Здесь будет рассказано о методе решения кубических уравнений.

Постановка задачи:

Рассмотрим многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами:

$$f(x) = Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = 0. \qquad (0)$$

Однако Джеймс Блинн в своих статьях рассматривает уравнение вида

$$f(x, w) = Ax^3 + 3Bx^2w + 3Cxw^2 + Dw^3 = 0, \qquad (0.1)$$

Это уравнение возникает в следствие необходимости работы с однородными многочленами, то есть многочленами, все одночлены которых имеют одинаковую сумму степеней. Они, в свою очередь, возникают в любой ситуации рендеринга с 3D - перспективой, что является предметом изучения Джеймса Блинна в смежных статьях. Переменную w Блинн использует для преобразований из мирового пространства в пространство экрана для рендеринга. Подробнее Джеймс Блинн рассказывает об этом в своей статье [6].

Можно заметить, что

$$f(x, 1) = Ax^3 + 3Bx^2 \cdot 1 + 3Cx \cdot 1^2 + D \cdot 1^3 = Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = f(x).$$

Первым шагом в решении будет этап depressing, то есть переход к новой системе координат, где B = 0. В этом методе переход к новой системе координат осуществляется с помощью матричного произведения. Параметр w вводится Блинном как вторая переменная в кубическом многочлене, достраивая его до однородного кубического с переменными $[x, w]$, чтобы совершить depressing путём перемножения матрицы коэффицентов уравнения $[A, B, C, D]$ на специальную матрицу размером $[4x4]$. Эта матрица $[4x4]$ получается из линейной комбинации элементов матрицы перехода $[2x2]$. Её мы определим далее, она нужна для перехода $[x, w]$ в новые координаты. Если не добавлять вторую переменную, то матрица перехода для depressing будет размером $[1x1]$. В таком случае, для этого шага возможна только нулевая марица. На этапе undepressing нашего решения, получится пара $[x, w]$, которая будет удовлетворять $f(x, w) = 0$. В силу однородности многочлена, можно разделить вектор $[x, w]$ на $|w|$, чтобы получить решение для $F(x, 1) = f(x)$.

Теперь необходимо перейти от общей задачи поиска корней многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ к задаче поиска корней многочлена $Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D$. Отсюда следует:

$$a = A,$$
$$b = 3B,$$
$$c = 3C,$$
$$d = D.$$

Поэтому для работы с коэффицинтами A, B, C и D, поделим коэффициенты начального кубического многочлена при второй и первой степени на 3.

Известно, что для многочлена третьей степени с вещественными корнями, заданного уравнением (0), существует 4 возможных случая:

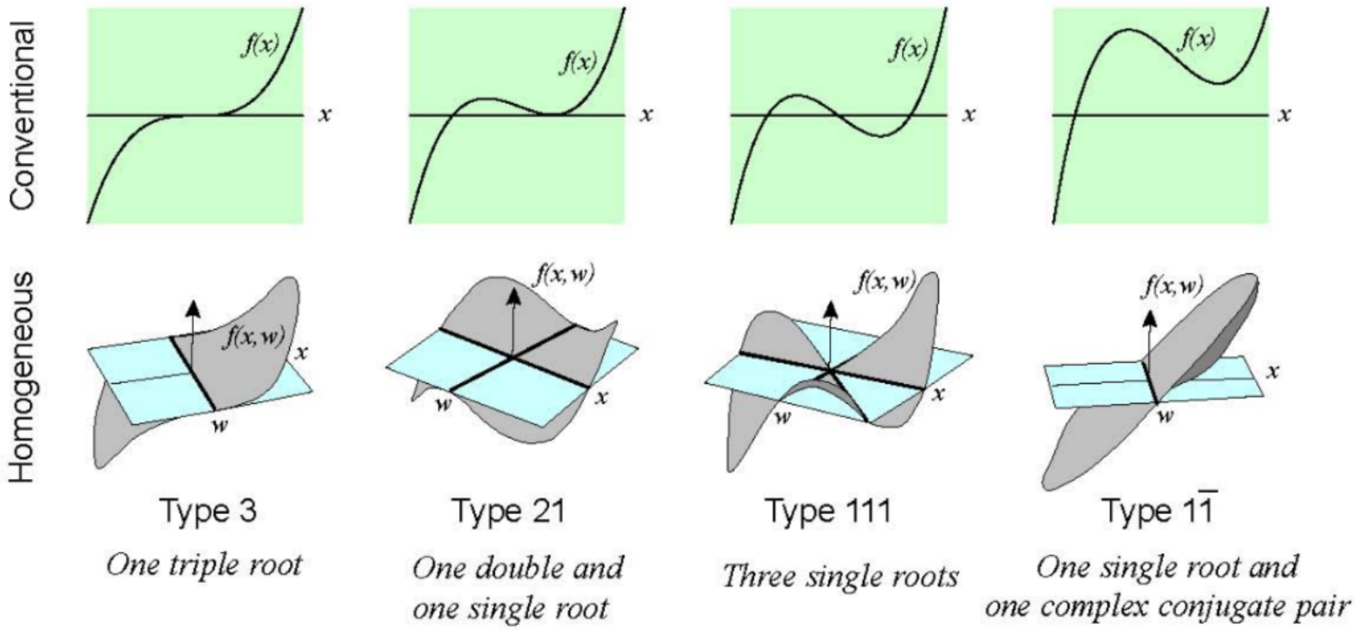
- "3" единственный действительный корень кратности 3:
$$f(x) = (x - x_1)^3.$$
- "21" один действительный корень кратности 2 и другой действительный корень кратности 1:
$$f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2).$$

- "111" три различных действительных корня:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

- "$1\overline{1}$" один действительный корень и один комплексно-сопряженный корень:

$$f(x) = (x - x_1)(x^2 + px + q) = (x - x_1)(x - (a + ib))(x - (a - ib)).$$



Этапы решения:

1. depressing
   - преобразование кубического многочлена с целью обнуления коэффициента B.
2. scaling
   - сокращения общего множителя во всех коэффициентах.
   - подстановка коэффициентов в уравнение syzygy.
3. solving
   - рассмотрение нескольких случаев значений коварианта и поиск корней.
4. undepressing
   - обратное преобразование.

Ковариантьы

Первый ковариант

В статье [2]. (Blinn, J.F., "Inferring Transforms") было описано следующее преобразование:

$$\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix} T, \qquad (1.1)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

Данное преобразование позволяет осуществить переход вектора $[x \quad w]$ из одного базиса в другой, при этом никак не меняя и не теряя корни уравнения или их кратность. То есть, любое кубическое уравнение, например, с тремя действительными корнями может быть преобразовано в другое кубическое уравнение с тремя действительными корнями.

Данное преобразование потребуется на этапе решения depressing, где нужно осуществить переход в базис, где коэффициент $\tilde{B} = 0$. Пространство с базисом, где $\tilde{B} = 0$ будем называть тильда-пространством.

К тому же, в статье [2] было доказано, что для любого вектора корней всегда существует матрица перехода T. А следовательно, мы всегда можем выполнить необходимое преобразование.

Полученные из уравнения (1.1) выражения для x и w через $\tilde{x}$ и $\tilde{w}$ подставим в (0.1) и получим матрицу перехода для вещественных коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{\mathrm{C}} \\ \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2u & 3tu^2 & u^3 \\ t^2s & 2tus + t^2v & u^2s + 2tuv & u^2v \\ ts^2 & us^2 + 2tsv & 2usv + tv^2 & uv^2 \\ s^3 & 3s^2v & 3sv^2 & v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \mathrm{C} \\ D \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Таким образом, получим вещественные коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$, выраженные через старые коэффициенты A, B, C, D:

$$\begin{gathered} \tilde{A} = At^3 + 3Bt^2u + 3Ctu^2 + Du^3, \\ \tilde{B} = At^2s + 2Btus + Bt^2v + Cu^2s + 2Ctuv + Du^2v, \\ \tilde{C} = Ats^2 + Bus^2 + 2Btsv + 2Cusv + Ctv^2 + Duv^2, \\ \tilde{D} = As^3 + 3Bs^2v + 3Csv^2 + Dv^3. \end{gathered}$$

Так как нашей целью является переход к уравнению с нулевым коэффициентом при одночлене второй степени, положим $\tilde{B} = 0$ и отсюда найдем значения для матрицы перехода.

$$\tilde{B} = t^2sA + (2tus + t^2v)B + (u^2s + 2tus)C + u^2vD =$$

$$= s(t^2A + 2tuB + u^2C) + v(t^2B + 2tuC + u^2D) = 0.$$

Получим, что $\tilde{B} = 0$ при

$$\begin{aligned} s &= -k(t^2B + 2tuC + u^2D), \\ v &= +k(t^2A + 2tuB + u^2C), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где t, u, k - любые действительные числа, а матрица перехода T зависит от параметров t и u.

Из всех подходящих для решения нашей задачи матриц T мы можем выбрать самые простые для того, чтобы конкретизировать этапы решения и уменьшить количество вычислений. Рассмотрим варианты при $k = 1$:

$$[t, u] = [1, 0] \quad \text{и} \quad [t, u] = [0, 1].$$

Тогда соответственно

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix} \text{или} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -D & C \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Для тильда-пространства получаем коэффициенты для $[t, u] = [1, 0]$:

$$\tilde{A} = A,$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{B} &= 0, \qquad (1.6)\\
\tilde{C} &= A(AC - B^2),\\
\tilde{D} &= A(2B^3 - 3ABC + A^2D).
\end{aligned}
$$

Или для $[t, u] = [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= D,\\
\tilde{B} &= 0, \qquad (1.7)\\
\tilde{C} &= D(BD - C^2),\\
\tilde{D} &= D(-D^2A - 3DBC - 2C^3).
\end{aligned}
$$

Тогда в общем виде наше уравнение примет вид

$$\tilde{A}\tilde{x}^3 + 3\tilde{C}\tilde{x}\tilde{w}^2 + \tilde{D}\tilde{w}^3 = 0. \qquad (1.8)$$

Второй ковариант

Чтобы классифицировать всевозможные случаи решения кубического многочлена, введем понятие Гессиана.

Гессиан функции $f(x, w)$ - это определитель матрицы вторых производных функции $f(x, w)$ по x и w

$$Hessian(f) = det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xw} \\ f_{xw} & f_{ww} \end{bmatrix}.$$

Для функции (0.1) Гессиан будет выглядеть следующим образом:

$$Hessian(f) = det \begin{bmatrix} 6Ax + 6Bw & 6Bx + 6Cw \\ 6Bx + 6Cw & 6Cx + 6Dw \end{bmatrix}.$$

В матричной форме Гессиан записывается в виде:

$$Hessian(f) = 18 \begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(AC - B^2) & AD - BC \\ AD - BC & 2(BD - C^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Введем следующие величины:

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= AC - B^2,\\
\delta_2 &= AD - BC, \qquad (2.2)\\
\delta_3 &= BD - C^2,
\end{aligned}
$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ называются коэффициентами Гессиана кубической функции $Hessian(f)$.

Введем обозначение для второй матрицы в выражении (2.1)

$$H = \begin{bmatrix} 2(AC - B^2) & AD - BC \\ AD - BC & 2(BD - C^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta = det(H),$$

$$\Delta = 4\delta_1\delta_3 - \delta_2^2 = -A^2D^2 + 6ABCD - 4AC^3 - 4B^3D + 3B^2C^2. \qquad (2.3)$$

Данные равенства Дж. Блинн получил в своей предыдущей работе [7].

Гессиан играет важную роль. Если совершить переход в другие координаты и посчитать Гессиан от функции в других координатах, то он будет связан с Гессианом оригинальной функции следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{\delta_1} \\ \tilde{\delta_2} \\ 2\tilde{\delta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & 2tu & u^2 \\ ts & tv+us & uv \\ s^2 & 2sv & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 \\ \delta_2 \\ 2\delta_3 \end{bmatrix}.$$

В ином виде:

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{\delta_1} & \tilde{\delta_2} \\ \tilde{\delta_2} & 2\tilde{\delta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & s \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Ковариантом является определитель матрицы H

$$\Delta = det(H) = 4\delta_1\delta_3 - \delta_2^2. \qquad (2.4)$$

Причем он преобразуется следующим образом.

$$\tilde{\Delta} = (tv - su)^2\Delta.$$

В данной формуле коэффициент $(tv - su)^2 = det^2(T)$ есть степень модуля преобразования, задаваемого матрицей T.

С помощью гессиана и определителя матрицы H опишем всевозможные случаи решения кубического уравнения:

Для любой функции, которая является степенью линейной функции, гессиан этой функции тожественно равен нулю, а следовательно $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Следовательно, гессиан функции $f(x, w)$ будет обнуляться в случае, когда $f(x) = (x - x_1)^3$, то есть, когда у нас действительный корень кратности 3.

Это верно для любых многочленов степени n. Например, Гессиан квадратичного уравнения - это дискриминант. Когда дискриминант равен нулю - мы имеем 2 действительных корня. Таким образом, каждому кубическому уравнению $f(x)$ соответствует свой квадратичный Гессиан $Hessian(f)$.

Дискримимнант

Вспомним, что дискриминант кубического многочлена $\xi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ записывается так:

$$Discriminant(\xi(x)) = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

$$= 27(6a\frac{b}{3}\frac{c}{3}d - 4(a(\frac{c}{3})^3 + (\frac{b}{3})^3d) + 3(\frac{b}{3})^2(\frac{c}{3})^2 - a^2d^2).$$

И обладает следующими свойствами:

- При $Discriminant > 0$ кубический многочлен имеет три различных вещественных корня.
- При $Discriminant = 0$ он имеет кратный корень (либо один корень кратности 2 и один корень кратности 1, и тот, и другой вещественные; либо один-единственный вещественный корень кратности 3).
- При $Discriminant < 0$ кубический многочлен имеет один вещественный корень и два комплексных корня (являющихся комплексно-сопряжёнными).

Для нашего уравнения (0), дискриминант будет выгладеть следующим образом:

$$Discriminant(f(x)) = 27(6ABCD - 4(AC^3 + B^3D) + 3B^2C^2 - A^2D^2).$$

Внимательнее посмотрим на определитель матрицы H. Заметим, что из уравнения (2.3) $Discriminant(f(x)) = 27\Delta.$

Отметим, что определитель H имеет тот же знак, что и дискриминант кубического многочлена, но противоположный знак для дискриминант квадратического Гессиана!

Отсюда:

- Если кубический многочлен имеет один действительный корень, то Гессиан имеет два действительных.
- Если кубический многочлен имеет 3 действительных корня, то Гессиан не имеет действительных корней. Это своего рода "эффект сохранения реальных корней".
- Если дискриминант равен нулю, то и Гессиан, и кубический многочлен имеют корень кратности 2, и они совпадают.

Таким образом все 4 случая в решении нашей задачи могут быть описаны следующей таблицей:

Тип уравнения	**Алгебраическое условие**	**Корни многочлена**	**Корни Гессиана**
3	$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$	Один корень кратности 3	$H = 0$
21	$\Delta = 0$	Корень кратности 2 и корень кратности 1	Корень кратности 2 (равный корню кратности 2 кубического многочлена)
111	$\Delta > 0$	Три действительных корня кратности 1	Один комплексно-сопряженный корень
$1\overline{1}$	$\Delta < 0$	Один действительный и один комплексно-сопряженный корни	Два действительных корня

Таблица 1.

Третий ковариант

Из матричного уравнения (1.3) получим выражения для оставшихся коэффициентов:

$$\tilde{A} = t^3A + 3t^2uB + 3tu^2C + u^3D,$$

$$\tilde{C} = ts^2A + (us^2 + 2tsv)B + (2usv + tv^2)C + uv^2D,$$

$$\tilde{D} = s^3A + 3s^2vB + 3sv^2C + v^3D.$$

Теперь $\tilde{A}$ представляет собой функцию от t и u. Подставляя уравнения (1.4) в выражения для $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$, получим многочлены пятой и шестой степени соответственно, множителем которых является многочлен $\tilde{A}$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t,u) &= f(t,u), \\ \tilde{C}(t,u) &= f(t,u) \cdot \frac{1}{2}H(t,u), \qquad (3.1) \\ \tilde{D}(t,u) &= f(t,u) \cdot J(t,u). \end{aligned}$$

Этот эффект отлично прослеживается для случаев

$$[t,u] = [1,0] \quad \text{и} \quad [t,u] = [0,1].$$

В этих случаях $\tilde{A}$ представляет собой не функцию, а константу. После сокращения всех коэффициентов на $\tilde{A}$ окончательно получим для уравнений (1.6):

$$\begin{aligned} \overline{A} &= 1, \\ \overline{B} &= 0, \\ \overline{C} &= AC - B^2, \\ \overline{D} &= 2B^3 - 3ABC + A^2 D. \end{aligned}$$

Для уравнений (1.7):

$$\begin{aligned} \overline{A} &= 1, \\ \overline{B} &= 0, \\ \overline{C} &= BD - C^2, \\ \overline{D} &= -D^2 A - 3DBC - 2C^3. \end{aligned}$$

Вернемся к общему случаю. После сокращения на $\tilde{A}(t, u)$ получаем

$$\overline{C} = (AC - B^2)t^2 + (AD - BC)tu + (BD - C^2)u^2 = \frac{1}{2} H(t, u).$$

Коэффициент $\overline{D}$ теперь выражается через однородный кубический многочлен от (t, u). Это значит, что $\overline{D}$ может быть представлено как результат отображения некоего кубического многочлена в тильда-пространство, т.е.

$$\overline{D}(t, u) = \begin{bmatrix} t & u \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(AC - B^2) & AD - BC \\ AD - BC & 2(BD - C^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} =$$

$$= A_{\overline{D}} t^3 + 3B_{\overline{D}} t^2 u + 3C_{\overline{D}} tu^2 + D_{\overline{D}} u^3 = J(t, u),$$

где

$$\begin{aligned} A_{\overline{D}} &= +A^2 D - 3ABC + 2B^3 = A_J, \\ B_{\overline{D}} &= -2AC^2 + ABD + B^2 C = B_J, \\ C_{\overline{D}} &= +ACD + 2B^2 D - BC^2 = C_J, \\ D_{\overline{D}} &= -AD^2 + 3BCD - C^3 = D_J. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Данный многочлен $J(t, u)$ обозначим за третий ковариант.

Уравнение syzygy

Используя выражения для $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ из (2.2), получаем:

$$\overline{C} = \delta_1,$$

$$\overline{D} = -2B\delta_1 + A\delta_2.$$

Тогда наш полином примет вид:

$$\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x}\tilde{w}^2 + \overline{D}\tilde{w}^3 = 0.$$

Положив параметр $\tilde{w} = 1$, получаем:

$$\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x} + \overline{D} = 0. \qquad (4.1)$$

Ферро и Тарталья вывели следующее тождество, верное для любых значений p, q:

$$(p+q)^3 - 3pq(p+q) - (p^3+q^3) = 0. \qquad (4.2)$$

Сравнивая данное тождество с нашим уравнением (4.1), получим, что

$$x = p + q,$$

$$-3pq = 3\overline{C}, \qquad (4.3)$$

$$-(p^3+q^3) = \overline{D}.$$

Поэтому, если будут существовать p и q, удовлетворяющие соотношениям $(-pq) = \overline{C}$ и $(-p^3 - q^3) = \overline{D}$, тогда найдется $\tilde{x} = p + q$.

Выражая q из второго равенства системы (4.3) и подставляя во второе, получаем:

$$-p^3 - (-\frac{\overline{C}}{p})^3 = D.$$

Избавление от дробей, дает нам уравнение 6 степени:

$$p^6 + \overline{D}p^3 - \overline{C}^3 = 0.$$

Если рассматривать это как квадратный многочлен от p^2, то для него возможно найти корни:

$$p^3 = \frac{-\overline{D} \pm \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}.$$

Зная значения для p^3, найдем q^3 из третьего равенства системы (4.3).

$$q^3 = -p^3 - \overline{D} = \frac{-\overline{D} \pm \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}.$$

Другими словами, q^3- это другой корень квадратного уравнения. На самом деле не имеет значения, что есть что, поскольку в конечном счете мы будем смотреть только на сумму и разность p и q, поэтому возьмем

$$p = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D} + \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}},$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D} - \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}}. \qquad (4.4)$$

Обратим внимание на выражение под квадратным корнем в равенстве (4.4). Если рассматривать определитель Гессиана с $\overline{A} = 1, \overline{B} = 0$, то получим дискриминант:

$$\overline{\Delta} = -\overline{D}^2 - 4\overline{C}^3.$$

Рассмотрим переход гессиана из первоначального пространства с коэффициентами A, B, C, D в пространство с коэффициентами $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ для Гессиана.

Из уравнения (2.1):

$$H = \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta = det(H),$$

и переход к другому базису соответственно

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & s \\ u & v \end{bmatrix},$$

где $\overline{\Delta} = det(\overline{H}) = detT \cdot det(H) \cdot detT = (detT)^2\Delta.$

Для случая $[t \quad u] = [1 \quad 0]$ матрица $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}.$

Ее определитель соответственно $detT = A$, а следовательно $\overline{\Delta} = A^2\Delta$.

Получаем, что $\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3 = -A^2\Delta. \qquad (4.5)$

Возвращаясь к тому, что коэффициенты трехчлена ищутся как функции от параметров x и w, получаем:

$$\overline{D}^2(x, w) + 4\overline{C}^3(x, w) = -A^2(x, w)\Delta.$$

Вспомним уравнения (3.2)

$$\tilde{A}(t, u) = f(t, u),$$

$$\tilde{C}(t, u) = f(t, u) \cdot \frac{1}{2}H(t, u),$$

$$\tilde{D}(t, u) = f(t, u) \cdot J(t, u).$$

Или

$$\tilde{A}(t, u) = A(t, u)$$

$$\overline{C}(t, u) = \frac{1}{2}H(t, u),$$

$$\overline{D}(t, u) = J(t, u).$$

Подставляя их, получаем окончательный вид уравнения:

$$J^2 + \frac{1}{2}H^3 = -\Delta f^2. \qquad (4.6)$$

Такого рода отношения называются уравнениями sygyzy.

Решение:

depressing

На данном этапе происходит переход в тильда-пространство, где $\tilde{B} = 0$. Общий вид такого преобразования - уравнение (1.1), т.е.

$$\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}.$$

Из всех возможных преобразований нас интересуют только те, что обнуляют коэффициент при второй степени. Для того, чтоб найти такие преобразования, из равенства (1.3) запишем выражение для $\tilde{B}$ и приравняем к нулю. Получим, что $\tilde{B} = 0$ при уравнениях (1.4):

$$s = -k(t^2B + 2tuC + u^2D),$$
$$v = +k(t^2A + 2tuB + u^2C),$$

где t, u, k - любые действительные числа, а матрица перехода T зависит от параметров t и u.

Для удобства будем рассматривать $k = 1, \quad [t, u] = [0, 1] \quad \text{и} \quad [t, u] = [1, 0]$.

Для тильда-пространства получаем коэффициенты для $[t, u] = [1, 0]$ - уравнения (1.6):

$$\tilde{A} = A,$$
$$\tilde{B} = 0,$$
$$\tilde{C} = A(AC - B^2),$$
$$\tilde{D} = A(2B^3 - 3ABC + A^2D).$$

Или для $[t, u] = [0, 1]$ - уравнения (1.7):

$$\tilde{A} = D,$$
$$\tilde{B} = 0,$$
$$\tilde{C} = D(BD - C^2),$$
$$\tilde{D} = D(-D^2A - 3DBC - 2C^3).$$

Тогда в общем виде уравнение примет вид (1.8): $\tilde{A}\tilde{x}^3 + 3\tilde{C}\tilde{x}\tilde{w}^2 + \tilde{D}\tilde{w}^3 = 0$.

Сумма корней такого многочлена при $w = 1$ равна нулю.

scaling

На данном этапе нужно перейти из тильда-пространства в пространство с коэффициентами $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$.

Для этого поделим коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ на $\tilde{A}$.

Таким образом получим для уравнений (1.6):

$$\overline{A} = 1,$$
$$\overline{B} = 0,$$
$$\overline{C} = AC - B^2,$$
$$\overline{D} = 2B^3 - 3ABC + A^2D.$$

Для уравнений (1.7):

$$\overline{A} = 1,$$
$$\overline{B} = 0,$$
$$\overline{C} = BD - C^2,$$
$$\overline{D} = -D^2A - 3DBC - 2C^3.$$

Теперь уравнение принимает вид при $w = 1$: $\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x} + \overline{D} = 0$.

Как можно заметить, после этапов depressing и scaling коэффициенты полинома принимают вид двух ковариантов кубического многочлена: $\overline{C} = \frac{1}{2}H$, $\overline{D} = J$.

Подставляя $\overline{C}$ и $\overline{D}$ в уравнение syzygy, получаем: $\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3 = -\tilde{A}^2\Delta$.

solving

На данном этапе выясняется тип уравнения, который необходимо решить. Для этого производится сравнение $\overline{\Delta} = -\overline{D}^2 - 4\overline{C}$ с нулем. После этого подставляем коэффициенты $\overline{C}$ и $\overline{D}$ в прямые выражения для корней. Эти выражения выводятся из вышеупомянутого тождества Ферро и Тарталья и преобразуются в соответствии с алгебраическими условиями для каждого типа. Выражения для $\tilde{x}_i$ рассматриваются ниже для всех четырех случаев.

undepressing

На последнем этапе необходимо вернуться из тильда-пространства в исходное пространство заданного многочлена. Данному преобразованию соответствует соотношение (1.1).

Уравнение типа $1\overline{1}$

depressing

Перейдем в тильда-пространство с коэффициентом $\tilde{B} = 0$. Чтобы преобразовать наш многочлен к виду (1.8), мы можем использовать следующую матрицу:

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты в новом пространстве будут следующими:

$$\tilde{A} = A,$$

$$\tilde{B} = 0,$$

$$\tilde{C} = A(AC - B^2),$$

$$\tilde{D} = A(2B^3 - 3ABC + A^2D).$$

Scaling

Заметим, что каждый коэффициент содержит в себе умножение на A. Мы работаем с многочленами, у которых $\mathrm{A} \neq 0$, так как при A=0 получим многочлен второй степени, который будет иметь всего 2 корня. Решение будет аналогичным, просто будем работать уже с коэффициентами:

$$\overline{A} = 1,$$

$$\overline{B} = 0,$$

$$\overline{C} = AC - B^2 = \delta_1,$$

$$\overline{D} = 2B^3 - 3ABC + A^2 D = -2B\delta_1 + A\delta_2.$$

Тогда наш многочлен примет вид: $\tilde{x}^3 + 3C - \tilde{x}\tilde{w}^2 + D - \tilde{w}^3 = 0$.

Положим $\tilde{w} = 1$, и получим простое кубическое уравнение: $\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x} + \overline{D} = 0 \quad (5.1)$.

Solving

Рассмотрим тождество (4.2): $(p+q)^3 - 3pq(p+q) - (p^3 + q^3) = 0$ Если сравнить это тождество с уравнением (5.1) для $\tilde{x}$, то можно провести аналогию, где

$$\begin{aligned} \overline{C} &= -pq, \\ \overline{D} &= -p^3 - q^3. \end{aligned} \qquad (5.2)$$

Тогда нашим ответом будет: $\tilde{x} = p + q$.

Ниже приведены уравнения (4.4) - полученные выражения для p и q:

$$p = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D} + \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}},$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D} - \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}}.$$

Теперь вспомним, что в пространстве комплексных чисел существует три кубических корня для каждого числа. Так для единицы тремя кубическими корнями будут $1, \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Тогда кубы корней для p и q будут иметь вид:

$$\begin{aligned} p^3 &= (\omega p)^3 = (\omega^2 p)^3, \\ q^3 &= (\omega q)^3 = (\omega^2 q)^3. \end{aligned}$$

Тогда первое уравнение системы (11) можно переписать так:

$$\begin{aligned} -pq &= \overline{C}, \\ -(\omega p)(\omega^2 q) &= \overline{C}, \\ -(\omega^2 p)(\omega q) &= \overline{C}. \end{aligned}$$

Формулы для корней соответственно:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= p + q \\ \tilde{x}_2 &= \omega p + \omega^2 q \\ \tilde{x}_3 &= \omega^2 p + \omega q \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Подставляя вместо ω численное значение, легко убедиться, что сумма корней равна нулю.

Уравнение типа 21

Из таблицы 1 для кубических уравнений с действительным корнем кратности 2: $\Delta = 0$. Это значит, что p и q примут следующий вид:

$$p = q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}}{2}}$$

Подставляя выражения выше в (5.3), получим выражения для корней:

$$\tilde{x}_1 = 2p$$

$$\tilde{x}_2 = -p$$
$$\tilde{x}_3 = -p$$

Теперь вспомним уравнение syzygy. Для $\Delta = 0$ оно записывается так:

$$\overline{D}^2 = -4\overline{C}^3$$

Преобразуем выражение для p:

$$p = q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}^3}{2\overline{D}^2}} = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}^3}{-8\overline{C}^3}} = \frac{\overline{D}}{2\overline{C}} = \frac{-2B\delta_1 + A\delta_2}{2\delta_1}$$

Таким образом, в данном случае мы можем найти решение задачи без вычисления кубического корня.

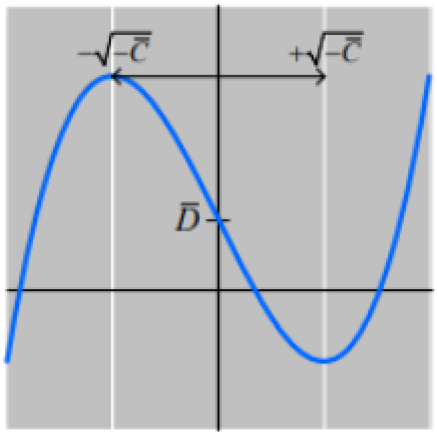
Уравнение типа 111

Из таблицы 1, для уравнений типа 111 $\Delta > 0$.

Следует заметить, что первая производная простого кубического многочлена (5.1) примет вид:

$$3\tilde{x}^2 + 3\overline{C} = 0.$$

Отсюда получаем, что локальные экстремумы будут в точках $\tilde{x} = \pm\sqrt{-\overline{C}}$.



Чтобы квадратный корень имел смысл, нужно убедиться в отрицательности $\overline{C}$ при условии $\Delta > 0$. Она следует из уравнения syzygy:

$$4\overline{C}^3 = -\tilde{A}^2\Delta - \overline{D}^2.$$

Далее делается попытка тригонометрической замены. Мы хотим выявить взаимосвязь между $\tilde{x}$ и $cos\theta$ и провести аналогию между (5.1) и

$$4cos^3\theta - 3cos\theta - cos3\theta = 0 \qquad (5.4)$$

Делая предположение, что в результате мы получим равенство $\tilde{x} = cos\theta$, нам необходимо поместить все корни в интервал $(-1; 1)$.

Иными словами, нам необходимо сжать кривую по оси Ox, чтоб поместить корни трехчлена ближе к центру координат. Для этого выполним замену:

$$\tilde{x} = 2\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}}.$$

Подставляя данное выражение в уравнение (5.1), получим:

$$(2\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}})^3 + 3\overline{C}(2\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}}) + \overline{D} = 0,$$
$$-8\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}}^3 + 6\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}} + \overline{D} = 0.$$

Делим все коэффициенты на $-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}$:

$$4\tilde{\tilde{x}}^3 - 3\tilde{\tilde{x}} + \frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}} = 0.$$

Сравнив полученный результат с уравнением (5.4), можно сделать вывод о том, что $\tilde{\tilde{x}} = cos\theta$ и $cos3\theta = \frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}$.

Отсюда получаем выражение для первого корня:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos(\frac{1}{3}cos^{-1}(\frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}})).$$

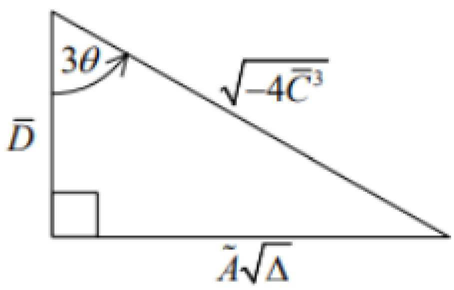
Теперь необходимо убедиться, что $\frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}$ меньше единицы по модулю. Это также следует из уравнения syzygy:

$$-4\overline{C}^3 = \tilde{A}^2\Delta + \overline{D}^2. \qquad (4.5)$$

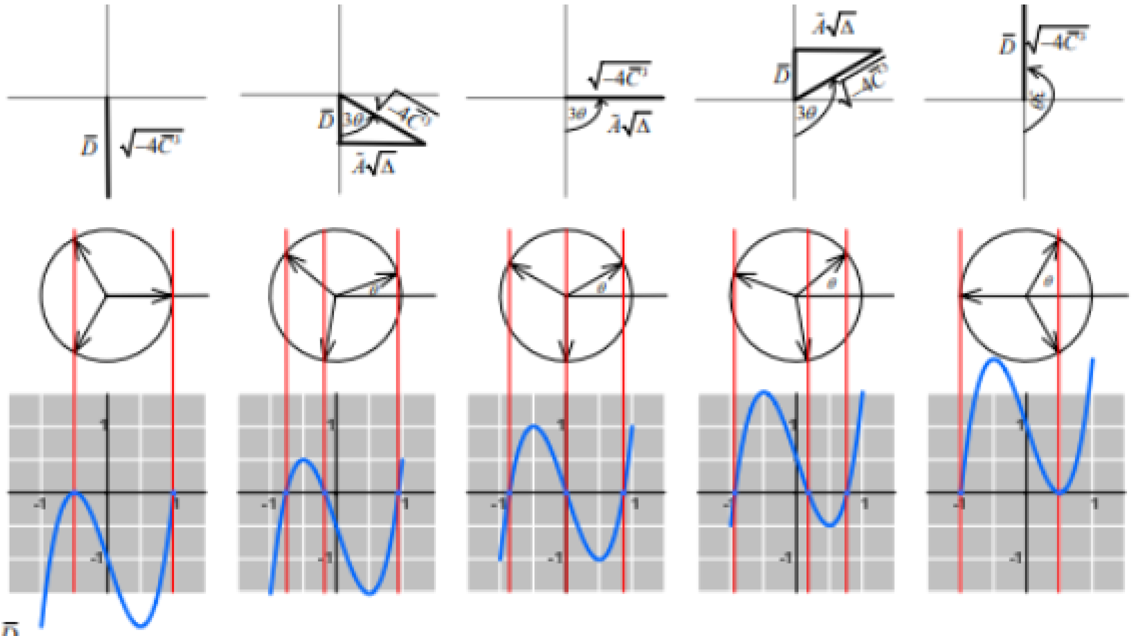
$$\overline{D}^2 < -4\overline{C}^3,$$

$$\frac{\overline{D}^2}{-4\overline{C}^3} = (\frac{\overline{D}}{\sqrt{-4\overline{C}^3}})^2 < 1.$$

Равенство (4.5) можно рассматривать как запись теоремы Пифагора, тогда:



Для того, чтобы найти оставшиеся корни, Джеймс Блинн приводит иллюстрацию, на которой показывает все случаи расположения графика многочлена с тремя действительными различными корнями:



$\cos(3\theta)=\frac{-\bar{D}}{\sqrt{-4\bar{C}^3}}$	1	1/2	0	-1/2	-1
3θ	0	60	90	120	180
θ	0	20	30	40	60

Когда θ пробегает от 0° до 60°, график пересекает ось Ox в трех точках. Каждому графику сопоставляется единичная окружность с тремя векторами из центра координат. Углы между векторами фиксированы и равны 120°. Сумма этих векторов обнуляется так же как и сумма корней кубического многочлена. Из графиков получаем выражения для корней:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = cos(\theta - 120°),$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = cos(\theta + 120°).$$

При подстановке этих выражений в уравнение (5.4) можно убедиться в их правильности. Формулы можно преобразовать с помощью формул для косинуса суммы и косинуса разности:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{2}cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = -\frac{1}{2}cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta.$$

Пользуясь тем, что сумма корней равна нулю, перепишем:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{2}cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = -\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2.$$

Вернемся к тильда-пространству:

$$\tilde{x}_1 = 2\sqrt{-\overline{C}}cos\theta,$$

$$\tilde{x}_2 = 2\sqrt{-\overline{C}}(-\frac{1}{2}cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta), \quad (5.5)$$

$$\tilde{x}_3 = 2\sqrt{-\overline{C}}(-\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2).$$

Уравнение типа 3

Для кубического полинома с корнем кратности 3 из таблицы 1: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$.

Это значит, что $\Delta = \overline{C} = \overline{D} = 0$.

Если подставить данные значения в уравнения (4.4) для корней, полученные из тождества Ферро и Тарталья, можно получить $p = q = 0$.

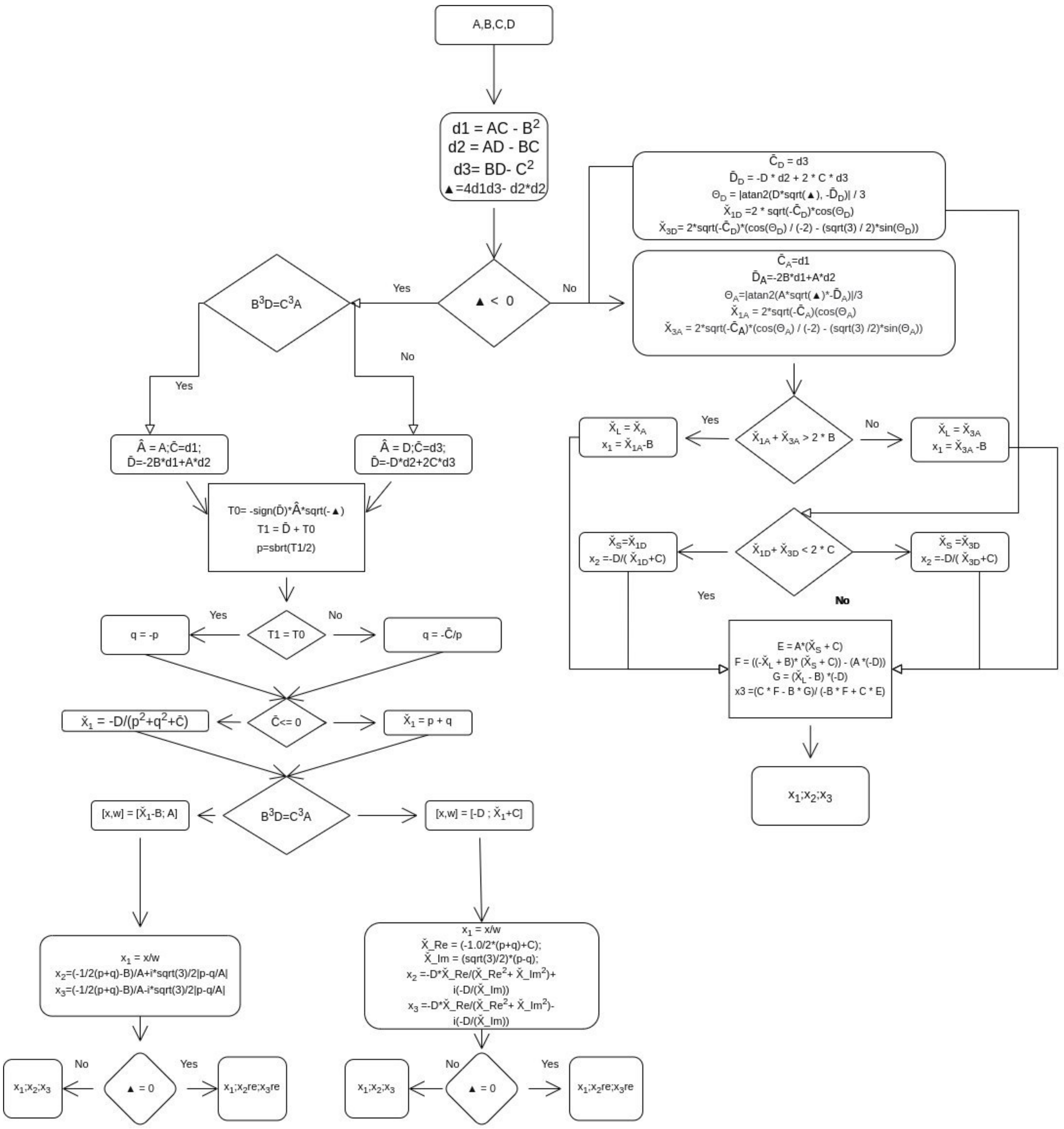
Тогда $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0$.

Если использовать тригонометрические формулы (5.5), то корни также обнулятся, так как $\overline{C} = 0$.

Тем не менее, после этапа undepressing нулевой корень встает на своё место в оригинальном пространстве.

Блок-схема

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи решения кубического многочлена. Составим блок-схему решения.



Список литературы:

[1] Blinn, J. F., “How to Solve a Cubic Equation, Part 1 – The Shape of the Discriminant”, IEEE CG&A, 2006. - pages 84 – 93.

[2] Blinn, J. F., “How to Solve a Cubic Equation, Part 2 – The $1\bar{1}$ Case”, IEEE CG&A, 2006. - pages 90 – 100.

[3] Blinn, J. F., “How to Solve a Cubic Equation, Part 3 – General Depression and a New Covariant”, IEEE CG&A, 2006. - pages 92 – 102.

[4] Blinn, J. F., “How to Solve a Cubic Equation Part 4 – The 111 Case”, IEEE CG&A, 2007. - pages ??.

[5] Blinn, J. F., “How to Solve a Cubic Equation Part 5 – Back to Numerics”, IEEE CG&A, 2007. - pages 78 – 89.

[6] Blinn, J. F., “Real-Time GPU Rendering of Piecewise Algebraic Surfaces”: J. F. Blinn, C. Loop, 2019. - 7 pages.

[7] Blinn, J. F., “Polynomial Discriminants Part 1, Matrix Magic”, 2003. - page 262.