Здесь будет рассказано о методе решения кубических уравнений.

Оригинальные статьи:

- How to Solve a Cubic Equation Part 1 – The Shape of the Discriminant
- How to Solve a Cubic Equation Part 2 – The $1\bar{1}$ Case
- How to solve a Cubic Equation Part 3 – General Depression and a New Covariant
- How to Solve a Cubic Equation Part 4 – The 111 Case
- How to Solve a Cubic Equation Part 5 – Back to Numerics

Авторство: James F. Blinn

Microsoft Research

blinn@microsoft.com

Originally published in

IEEE Computer Graphics and Applications

Постановка задачи:

Рассмотрим многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами:

$$f(x)=A x^3+B x^2+C x+D=0 . (0)$$

Однако Джеймс Блинн в своих статьях рассматривает уравнение вида

$$f(x,w)=A x^3+B x^2 w+C x w^2+D w^3=0 , (0.1)$$

Можно заметить, что

$$f(x,1)=A x^3+B x^2\cdot 1+C x\cdot 1^2+D\cdot 1^3=A x^3+B x^2+C x+D=f(x).$$

Параметр w вводится Блинном как вторая переменная в кубическом многочлене, чтобы работать с матрицами размера $2 x 2$. Позже, по ходу решения, он приравнивается к единице: $w=1$.

Известно, что для многочлена третьей степени с вещественными корнями, заданного уравнением (0), существует 4 возможных случая:

- "3" единственный действительный корень кратности 3:

$$f(x)=(x-x_1)^3 .$$

- "21" один действительный корень кратности 2 и другой действительный корень кратности 1:

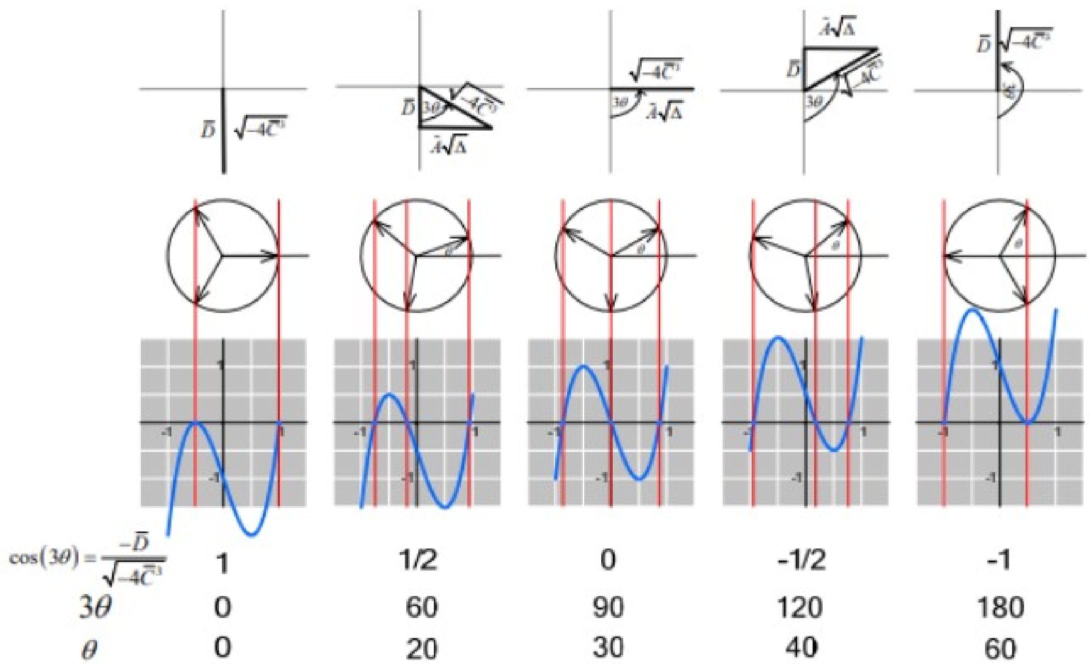
$$f(x)=(x-x_1)^2(x-x_2).$$

- "111" три различных действительных корня:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

- "1$\bar{1}$" один действительный корень и один комплексно-сопряженный корень:

$$f(x)=(x-x_1)(x^2+px+q)=(x-x_1)(x-(a+ib))(x-(a-ib)).$$



Этапы решения:

1. depressing

- преобразование кубического многочлена с целью обнуления коэффициента *B*.

1. scaling

- сокращения общего множителя во всех коэффициентах.
- подстановка коэффициентов в уравнение syzygy.

1. solving

- рассмотрение нескольких случаев значений инварианта и поиск корней.

1. undepressing

- обратное преобразование.

Коварианты

Первый ковариант

В статье [2]. (Blinn, J.F., "Inferring Transforms") было описано следующее преобразование:

$$[x \quad w] = [\tilde{x} \quad \tilde{w}]\, T, (1.1)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}. (1.2)$$

Данное преобразование позволяет осуществить переход вектора $[x\, w]$ из одного базиса в другой, при этом никак не меняя и не теряя корни уравнения или их кратность. То есть, любое кубическое уравнение, например, с тремя действительными корнями может быть преобразовано в другое кубическое уравнение с тремя действительными корнями.

Данное преобразование потребуется на этапе решения depressing, где нужно осуществить переход в базис, где коэффициент $\tilde{B}=0$. Пространство с базисом, где $\tilde{B}=0$ будем называть тильда-пространством.

К тому же, в статье [2] было доказано, что для любого вектора корней всегда существует матрица перехода T. А следовательно, мы всегда можем выполнить необходимое преобразование.

Полученные из уравнения (1.1) выражения для x и w через $\tilde{x}$ и $\tilde{w}$ подставим в (0.1) и получим матрицу перехода для вещественных коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2 u & 3tu^2 & u^3 \\ t^2 s & 2tus + t^2 v & u^2 s + 2tuv & u^2 v \\ ts^2 & us^2 + 2tsv & 2usv + tv^2 & uv^2 \\ s^3 & 3s^2 v & 3sv^2 & v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}. (1.3)$$

Таким образом, получим вещественные коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$, выраженные через старые коэффициенты A, B, C, D.

Так как нашей целью является переход к уравнению вида (0.2), положим $\tilde{B}=0$ и отсюда найдем значения для матрицы перехода.

$$\tilde{B} = t^2 s A + (2tus + t^2 v) B + (u^2 s + 2tus) C + u^2 v D = ¿$$

$$¿\, s(t^2 A + 2tuv + u^2 C) + v(t^2 B + 2tuC + u^2 D) = 0.$$

Получим, что $\tilde{B}=0$ при

$$s = -k(t^2 B + 2tuC + u^2 D),$$

$$(1.4)$$

$$v = +k(t^2 A + 2tuB + u^2 C),$$

где t, u, k - любые действительные числа, а матрица перехода T зависит от параметров t и u.

Из всех подходящих для решения нашей задачи матриц T мы можем выбрать самые простые для того, чтобы конкретизировать этапы решения и уменьшить количество вычислений. Рассмотрим варианты при $k=1$:

$$[t, u]=[1, 0] u [t, u]=[0, 1].$$

Тогда соответственно

$$T=\begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix} и л и \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -D & C \end{bmatrix}. (1.5)$$

Для тильда-пространства получаем коэффициенты для $[t, u]=[1, 0]$:

$$\widetilde{A}=A,$$

$$\widetilde{B}=0, (1.6)$$

$$\widetilde{C}=A\left(AC-B^2\right),$$

$$\widetilde{D}=A\left(2B^3-3ABC+A^2D\right).$$

Или для $[t, u]=[0, 1]$

$$\widetilde{A}=D,$$

$$\widetilde{B}=0, (1.7)$$

$$\widetilde{C}=D\left(BD-C^2\right),$$

$$\widetilde{D}=D\left(-D^2A-3DBC-2C^3\right).$$

Тогда в общем виде наше уравнение примет вид

$$\widetilde{A}\widetilde{x}^3+3\widetilde{C}\widetilde{x}\widetilde{w}^2+\widetilde{D}\widetilde{w}^3=0. (1.8)$$

Второй ковариант

Чтобы классифицировать всевозможные случаи решения кубического многочлена, введем понятие Гессиана.

Гессиан функции $f(x, w)$ - это определитель матрицы вторых производных функции $f(x, w)$ по x и w

$$Hessian(f)=det\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xw} \\ f_{xw} & f_{ww} \end{bmatrix}.$$

Для функции (0.1) Гессиан будет выглядеть следующим образом:

$$Hessian(f)=det\begin{bmatrix}6Ax+6Bw & 6Bx+6Cw\\ 6Bx+6Cw & 6Cx+6Dw\end{bmatrix}.$$

В матричной форме Гессиан записывается в виде:

$$Hessian(f)=18\begin{bmatrix}x & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2(AC-B^2) & AD-BC\\ AD-BC & 2(BD-C^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ w\end{bmatrix}. (2.1)$$

Введем следующие величины:

$$\delta_1=AC-B^2,$$

$$\delta_2=AD-BC, (2.2)$$

$$\delta_3=BD-C^2,$$

где $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ называются коэффициентами Гессиана кубической функции $Hessian(f)$.

Введем обозначение для второй матрицы в выражении (2.1)

$$H=\begin{bmatrix}2(AC-B^2) & AD-BC\\ AD-BC & 2(BD-C^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\delta_1 & \delta_2\\ \delta_2 & 2\delta_3\end{bmatrix},$$

где

$$\Delta=det(H),$$

$$\Delta=4\delta_1\delta_3-\delta_2^2=-A^2D^2+6ABCD-4AC^3-4B^3D+3B^2C^2.$$

Данные равенства Дж. Блинн получил в своей предыдущей работе [1] (Blinn, J.F., "Polynomial Discriminants Part 1, Matrix Magic")

Гессиан играет важную роль. Если совершить переход в другие координаты и посчитать Гессиан от функции в других координатах, то он будет связан с Гессианом оригинальной функции следующим образом:

$$\begin{bmatrix}2\widetilde{\delta_1}\\ \widetilde{\delta_2}\\ 2\widetilde{\delta_3}\end{bmatrix}=(tv-su)^2\begin{bmatrix}t^2 & 2tu & u^2\\ ts & tv+us & uv\\ s^2 & 2sv & v^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\delta_1\\ \delta_2\\ 2\delta_3\end{bmatrix}.$$

В ином виде:

$$\begin{bmatrix}2\widetilde{\delta_1} & \widetilde{\delta_2}\\ \widetilde{\delta_2} & 2\widetilde{\delta_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t & u\\ s & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\delta_1 & \delta_2\\ \delta_2 & 2\delta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t & s\\ u & v\end{bmatrix}.$$

Инвариант

Инвариантом является определитель матрицы H

$$\Delta = det(H) = 4\delta_1\delta_3 - \delta_2^2. (2.3)$$

Причем он преобразуется следующим образом.

$$\tilde{\Delta} = (tv - su)^6 \Delta.$$

С помощью гессиана и определителя матрицы H опишем всевозможные случаи решения кубического уравнения:

Для любой функции, которая является степенью линейной функции, гессиан этой функции тожественно равен нулю, а следовательно $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Следовательно, гессиан функции $f(x, w)$ будет обнуляться в случае, когда $f(x) = (x - x_1)^3$, то есть, когда у нас действительный корень кратности 3.

Это верно для любых многочленов степени n. Например, Гессиан квадратичного уравнения - это дискриминант. Когда дискриминант равен нулю - мы имеем 2 действительных корня. Таким образом, каждому кубическому уравнению $f(x)$ соответствует свой квадратичный Гессиан $Hessian(f)$.

Отметим, что определитель H - это дискриминант кубического многочлена, но минус дискриминант квадратического Гессиана!

Отсюда прослеживается связь: если кубический многочлен имеет один действительный корень, то Гессиан имеет два действительных. Если кубический многочлен имеет 3 действительных корня, то Гессиан не имеет действительных корней. Это своего рода "эффект сохранения реальных корней". Если дискриминант равен нулю, то и Гессиан, и кубический многочлен имеют корень кратности 2, и они совпадают.

Таким образом все 4 случая в решении нашей задачи могут быть описаны следующей таблицей:

Тип уравнения	Алгебраическое условие	Корни многочлена	Корни Гессиана
3	$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$	Один корень кратности 3	$H = 0$
21	$\Delta = 0$	Корень кратности 2 и корень кратности 1	Корень кратности 2 (равный корню кратности 2 кубического многочлена)

111	$\Delta>0$	Три действительных корня кратности 1	Один комплексно-сопряженный корень
$1\bar{1}$	$\Delta<0$	Один действительный и один комплексно-сопряженный корни	Два действительных корня

Третий ковариант

Из матричного уравнения (1.3) получим выражения для оставшихся коэффициентов:

$$\tilde{A}=t^3A+3t^2uB+3tu^2C+u^3D,$$

$$\tilde{C}=ts^2A+\left(us^2+2tsv\right)B+\left(2usv+tv^2\right)C+uv^2D,$$

$$\tilde{D}=s^3A+3s^2vB+3sv^2C+v^3D.$$

Теперь $\tilde{A}$ представляет собой функцию от t и u. Подставляя уравнения (1.4) в выражения для $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$, получим многочлены пятой и шестой степени соответственно, множителем которых является многочлен $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}(t,u)=f(t,u),$$

$$\tilde{C}(t,u)=f(t,u)\cdot\frac{1}{2}H(t,u),(3.1)$$

$$\tilde{D}(t,u)=f(t,u)\cdot J(t,u).$$

Этот эффект отлично прослеживается для случаев

$$[t,u]=[1,0]u[t,u]=[0,1].$$

В этих случаях $\tilde{A}$ представляет собой не функцию, а константу. После сокращения всех коэффициентов на $\tilde{A}$ окончательно получим для уравнений (1.6):

$$\bar{A}=1,$$

$$\bar{B}=0,$$

$$\bar{C}=AC-B^2,$$

$$\bar{D}=2B^3-3ABC+A^2D.$$

Для уравнений (1.7):

$$\bar{A}=1,$$

$$\overline{B}=0\,,$$

$$\overline{C}=BD-C^2,$$

$$\overline{D}=-D^2A-3DBC-2C^3.$$

Вернемся к общему случаю. После сокращения на $\widetilde{A}(t,u)$ получаем

$$\overline{C}=(AC-B^2)t^2+(AD-BC)tu+(BD-C^2)u^2=\frac{1}{2}H(t,u).$$

Коэффициент $\overline{D}$ теперь выражается через однородный кубический многочлен от (t,u). Это значит, что $\overline{D}$ может быть представлено как результат отображения некоего кубического многочлена в тильда-пространство, т.е.

$$\overline{D}(t,u)=[t\quad u]H\begin{bmatrix}s\\v\end{bmatrix}=[t\quad u]\begin{bmatrix}2(AC-B^2) & AD-BC\\ AD-BC & 2(BD-C^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\v\end{bmatrix}=¿$$

$$¿\,A_{\overline{D}}t^3+3B_{\overline{D}}t^2u+3C_{\overline{D}}tu^2+D_{\overline{D}}u^3=J(t,u),$$

где

$$A_{\overline{D}}=+A^2D-3ABC+2B^3=A_J,$$

$$B_{\overline{D}}=-2AC^2+ABD+B^2C=B_J,$$

$$(3.2)$$

$$C_{\overline{D}}=+ACD+2B^2D-BC^2=C_J,$$

$$D_{\overline{D}}=-AD^2+3BCD-C^3=D_J.$$

Данный многочлен $J(t,u)$ обозначим за третий ковариант.

Уравнение syzygy

Используя выражения для $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ из (2.2), получаем:

$$\overline{C}=\delta_1,$$

$$\overline{D}=-2B\delta_1+A\delta_2.$$

Тогда наш полином примет вид:

$$\widetilde{x}^3+3\overline{C}x\widetilde{w}^2+\overline{D}\widetilde{w}^3=0.$$

Положив параметр $\widetilde{w}=1$, получаем:

$$\widetilde{x}^3+3\overline{C}x+\overline{D}=0.\,(4.1)$$

Ферро и Тарталья вывели следующее тождество, верное для любых значений p, q:

$$(p+q)^3-3pq(p+q)-(p^3+q^3)=0.\ (4.2)$$

Сравнивая данное тождество с нашим уравнением (4.1), получим, что

$$x=p+q,$$

$$-3pq=3\overline{C},\ (4.3)$$

$$-(p^3+q^3)=\overline{D}.$$

Поэтому, если будут существовать p и q, удовлетворяющие соотношениям $(-pq)=\overline{C}$ и $(-p^3-q^3)=\overline{D}$, тогда найдется $\tilde{x}=p+q$.

Выражая q из второго равенства системы (4.3) и подставляя во второе, получаем:

$$-p^3-\left(-\frac{\overline{C}}{p}\right)^3=D.$$

Избавление от дробей, дает нам уравнение 6 степени:

$$p^6+\overline{D}\,p^3-\overline{C}^3=0.$$

Если рассматривать это как квадратный многочлен от p^2, то для него возможно найти корни:

$$p^3=\frac{-\overline{D}\pm\sqrt{\overline{D}^2+4\overline{C}^3}}{2}.$$

Зная значения для p^3, найдем q^3 из третьего равенства системы (4.3).

$$q^3=-p^3-\overline{D}=\frac{-\overline{D}\pm\sqrt{\overline{D}^2+4\overline{C}^3}}{2}.$$

Другими словами, q^3- это другой корень квадратного уравнения. На самом деле не имеет значения, что есть что, поскольку в конечном счете мы будем смотреть только на сумму и разность p и q, поэтому возьмем

$$p=\sqrt[3]{\frac{-\overline{D}+\sqrt{\overline{D}^2+4\overline{C}^3}}{2}},$$

$$(4.4)$$

$$q=\sqrt[3]{\frac{-\overline{D}-\sqrt{\overline{D}^2+4\overline{C}^3}}{2}}.$$

Обратим внимание на выражение под квадратным корнем в равенстве (4.4). Если рассматривать определитель Гессиана с $\overline{A}=1, \overline{B}=0$, то получим дискриминант:

$$\overline{\Delta}=-\overline{D}^2-4\overline{C}^3.$$

Рассмотрим переход гессиана из первоначального пространства с коэффициентами A, B, C, D в пространство с коэффициентами $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ для Гессиана.

Из уравнения (2.1):

$$H=\begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix}, \Delta=det(H),$$

и переход к другому базису соответственно

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & s \\ u & v \end{bmatrix},$$

где $\overline{\Delta}=det(\overline{H})=det\,T\cdot det(H)\cdot det\,T=(det\,T)^2\Delta$.

Для случая $[t\,u]=[1\,0]$ матрица $T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}$.

Ее определитель соответственно $det\,T=A$, а следовательно $\overline{\Delta}=A^2\Delta$.

Получаем, что $\overline{D}^2+4\overline{C}^3=-A^2\Delta.$ (4.5)

Возвращаясь к тому, что коэффициенты трехчлена ищутся как функции от параметров x и w, получаем:

$$\overline{D}^2(x,w)+4\overline{C}^3(x,w)=-A^2(x,w)\Delta.$$

Вспомним уравнения (3.2)

$$\widetilde{A}(t,u)=f(t,u),$$

$$\widetilde{C}(t,u)=f(t,u)\cdot\frac{1}{2}H(t,u),$$

$$\widetilde{D}(t,u)=f(t,u)\cdot J(t,u).$$

Или

$$\widetilde{A}(t,u)=A(t,u)$$

$$\overline{C}(t,u)=\frac{1}{2}H(t,u),$$

$$\overline{D}(t,u)=J(t,u).$$

Подставляя их, получаем окончательный вид уравнения:

$$J^2+\frac{1}{2}H^3=-\Delta f^2.\,(4.6)$$

Такого рода отношения называются уравнениями sygyzy.

Решение:

depressing

На данном этапе происходит переход в тильда-пространство, где $\tilde{B}=0$. Общий вид такого преобразования - уравнение (1.1), т.е.

$$\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}.$$

Из всех возможных преобразований нас интересуют только те, что обнуляют коэффициент при второй степени. Для того, чтоб найти такие преобразования, из равенства (1.3) запишем выражение для $\tilde{B}$ и приравняем к нулю. Получим, что $\tilde{B}=0$ при уравнениях (1.4):

$$s=-k\left(t^2 B+2\,t\,u\,C+u^2 D\right),$$

$$v=+k\left(t^2 A+2\,t\,u\,B+u^2 C\right),$$

где t,u,k - любые действительные числа, а матрица перехода T зависит от параметров t и u.

Для удобства будем рассматривать $k=1,[t,u]=[0,1]\,u\,[t,u]=[1,0]$.

Для тильда-пространства получаем коэффициенты для $[t,u]=[1,0]$ - уравнения (1.6):

$$\tilde{A}=A,$$

$$\tilde{B}=0,$$

$$\tilde{C}=A\left(A\,C-B^2\right),$$

$$\tilde{D}=A\left(2\,B^3-3\,A\,B\,C+A^2 D\right).$$

Или для $[t,u]=[0,1]$ - уравнения (1.7):

$$\tilde{A}=D,$$

$$\tilde{B}=0,$$

$$\tilde{C}=D\left(B\,D-C^2\right),$$

$$\tilde{D}=D\left(-D^2 A-3\,D\,B\,C-2C^3\right).$$

Тогда в общем виде уравнение примет вид (1.8): $\widetilde{A}\,\tilde{x}^3+3\widetilde{C}\,\tilde{x}\,\tilde{w}^2+\widetilde{D}\,\tilde{w}^3=0$.

Сумма корней такого многочлена при $w=1$ равна нулю.

scaling

На данном этапе нужно перейти из тильда-пространства в пространство с коэффициентами $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}$.

Для этого поделим коэффициенты $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},\widetilde{D}$ на $\widetilde{A}$.

Таким образом получим для уравнений (1.6):

$$\overline{A}=1,$$

$$\overline{B}=0,$$

$$\overline{C}=AC-B^2,$$

$$\overline{D}=2B^3-3ABC+A^2D.$$

Для уравнений (1.7):

$$\overline{A}=1,$$

$$\overline{B}=0,$$

$$\overline{C}=BD-C^2,$$

$$\overline{D}=-D^2A-3DBC-2C^3.$$

Теперь уравнение принимает вид при $w=1$: $\tilde{x}^3+3\overline{C}\,\tilde{x}+\overline{D}=0$.

Как можно заметить, после этапов depressing и scaling коэффициенты полинома принимают вид двух ковариантов кубического многочлена: $\overline{C}=\frac{1}{2}H$, $\overline{D}=J$.

Подставляя $\overline{C}$ и $\overline{D}$ в уравнение syzygy, получаем: $\overline{D}^2+4\overline{C}^3=-\widetilde{A}^2\Delta$.

solving

На данном этапе выясняется тип уравнения, который необходимо решить. Для этого производится сравнение $\overline{\Delta}=-\overline{D}^2-4\overline{C}$ с нулем. После этого подставляем коэффициенты $\overline{C}$ и $\overline{D}$ в прямые выражения для корней. Эти выражения выводятся из вышеупомянутого тождества Ферро и Тарталья и преобразуются в соответствии с алгебраическими условиями для каждого типа. Выражения для $\tilde{x}_i$ рассматриваются ниже для всех четырех случаев.

undepressing

На последнем этапе необходимо вернуться из тильда-пространства в исходное пространство заданного многочлена. Данному преобразованию соответствует соотношение (1.1).

Уравнение типа $1\bar{1}$

depressing

Перейдем в тильда-пространство с коэффициентом $\widetilde{B}=0$. Чтобы преобразовать наш многочлен к виду (1.8), мы можем использовать следующую матрицу:

$$T=\begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты в новом пространстве будут следующими:

$$\widetilde{A}=A\,,$$

$$\widetilde{B}=0\,,$$

$$\widetilde{C}=A\left(AC-B^2\right),$$

$$\widetilde{D}=A\left(2B^3-3ABC+A^2D\right).$$

Scaling

Заметим, что каждый коэффициент содержит в себе умножение на А. Мы работаем с многочленами, у которых $A\neq 0$, так как при А=0 получим многочлен второй степени, который будет иметь всего 2 корня. Решение будет аналогичным, просто будем работать уже с коэффициентами:

$$\overline{A}=1\,,$$

$$\overline{B}=0\,,$$

$$\overline{C}=AC-B^2=\delta_1\,,$$

$$\overline{D}=2B^3-3ABC+A^2D=-2B\delta_1+A\delta_2.$$

Тогда наш многочлен примет вид: $\tilde{x}^3+3C-\tilde{x}\tilde{w}^2+D-\tilde{w}^3=0$.

Положим $\tilde{w}=1$, и получим простое кубическое уравнение: $\tilde{x}^3+3\overline{C}\tilde{x}+\overline{D}=0\,(5.1)$.

Solving

Рассмотрим тождество (4.2): $(p+q)^3-3pq(p+q)-\left(p^3+q^3\right)=0$ Если сравнить это тождество с уравнением (5.1) для $\tilde{x}$, то можно провести аналогию, где

$$\overline{C}=-pq,$$

$$\overline{D}=-p^3-q^3.\,(5.2)$$

Тогда нашим ответом будет: $\tilde{x}=p+q$.

Ниже приведены уравнения (4.4) - полученные выражения для p и q:

$$p=\sqrt[3]{\frac{-\overline{D}+\sqrt{\overline{D}^2+4\overline{C}^3}}{2}},$$

$$q=\sqrt[3]{\frac{-\overline{D}-\sqrt{\overline{D}^2+4\overline{C}^3}}{2}}.$$

Теперь вспомним, что в пространстве комплексных чисел существует три кубических корня для каждого числа. Так для единицы тремя кубическими корнями будут $1,\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Тогда кубы корней для p и q будут иметь вид:

$$p^3=(\omega p)^3=(\omega^2 p)^3,$$

$$q^3=(\omega q)^3=(\omega^2 q)^3.$$

Тогда первое уравнение системы (11) можно переписать так:

$$-pq=\overline{C},$$

$$-(\omega p)(\omega^2 q)=\overline{C},$$

$$-(\omega^2 p)(\omega q)=\overline{C}.$$

Формулы для корней соответственно:

$$\tilde{x}_1=p+q$$

$$\tilde{x}_2=\omega p+\omega^2 q\,(5.3)$$

$$\tilde{x}_3=\omega^2 p+\omega q$$

Подставляя вместо ω численное значение, легко убедиться, что сумма корней равна нулю.

Уравнение типа 21

Из таблицы 1 для кубических уравнений с действительным корнем кратности 2: $\Delta=0$. Это значит, что p и q примут следующий вид:

$$p = q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}}{2}}$$

Подставляя выражения выше в (5.3), получим выражения для корней:

$$\tilde{x}_1 = 2\,p$$

$$\tilde{x}_2 = -\,p$$

$$\tilde{x}_3 = -\,p$$

Теперь вспомним уравнение syzygy. Для $\Delta = 0$ оно записывается так:

$$\overline{D}^2 = -\,4\,\overline{C}^3$$

Преобразуем выражение для p:

$$p = q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}^3}{2\,\overline{D}^2}} = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}^3}{-\,8\,\overline{C}^3}} = \frac{\overline{D}}{2\,\overline{C}} = \frac{-\,2\,B\,\delta_1 + A\,\delta_2}{2\,\delta_1}$$

Таким образом, в данном случае мы можем найти решение задачи без вычисления кубического корня.

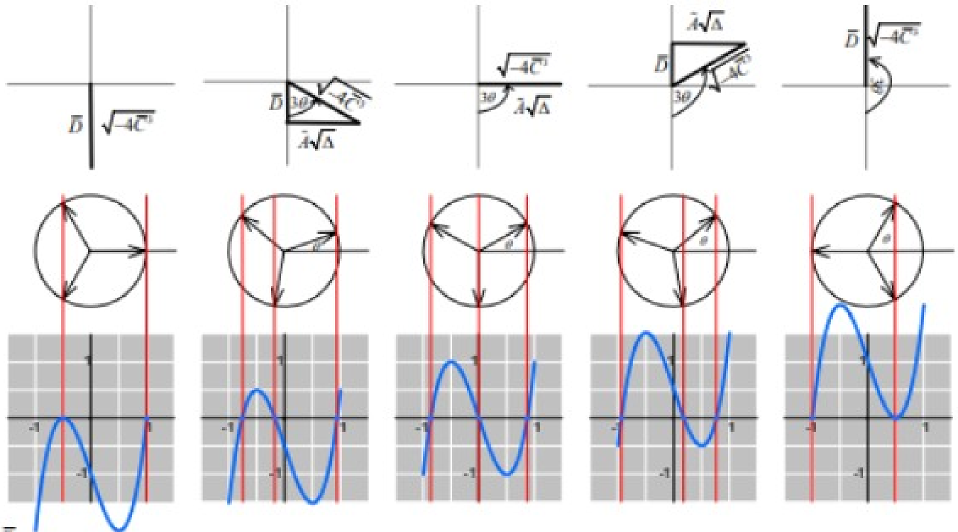
Уравнение типа 111

Из таблицы 1, для уравнений типа 111 $\Delta > 0$.

Следует заметить, что первая производная простого кубического многочлена (5.1) примет вид:

$$3\,\tilde{x}^2 + 3\,\overline{C} = 0\,.$$

Отсюда получаем, что локальные экстремумы будут в точках $\tilde{x} = \pm\sqrt{-\overline{C}}$.



$\cos(3\theta) = \frac{-\overline{D}}{\sqrt{-4\overline{C}^3}}$	1	1/2	0	-1/2	-1
3θ	0	60	90	120	180
θ	0	20	30	40	60

Чтобы квадратный корень имел смысл, нужно убедиться в отрицательности $\overline{C}$ при условии $\Delta > 0$. Она следует из уравнения syzygy:

$$4\overline{C}^3 = -\widetilde{A}^2\Delta - \overline{D}^2.$$

Далее делается попытка тригонометрической замены. Мы хотим выявить взаимосвязь между $\tilde{x}$ и $\cos\theta$ и провести аналогию между (5.1) и

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0 \quad (5.4)$$

Делая предположение, что в результате мы получим равенство $\tilde{x} = \cos\theta$, нам необходимо поместить все корни в интервал $(-1;1)$.

Иными словами, нам необходимо сжать кривую по оси Ох, чтоб поместить корни трехчлена ближе к центру координат. Для этого выполним замену:

$$\tilde{x} = 2\sqrt{-\overline{C}}\,\tilde{\tilde{x}}.$$

Подставляя данное выражение в уравнение (5.1), получим:

$$\left(2\sqrt{-\overline{C}}\,\tilde{\tilde{x}}\right)^3 + 3\overline{C}\left(2\sqrt{-\overline{C}}\,\tilde{\tilde{x}}\right) + \overline{D} = 0,$$

$$-8\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}\,\tilde{\tilde{x}}^3 + 6\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}\,\tilde{\tilde{x}} + \overline{D} = 0.$$

Делим все коэффициенты на $-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}$:

$$4\tilde{\tilde{x}}^3 - 3\tilde{\tilde{x}} + \frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}} = 0.$$

Сравнив полученный результат с уравнением (5.4), можно сделать вывод о том, что $\tilde{\tilde{x}} = cos\theta$ и $cos3\theta = \frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}$.

Отсюда получаем выражение для первого корня:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos\left(\frac{1}{3}cos^{-1}\left(\frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}\right)\right).$$

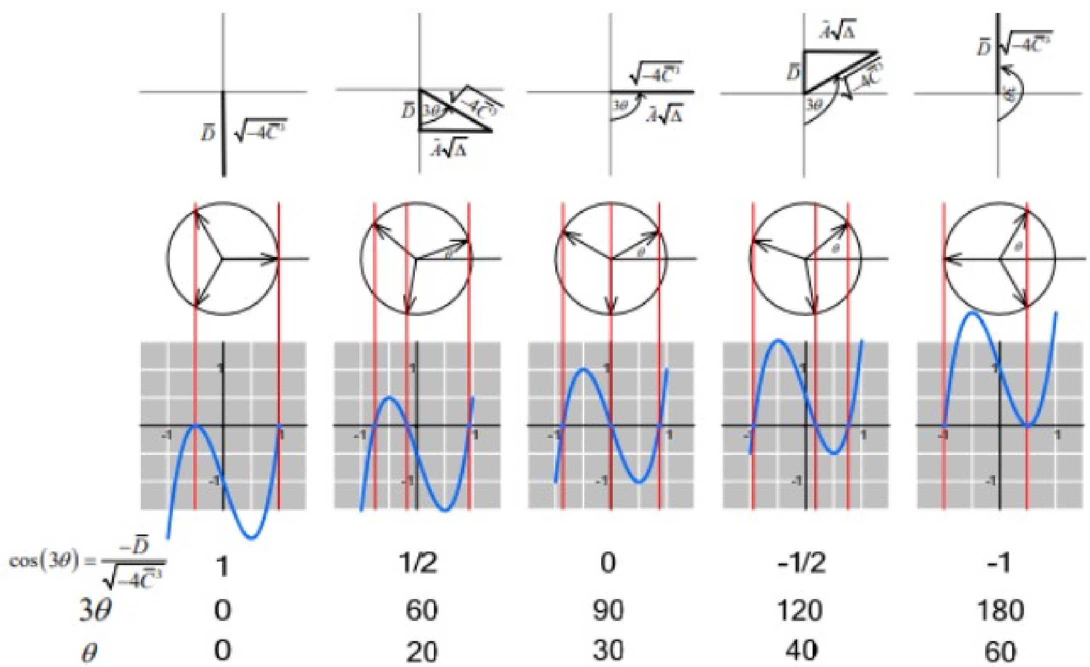
Теперь необходимо убедиться, что $\frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}$ меньше единицы по модулю. Это также следует из уравнения syzygy:

$$-4\overline{C}^3 = \tilde{A}^2\Delta + \overline{D}^2. (4.5)$$

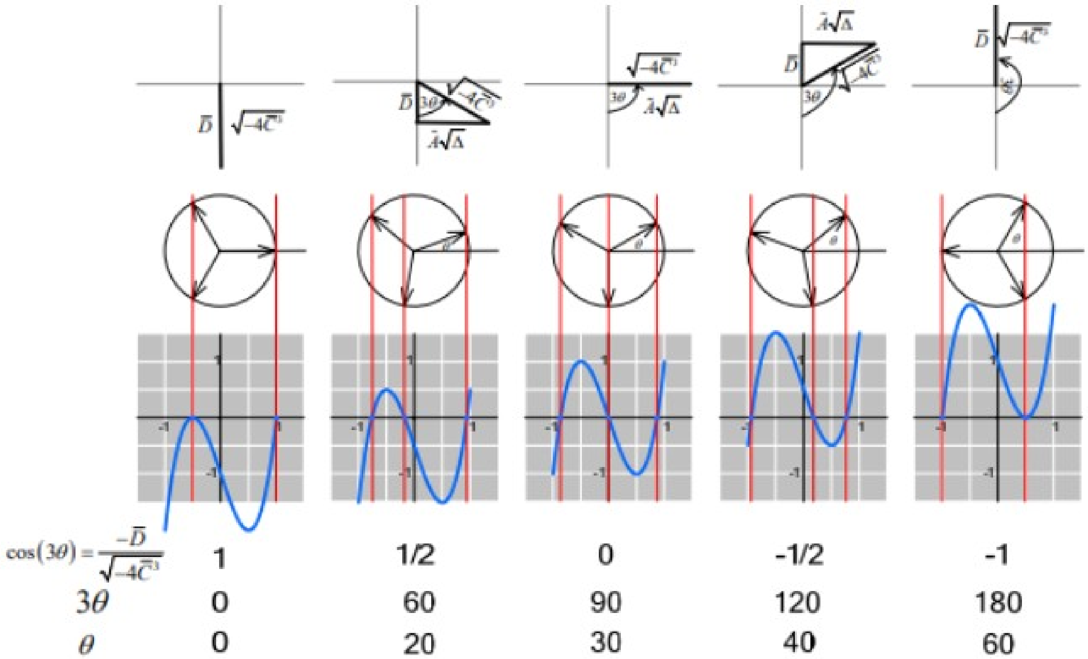
$$\overline{D}^2 < -4\overline{C}^3,$$

$$\frac{\overline{D}^2}{-4\overline{C}^3} = \left(\frac{\overline{D}}{\sqrt{-4\overline{C}^3}}\right)^2 < 1.$$

Равенство (4.5) можно рассматривать как запись теоремы Пифагора, тогда:



Для того, чтобы найти оставшиеся корни, Джеймс Блинн приводит иллюстрацию, на которой показывает все случаи расположения графика многочлена с тремя действительными различными корнями:



Когда θ пробегает от 0° до 60°, график пересекает ось Ox в трех точках. Каждому графику сопоставляется единичная окружность с тремя векторами из центра координат. Углы между векторами фиксированы и равны 120°. Сумма этих векторов обнуляется так же как и сумма корней кубического многочлена. Из графиков получаем выражения для корней:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = \cos\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = \cos(\theta - 120°),$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = \cos(\theta + 120°).$$

При подстановке этих выражений в уравнение (5.4) можно убедиться в их правильности. Формулы можно преобразовать с помощью формул для косинуса суммы и косинуса разности:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = \cos\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

Пользуясь тем, что сумма корней равна нулю, перепишем:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = \cos\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = -\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2.$$

Вернемся к тильда-пространству:

$$\tilde{x}_1 = 2\sqrt{-\overline{C}}\cos\theta,$$

$$\tilde{x}_2 = 2\sqrt{-\overline{C}}\left(-\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right), (5.5)$$

$$\tilde{x}_3 = 2\sqrt{-\overline{C}}\left(-\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2\right).$$

Уравнение типа 3

Для кубического полинома с корнем кратности 3 из таблицы 1: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$.

Это значит, что $\Delta = \overline{C} = \overline{D} = 0$.

Если подставить данные значения в уравнения (4.4) для корней, полученные из тождества Ферро и Тарталья, можно получить $p = q = 0$.

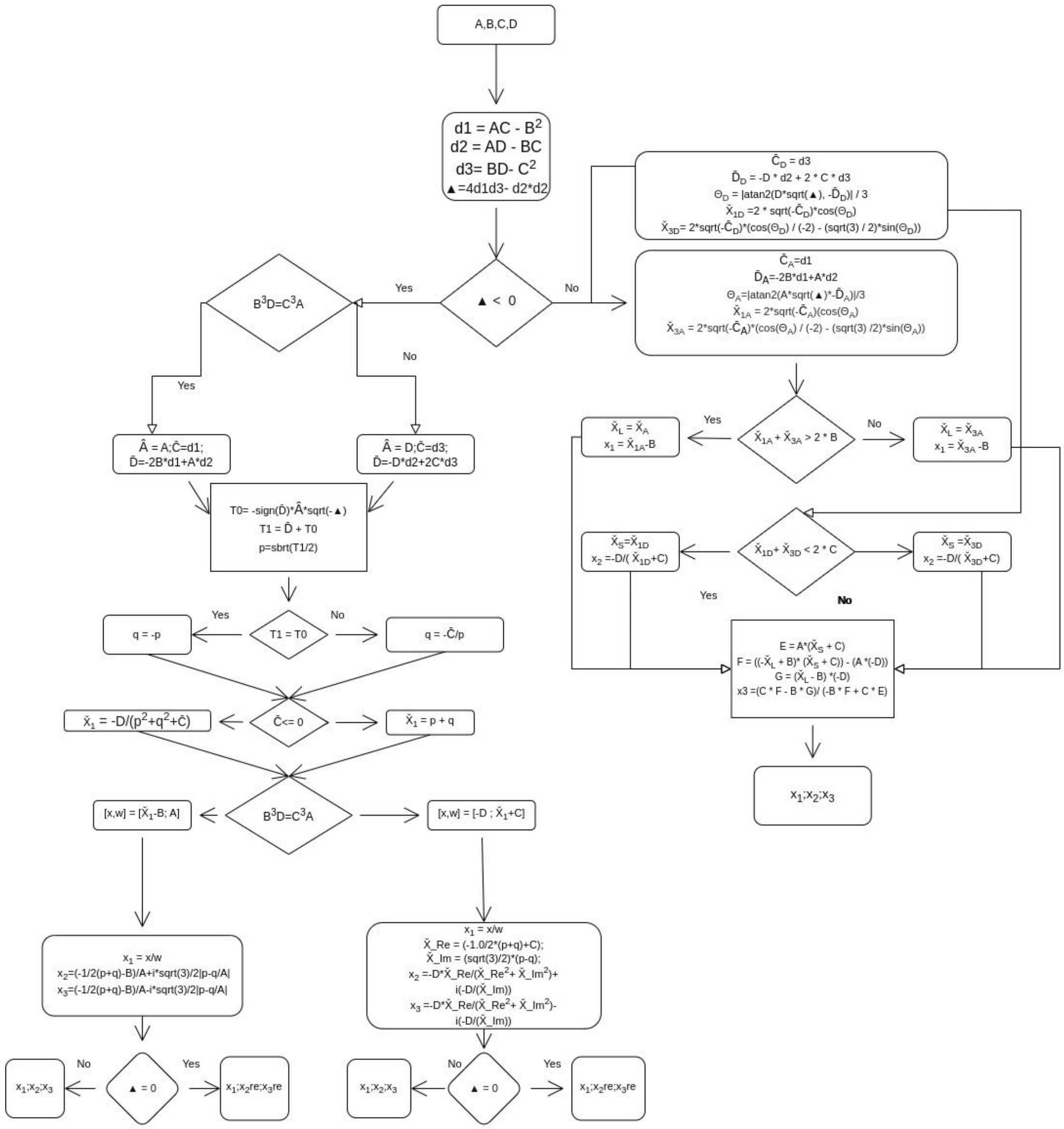
Тогда $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0$.

Если использовать тригонометрические формулы (5.5), то корни также обнулятся, так как $\overline{C} = 0$.

Тем не менее, после этапа undepressing нулевой корень встает на своё место в оригинальном пространстве.

Блок-схема

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи решения кубического многочлена. Составим блок-схему решения.



A,B,C,D
d1 = AC - B2
d2 = AD - BC
d3= BD- C2
▲=4d1d3- d2*d2
▲ < 0
Yes
No
B3D=C3A
Yes
No
Â = A;Č=d1;
D̄=-2B*d1+A*d2
Â = D;Č=d3;
D̄=-D*d2+2C*d3
T0= -sign(D̄)*Â*sqrt(-▲)
T1 = D̄ + T0
p=sbrt(T1/2)
Yes
No
q = -p
T1 = T0
q = -Č/p
X̌1 = -D/(p2+q2+Č)
Č<= 0
X̌1 = p + q
[x,w] = [X̌1-B; A]
B3D=C3A
[x,w] = [-D ; X̌1+C]
x1 = x/w
x2=(-1/2(p+q)-B)/A+i*sqrt(3)/2|p-q/A|
x3=(-1/2(p+q)-B)/A-i*sqrt(3)/2|p-q/A|
x1 = x/w
X̌_Re = (-1.0/2*(p+q)+C);
X̌_Im = (sqrt(3)/2)*(p-q);
x2 =-D*X̌_Re/(X̌_Re2+ X̌_Im2)+
i(-D/(X̌_Im))
x3 =-D*X̌_Re/(X̌_Re2+ X̌_Im2)-
i(-D/(X̌_Im))
No
Yes
x1;x2;x3
▲ = 0
x1;x2re;x3re
No
Yes
x1;x2;x3
▲ = 0
x1;x2re;x3re
C̄D = d3
D̄D = -D * d2 + 2 * C * d3
ΘD = |atan2(D*sqrt(▲), -D̄D)| / 3
X̌1D =2 * sqrt(-C̄D)*cos(ΘD)
X̌3D= 2*sqrt(-C̄D)*(cos(ΘD) / (-2) - (sqrt(3) / 2)*sin(ΘD))
C̄A=d1
D̄A=-2B*d1+A*d2
ΘA=|atan2(A*sqrt(▲)*-D̄A)|/3
X̌1A = 2*sqrt(-C̄A)(cos(ΘA)
X̌3A = 2*sqrt(-C̄A)*(cos(ΘA) / (-2) - (sqrt(3) /2)*sin(ΘA))
Yes
No
X̌L = X̌A
x1 = X̌1A-B
X̌1A + X̌3A > 2 * B
X̌L = X̌3A
x1 = X̌3A -B
X̌S=X̌1D
x2 =-D/(X̌1D+C)
X̌1D+ X̌3D < 2 * C
X̌S =X̌3D
x2 =-D/(X̌3D+C)
Yes
No
E = A*(X̌S + C)
F = ((-X̌L + B)* (X̌S + C)) - (A *(-D))
G = (X̌L - B) *(-D)
x3 =(C * F - B * G)/ (-B * F + C * E)
x1;x2;x3