考试教室＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 专业、班＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《线性代数 II》课程

◉A卷 ○B卷

2021 — 2022 学年　第 1 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10862　考试日期：2022 年 01 月

考试方式：○开卷 ◉闭卷　考试时间：120 分

考试提示：1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试； 2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

温馨提示：您所有客观题（用 2B 铅笔）和主观题的答案均应填涂或者写在答题卡指定位置，不在指定位置答题将不会计分，敬请您在答题卡上作答时注意字体尽量小，节约能够使用的空间！在该试卷纸上作答均不会计分！

一、单项选择题（客观题，请用铅笔在答题卡方格中填涂）（每小题 3 分，共 18 分）

1. 下列命题不正确的是（　　）

（A）如 A 是 n 阶矩阵，则 $(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$

（B）如 A,B 均是 $n\times 1$ 矩阵，则 $A^TB=B^TA$

（C）如 A,B 均是 n 阶矩阵，且 $AB=0$，则 $(A+B)^2=A^2+B^2$

（D）如 A 是 n 阶矩阵，则 $A^mA^k=A^kA^m$

2. 下列结论（　　）不是“n 阶矩阵 A 为满秩矩阵”的充分必要条件。

（A）$|A|\neq 0$.

（B）R^n 中任意一个向量都可以由 A 的列向量线性表示.

（C）A^TA 是正定矩阵.　（D）A 的特征值不全为零.

3. 设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$ 可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_s$ 线性表出。则下列命题正确的是（　　）

（A）若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\le s$；

（B）若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$；

（C）若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\le s$；

（D）若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$.

4. 设 A,B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　　）

（A）A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

（B）A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关

（C）A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关

（D）A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关

5. 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 $A,\ B$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则下列命题

①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则秩 $R(B)\le R(A)$；

②若秩 $R(B)\ge R(A)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解；

③若 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解，则 $R(A)=R(B)$；

④若 $R(A)=R(B)$，则 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解；

中正确的是（ ）

(A) ① ②. (B) ① ③. (C)② ④. (D)③ ④.

6. n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是（ ）

(A)所有 k 阶子式为正（k=1，2，…，n）

(B)A 的所有特征值非负

(C)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定矩阵 (D)A 的秩等于 n。

二、填空题（主观题，每小题 3 分，共 18 分）

7. A,B,C 都是行列式值为 2 的 3 阶矩阵，则

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -A \\ \left(\frac{2}{3}B\right)^{-1} & C \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

8. 三阶 A 满足 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}|=$________________.

9. 设 A 为 3 阶方阵，|A|=3，$\boldsymbol{A}^*$ 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则 $|B\boldsymbol{A}^*|$=____________.

10. 线性空间 $V=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b+c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in R\right\}$，则 V 的维数是________.

11. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，且三条不同直线 $a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2,3)$ 相交于一点，则矩阵 A,B 的秩满足____________.

12. 设二次型 $\mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{axz}+4\boldsymbol{yz}$ 的负惯性指数为 1，则 $\boldsymbol{a}$ 的取值范围是____________.

三、判断并简述（主观题。判断对错，若正确请给出简单证明，若错误请给出反例或说明理由，每小题 5 分，共 10 分）

13. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 0，-1，1，则 $AX=0$ 的基础解系由一个向量组成。

14. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$. 则若 $k_1\neq 0$，则向量组 β,α_2,α_3 也线性无关.

四、计算题（主观题，共四题，共 40 分）

15.（8 分）

（8 分）计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$

16.（8 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^{*}=2BA^{*}+E$，其中 A^{*}

为 A 的伴随矩阵，E 为单位阵，求矩阵 B。

17.（12 分）问 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

有唯一解、无穷多解和无解，并当有无穷多个解时求出其通解.

18.（12 分）已知 $\alpha=(1,-2,2)^T$ 是二次型 $x^TAx=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 矩阵 A 的特征向量，求正交变换化二次型为标准形，并写出所用正交变换。

五、证明题（请在主观题指定区域解答）（每小题 7 分，共 14 分）

19.（7 分）设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=E$，证明

$$R(A+E)+R(A-E)=n.$$

20.（7 分）设 α 为 3 维单位列向量，E 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为 2。