

# 重庆大学《高等数 II-1》课程期末考试试卷

● A卷

○ B卷

2023—2024 学年 第一学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10821 考试日期: 2024-01-11

考试方式: ○ 开卷 ● 闭卷 ○ 其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

## 考试提示

1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;
2. 考试作弊, 留校察看, 毕业当年不授学位; 请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等, 属严重作弊, 开除学籍。

### 一、单项选择题(每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处( )。

- A. 连续且可微      B. 可微但不连续  
C. 连续但不一定可微      D. 既不一定连续也不一定可微

【答案】A

2. 已知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$ , 其中  $c, k$  为常数, 且  $c \neq 0$ , 则( )。

- A.  $k=2, c=-\frac{1}{2}$       B.  $k=2, c=\frac{1}{2}$   
C.  $k=3, c=\frac{1}{3}$       D.  $k=3, c=-\frac{1}{3}$

【答案】C

3. 设在闭区间  $[0, 1]$  上,  $f''(x) > 0$ , 则  $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$  或  $f(0) - f(1)$  几个数的大小顺序为( )。

- A.  $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$       B.  $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$   
C.  $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$       D.  $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

【答案】B

4. 若  $F(x)$  是  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的一个原函数, 则  $\int f(2x+1)dx = ( )$ 。

- A.  $\frac{1}{2}F(x) + C$       B.  $\frac{1}{2}F(2x+1) + C$   
C.  $F(2x+1) + C$       D.  $2F(2x+1) + C$

【答案】B

5. 在下列广义积分中, 收敛的广义积分是( )。

- A.  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$       B.  $\int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$       C.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$       D.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

【答案】D

6. 已知  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx$ , 则  $\int_0^4 f(x) dx = ( )$ 。

- A.  $-\frac{16}{3}$       B.  $-\frac{3}{16}$       C.  $\frac{3}{16}$       D.  $\frac{16}{3}$

【答案】 A

## 二、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

7. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在点  $x=0$  处连续, 则  $ab =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{2}$ 

8. 曲线  $y = x \ln \left( e - \frac{1}{x} \right) \left( x > \frac{1}{e} \right)$  的斜渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

【答案】  $y = x - \frac{1}{e}$ 

9. 不定积分  $\int e^x \cos x dx =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$ 

10. 定积分  $\int_{-50\pi}^{50\pi} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} + |\sin^5 x| \right) dx =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{320}{3}$ 

11. 一条质量为 20 (kg), 长为 20 (m) 的均匀链条被悬挂于某建筑物的顶部. 若约定重力加速度为  $g$  ( $m/s^2$ ), 则将这一链条全部拉上该建筑物的顶部所做的功为 \_\_\_\_\_.

【答案】 200g

12. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\ln 2$ 

## 三、 计算题(每小题 7 分,共 28 分)

13. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}$ .

【解】 
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x} \right]^{\frac{1}{\frac{\ln(1+x) - x}{x} \cdot \frac{1}{e^x - 1}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x} \cdot \frac{1}{e^x - 1}} \quad (3 \text{ 分}) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}}. \quad (7 \text{ 分}) \end{aligned}$$

14. 求不定积分  $I = \int \frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx$ .

【解】 令  $x = \sec t$ , 则  $dx = \sec t \tan t dt$ , (2 分)

$$I = \int \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} \\ &= -\frac{1}{\sin t} + C \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C. \end{aligned} \quad (7 \text{ 分})$$

15. 求定积分  $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} |\ln x| dx$ .

【解】  $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^{e^2} \ln x dx \quad (2 \text{ 分})$

$$\begin{aligned} &= [-x \ln x]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 x d(\ln x) + [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x d(\ln x) \\ &= -\frac{1}{e} + \int_{\frac{1}{e}}^1 dx + 2e^2 - \int_1^{e^2} dx \end{aligned} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + 2e^2 - (e^2 - 1) \\ &= e^2 - \frac{2}{e} + 2. \end{aligned} \quad (7 \text{ 分})$$

16. 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 设  $\alpha$  是一个比  $\Delta x$  高阶的无穷小. 同时, 在点  $x$  处, 当自变量由  $x$  变化到  $x + \Delta x$  时, 函数  $y = y(x)$  的因变量的增量为  $\Delta y = \tan x \Delta x + \alpha$ , 求曲线  $y = y(x)$  在  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  上的那一段弧的弧长.

【解】 设函数  $y = y(x)$  在点  $x$  处的增量为  $\Delta y = \tan x \Delta x + \alpha$ , 其中  $\alpha = o(\Delta x)$ , 则  $dy = \tan x dx$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \tan x$ . (1 分)

于是所求弧长为

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \sin^2 x} d(\sin x) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} \right) d(\sin x) = \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (7 \text{ 分})$$

#### 四、综合题(每小题 9 分, 共 18 分)

17. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$  所确定.

(1) 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ;

(2) 求曲线  $y = y(x)$  在点  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  处的曲率;

(3) 求函数  $y = y(x)$  的极值以及曲线  $y = y(x)$  的凹凸区间与拐点.

【解】 设  $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$  则

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3}\right)'}{\left(\frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}\right)'} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)}{dt}}{\frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}. \end{array} \right. \quad (2 \text{ 分})$$

$$(1) \begin{cases} (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t = 0, \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \left. \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right|_{t=0} = -1, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{4t}{(t^2 + 1)^3} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad \text{因此, 曲线}$$

$$y = y(x) \text{ 在点 } (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ 处的曲率为 } K = \left. \frac{|y''(x)|}{[1 + y'^2(x)]^{\frac{3}{2}}} \right|_{x=\frac{1}{3}} = 0. \quad (3 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 令 } \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0, \text{ 则 } t = \pm 1, \text{ 且 } \begin{cases} t = 1 \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right); \\ t = -1 \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1). \end{cases}$$

$$(3) \text{ 令 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3} = 0, \text{ 则 } t = 0 \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

(4) 函数的单调性与凹凸性列表如下:

$t$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 5/3)$	$5/3$	$(5/3, +\infty)$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$y''$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$y$	$\nearrow \cap$	极大值 点	$\searrow \cap$	拐 点	$\searrow \cup$	极小值 点	$\nearrow \cup$

由此可知,

a) 函数  $y = y(x)$  的极大值为  $y(-1) = 1$ , 极小值为  $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ . (6 分)

b) 曲线  $y = y(x)$  的凸区间为  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ , 凹区间为  $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ , 拐点为  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ . (9 分)

18. 设函数  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , 其中  $A$  为有限常数.

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  的切线方程;

(2) 令  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$ , 求  $\varphi'(x)$ , 并讨论  $\varphi'(x)$  在点  $x = 0$  处的连续性.

【解】 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , 其中  $f(x)$  连续, 则

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \\ f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A. \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

(1) 曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0)) = (0, 0)$  的法线方程为  $y = Ax$ . (3 分)

(2) 设  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$ , 则

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(0) = \int_0^1 f(0t)dt = \int_0^1 0dt = 0, & x = 0; \\ \int_0^1 f(xt)dt \stackrel{u=xt}{=} \frac{\int_0^x f(u)du}{x} & x \neq 0. \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{于是, } \varphi'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}, & x = 0; \\ \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}, & x \neq 0. \end{cases} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{因此, } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \\ = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0),$$

即  $\varphi'(x)$  在点  $x = 0$  处连续. (9 分)

## 五、证明题与应用题(每小题 9 分,共 18 分)

19. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ ,

$\int_0^1 f(x)dx = 1$ . 证明:

(1) 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = 1$ ;

(2) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ ;

(3) 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) < -2$ .

【证】由题设可知:

(1) 因为  $\int_0^1 f(x)dx = 1$ , 所以由广义积分中值定理可知, 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0)(1-0) = \int_0^1 f(x)dx = 1$ , 即  $f(x_0) = 1$ . (2 分)

(2) 因为  $f(x)$  在闭区间  $[x_0, 1]$  可导, 且  $f(x_0) = f(1) = 1$ , 所以由罗尔定理可知, 存在  $\xi \in (x_0, 1) \subset (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ . (4 分)

(3) 令  $g(x) = f(x) + x^2$ . 对  $g(x)$  分别在区间  $[0, x_0]$  和  $[x_0, 1]$  上应用拉格朗日中值定理, 则

$$\begin{cases} g'(\xi_1) = \frac{g(x_0) - g(0)}{x_0 - 0} = \frac{1 + x_0^2}{x_0}, & \xi_1 \in (0, x_0); \\ g'(\xi_2) = \frac{g(1) - g(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - x_0^2}{1 - x_0} = 1 + x_0, & \xi_2 \in (x_0, 1). \end{cases}$$

再在区间  $[\xi_1, \xi_2]$  上应用拉格朗日中值定理,

$$g''(\eta) = \frac{g'(\xi_2) - g'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{x_0 - 1}{x_0(\xi_2 - \xi_1)} < 0, \quad \eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1),$$

即  $g''(\eta) = f''(\eta) + 2 < 0$ . 因此,  $f''(\eta) < -2$ . (9 分)

20. 设抛物线  $y = ax^2 + bx + 2\ln c$  过原点, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $y \geq 0$ . 已知该抛物线与  $x$  轴及直线  $x = 1$  所围平面图形的面积为  $\frac{1}{3}$ . 试确定  $a, b, c$ , 使得上述平面图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体的体积最小.

【解】设抛物线  $y = ax^2 + bx + 2\ln c$  过原点.

(1) 因为抛物线过原点, 所以  $c = 1$ . (1 分)

(2) 抛物线与  $x$  轴及直线  $x=1$  所围图形的面积为

$$S = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \left[ \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } b = \frac{2}{3}(1-a). \quad (3 \text{ 分})$$

(3) 抛物线与  $x$  轴及直线  $x=1$  所围图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2) dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{5}a^2x^5 + \frac{1}{2}abx^4 + \frac{1}{3}b^2x^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2 \right) \\ &= \pi \left[ \frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}(1-a)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{a) } \frac{dV}{da} = \pi \left[ \frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a) \right] = \pi \left( \frac{4}{135}a + \frac{1}{27} \right).$$

$$\text{b) 令 } \frac{dV}{da} = 0, \text{ 则 } a = -\frac{5}{4}, \text{ 进而 } b = \frac{3}{2}.$$

$$\text{c) 因为 } \frac{d^2V}{da^2} \Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \frac{4}{135}\pi > 0, \text{ 所以当 } \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 1 \end{cases} \text{ 时, 旋转体的体积最小.}$$

(9 分)