考试教室 姓名 学号 年级 专业、班 学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《高等数II-2重修》课程试卷

◉A卷

○B卷

2023— 2024 学年 第二学期

开课学院：数统 课程号：MATH10822 考试日期：2024.05

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间：120

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18分）

1. 设向量 $\vec{a}=(3,-4,5)$ 与三坐标轴正向夹角依次为 α,β,γ，其中 γ 为( ).B

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $-\frac{\pi}{4}$

2. 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微是在该点处偏导函数连续连续的（ ）条件. A

（A） 必要 （B） 充分 （C）充分必要 （D）无关的

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则累次积分 $\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy=$（ ）D

（A）$\int_0^4 dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{y} f(x,y)dx$ （B）$\int_0^4 dy\int_{-y}^{\frac{1}{4}y^2} f(x,y)dx$

（C）$\int_0^4 dy\int_{\frac{1}{4}}^{y} f(x,y)dx$ （D）$\int_0^4 dy\int_{\frac{1}{4}y^2}^{y} f(x,y)dx$

4. 设曲线积分 $\int_L [f(x)-e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续偏导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$（ ）B

（A）$\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$； （B）$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$；

（C）$\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}-1$； （D）$1-\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$

5. 设 L 是圆域 $x^2+y^2\le -2x$ 的顺时针方向圆周，则 $\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy=($). B

(A)0 (B) -2π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) 2π

6. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$, 则三重积分 $\iiint_\Omega z dV=($). C

(A) $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$ (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi dr$

（C） $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$ （D） $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$

二、填空题（每小题 3 分，共 18分）

1. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,且 $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$.则 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 为________ .$15\sqrt{3}$

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

2. 函数 $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+2y)$ 在点 $(0,\pi)$ 处沿 y 轴负向的方向导数是________.

-2

3. Γ 为从 $A(3,2,1)$ 到 $B(0,0,0)$ 的直线段，则 $\int_{\Gamma} xdx+3ydy-zdz=$_______. -10

4. 设 $\vec{u}=(x^2,y+z,y-z)$,则 $rot\vec{u}=$__________.（0，0，0）

5. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为 $(-3,3]$, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x^2+2x)^n$ 的收敛域是 __________. $[-3,1]$.

6. 微分方程 $y''-6y'+9y=x^2+1$ 的特解可设为 $y^*=$_________.

$Ax^2+Bx+C.$

三、计算题（每小题 7 分, 本题共 28 分）

1. 在曲面 $x^2-y^2-z^2+6=0$ 上求一点，使该点处的切平面垂直于直线 $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-3}$，并求该切平面.

解 曲面在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量 $\vec{n}=(x_0,-y_0,-z_0)$ 平行于向量 $(2,1,-3)$，所以

$$\frac{x_0}{2}=\frac{-y_0}{1}=\frac{-z_0}{-3}$$

令 $\frac{x_0}{2}=\frac{-y_0}{1}=\frac{-z_0}{-3}=t$，

得到 $x_0=2t,y_0=-t,z_0=3t$ 代入 $x^2-y^2-z^2+6=0$ 得，$t=\pm1$，

所求的点为 $(2,-1,3)$ 和 $(-2,1,-3)$，切平面为

$$2(x-2)+(y+1)-3(z-3)=0\text{，即 }2x+y-3z+6=0$$

和

$$2(x+2)+(y-1)-3(z+3)=0\text{，即 }2x+y-3z-6=0$$

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy+xz=e^{yz}$ 所确定，求全微分 dz.

解 令 $F(x,y,z)=xy+xz-e^{yz}$，则

$$F_x=y+z,F_y=x-ze^{yz},F_z=x-ye^{yz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x-ye^{yz}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x-ze^{yz}}{x-ye^{yz}}$$

$$dz=-\frac{1}{x-ye^{yz}}[(y+z)dx+(x-ze^{yz})dy]$$

。

3.计算 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$,其中 Σ 是锥面 $z^2=3\left(x^2+y^2\right)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 截得的部分.

解 Σ 在 xoy 的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\le 3,\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=2$

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)2dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^2rdr=9\pi.$$

4. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n})$ 的敛散性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n})$ 收敛。

四、综合题（每小题 9 分，共 18 分）

1. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$的和.

解$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(\frac{1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=\frac{2}{3}$$

设$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2},x\in(-1,1)$

两边逐项积分两次得

$$\int_0^x[\int_0^x s(x)dx]dx=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x},s(x)=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$x^2s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n,x\in(-1,1)$$

令$x=-\frac{1}{2}$,则$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n=\frac{4}{27}$

故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$

2. 求曲面积分$I=\iint_{\Sigma}yzdzdx+2dxdy$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=4$外侧在$z\geq 0$的部分。

解 添加辅助平面$S:\begin{cases}x^2+y^2\leq 4\\ z=0\end{cases}$，取下侧，$\Sigma$与$S$围成的空间区域为$\Omega$，于是

$$I=\iint_{\Sigma+S}yzdzdx+2dxdy-\iint_S yzdzdx+2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}zdv-\iint_{x^2+y^2\leq 4}-2dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr+2\cdot\pi 2^2=12\pi$$

五、证明题（共 9 分）

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}c_n$均收敛。且满足$a_n\leq b_n\leq c_n,n=1,2,\cdots$。证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛

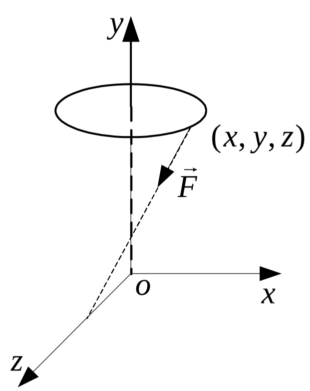
证明 由$a_n\leq b_n\leq c_n,n=1,2,\cdots\Rightarrow 0=a_n-a_n\leq b_n-a_n\leq c_n-a_n,n=1,2,\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}c_n$由级数$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛

故$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，又$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛

六、应用题（共 9 分）

设有一力场，场力的大小与作用点到 z 轴的距离成反比（设比例系数为 k ），方向垂直于 z 轴并且指向 z 轴，试求一质点沿圆弧 $x=\cos t, y=1, z=\sin t$ 从点 $(1,1,0)$ 依 t 增加的方向移动到点 $(0,1,1)$ 时场力所作的功。



解 设作用点的坐标为 (x,y,z) ，则由已知得：

场力的大小 $\left|\vec{F}\right|=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ，场力的方向与 $(-x,-y,0)$ 同向，

对应的单位向量为 $\vec{e}=\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},0\right)$，

故 $\vec{F}=\left|\vec{F}\right|\vec{e}=\left(\dfrac{-kx}{x^2+y^2},\dfrac{-ky}{x^2+y^2},0\right)$

场力作功为 $W=\int_L \dfrac{-kx}{x^2+y^2}dx+\dfrac{-ky}{x^2+y^2}dy=-\dfrac{k}{2}\int_L \dfrac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$$=-\frac{k}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d(\cos^2 t+1)}{\cos^2 t+1}=\left[-\frac{k}{2}\ln\left|\cos^2 t+1\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{k}{2}\ln 2.$$