考试教室＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　年级＿＿＿＿　专业、班＿＿＿＿　学院＿＿＿＿

密　封　线

重庆大学《高等数学 2》课程试卷

○ A卷
◉ B卷

2022 — 2023 学年 第 二 学期

开课学院：＿数统＿ 课程号：＿MATH10822＿ 考试日期：＿2023.09＿

考试方式：○ 开卷 ◉ 闭卷 ○ 其他　　考试时间：＿120＿分

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18分）

1. 设空间直线方程为$\begin{cases} x=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$,则该直线必(.A　)

(A)　过原点且垂直于x轴　　(B)　过原点且垂直于y轴

(C)　过原点且垂直于z轴　　(D)　过原点且平行于x轴

2. 曲线$x=\arctan t, y=\ln(1+t^2), z=-\dfrac{5}{4(1+t^2)}$在$P$点处的切线向量与三个坐标轴的夹角相等，则点$P$对应的$t$值为（　）.D

（A）0　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{17}}{4}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

3. 设L是圆域$x^2+y^2\le -2x$的正向圆周，则$\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy=$（　）D

（A）0　　（B）-2π

（C）$\dfrac{3\pi}{2}$　　（D）2π

4. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧，则$\oiint_\Sigma \dfrac{(xdydz+ydzdx+zdxdy)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=$（　）B

（A）0　　（B）4π

（C）$4\pi R^2$　　（D）$\dfrac{4}{3}\pi R^3$

5. 下列级数中收敛的是　（　）　C

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2n^2}$

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$　　（D）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{10} n}$

6. 微分方程$xy'''=y''$的通解是（　）D

（A）$y=x^3+C_3x+C_1$　　（B）$y=C_2x^3+C_3x^2+C_1x$

（C）$y=C_2x^2+C_3x+C_1$　　（D）$y=C_2x^3+C_3x+C_1$

二、填空题（每小题 3 分，共 18分）

7. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$,且$|\vec{a}|=5$,$|\vec{b}|=6$.则$|\vec{a}\times\vec{b}|$为＿＿＿＿＿＿ .15

8. 若$f(x,y)=y+x^2+x\sin(x-y)$，则$f_x(x,x)$=＿＿＿＿. $3x$

9.已知Γ为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.　则$\int_\Gamma x^2 ds=$＿＿＿＿＿＿

$\dfrac{2}{3}\pi a^3$

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

10. 设Ω是由球面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成区域，则三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$在球面坐标系下的三次积分表达式为____________

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}f\left(r^2\right)r^2\sin\varphi dr$$

11. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{(2n)!!}$的和为______ e

12. 已知某二阶线性常系数齐次微分方程有解$e^x\cos 2x$，则此微分方程为________________. $y''-2y'+5y=0$

三、计算题（每小题 7 分, 本题共 28 分）

13. 求球面$x^2+y^2+z^2=6$上与平面$x+y-2z=3$平行的切平面方程.

解：令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6,\nabla F=2(x,y,z)$

$\vec{n}=(1,1,-2),\nabla F\parallel\vec{n}$,有$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}=t\Rightarrow t=\pm1$

切点为$(1,1,-2),(-1,-1,2)$,

切平面方程为：

$x+y-2z=\pm6$

14. 计算$\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}dxdy$，其中$D$是由$x^2+y^2=4$围成闭区域。

解：原式$=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{2}e^{\rho^2}\rho d\rho=\pi(e^4-1)$

15. 判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$的敛散性，如收敛，是条件收敛还是绝对收敛。

解：$n\ge2$时，$\frac{\ln n}{n}>0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$

令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0(x\ge3)$

$n\ge3$,数列$u_n=\frac{\ln n}{n}$单调递减，由交错级数判别法，知原级数收敛

又$n\ge3$时，$\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$，故为条件收敛。

16. 求微分方程$y''-4y''+4y=（x+1）e^{2x}$的通解。

解：齐次方程得特征方程为$r^2-4r+4=0$,特征根为$r_1=r_2=2$

非齐次方程有特解$y^*=x^2(ax+b)e^{2x}$,代入方程解得$a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{2}$

原方程得通解为$y=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{2x}$

四、综合题（每小题 9 分，共 18 分）

17. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1$$

(Ⅰ)证明 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots;$

(Ⅱ)求 $y(x)$ 的表达式.

证明：(Ⅰ) $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$, $y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$

带入得：$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_n x^n$,

即 $(2a_2-4a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n]x^n=0$

所以 $(2a_2-4a_0)=0, (n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n=0$

所以 $a_2=2a_0=0, a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots;$

(Ⅱ):由(Ⅰ)知 $a_{2n}=0, a_{2n-1}=\frac{1}{n}a_{2n-3}=\frac{1}{n(n-1)}a_{2n-5}=\frac{1}{n!}a_1=\frac{1}{n!}, n=1,2,\cdots;$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n-1}=\begin{cases}\frac{1}{x}(e^{x^2}-1) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

18. 求曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$，其中 Σ 是曲线段 $\begin{cases}z=\frac{1}{2}x^2\\ y=0\end{cases}, 0\le z\le 2$ 绕 z 轴旋转而成部分下侧。

解：曲面 Σ 为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), (0\le z\le 2)$ 下侧，取 Σ_1 为 $z=2, (x^2+y^2\le 4)$ 上侧

则 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成一闭合曲面，又高斯公式有

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iiint_{\Omega}(1-1)dV=0$$

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy+\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

$$\oiint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=-\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy=2\iint_{\Sigma_1}dxdy=8\pi$$

五、证明题（9 分）

19. 设非负数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛。

证明： 由设非负数列 $\{a_n\}$ 单调减少，故 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在。又 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散

故 $\lim_{n\to\infty}a_n=l(l>0)$ ， $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+a_n)^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a_n)}=\frac{1}{1+l}<1$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛。

六、应用题（共 9 分）

20. 求力 $\vec{F}=(y,z,x)$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，从 z 轴正向看去，顺时针方向。

解 用斯托克斯公式，取 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 的下侧被 Γ 所围的部分，Σ 下侧的单位法向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$，力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W=\int_{\Gamma} ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}-1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\sqrt{3}dS=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$$