考试教室______ 姓名______ 学号______ 年级______ 专业、班______ 学院______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

重庆大学《高等数学II-2》期末考试课程试卷

◉A卷 ○B卷

2023— 2024 学年 第二学期

开课学院: 数统 课程号: MATH10822 考试日期: 2024.06.19

考试方式: ○开卷 ○闭卷 ◉其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

一、单项选择题(每小题3分,共18分)

1. 直线 $L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $\Pi: x-y+2z+4=0$ 的夹角为( ).

(A) π (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

【答案】D

2. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$, 则点 P 的坐标是( ).

(A) $(1,-1,2)$ (B) $(-1,1,2)$ (C) $(1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

【答案】C

3. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$, $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续正值函数, a,b 为常数,则 $\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=$( ).

(A) ab (B) $\dfrac{1}{2}ab$ (C) $a+b$ (D) $\dfrac{1}{2}(a+b)$

【答案】C

4. 设 Γ 是从点 $A(3,2,1)$ 到点 $B(0,0,0)$ 的直线段,则

$$\int_\Gamma x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz=(\quad).$$

(A) $-\dfrac{87}{4}$ (B) $\dfrac{87}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 0

【答案】A

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x<\dfrac{1}{2}; \\ x-1, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1, \end{cases}$ 而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$, 其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$( ).

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $-\dfrac{3}{2}$

【答案】B

6. 设Ω是由曲面$z=x^2+y^2, y=x, y=0, z=1$在第一卦限所围成的有界闭区域.若$f(x,y,z)$在Ω上连续,则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=($　　$)$.

(A) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_0^1 f(x,y,z)dz$　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

【答案】D

二、填空题(每小题 3分,共18分)

7. 设$f(x,y,z)=e^x+y^2z$,其中$z=z(x,y)$是由方程$x+y+z+xyz=0$所确定的隐函数,则$f_x'(0,1,-1)=$_____.

【答案】1

8. 初值问题$\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy'\\ y(0)=1, y'(0)=3\end{cases}$的解为_____.

【答案】$y=x^3+3x+1$

9. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$,则$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)^2dS=$_____.

【答案】$4\pi R^4$

10. 已知曲线$L: y=x^2$,其中$0\le x\le\sqrt{2}$,则$\int_L xds=$_____.

【答案】$\frac{13}{6}$

11. 二元函数$f(x,y)=x^2+2y^2$在点$(0,1)$处的最大方向导数为_____.

【答案】4

12. 微分方程$y'''-2y''+5y'=0$的通解为$y(x)=$_____.

【答案】$y=C_1+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x),\ \forall C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$ (未标注任意常数不扣分)

三、计算题(每小题 7 分,共 28 分)

13. 求过直线$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$且垂直于平面$\Pi: 3x+2y-z-5=0$的平面方程.

【解】由题设,直线的方向向量为$\vec{s}=\{2,-3,2\}$,平面的法向量为$\vec{n}_1=\{3,2,-1\}$,所求平面的法向量为$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{n}_1=\{-1,8,13\}$.　(4 分)

于是,所求平面方程为$-(x-1)+8(y+2)+13(z-2)=0$,即

$$x-8y-13z+9=0.$$　(7 分)

14. 求二元函数$f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$的极值.

【解】由题设,$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(x^2+y+\frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}, \frac{\partial f}{\partial y}=\left(1+y+\frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}$.　(2 分)

同时,
$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y)=\left(2x+2x^2+\dfrac{1}{3}x^3+y\right)e^{x+y}, \\ f''_{xy}(x,y)=\left(1+x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}, \\ f''_{yy}(x,y)=\left(2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}. \end{cases}$$
(3 分)

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0, \end{cases}$ 则 $(x,y)=\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 或 $(x,y)=\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$. (4 分)

(1) 当 $P_1(x,y)=P_1\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 时,

$$A_1=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_1}=-e^{-\frac{5}{3}}, B_1=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{P_1}=e^{-\frac{5}{3}}, C_1=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_1}=e^{-\frac{5}{3}}.$$

于是,$A_1C_1-B_1^2=-2e^{-\frac{5}{3}}<0$. 从而,点 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 一定不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(2) 当 $P_2(x,y)=P_2\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 时,

$$A_2=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_2}=3e^{-\frac{1}{3}}, B_2=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{P_2}=e^{-\frac{1}{3}}, C_2=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_2}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

于是,$\begin{cases} A_2C_2-B_2^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0, \\ A_2>0. \end{cases}$ 从而,点 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点,

且极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-e^{-\frac{1}{3}}$. (7 分)

15. 计算 $I=\oint_L \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$,其中 L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=4$ 的正向.

【解】 记 $P=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\neq(0,0).$$
(2 分)

取曲线 $C^+: x^2+y^2=\varepsilon^2$, 方向为顺时针方向,其中 $\varepsilon\to 0^+$, 并记曲线 C^+ 与 L 所围成的平面区域为 D, 曲线 C^+ 所围成的平面区域为 D'.

反复使用格林公式可得:

$$\oint_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$
$$=\oint_{L+C^+} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}-\oint_{C^+} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$
$$=\iint_D 0dxdy-\oint_{C^+} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$
(4 分)
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C^-}(x-y)dx+(x+y)dy$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D 2dxdy$$
(6 分)
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2$$
$$=2\pi.$$
(7 分)

16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【解】 令 $u_n(x)=\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$, 则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)x^{2n+2}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(2n+1)x^{2n}}\right|=\frac{1}{2}x^2<1.$$

由比值判别法可知:

当$|x|<\sqrt{2}$时,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$收敛;

当$|x|>\sqrt{2}$时,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$发散;

特别地,当$x=\pm\sqrt{2}$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}$发散.

综上所述,原幂级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.　　(4 分)

令$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$, $\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, 则

$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}t^{2n},\ \forall t\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

于是,

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{x}{2-x^2},\ \forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

因此,$S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.　　(7 分)

四、综合题(每小题 9 分,共 18 分)

17. 设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续,且满足

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

求$f(t)$.

【解】 设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4t^2\right\}=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\le\theta\le 2\pi,0\le\rho\le 2t\right\}$, 则

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho d\rho=2\pi\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho d\rho.$$

于是,$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho d\rho$.　　(3 分)

因此,$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)$, 即

$$f'(t)-8\pi tf(t)=8\pi te^{4\pi t^2},\text{其中}\begin{cases}P(t)=-8\pi t,\\Q(t)=8\pi te^{4\pi t^2},\end{cases}\text{且 }f(0)=1.\qquad(5\text{ 分})$$

利用公式法解上述一阶非齐次线性微分方程:

$$f(t)=e^{-\int P(t)dt}\left[\int Q(t)e^{-\int P(t)dt}dt+C\right]$$

$$=e^{\int 8\pi tdt}\left[\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi tdt}dt+C\right]$$

$$=e^{4\pi t^2}(C+4\pi t^2).\qquad(8\text{ 分})$$

由$f(0)=1$得$C=1$.因此,$f(t)=e^{4\pi t^2}(1+4\pi t^2)$.　　(9 分)

18. 设Σ是二次曲面$z=1-x^2-y^2\ (z\ge 0)$的上侧,计算

$$I=\iint_{\Sigma}(2x^3-y)dydz+(2y^3-z)dzdx+3(z^2-1)dxdy.$$

【解】 取平面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$ 的下侧,其中 Σ 与 Σ_1 所围空间区域记为

$\Omega=\left\{(\rho,\theta,z)\middle|0\le\theta\le 2\pi,0\le\rho\le 1,0\le z\le 1-\rho^2\right\}$, 则

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x^3-y)dydz+(2y^3-z)dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(6x^2+6y^2+6z)dxdydz \qquad (4\text{ 分})$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\rho dz$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\rho^3 z+\frac{\rho z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-\rho^2}d\rho$$

$$=6\pi\int_0^1(\rho-\rho^5)d\rho$$

$$=6\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^6}{6}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=2\pi \qquad (6\text{ 分})$$

于是,

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=2\pi-\iint_{\Sigma_1}(2x^3-y)dydz+(2y^3-z)dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$=2\pi-\iint_{x^2+y^2\le 1}-3(-dxdy)=2\pi-3\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=2\pi-3\pi=-\pi. \qquad (9\text{ 分})$$

五、证明题(每小题 9 分,共 9 分)

19. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^3-u_n^3)$ 收敛.

【证一】 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在,并可设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 且存在 $C>0$, 使得 $|u_n|\le C,\ \forall n\in\mathbb{N}$. (2 分)

于是,

$$\left|u_{n+1}^3-u_n^3\right|=\left|u_{n+1}-u_n\right|\left|u_{n+1}^2+u_{n+1}u_n+u_n^2\right|\le 3C^2\left|u_{n+1}-u_n\right|=3C^2(u_{n+1}-u_n). \quad (5\text{ 分})$$

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$, 设其部分和为 S_n, 则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_{n+1}-u_n)]=\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_1)=a-u_1,$$

即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛. (8 分)

由比较判别法可知:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_{n+1}^3-u_n^3\right|$ 收敛,进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^3-u_n^3)$ 收敛. (9 分)

【证二】 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在,并可设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}^3=a$. (4 分)

令 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{k+1}^3-u_k^3)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}[(u_2^3-u_1^3)+(u_3^3-u_2^3)+\cdots+(u_{n+1}^3-u_n^3)]=\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}^3-u_1^3)=a^3-u_1^3,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛. (9 分)

六、应用题(每小题 9 分,共 9 分)

20. 设均匀平面薄板 D 由不等式 $x^2 \le y \le 1$ 所确定,其面密度为常数 k.

a) 求 D 的形心坐标 $(\bar{x},\bar{y})$;

b) 求 D 关于过点 $(\bar{x},\bar{y})$ 及 $(1,1)$ 的直线的转动惯量.

【解】(1)根据形心公式可知:
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\iint\limits_D x dxdy}{\iint\limits_D dxdy} = 0, \\ \bar{y} = \dfrac{\iint\limits_D y dxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \dfrac{\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} y dy}{\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{5}, \end{cases}$$
故平面薄板 D 的形心坐标为 $\left(0, \dfrac{3}{5}\right)$. (4 分)

(2)过点 $\left(0, \dfrac{3}{5}\right)$ 与 $(1,1)$ 的直线方程为 $l: 5y-2x-3=0$, 平面薄板 D 上任意一点 (x,y) 到该直线的距离为 $d = \dfrac{|5y-2x-3|}{\sqrt{29}}$. (6 分)

于是,D 关于直线 l 的转动惯量为

$$I_l = \iint\limits_D d^2 k dxdy$$

$$= k\iint\limits_D \frac{(5y-2x-3)^2}{29} dxdy$$

$$= \frac{k}{29}\iint\limits_D (5y-2x-3)^2 dxdy$$

$$= \frac{k}{29}\iint\limits_D (25y^2+4x^2+9-20xy-30y+12x) dxdy$$

$$= \frac{k}{29}\iint\limits_D (25y^2+4x^2+9-30y) dxdy$$

$$= \frac{k}{29}\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (25y^2+4x^2+9-30y) dy$$

$$= \frac{352k}{3045}.$$ (9 分)