

Здесь будет рассказано о методе решения кубических уравнений.

Оригинальные статьи:

- How to Solve a Cubic Equation Part 1 – The Shape of the Discriminant
- How to Solve a Cubic Equation Part 2 – The $1\bar{1}$ Case
- How to solve a Cubic Equation Part 3 – General Depression and a New Covariant
- How to Solve a Cubic Equation Part 4 – The 111 Case
- How to Solve a Cubic Equation Part 5 – Back to Numerics

Авторство: James F. Blinn

Microsoft Research

blinn@microsoft.com

Originally published in

IEEE Computer Graphics and Applications

Постановка задачи:

Рассмотрим многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами:

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0. \quad (0)$$

Однако Джеймс Блинн в своих статьях рассматривает уравнение вида

$$f(x, w) = Ax^3 + Bx^2w + Cxw^2 + Dw^3 = 0, \quad (0.1)$$

Можно заметить, что

$$f(x, 1) = Ax^3 + Bx^2 \cdot 1 + Cx \cdot 1^2 + D \cdot 1^3 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = f(x).$$

Параметр w вводится Блинном как вторая переменная в кубическом многочлене, чтобы работать с матрицами размера 2×2 . Позже, по ходу решения, он приравнивается к единице: $w = 1$.

Известно, что для многочлена третьей степени с вещественными корнями, заданного уравнением (0), существует 4 возможных случая:

- "3" единственный действительный корень кратности 3:

$$f(x) = (x - x_1)^3.$$

- "21" один действительный корень кратности 2 и другой действительный корень кратности 1:

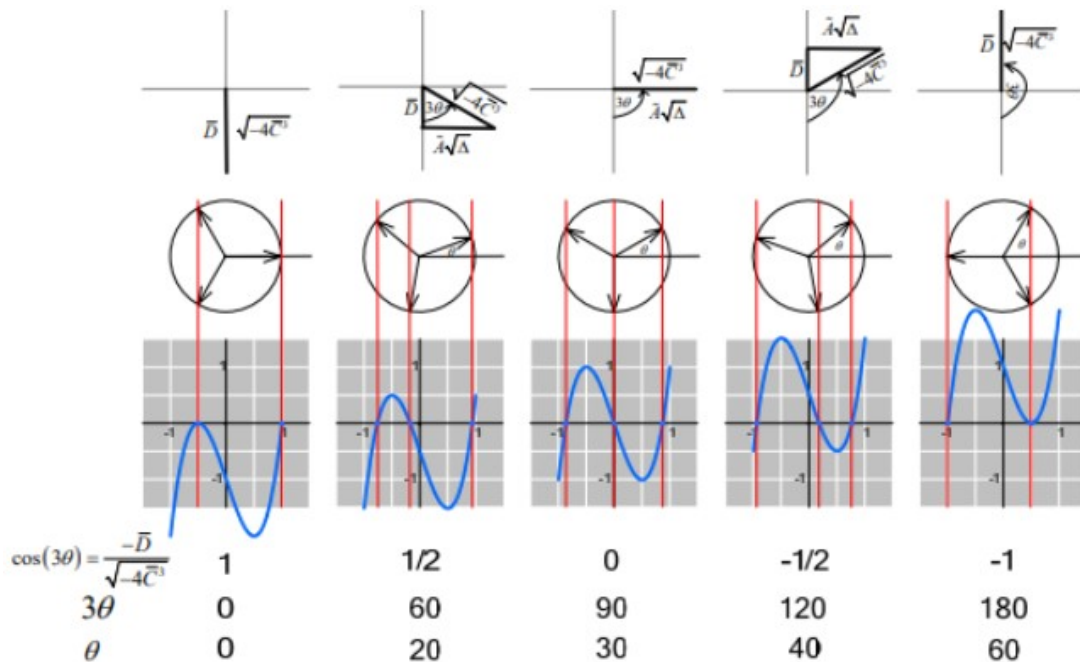
$$f(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2).$$

- "111" три различных действительных корня:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

- "1 $\bar{1}$ " один действительный корень и один комплексно-сопряженный корень:

$$f(x) = (x - x_1)(x^2 + px + q) = (x - x_1)(x - (a + ib))(x - (a - ib)).$$



Этапы решения:

1. depressing
 - преобразование кубического многочлена с целью обнуления коэффициента B .
1. scaling
 - сокращения общего множителя во всех коэффициентах.
 - подстановка коэффициентов в уравнение *syzygy*.
1. solving
 - рассмотрение нескольких случаев значений инварианта и поиск корней.
1. undepressing
 - обратное преобразование.

Коварианты

Первый ковариант

В статье [2]. (Blinn, J.F., "Inferring Transforms") было описано следующее преобразование:

$$\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix} T, (1.1)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}. (1.2)$$

Данное преобразование позволяет осуществить переход вектора $\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix}$ из одного базиса в другой, при этом никак не меняя и не теряя корни уравнения или их кратность. То есть, любое кубическое уравнение, например, с тремя действительными корнями может быть преобразовано в другое кубическое уравнение с тремя действительными корнями.

Данное преобразование потребуется на этапе решения depressing, где нужно осуществить переход в базис, где коэффициент $\tilde{B}=0$. Пространство с базисом, где $\tilde{B}=0$ будем называть тильда-пространством.

К тому же, в статье [2] было доказано, что для любого вектора корней всегда существует матрица перехода T . А следовательно, мы всегда можем выполнить необходимое преобразование.

Полученные из уравнения (1.1) выражения для x и w через \tilde{x} и \tilde{w} подставим в (0.1) и получим матрицу перехода для вещественных коэффициентов A, B, C, D :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2u & 3tu^2 & u^3 \\ t^2s & 2tus+t^2v & u^2s+2tuv & u^2v \\ ts^2 & us^2+2tsv & 2usv+tv^2 & uv^2 \\ s^3 & 3s^2v & 3sv^2 & v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}. (1.3)$$

Таким образом, получим вещественные коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$, выраженные через старые коэффициенты A, B, C, D .

Так как нашей целью является переход к уравнению вида (0.2), положим $\tilde{B}=0$ и отсюда найдем значения для матрицы перехода.

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= t^2sA + (2tus+t^2v)B + (u^2s+2tuv)C + u^2vD = 0, \\ 0 &= s(t^2A + 2tuv + u^2C) + v(t^2B + 2tuC + u^2D). \end{aligned}$$

Получем, что $\tilde{B}=0$ при

$$\begin{aligned} s &= -k(t^2B + 2tuC + u^2D), \\ (1.4) \\ v &= +k(t^2A + 2tuv + u^2C), \end{aligned}$$

где t, u, k - любые действительные числа, а матрица перехода T зависит от параметров t и u .

Из всех подходящих для решения нашей задачи матриц T мы можем выбрать самые простые для того, чтобы конкретизировать этапы решения и уменьшить количество вычислений. Рассмотрим варианты при $k=1$:

$$[t, u] = [1, 0] \text{ или } [t, u] = [0, 1].$$

Тогда соответственно

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -D & C \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Для тильда-пространства получаем коэффициенты для $[t, u] = [1, 0]$:

$$\tilde{A} = A,$$

$$\tilde{B} = 0, \quad (1.6)$$

$$\tilde{C} = A(A - B^2),$$

$$\tilde{D} = A(2B^3 - 3ABC + A^2D).$$

Или для $[t, u] = [0, 1]$

$$\tilde{A} = D,$$

$$\tilde{B} = 0, \quad (1.7)$$

$$\tilde{C} = D(BD - C^2),$$

$$\tilde{D} = D(-D^2A - 3DBC - 2C^3).$$

Тогда в общем виде наше уравнение примет вид

$$\tilde{A}\tilde{x}^3 + 3\tilde{C}\tilde{x}\tilde{w}^2 + \tilde{D}\tilde{w}^3 = 0. \quad (1.8)$$

Второй ковариант

Чтобы классифицировать всевозможные случаи решения кубического многочлена, введем понятие Гессиана.

Гессиан функции $f(x, w)$ - это определитель матрицы вторых производных функции $f(x, w)$ по x и w

$$Hessian(f) = \det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xw} \\ f_{xw} & f_{ww} \end{bmatrix}.$$

Для функции (0.1) Гессиан будет выглядеть следующим образом:

$$Hessian(f) = \det \begin{bmatrix} 6Ax + 6Bw & 6Bx + 6Cw \\ 6Bx + 6Cw & 6Cx + 6Dw \end{bmatrix}.$$

В матричной форме Гессиан записывается в виде:

$$Hessian(f) = 18 \begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(AC - B^2) & AD - BC \\ AD - BC & 2(BD - C^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Введем следующие величины:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= AC - B^2, \\ \delta_2 &= AD - BC, \\ \delta_3 &= BD - C^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ называются коэффициентами Гессиана кубической функции $Hessian(f)$.

Введем обозначение для второй матрицы в выражении (2.1)

$$H = \begin{bmatrix} 2(AC - B^2) & AD - BC \\ AD - BC & 2(BD - C^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(H), \\ \Delta &= 4\delta_1\delta_3 - \delta_2^2 = -A^2D^2 + 6ABCD - 4AC^3 - 4B^3D + 3B^2C^2. \end{aligned}$$

Данные равенства Дж. Блинн получил в своей предыдущей работе [1] (Blinn, J.F., "Polynomial Discriminants Part 1, Matrix Magic")

Гессиан играет важную роль. Если совершить переход в другие координаты и посчитать Гессиан от функции в других координатах, то он будет связан с Гессианом оригинальной функции следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{\delta}_1 \\ \tilde{\delta}_2 \\ 2\tilde{\delta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & 2tu & u^2 \\ ts & tv + us & uv \\ s^2 & 2sv & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 \\ \delta_2 \\ 2\delta_3 \end{bmatrix}.$$

В ином виде:

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{\delta}_1 & \tilde{\delta}_2 \\ \tilde{\delta}_2 & 2\tilde{\delta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & s \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Инвариант

Инвариантом является определитель матрицы H

$$\Delta = \det(H) = 4\delta_1\delta_3 - \delta_2^2. \quad (2.3)$$

Причем он преобразуется следующим образом.

$$\tilde{\Delta} = (tv - su)^6 \Delta.$$

С помощью гессиана и определителя матрицы H опишем всевозможные случаи решения кубического уравнения:

Для любой функции, которая является степенью линейной функции, гессиан этой функции тождественно равен нулю, а следовательно $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Следовательно, гессиан функции $f(x, w)$ будет обнуляться в случае, когда $f(x) = (x - x_1)^3$, то есть, когда у нас действительный корень кратности 3.

Это верно для любых многочленов степени n . Например, Гессиан квадратичного уравнения - это дискриминант. Когда дискриминант равен нулю - мы имеем 2 действительных корня. Таким образом, каждому кубическому уравнению $f(x)$ соответствует свой квадратичный Гессиан $Hessian(f)$.

Отметим, что определитель H - это дискриминант кубического многочлена, но минус дискриминант квадратического Гессиана!

Отсюда прослеживается связь: если кубический многочлен имеет один действительный корень, то Гессиан имеет два действительных. Если кубический многочлен имеет 3 действительных корня, то Гессиан не имеет действительных корней. Это своего рода "эффект сохранения реальных корней". Если дискриминант равен нулю, то и Гессиан, и кубический многочлен имеют корень кратности 2, и они совпадают.

Таким образом все 4 случая в решении нашей задачи могут быть описаны следующей таблицей:

Тип уравнения	Алгебраическое условие	Корни многочлена	Корни Гессиана
3	$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$	Один корень кратности 3	$H = 0$
21	$\Delta = 0$	Корень кратности 2 и корень кратности 1	Корень кратности 2 (равный корню кратности 2 кубического многочлена)

111	$\Delta > 0$	Три действительных корня кратности 1	Один комплексно-сопряженный корень
1 $\bar{1}$	$\Delta < 0$	Один действительный и один комплексно-сопряженный корни	Два действительных корня

Третий ковариант

Из матричного уравнения (1.3) получим выражения для оставшихся коэффициентов:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= t^3 A + 3t^2 u B + 3t u^2 C + u^3 D, \\ \tilde{C} &= t s^2 A + (u s^2 + 2t s v) B + (2u s v + t v^2) C + u v^2 D, \\ \tilde{D} &= s^3 A + 3s^2 v B + 3s v^2 C + v^3 D.\end{aligned}$$

Теперь \tilde{A} представляет собой функцию от t и u . Подставляя уравнения (1.4) в выражения для \tilde{C} и \tilde{D} , получим многочлены пятой и шестой степени соответственно, множителем которых является многочлен \tilde{A} :

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t, u) &= f(t, u), \\ \tilde{C}(t, u) &= f(t, u) \cdot \frac{1}{2} H(t, u), \\ \tilde{D}(t, u) &= f(t, u) \cdot J(t, u).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Этот эффект отлично прослеживается для случаев

$$[t, u] = [1, 0] \text{ или } [0, 1].$$

В этих случаях \tilde{A} представляет собой не функцию, а константу. После сокращения всех коэффициентов на \tilde{A} окончательно получим для уравнений (1.6):

$$\begin{aligned}\bar{A} &= 1, \\ \bar{B} &= 0, \\ \bar{C} &= AC - B^2, \\ \bar{D} &= 2B^3 - 3ABC + A^2 D.\end{aligned}$$

Для уравнений (1.7):

$$\bar{A} = 1,$$

$$\overline{B}=0,$$

$$\overline{C}=BD-C^2,$$

$$\overline{D}=-D^2A-3DBC-2C^3.$$

Вернемся к общему случаю. После сокращения на $\tilde{A}(t,u)$ получаем

$$\overline{C}=(AC-B^2)t^2+(AD-BC)tu+(BD-C^2)u^2=\frac{1}{2}H(t,u).$$

Коэффициент \overline{D} теперь выражается через однородный кубический многочлен от (t,u) . Это значит, что \overline{D} может быть представлено как результат отображения некоего кубического многочлена в тильда-пространство, т.е.

$$\begin{aligned}\overline{D}(t,u) &= [t \ u] H \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = [t \ u] \begin{bmatrix} 2(AC-B^2) & AD-BC \\ AD-BC & 2(BD-C^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \\ &= A_{\overline{D}}t^3 + 3B_{\overline{D}}t^2u + 3C_{\overline{D}}tu^2 + D_{\overline{D}}u^3 = J(t,u),\end{aligned}$$

где

$$A_{\overline{D}} = +A^2D - 3ABC + 2B^3 = A_J,$$

$$B_{\overline{D}} = -2AC^2 + ABD + B^2C = B_J,$$

$$(3.2)$$

$$C_{\overline{D}} = +ACD + 2B^2D - BC^2 = C_J,$$

$$D_{\overline{D}} = -AD^2 + 3BCD - C^3 = D_J.$$

Данный многочлен $J(t,u)$ обозначим за третий ковариант.

Уравнение syzygy

Используя выражения для $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ из (2.2), получаем:

$$\overline{C} = \delta_1,$$

$$\overline{D} = -2B\delta_1 + A\delta_2.$$

Тогда наш полином примет вид:

$$\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x}\tilde{w}^2 + \overline{D}\tilde{w}^3 = 0.$$

Положив параметр $\tilde{w}=1$, получаем:

$$\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x} + \overline{D} = 0. \quad (4.1)$$

Ферро и Тарталья вывели следующее тождество, верное для любых значений p, q :

$$(p+q)^3 - 3pq(p+q) - (p^3+q^3) = 0. \quad (4.2)$$

Сравнивая данное тождество с нашим уравнением (4.1), получим, что

$$\begin{aligned} x &= p+q, \\ -3pq &= 3\bar{C}, \quad (4.3) \\ -(p^3+q^3) &= \bar{D}. \end{aligned}$$

Поэтому, если будут существовать p и q , удовлетворяющие соотношениям $(-pq) = \bar{C}$ и $(-p^3 - q^3) = \bar{D}$, тогда найдется $\tilde{x} = p+q$.

Выражая q из второго равенства системы (4.3) и подставляя во второе, получаем:

$$-p^3 - \left(-\frac{\bar{C}}{p}\right)^3 = \bar{D}.$$

Избавление от дробей, дает нам уравнение 6 степени:

$$p^6 + \bar{D}p^3 - \bar{C}^3 = 0.$$

Если рассматривать это как квадратный многочлен от p^3 , то для него возможно найти корни:

$$p^3 = \frac{-\bar{D} \pm \sqrt{\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3}}{2}.$$

Зная значения для p^3 , найдем q^3 из третьего равенства системы (4.3).

$$q^3 = -p^3 - \bar{D} = \frac{-\bar{D} \pm \sqrt{\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3}}{2}.$$

Другими словами, q^3 - это другой корень квадратного уравнения. На самом деле не имеет значения, что есть что, поскольку в конечном счете мы будем смотреть только на сумму и разность p и q , поэтому возьмем

$$p = \sqrt[3]{\frac{-\bar{D} + \sqrt{\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3}}{2}}, \quad (4.4)$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{-\bar{D} - \sqrt{\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3}}{2}}.$$

Обратим внимание на выражение под квадратным корнем в равенстве (4.4). Если рассматривать определитель Гессиана с $\bar{A}=1, \bar{B}=0$, то получим дискриминант:

$$\bar{\Delta} = -\bar{D}^2 - 4\bar{C}^3.$$

Рассмотрим переход гессиана из первоначального пространства с коэффициентами A, B, C, D в пространство с коэффициентами $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ для Гессиана.

Из уравнения (2.1):

$$H = \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix}, \Delta = \det(H),$$

и переход к другому базису соответственно

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & s \\ u & v \end{bmatrix},$$

где $\bar{\Delta} = \det(\bar{H}) = \det T \cdot \det(H) \cdot \det T = (\det T)^2 \Delta$.

Для случая $[tu] = [10]$ матрица $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}$.

Ее определитель соответственно $\det T = A$, а следовательно $\bar{\Delta} = A^2 \Delta$.

Получаем, что $\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3 = -A^2 \Delta$. (4.5)

Возвращаясь к тому, что коэффициенты трехчлена ищутся как функции от параметров x и w , получаем:

$$\bar{D}^2(x, w) + 4\bar{C}^3(x, w) = -A^2(x, w) \Delta.$$

Вспомним уравнения (3.2)

$$\tilde{A}(t, u) = f(t, u),$$

$$\tilde{C}(t, u) = f(t, u) \cdot \frac{1}{2} H(t, u),$$

$$\tilde{D}(t, u) = f(t, u) \cdot J(t, u).$$

Или

$$\tilde{A}(t, u) = A(t, u)$$

$$\tilde{C}(t, u) = \frac{1}{2} H(t, u),$$

$$\tilde{D}(t, u) = J(t, u).$$

Подставляя их, получаем окончательный вид уравнения:

$$J^2 + \frac{1}{2} H^3 = -\Delta f^2. (4.6)$$

Такого рода отношения называются уравнениями sygyzy.

Решение:

depressing

На данном этапе происходит переход в тильда-пространство, где $\tilde{B}=0$.
Общий вид такого преобразования - уравнение (1.1), т.е.

$$\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}.$$

Из всех возможных преобразований нас интересуют только те, что обнуляют коэффициент при второй степени. Для того, чтоб найти такие преобразования, из равенства (1.3) запишем выражение для \tilde{B} и приравняем к нулю. Получим, что $\tilde{B}=0$ при уравнениях (1.4):

$$s = -k(t^2 B + 2tuC + u^2 D),$$

$$v = +k(t^2 A + 2tuB + u^2 C),$$

где t, u, k - любые действительные числа, а матрица перехода T зависит от параметров t и u .

Для удобства будем рассматривать $k=1, [t, u] = [0, 1] \mid u[t, u] = [1, 0]$.

Для тильда-пространства получаем коэффициенты для $[t, u] = [1, 0]$ - уравнения (1.6):

$$\tilde{A} = A,$$

$$\tilde{B} = 0,$$

$$\tilde{C} = A(AC - B^2),$$

$$\tilde{D} = A(2B^3 - 3ABC + A^2 D).$$

Или для $[t, u] = [0, 1]$ - уравнения (1.7):

$$\tilde{A} = D,$$

$$\tilde{B} = 0,$$

$$\tilde{C} = D(BD - C^2),$$

$$\tilde{D} = D(-D^2 A - 3DBC - 2C^3).$$

Тогда в общем виде уравнение примет вид (1.8): $\tilde{A}\tilde{x}^3 + 3\tilde{C}\tilde{x}\tilde{w}^2 + \tilde{D}\tilde{w}^3 = 0$.

Сумма корней такого многочлена при $w=1$ равна нулю.

scaling

На данном этапе нужно перейти из тильда-пространства в пространство с коэффициентами $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$.

Для этого поделим коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ на \tilde{A} .

Таким образом получим для уравнений (1.6):

$$\bar{A}=1,$$

$$\bar{B}=0,$$

$$\bar{C}=AC-B^2,$$

$$\bar{D}=2B^3-3ABC+A^2D.$$

Для уравнений (1.7):

$$\bar{A}=1,$$

$$\bar{B}=0,$$

$$\bar{C}=BD-C^2,$$

$$\bar{D}=-D^2A-3DBC-2C^3.$$

Теперь уравнение принимает вид при $w=1$: $\tilde{x}^3 + 3\bar{C}\tilde{x} + \bar{D} = 0$.

Как можно заметить, после этапов depressing и scaling коэффициенты полинома принимают вид двух ковариантов кубического многочлена:

$$\bar{C} = \frac{1}{2}H, \bar{D} = J.$$

Подставляя \bar{C} и \bar{D} в уравнение syzygy, получаем: $\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3 = -\tilde{A}^2\Delta$.

solving

На данном этапе выясняется тип уравнения, который необходимо решить. Для этого производится сравнение $\bar{D} = -\bar{D}^2 - 4\bar{C}$ с нулем. После этого подставляем коэффициенты \bar{C} и \bar{D} в прямые выражения для корней. Эти выражения выводятся из вышеупомянутого тождества Ферро и Тарталья и преобразуются в соответствие с алгебраическими условиями для каждого типа. Выражения для \tilde{x}_i рассматриваются ниже для всех четырех случаев.

undepressing

На последнем этапе необходимо вернуться из тильда-пространства в исходное пространство заданного многочлена. Данному преобразованию соответствует соотношение (1.1).

Уравнение типа 1 $\bar{1}$

depressing

Перейдем в тильда-пространство с коэффициентом $\tilde{B}=0$. Чтобы преобразовать наш многочлен к виду (1.8), мы можем использовать следующую матрицу:

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты в новом пространстве будут следующими:

$$\tilde{A} = A,$$

$$\tilde{B} = 0,$$

$$\tilde{C} = A(A C - B^2),$$

$$\tilde{D} = A(2 B^3 - 3 A B C + A^2 D).$$

Scaling

Заметим, что каждый коэффициент сожержит в себе умножение на A. Мы работаем с многочленами, у которых $A \neq 0$, так как при $A=0$ получим многочлен второй степени, который будет иметь всего 2 корня. Решение будет аналогичным, просто будем работать уже с коэффициентами:

$$\bar{A} = 1,$$

$$\bar{B} = 0,$$

$$\bar{C} = A C - B^2 = \delta_1,$$

$$\bar{D} = 2 B^3 - 3 A B C + A^2 D = -2 B \delta_1 + A \delta_2.$$

Тогда наш многочлен примет вид: $\tilde{x}^3 + 3 \tilde{C} \tilde{x} + \tilde{D} - \tilde{w}^3 = 0$.

Положим $\tilde{w} = 1$, и получим простое кубическое уравнение: $\tilde{x}^3 + 3 \bar{C} \tilde{x} + \bar{D} = 0$ (5.1).

Solving

Рассмотрим тождество (4.2): $(p+q)^3 - 3 p q (p+q) - (p^3 + q^3) = 0$ Если сравнить это тождество с уравнением (5.1) для \tilde{x} , то можно провести аналогию, где

$$\begin{aligned}\bar{C} &= -pq, \\ \bar{D} &= -p^3 - q^3. \quad (5.2)\end{aligned}$$

Тогда нашим ответом будет: $\tilde{x} = p + q$.

Ниже приведены уравнения (4.4) - полученные выражения для p и q :

$$\begin{aligned}p &= \sqrt[3]{\frac{-\bar{D} + \sqrt{\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3}}{2}}, \\ q &= \sqrt[3]{\frac{-\bar{D} - \sqrt{\bar{D}^2 + 4\bar{C}^3}}{2}}.\end{aligned}$$

Теперь вспомним, что в пространстве комплексных чисел существует три кубических корня для каждого числа. Так для единицы тремя

кубическими корнями будут $1, \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Тогда кубы корней для p и q будут иметь вид:

$$\begin{aligned}p^3 &= (\omega p)^3 = (\omega^2 p)^3, \\ q^3 &= (\omega q)^3 = (\omega^2 q)^3.\end{aligned}$$

Тогда первое уравнение системы (11) можно переписать так:

$$\begin{aligned}-pq &= \bar{C}, \\ -(\omega p)(\omega^2 q) &= \bar{C}, \\ -(\omega^2 p)(\omega q) &= \bar{C}.\end{aligned}$$

Формулы для корней соответственно:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= p + q \\ \tilde{x}_2 &= \omega p + \omega^2 q \quad (5.3) \\ \tilde{x}_3 &= \omega^2 p + \omega q\end{aligned}$$

Подставляя вместо ω численное значение, легко убедиться, что сумма корней равна нулю.

Уравнение типа 21

Из таблицы 1 для кубических уравнений с действительным корнем кратности 2: $\Delta = 0$. Это значит, что p и q примут следующий вид:

$$p=q=\sqrt[3]{\frac{-\bar{D}}{2}}$$

Подставляя выражения выше в (5.3), получим выражения для корней:

$$\tilde{x}_1=2 p$$

$$\tilde{x}_2=-p$$

$$\tilde{x}_3=-p$$

Теперь вспомним уравнение syzygy. Для $\Delta=0$ оно записывается так:

$$\bar{D}^2=-4\bar{C}^3$$

Преобразуем выражение для p :

$$p=q=\sqrt[3]{\frac{-\bar{D}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{-\bar{D}^3}{2\bar{D}^2}}=\sqrt[3]{\frac{-\bar{D}^3}{-8\bar{C}^3}}=\frac{\bar{D}}{2\bar{C}}=\frac{-2B\delta_1+A\delta_2}{2\delta_1}$$

Таким образом, в данном случае мы можем найти решение задачи без вычисления кубического корня.

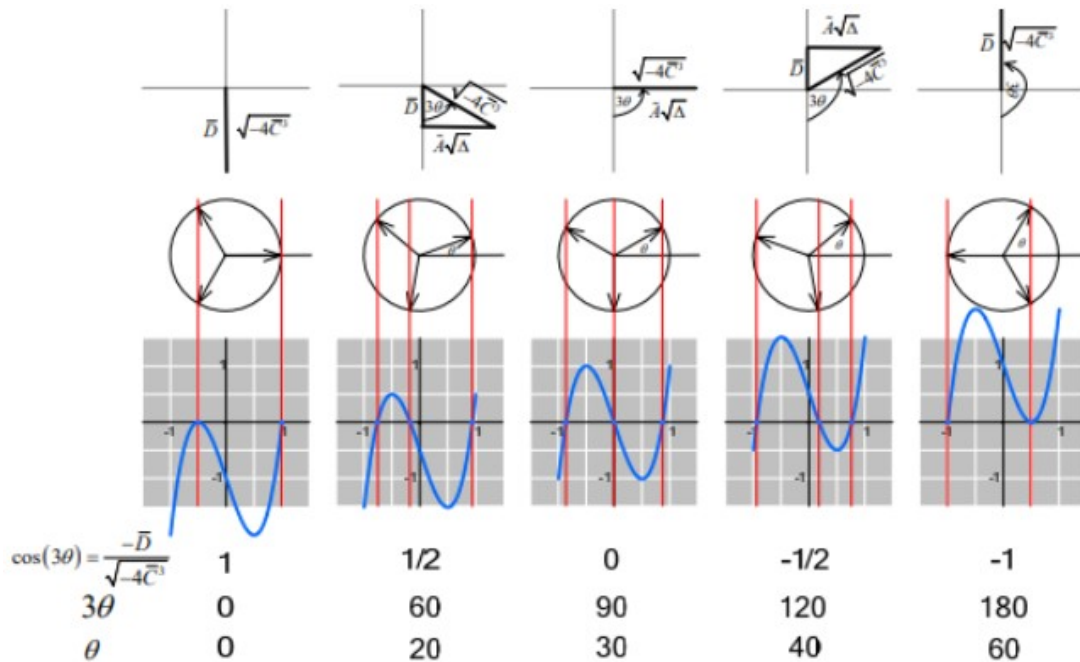
Уравнение типа 111

Из таблицы 1, для уравнений типа 111 $\Delta>0$.

Следует заметить, что первая производная простого кубического многочлена (5.1) примет вид:

$$3\tilde{x}^2+3\bar{C}=0.$$

Отсюда получаем, что локальные экстремумы будут в точках $\tilde{x}=\pm\sqrt{-\bar{C}}$.



Чтобы квадратный корень имел смысл, нужно убедиться в отрицательности \bar{C} при условии $\Delta > 0$. Она следует из уравнения *syzygy*:

$$4\bar{C}^3 = -\tilde{A}^2\Delta - \bar{D}^2.$$

Далее делается попытка тригонометрической замены. Мы хотим выявить взаимосвязь между \tilde{x} и $\cos \theta$ и провести аналогию между (5.1) и

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0 \quad (5.4)$$

Делая предположение, что в результате мы получим равенство $\tilde{x} = \cos \theta$, нам необходимо поместить все корни в интервал $(-1; 1)$.

Иными словами, нам необходимо сжать кривую по оси Ох, чтоб поместить корни трехчлена ближе к центру координат. Для этого выполним замену:

$$\tilde{x} = 2\sqrt{-\bar{C}}\tilde{\tilde{x}}.$$

Подставляя данное выражение в уравнение (5.1), получим:

$$(2\sqrt{-\bar{C}}\tilde{\tilde{x}})^3 + 3\bar{C}(2\sqrt{-\bar{C}}\tilde{\tilde{x}}) + \bar{D} = 0,$$

$$-8\bar{C}\sqrt{-\bar{C}}\tilde{\tilde{x}}^3 + 6\bar{C}\sqrt{-\bar{C}}\tilde{\tilde{x}} + \bar{D} = 0.$$

Делим все коэффициенты на $-2\bar{C}\sqrt{-\bar{C}}$:

$$4\tilde{\tilde{x}}^3 - 3\tilde{\tilde{x}} + \frac{\bar{D}}{-2\bar{C}\sqrt{-\bar{C}}} = 0.$$

Сравнив полученный результат с уравнением (5.4), можно сделать вывод о том, что $\tilde{x} = \cos \theta$ и $\cos 3\theta = \frac{\bar{D}}{-2\bar{C}\sqrt{-\bar{C}}}$.

Отсюда получаем выражение для первого корня:

$$\tilde{x}_1 = \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{\bar{D}}{-2\bar{C}\sqrt{-\bar{C}}} \right) \right).$$

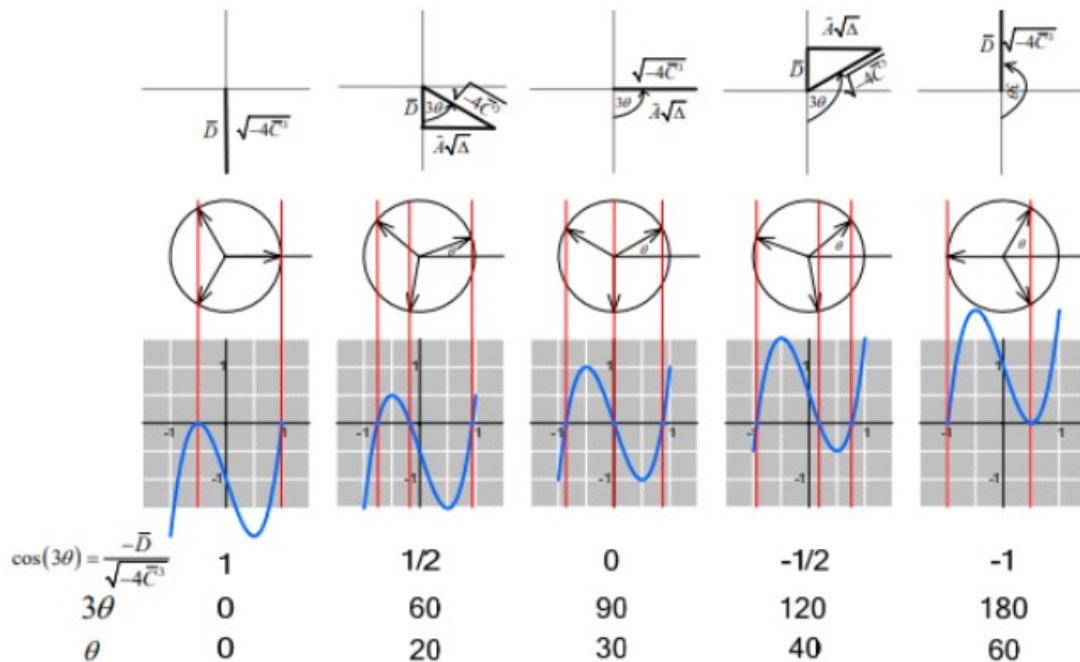
Теперь необходимо убедиться, что $\frac{\bar{D}}{-2\bar{C}\sqrt{-\bar{C}}}$ меньше единицы по модулю. Это также следует из уравнения *syzygy*:

$$-4\bar{C}^3 = \tilde{A}^2 \Delta + \bar{D}^2. \quad (4.5)$$

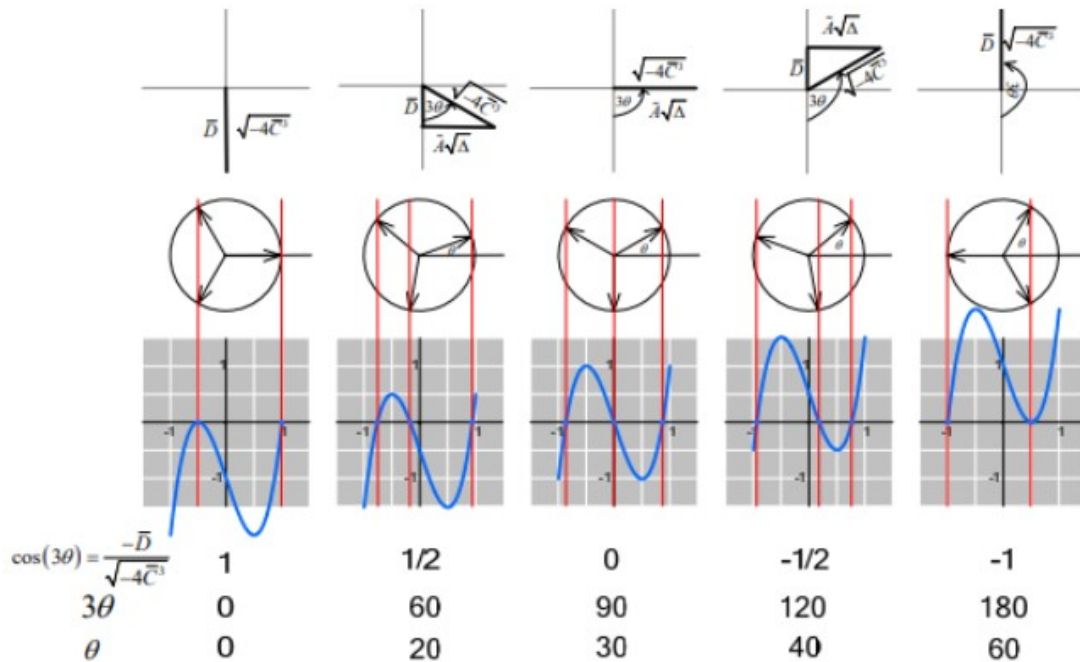
$$\bar{D}^2 < -4\bar{C}^3,$$

$$\frac{\bar{D}^2}{-4\bar{C}^3} = \left(\frac{\bar{D}}{\sqrt{-4\bar{C}^3}} \right)^2 < 1.$$

Равенство (4.5) можно рассматривать как запись теоремы Пифагора, тогда:



Для того, чтобы найти оставшиеся корни, Джеймс Блинн приводит иллюстрацию, на которой показывает все случаи расположения графика многочлена с тремя действительными различными корнями:



Когда θ пробегает от 0° до 60° , график пересекает ось Ox в трех точках. Каждому графику сопоставляется единичная окружность с тремя векторами из центра координат. Углы между векторами фиксированны и равны 120° . Сумма этих векторов обнуляется так же как и сумма корней кубического многочлена. Из графиков получаем выражения для корней:

$$\tilde{x}_1 = \cos \theta,$$

$$\tilde{x}_2 = \cos(\theta - 120^\circ),$$

$$\tilde{x}_3 = \cos(\theta + 120^\circ).$$

При подстановке этих выражений в уравнение (5.4) можно убедиться в их правильности. Формулы можно преобразовать с помощью формул для косинуса суммы и косинуса разности:

$$\tilde{x}_1 = \cos \theta,$$

$$\tilde{x}_2 = -\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta,$$

$$\tilde{x}_3 = -\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta.$$

Пользуясь тем, что сумма корней равна нулю, перепишем:

$$\tilde{x}_1 = \cos \theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = -\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2.$$

Вернемся к тильда-пространству:

$$\tilde{x}_1 = 2\sqrt{-\overline{C}} \cos \theta,$$

$$\tilde{x}_2 = 2\sqrt{-\overline{C}} \left(-\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right), \quad (5.5)$$

$$\tilde{x}_3 = 2\sqrt{-\overline{C}} (-\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2).$$

Уравнение типа 3

Для кубического полинома с корнем кратности 3 из таблицы 1: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$.

Это значит, что $\Delta = \overline{C} = \overline{D} = 0$.

Если подставить данные значения в уравнения (4.4) для корней, полученные из тождества Ферро и Тарталья, можно получить $p = q = 0$.

Тогда $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0$.

Если использовать тригонометрические формулы (5.5), то корни также обнулятся, так как $\overline{C} = 0$.

Тем не менее, после этапа *undepressing* нулевой корень встает на своё место в оригинальном пространстве.

Блок-схема

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи решения кубического многочлена. Составим блок-схему решения.

