6}的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界。(如果不存在则写“无”)

解：哈斯图如右图所示：



极大元：6　　最大元：6

极小元：2，3　　最小元：无

上界：6，24　　上确界：6

下界：1　　下确界：1

（哈斯图 4 分，4 元 4 界个每个 0.5 分，最终得分进行上取整）

15. 设 $G=\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\}$，其中 $i^2=-1$，*为矩阵乘法。请问< G,*>有多少个子群？然后，请写出< G,*>的所有子群。

解：令 A，B，C，D 四个矩阵分别对应 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$。

那么，<G, *>的子群有 6 个：（2 分）

平凡子群 2 个：<{ A }, *>, <G, *>（2 分）

2 阶子群 1 个：<{ A, $-A$ }, *>（1 分）

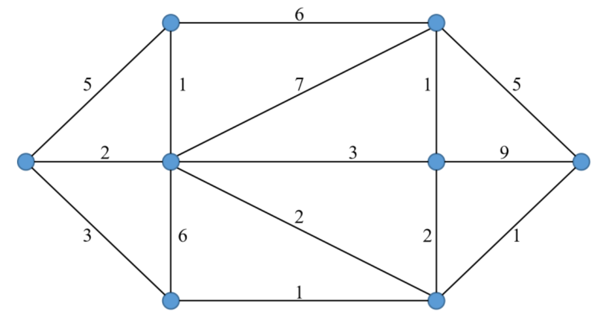
4 阶子群 3 个：<{ A, B, $-A$, $-B$ }, *>,

<{ A, C, $-A$, $-C$ }, *>,

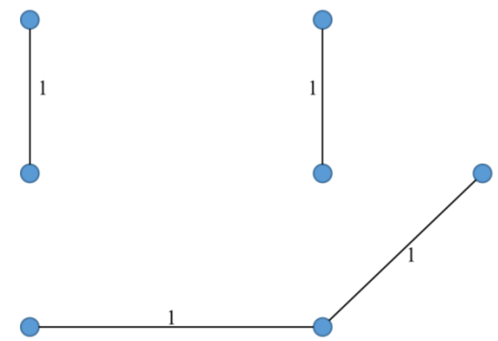
<{ A, D, $-A$, $-D$ }, *>（3 分）

注：不写 ABCD 四个矩阵的对应关系不扣分，只要能正确表达集合里面的矩阵即可。

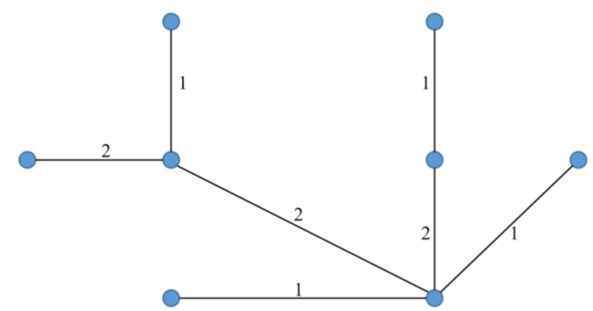
16. 请用算法从下图中选取最小生成树。要求将**每个步骤**得到的子图都画出来（可以自行给边标上序号）。最后请计算最小生成树的**树权**。



解：通过 Kruskal 算法，前 4 个步骤以后会得到下面的子图：（3 分）



接下来 3 个步骤以后，会得到最小生成树如下图：（3 分）



T：=1+1+1+1+2+2+2+2 =10（2 分）

注：题目没有明确规定用 Kruskal 算法还是用 Prim 算法求解，答案只给了前者。但是学生也可以用 Prim 算法求解，老师们可以自行判断过程是否正确。不管用哪种算法，本题的最小生成树以及树权是唯一的。只要学生写对了最小生成树就可以给 3 分，算对了树权给 1 分。

三、证明题（每小题 8 分，总共 32 分）

17. 请利用推理理论证明：A→B，(¬B∨C) ∧ ¬C，¬(¬A∧D) ⇒ ¬D

证明：

(1) (¬B∨C) ∧ ¬C	P	
(2) ¬B∨C	T (1) I	
(3) ¬C	T (1) I	
(4) ¬B	T (2) (3) I	（3 分）
(5) A→B	P	
(6) ¬A	T (4) (5) I	（2 分）
(7) ¬(¬A∧D)	P	
(8) A∨¬D	T (7) E	
(9) ¬D	T (6) (8) I	（3 分）

注：个别步骤允许有不同的顺序，例如 P 规则的引入顺序。只要引用的时候没有错误就不扣分。

18. 已知 R 非空集合 A 上的等价关系，如果对于任意$a,b,c\in A$，都满足当$<a,b>\in R$且$<b,c>\in R$时，$<c,a>\in R$，则称 R 满足循环性。请证明：若 R 满足自反性和循环性，则 R 是等价关系。

证明：

为了证明 R 是等价关系，需要证明 R 满足对称性和传递性。（2 分）

因为 R 满足自反性，故$\forall a,b\in A$，$<a,a>\in R$且$<b,b>\in R$。对于$\forall<a,b>\in R$和$<b,b>\in R$，根据循环性的定义，$<b,a>\in R$，因此 R 满足对称性。（3 分）

对于$\forall<a,b>\in R$和$<b,c>\in R$，根据循环性的定义，$<c,a>\in R$，又因为 R 满足对称性，因此$<a,c>\in R$，故 R 也满足传递性。（3 分）

19. 假设$<G,*>$是群，给定$a\in G$，令$H=\{x|x\in G \text{ 且 } x*a=a*x\}$，请证明：$<H,*>$是$<G,*>$的子群。

证明：

首先，由题意可知，$H\subseteq G$。（1 分）

对于$\forall x,y\in H$，可知$x*a=a*x$，且$y*a=a*y$。因此$(x*y)*a=x*(y*a)=x*(a*y)=(x*a)*y=(a*x)*y=a*(x*y)$，故$x*y\in H$，所以*在 H 上满足封闭性。（2 分）

然后，*运算在子集 H 上也满足结合律。（1 分）

显然，G 上的幺元e也满足$e*a=e*x$，因此$e\in H$。（2 分）

最后，$\forall x\in H$，在等式$x*a=a*x$的两边同时左$*x^{-1}$以及右$*x^{-1}$，得到$a*x^{-1}=x^{-1}*a$。由 H 的定义，知$x^{-1}\in H$，即 H 中的每个元素x都有逆元。

综上所述，$<H,*>$是$<G,*>$的子群。（2 分）

20. 假设 G 是面数 r 小于 12 的简单连通平面图，G 中每个顶点的度数至少为 3。请证明：G 中必然存在至多由 4 条边围成的面，即在所有的面中，次数最少的那个面，其次数一定小于等于 4。

证明：

假设图中有 n 个节点，m 条边，r 个面，由欧拉公式有

$n-m+r=2$，（1）（1 分）

又由已知条件得 $r<12$ 且 $3n\le 2m$，（2）（2 分）

将（2）其代入（1）得 $2<\frac{2}{3}m-m+12$，$m<30$。（3）（1 分）

若所有的面均至少由 5 条边围成，则

$5r\le 2m$，$r\le\frac{2}{5}m$，（4）（2 分）

将（2）、（4）代入（1）得

$2\le\frac{2}{3}m-m+\frac{2}{5}m$，$m\ge 30$。（5）（1 分）

（3）与（5）是矛盾的，因而必存在至多由 4 条边围成的面。（1 分）