

# 同济大学 2019~2020 年第一学期《线性代数》试卷

专业\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

## 一、单选题 (每题 3 分,共 15 分)

(1) 如果四阶行列式中每一列的四个元素之和等于 0, 则行列式的值为

- A. 1    B. 4    C. 0    D. 不能确定

(2) 若三阶行列式  $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -1$ , 则三阶行列式  $\begin{vmatrix} -x_1 & -2x_2 & -2x_3 \\ -y_1 & -2y_2 & -2y_3 \\ -z_1 & -2z_2 & -2z_3 \end{vmatrix} =$

( )

- A. -8    B. 8    C. -4    D. 4

(3) 若矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times l}$ ,  $B = (b_{ij})_{l \times n}$ ,  $C = (c_{ij})_{n \times m}$ , 则下列运算中 ( ) 无意义。

- A.  $ABC$     B.  $BCA$     C.  $A+BC$     D.  $A^T + BC$

(4) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $A^2 = A$ , 则 ( ) 成立

(A)  $A=0$ ;    (B) 若  $A$  不可逆则  $A=0$

(C)  $A=E$     (D) 若  $A$  可逆则  $A=E$

(5)  $n$  阶方阵  $A$  经过若干次初等变换后化为矩阵  $B$ , 则

A. 必有  $|A| \neq |B|$ ;    B. 必有  $|A| \neq |B|$ ;

C. 若  $|A|=0$  则必有  $|B|=0$ ;    D. 若  $|A|>0$  则必有  $|B|>0$ .

## 二、填空题 (每题 3 分,共 15 分)

(1) 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ , 则积  $C = AB$  的元素  $c_{12} =$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^5 =$

(3) 已知四阶行列式  $D$  中第二行上元素分别是  $-1, 0, 2, 4$ , 第三行上的元素的余子式分别为  $1, 2, a, 4$ , 则  $a =$

(4) 已知二阶方阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则二阶方阵  $A$  的逆矩阵  $A^{-1} =$

(5) 已知线性方程组  $AX = B$ , 其中系数矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , 若  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  为它的解, 则常数项矩阵  $B =$

## 三、利用行列式的性质计算下列各行列式: (每题 10 分, 共 20 分)

1.  $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$2. \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

四、计算下列  $n$  阶行列式：（每题 10 分，共 20 分）

$$1. \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$2. D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

五、问  $\lambda, \mu$  取何值时，齐次方程组  $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$  有非零解？（10 分）

六、求解下列矩阵方程：（10 分）

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

七 证明下列等式：（每题 10 分，共 20 分）

$$1. (A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$$

2. 若  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵， $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵，证明  $|A^*| = |A|^{n-1}$