考试教室______ 姓名______ 学号______ 年级______ 专业、班______ 学院______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《高等数学 II-2(重修)》课程试卷

○A卷　◉B卷

2023— 2024 学年　第 1 学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10822　　考试日期: 2024.02

考试方式: ○开卷 ◉闭卷 ○其他　　考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试.

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍.

一、单项选择题(每小题3 分,共18分)

1. 设向量$\vec{a}$与三坐标轴正向夹角依次为α,β,γ,则当$\cos\beta=0$时,恒有(　　).

(A) $\vec{a}\perp xOy$面　　(B) $\vec{a}\parallel zOx$面

(C) $\vec{a}\perp yOz$面　　(D) $\vec{a}\perp zOx$面

【答案】B

2. 设二元函数$f(x,y)=x^ye^x$,则$f'_x(1,x)=$(　　).

(A) 0　　(B) e　　(C) $e(x+1)$　　(D) $1+ex$

【答案】C

3. 下列(　　)不是全微分方程.

(A) $ydx+(x-3x^3y^2)dy=0$　　(B) $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$

(C) $(2xy+1)y^{-1}dx+(y-x)y^{-2}dy=0$　　(D) $ydx+xdy=0$

【答案】A

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ (　　).

(A) 收敛　　(B) 发散　　(C) 绝对收敛　　(D) 不一定

【答案】D

5. 第二型曲面积分$\iint_\Sigma z^2dxdy$在数值上等于(　　).

(A) 向量$z^2\vec{i}$穿过曲面Σ的流量　　(B) 向量$z^2\vec{k}$穿过曲面Σ的流量

(C) 面密度为z^2的曲面Σ的质量　　(D) 曲面Σ的面积的平方

【答案】B

6. 若积分区域D由$x+y\le1,x\ge0,y\ge0$确定,且$\int_0^1f(x)dx=\int_0^1xf(x)dx$,则二重积分$\iint_D f(x)dxdy=$(　　).

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

【答案】B

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

二、填空题(每小题3分,共18分)

7. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$,且$|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=6$,则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$______.

【答案】 15

8. 设$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

【答案】 1

9. 设L为逆时针方向的圆周:$(x-2)^2+(y+3)^2=4$,则第二型曲线积分$\int_L ydx-xdy=$______.

【答案】 -8π

10. 设$\vec{u}=\left\{x^2,y+z,y-z\right\}$,则散度$div\ \vec{u}=$______.

【答案】 $2x$

11. 设L为圆周$x^2+y^2=1$上点$(1,0)$到$(-1,0)$的上半弧段,则第一型曲线积分$\int_L(x^2+y^2)ds=$______.

【答案】 π

12. 设微分方程$y''+y=0$的一条积分曲线在点$\left(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$处有水平切线,则此积分曲线为______.

【答案】 $y=\sin x+\cos x$

三、计算题(每小题7分,本题共28分)

13. 设某平面通过点$(4,2,-3)$,且在x,y,z轴上的截距相等,求该平面的方程.

【解】 设平面方程为$x+y+z=a$. (3分)

将点$(4,2,-3)$代入得$4+2-3=a$,即$a=3$. (6分)

故所求得的平面方程为$x+y+z-3=0$. (7分)

14. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$满足初始条件$y(0)=3$的特解.

【解】 通解

$$y=e^{-\int -2xdx}\left(\int 4xe^{\int -2xdx}dx+C\right)$$

$$=e^{x^2}\left(\int 4xe^{-x^2}dx+C\right)$$

$$=e^{x^2}(-2e^{-x^2}+C),$$

即$y=-2+Ce^{x^2}$. (5分)

再代入初始条件解得$c=5$,故特解为$y=-2+5e^{x^2}$. (7分)

15. 求由二次曲面$z=x^2+2y^2$及$z=6-2x^2-y^2$所围成的封闭立体的体积.

【解】 联立$\begin{cases}z=x^2+2y^2,\\ z=6-2x^2-y^2,\end{cases}$ 消去z,得$x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$,即$x^2+y^2=2$,

故所给封闭立体在xOy面上的投影区域为$x^2+y^2\le 2$. (2分)

因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称,并且被积函数关于 x,y 都是偶函数,所以

$$V=\iint_D[(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma$$
$$=\iint_D(6-3x^2-3y^2)d\sigma$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho d\rho$$
$$=6\pi.$$ (7 分)

16. 求二元函数 $z=x^2+3y^2-2x$ 在有界闭区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

【解】 设 $z=x^2+3y^2-2x$, 则 $\begin{cases} z'_x=2x-2=0,\\ z'_y=6y=0,\end{cases}$ 即 D 内存在唯一驻点 $(1,0)$, 且 $z(1,0)=-1$. (3 分)

在边界 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上,

$z_1=-\frac{1}{3}x^2-2x+12$, 其中 $-3\le x\le 3$.

$z_1'=-\frac{2}{3}x-2<0$, 且 $z_1(-3)=15, z_1(3)=3$.

比较后可知二元函数 z 在点 $(1,0)$ 处取最小值 $z(1,0)=-1$; 在点 $(-3,0)$ 处取最大值 $z(-3,0)=15$. (7 分)

四、综合题(每小题 9 分,共 18 分)

17. 设复合函数 $u=f(r)$ 具有二阶连续的导数,且满足方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(1)=1$, $f'(1)=-1$, 求 $f(r)$.

【解】 设函数 $u=f(r)$ 具有二阶连续的导数.

$$\Rightarrow u'_x=\frac{x}{r}f'(r), u'_y=\frac{y}{r}f'(r), u'_z=\frac{z}{r}f'(r).$$ (2 分)

$$\begin{cases} u''_{xx}=\frac{1}{r}f'(r)-\frac{x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r),\\ u''_{yy}=\frac{1}{r}f'(r)-\frac{y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r),\\ u''_{zz}=\frac{1}{r}f'(r)-\frac{z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f''(r).\end{cases}$$ (5 分)

由 $\Delta u=0$, 得 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$, 即 $\left[r^2f'(r)\right]'=0, r^2f'(r)=C_1$.

由 $f'(1)=-1$, 得 $C_1=-1$.

因此, $f'(r)=-\frac{1}{r^2}$, $f(r)=\frac{1}{r}+C_2$.

由 $f(1)=1$, 得 $C_2=0$.

故 $f(r)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (9 分)

18. 计算第二型曲面积分 $\iint_\Sigma(2x+z)dydz+zdxdy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

【解】 添加平面 $z=1$,其中 $x^2+y^2\le 1$,取下侧. (1 分)

设 Σ 与 S 围成的区域为 Ω, S 在 xOy 面的投影为 D. (2 分)

利用高斯公式以及柱坐标法可得

$$\iint_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$$
$$=\iint_{\Sigma+S}(2x+z)dydz+zdxdy-\iint_{S}(2x+z)dydz+zdxdy$$
$$=-\iiint_{\Omega}3dv-\iint_{D}-dxdy$$
$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1\rho dz+\pi$$
$$=-\frac{\pi}{2}.$$ (9 分)

五、证明题或应用题(每小题 9 分,共 18 分)

19. 设某数列的通项 $a_n\ge 0$,且数列 $\{na_n\}$ 有界,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

【证】 根据条件数列 $\{na_n\}$ 有界,即就是存在 $M>0$,故得 $na_n=|na_n|\le M,\ \forall n.$ (4 分)

从而 $n^2a_n^2\le M^2$,即 $a_n^2\le\frac{M^2}{n^2},\ \forall n.$ 因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^2}{n^2}$ 收敛,所以根据比较原则得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. (9 分)

20. 科学研究表明:当人口数 $x(t)$ 充分大时,人口增长率随时间 t 与人口数成正比例(设比例系数为 a).若考虑到疾病和其它原因,则有一个与人口数的平方成反比的负增长率(设比例系数为 b).已知时间 $t=0$ 时,人口数为 x_0.求在时刻 t 时的人口数 $x(t)$,并问当 $t\to+\infty$ 时人口数如何?

【解】 据题意可得如下初始值问题 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=ax-bx^2,\\ x|_{t=0}=x_0.\end{cases}$ (2 分)

将方程分离变量,积分得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{ax-bx^2}=\int_0^t dt,\ \text{即}\ \frac{1}{a}\ln\frac{x(a-bx_0)}{x_0(a-bx)}=t.$$ (6 分)

解出 x 得 $x=\frac{ax_0e^{at}}{a-bx_0+bx_0e^{at}}$.

当 $t\to+\infty$ 时,$x\to\frac{a}{b}$. (9 分)