Здесь будет рассказано о методе решения кубических уравнений.

Оригинальные статьи:

- How to Solve a Cubic Equation Part 1 – The Shape of the Discriminant
- How to Solve a Cubic Equation Part 2 – The $1\overline{1}$ Case
- How to solve a Cubic Equation Part 3 – General Depression and a New Covariant
- How to Solve a Cubic Equation Part 4 – The 111 Case
- How to Solve a Cubic Equation Part 5 – Back to Numerics

Авторство: James F. Blinn

Microsoft Research

blinn@microsoft.com

Originally published in

IEEE Computer Graphics and Applications

Постановка задачи:

Имеем многочлен

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \qquad (0)$$

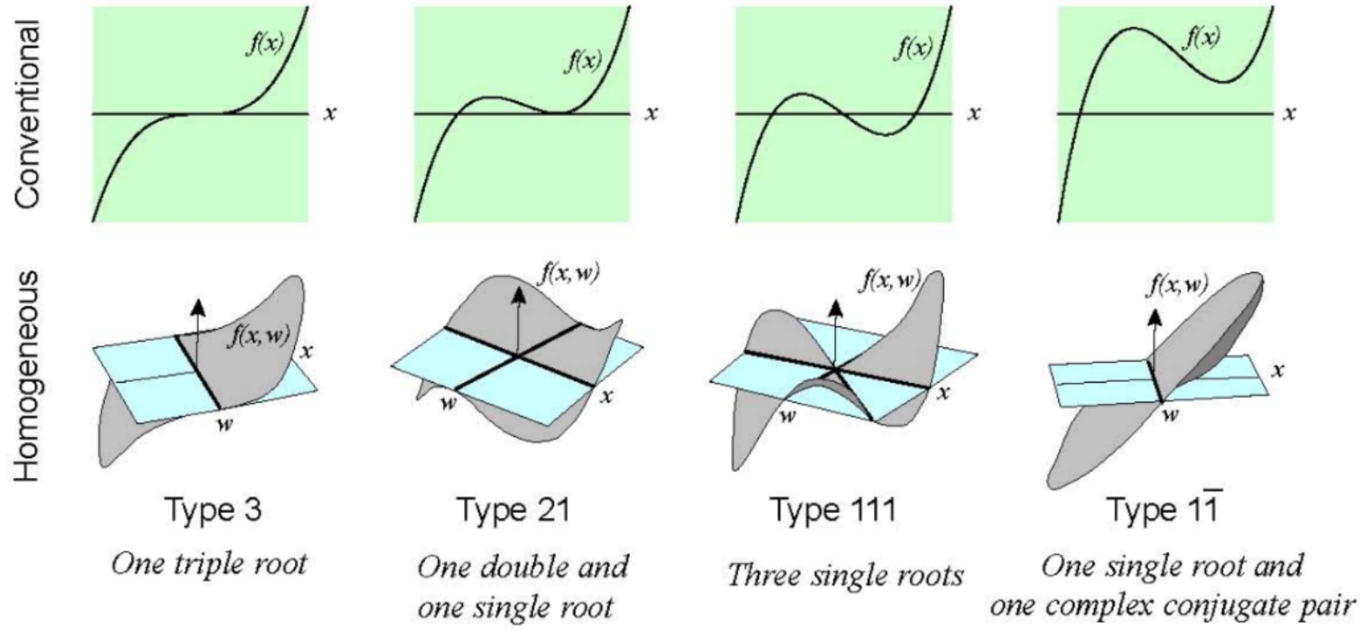
Однако Джеймс Блинн в своих статьях рассматривает уравнение вида

$$f(x, w) = Ax^3 + Bx^2w + Cxw^2 + Dw^3 = 0 \qquad (0.1)$$

Здесь w - параметр нормализации, который потребуется в ходе матричных преобразований и переходов между базисами.

Если смотреть на уравнение (0.1), можно заметить, что возможно столкнуться с 4-мя различными случаями:

- "3" один действительный корень кратности 3:
$$f(x) = (x - x_1)^3$$
- "21" один действиетльный корень кратности 2 и еще один действительный корень кратности 1:
$$f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)$$
- "111" три различных действительных корня:
$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
- "$1\overline{1}$" один действительный корень и один комплексно-сопряженный корень:
$$f(x) = (x - x_1)(x^2 + px + q) = (x - x_1)(x - (a + ib))(x - (a - ib))$$



Ковarианты

Первый ковариант

Важно заметить, что мы всегда можем преобразовать наши координаты с помощью матрицы T:

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Об этом было написано в статье [2]. (Blinn, J.F., "Inferring Transforms") В статье также были сделаны вывод о том, что данное преобразование никак не меняет наши корни или их кратность. Также мы всегда можем найти такую матрицу для перехода от одних координат в другие. То есть, любое кубическое уравнение, например, с тремя действительными корнями может быть преобразовано в другое кубичесткое уравнени с тремя действительными корнями.

Полученные из (1) выражения для x и w через $\tilde{x}$ и $\tilde{w}$ подставим в (0.1) и получим матрицу перехода для коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2u & 3tu^2 & u^3 \\ t^2s & 2tus + t^2v & u^2s + 2tuv & u^2v \\ ts^2 & us^2 + 2tsv & 2usv + tv^2 & uv^2 \\ s^3 & 3s^2v & 3sv^2 & v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Получим коэффициенты в новых координатах $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$.

Второй ковариант

Теперь вводится понятие Гессиана. Гессиан функции $f(x, w)$ - это определитель матрицы вторых производных функции $f(x, w)$ по x и w.

$$Hessian(f) = det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xw} \\ f_{xw} & f_{ww} \end{bmatrix}$$

Для функции (0.1) Гесииан будет выглядеть так:

$$Hessian(f) = det \begin{bmatrix} 6Ax + 6Bw & 6Bx + 6Cw \\ 6Bx + 6Cw & 6Cx + 6Dw \end{bmatrix}$$

В матричной форме Гессиан записывается таким образом:

$$Hessian(f) = 18 \begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(AC - B^2) & AD - BC \\ AD - BC & 2(BD - C^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Теперь в решение введем следующие величины:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= AC - B^2 \\ \delta_2 &= AD - BC \qquad (4) \\ \delta_3 &= BD - C^2 \end{aligned}$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ называются коэффициентами Гессиана кубической функции $Hessian(f)$.

Введем обозначение для второй матрицы в выражении (3)

$$H = \begin{bmatrix} 2(AC - B^2) & AD - BC \\ AD - BC & 2(BD - C^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = det(H)$$

$$\Delta = 4\delta_1\delta_3 - \delta_2^2 = -A^2D^2 + 6ABCD - 4AC^3 - 4B^3D + 3B^2C^2$$

Здесь Δ - это дискриминант матрицы H и инвариант, который используется при решении кубичекого уравнения.

Данные равенства автор получил в своей предудыщей работе [1] (Blinn, J.F., "Polynomial Discriminants Part 1, Matrix Magic")

Для любой функции, которая является степенью линейной функции, будет верно, что ее гессиан тожественно равен нулю. Таким образом гессиан функции $f(x, w)$ будет обнуляться в случае, когда $f(x) = (x - x_1)^3$, то есть когда ищется корень кратности 3.

Это верно для любых многочленов степени n. Например, Гессиан квадратичного уравнения - дискриминант. Когда дискриминант равер нулю - мы имеем 2 действительных корня. Таким образом, каждому кубическому уранению $f(x)$ соответсвует свой квадратичный Гессиан $Hessian(f)$.

Гессиан играет важную роль. Важно заметить, что если совершить переход в другие координаты и посчитать Гессиан от функции в других координатах, то он будет связан с Гессианом оригинальной функции следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{\delta_1} \\ \tilde{\delta_2} \\ 2\tilde{\delta_3} \end{bmatrix} = (tv - su)^2 \begin{bmatrix} t^2 & 2tu & u^2 \\ ts & tv + us & uv \\ s^2 & 2sv & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 \\ \delta_2 \\ 2\delta_3 \end{bmatrix}$$

В ином виде:

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{\delta_1} & \tilde{\delta_2} \\ \tilde{\delta_2} & 2\tilde{\delta_3} \end{bmatrix} = (tv - su)^2 \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & 2\delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & s \\ u & v \end{bmatrix}$$

Другими словами, когда вы осуществляете переход кубического многочлена к другим координатам с помощью матрицы T из равенства (1), Гессиан также может быть преобразован этой матрицей. Это свойство называется ковариантом f. Дискриминант Δ - это скаляр, и он является инвариантом f. Причем он преобразовывается следующим образом.

$$\tilde{\Delta} = (tv - su)^6 \Delta$$

Теперь видно, что определитель H - это дискриминант кубического многочлена, но минус дискриминант квадратического Гессиана! Отсюда прослеживается связь: если кубический многочлен имеет один действительный корень, то Гессиан имеет два действительных. Если кубический многочлен имеет 3 действительных корня, то Гессиан не имеет действительных корней. Это своего рода "эффект сохранения реальных корней". Если дискриминант равен нулю, то и Гессиан, и кубический многочлен имеют корень кратности 2, и они совпадают.

Таким образом все 4 случая в решении нашей задачи могут быть описаны таблицей 1:

Тип уравнения	**Алгебраическое условие**	**Корни многочлена**	**Корни Гессиана**
3	$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$	Один корень кратности 3	$H = 0$
21	$\Delta = 0$	Корень кратности 2 и корень кратности 1	Корень кратности 2 (равный корню кратноси 2 кубического многочлена)
111	$\Delta > 0$	Три действительных корня кратности 1	Один комплексно-сопряженный корень
$1\bar{1}$	$\Delta < 0$	Один действительный и один комплексно-сопряженный корни	Два действительных корня

Третий ковариант

Третий ковариант представляет собой многочлен:

$$J(x, w) = A_J x^3 + 3B_J x^2 w + 3C_J x w^2 + D_J w^3$$

где

$$A_J = +A^2 D - 3ABC + 2B^3$$

$$B_J = -2AC^2 + ABD + B^2 C$$

$$C_J = -ACD + 2B^2 D - BC^2$$

$$D_J = -AD^2 + 3BCD - 2C^3$$

Эти коэффициенты являются результатом отображения кубического многочлена в другое пространство. Подробнее об этом рассказано в этапе scaling решения. Многочлен J также переходит к другому пространству, как и исходный, через соотношение (2).

Уравнение syzygy

Выведем уравнение syzygy:

Используя выражения для $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ из (4), получаем:

$$C = \delta_1$$

$$D = -2B\delta_1 + A\delta_2$$

Тогда наш полином примет вид:

$$\tilde{x}^3 + 3Cx\tilde{w}^2 + D\tilde{w}^3 = 0$$

Положив параметр $\tilde{w} = 1$, получаем:

$$\tilde{x}^3 + 3Cx + D = 0 \qquad (5)$$

Ферро и Тарталья вывели следующее тождество, верное для любых значений p, q:

$$(p+q)^3 - 3pq(p+q) - (p^3 + q^3) = 0$$

Сравнивая с нашим уравнением (5), получаем, что

$$x = p + q$$

$$-3pq = 3C \qquad (6)$$

$$-(p^3 + q^3) = D$$

Поэтому, если будут существовать p и q, удовлетворяющие соотношениям $-pq = C$ и $-p^3 - q^3) = D$, тогда найдется $\tilde{x} = p + q$.

Выражая q из второго равенства системы (6) и подставляя во второе, получаем:

$$-p^3 - (-\frac{C}{p})^3 = D$$

Избавление от дробей, дает нам уравнение 6 степени:

$$p^6 + Dp^3 - C^3 = 0$$

На самом деле это квадратный многочлен от p^2. Для него мы получаем корни

$$p^3 = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 + 4C^3}}{2}$$

Зная значения для
p^3, найдем q^3 из третьего равенства системы (6).

$$q^3 = -p^3 - D = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 + 4C^3}}{2}$$

Другими словами, q^3 - это другой корень квадратного уравнения. На самом деле не имеет значения, что есть что, поскольку в конечном счете мы будем смотреть только на сумму и разность p и q, поэтому возьмем

$$p = \sqrt[3]{\frac{-D + \sqrt{D^2 + 4C^3}}{2}}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{-D - \sqrt{D^2 + 4C^3}}{2}} \qquad (7)$$

Обратим внимание на выражение под квадратным корнем в равенстве (7). Если рассматривать определитель Гессиана с $\overline{A} = 1, \overline{B} = 0$, то получим дискриминант:

$$\overline{\Delta} = -D^2 - 4C^3$$

Дискриминант является скаляром, но поскольку кубический многочлен преобразуется в соотвествии с матрицей перехода $T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}$, дискриминант преобразуется в соответствии с равенством

$$\overline{\Delta} = (detT)^6 \Delta$$

Такая скалярная величина также называется инвариантом кубического многочлена. Данное уравнение дает соотношение между Δ и $\overline{\Delta}$, дискриминантом исходного и трансформированного многочлена. Преобразование будет иметь вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{\mathrm{A}} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{\mathrm{A}} \end{bmatrix}$$

Определитель этого матричного произведения равен $\sqrt[3]{\mathrm{A}}$

$$\overline{\Delta} = (\sqrt[3]{\mathrm{A}})^6 \Delta = A^2 \Delta$$

Получаем, что $D^2 + 4C^3 = -A^2 \Delta$

Возвращаясь к тому, что коэффициенты трехчлена ищутся как функции от параметров x и w, получаем:

$$D^2(x, w) + 4C^3(x, w) = -A^2(x, w)\Delta$$

Такого рода отношения называются уравнениями sygyzy. На этапе scaling, решается подзадача с коэффициентами

$$\tilde{A} = 1$$

$$\tilde{C} = 1/2H(t, u)$$

$$\tilde{D} = J(t, u)$$

Подставляя, получаем окончательный вид уравнения syzygy:

$$J^2 + 1/2H^3 = -\Delta f^2$$

Этапы решения:

1. depressing
   - преобразование кубического многочлена с целью обнуления коэффициента B
2. scaling
   - сокращения общего множителя во всех коэффициентах
   - подстановка коэффициентов в уравнение syzygy
3. solving
   - рассмотрение нескольких случаев значений инварианта и поиск корней
4. undepressing
   - обратное преобразование

Решение:

depressing

Здесь происходит переход в новые координаты. Согласно классической инвариантной теории Гильберта, такое преобразование геометрически привязано к оригиналу, а значит оригинал остается неизменным при преобразовании. Преобразование необходимо, чтобы обнулить коэффициент B. Общий вид такого преобразования имеет вид (1), т. е.

$$\begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix}$$

где $\tilde{x}$ и $\tilde{w}$ - новые коэффициенты

Из всех возможных преобразований нас интересуют только те, что обнуляют коэффициент при второй степени. Для того, чтоб найти такие преобразования, из равенства (2) запишем выражение для $\tilde{B}$:

$$\tilde{B} = t^2sA + (2tus + t^2v)B + (u^2s + 2tus)C + u^2vD = s(t^2A + 2tuv + u^2C) \\ + v(t^2B + 2tuC + u^2D) = 0$$

Получем, что $\tilde{B} = 0$ при

$$s = -k(t^2B + 2tuC + u^2D)$$

$$v = +k(t^2A + 2tuB + u^2C) \qquad (8)$$

t, u - любые

k может быть любой ненулевой величиной

Теперь матрица перехода в другое пространство зависит от параметров t и u. Из всех подходящих для решения нашей задачи матриц T мы можем самые простые для того, чтобы конретизировать этапы решения и уменьшить количество вычислений. Рассмотрим варианты

$$[t, u] = [0, 1] \quad \text{и} \quad [t, u] = [1, 0]$$

для простоты положим $k = 1$, тогда

$$\begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix} \text{или} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -D & C \end{bmatrix}$$

Получаем, что

$$\tilde{A} = A$$

$$\tilde{B} = 0$$

$$\tilde{C} = A(AC - B^2)$$

$$\tilde{D} = A(2B^3 - 3ABC + A^2D)$$

или

$$\tilde{A} = D$$

$$\tilde{B} = 0$$

$$\tilde{C} = D(BD - C^2)$$

$$\tilde{D} = D(-D^2A - 3DBC - 2C^3)$$

Теперь наше уравнение примет вид $\tilde{A}\tilde{x}^3 + 3\tilde{C}\tilde{x}\tilde{w}^2 + \tilde{D}\tilde{w}^3 = 0$ (9)

scaling

Из матричного уравнения (2) получим выражения для оставшихся коэффициентов:

$$\tilde{A} = t^3A + 3t^2uB + 3tu^2C + u^3D$$

$$\tilde{C} = ts^2A + (us^2 + 2tsv)B + (2usv + tv^2)C + uv^2D$$

$$\tilde{D} = s^3A + 3s^2vB + 3sv^2C + v^3D$$

Теперь $\tilde{A}$ представляет собой функцию от t и u. Подставляя (8) в выражения для $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$, мы получим многочлены пятой и шестой степени соответственно, множителем которых является многочлен $\tilde{A}$.

$$\begin{gathered}\tilde{A}(t,u) = f(t,u) \\ \tilde{C}(t,u) = f(t,u) * \frac{H(t,u)}{2} \\ \tilde{D}(t,u) = f(t,u) * J(t,u)\end{gathered}$$

Этот эффект отлично прослеживается для нашего упрощения матрицы перехода, т.е. для случаев

$$[t,u] = [0,1] \quad \text{и} \quad [t,u] = [1,0]$$

В данном варианте $\tilde{A}$ представляет собой не функцию, а константу. После сокращения всех коэффициентов на $\tilde{A}$ окончательно получаем:

$$\begin{gathered}\tilde{A} = 1 \\ \tilde{B} = 0 \\ \tilde{C} = AC - B^2 \\ \tilde{D} = 2B^3 - 3ABC + A^2D\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\tilde{A} = 1 \\ \tilde{B} = 0 \\ \tilde{C} = BD - C^2 \\ \tilde{D} = -D^2A - 3DBC - 2C^3\end{gathered}$$

Вернемся к общему случаю. После сокращения получаем, что

$$\overline{C} = (AC - B^2)t^2 + (AD - BC)tu + (BD - C^2)u^2 = \frac{H(t,u)}{2}$$

$\overline{D}$ теперь является однородным кубическим многочленом от (t,u). Это значит $\overline{D}$ может быть представлено как результат отображения кубического многочлена в тильда - пространство, т.е.

$$\overline{D}(t,u) = \begin{bmatrix} t & u \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(AC-B^2) & AD-BC \\ AD-BC & 2(BD-C^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = A_{\overline{D}}t^3$$
$$+ 3B_{\overline{D}}t^2u + 3C_{\overline{D}}tu^2 + D_{\overline{D}}u^3 = J(t,u)$$

где

$$\begin{gathered}A_{\overline{D}} = +A^2D - 3ABC + 2B^3 \\ B_{\overline{D}} = -2AC^2 + ABD + B^2C\end{gathered}$$

$$C_{\overline{D}} = +ACD + 2B^2D - BC^2$$
$$D_{\overline{D}} = -AD^2 + 3BCD - C^3$$

Теперь уравнение принимает вид

$$\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x} + \overline{D} = 0$$

Как можно заметить, после этапов depressing и scaling коэффициенты полинома принимают вид двух ковариантов кубического многочлена. Подставляя $\overline{C}$ и $\overline{D}$ в уравнение syzygy, получаем:

$$\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3 = -\tilde{A}^2\Delta$$

solving

На данном этапе мы выясняем, какой тип уравнения решается, сравнивая $\overline{\Delta} = -\overline{D}^2 - 4\overline{C}$ с нулем. После этого подставляем коэффициенты $\overline{C}$ и $\overline{D}$ в прямые выражения для корней. Эти выражения выводятся из вышеупомянутого тождества Ферро и Тарталья и преобразуются в соотвествие с алгебраическими условиями для каждого из типа. Выражения для $\tilde{x}_i$ рассматриваются ниже для всех четырех случаев.

undepressing

На этом этапе необходимо вернуться из тильда - пространства в исходное. Данному преобразованию соответствует соотношение (1).

Уравнение типа $1\overline{1}$

Depressing

Первым шагом в решении является преобразование нашего многочлена в другой многочлен, с коэффициентом $\tilde{B} = 0$. Этот шаг известен как "depressing" многочлена. Сумма корней такого многочлена равна нулю. Чтобы преобразовать наш многочлен к такому виду, мы можем использовать следующую матрицу:

$$T = \begin{bmatrix} t & u \\ s & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}$$

Тогда коэффициенты в новых координатах будут следующими:

$$\tilde{A} = A$$

$$\tilde{B} = 0$$

$$\tilde{C} = A(AC - B^2)$$

$$\tilde{D} = A(2B^3 - 3ABC + A^2D)$$

Scaling

Заметим, что каждый коэффициент сожержит в себе умножение на A. Мы работаем с многочленами, у которых $\mathrm{A} \neq 0$, так как при A=0 получим многочлен второй степени, который будет иметь всего 2 корня. Поэтому разделим все на A, это равносильно равномерному маштабированию пространства $\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{w} \end{bmatrix}$ на

$\sqrt[3]{\mathrm{A}}$. Решение будет аналогичным, просто будем работать с коэффициентами:

$$\overline{A} = 1$$

$$\overline{B} = 0$$

$$\overline{C} = AC - B^2 = \delta_1$$

$$\overline{D} = 2B^3 - 3ABC + A^2 D = -2B\delta_1 + A\delta_2$$

Тогда наш многочлен примет вид: $\tilde{x}^3 + 3C - \tilde{x}\tilde{w}^2 + D - \tilde{w}^3 = 0$.

Зафиксируем $\tilde{w} = 1$, так как при $w = 0$ наш многочлен не будет иметь решения.

Получаем простое кубическое уравнение:

$$\tilde{x}^3 + 3\overline{C}\tilde{x} + \overline{D} = 0 \qquad (10)$$

Solving

Вот тождество, которое уже было использовано для вывода уравнения syzygy:

$(p+q)^3 - 3pq(p+q) - (p^3 + q^3) = 0$

Если сравнить это тождество с уравнением (10) для $\tilde{x}$, то можно провести аналогию, где

$$\overline{C} = -pq$$

$$\overline{D} = -p^3 - q^3 \qquad (11)$$

Тогда нашим ответом будет:

$\tilde{x} = p + q$

Решая систему (10), получаем выражения для p и q:

$$p = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D} + \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D} - \sqrt{\overline{D}^2 + 4\overline{C}^3}}{2}}$$

Теперь вспомним, что в пространстве комплексных чисел существует три кубических корня для каждого числа. Так для единицы тремя кубическими корнями будут $1, \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Тогда кубы корней для p и q будут иметь вид:

$$p^3 = (\omega p)^3 = (\omega^2 p)^3$$
$$q^3 = (\omega q)^3 = (\omega^2 q)^3$$

Тогда первое уравнение системы (11) можно переписать так:

$$-pq = \overline{C}$$
$$-(\omega p)(\omega^2 q) = \overline{C}$$
$$-(\omega^2 p)(\omega q) = \overline{C}$$

А корни теперь ищутся по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= p + q \\ \tilde{x}_2 &= \omega p + \omega^2 q \\ \tilde{x}_3 &= \omega^2 p + \omega q \end{aligned} \qquad (12)$$

Подставляя вместо ω численное значение, легко убедиться, что сумма корней равна нулю.

Уравнение типа 21

В кубических уравнениях с корнем кратности 2 $\Delta = 0$. Это значит, что p и q примут вид

$$p = q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}}{2}}$$

Подставляя в (12), получим выражения для корней:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 2p \\ \tilde{x}_2 &= -p \\ \tilde{x}_3 &= -p \end{aligned}$$

Теперь вспомним уравнение syzygy. Для $\Delta = 0$ оно записывается так:

$$\overline{D}^2 = -4\overline{C}^3$$

Преобразуем выражение для p:

$$p = q = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}^3}{2\overline{D}^2}} = \sqrt[3]{\frac{-\overline{D}^3}{-8\overline{C}^3}} = \frac{\overline{D}}{2\overline{C}} = \frac{-2B\delta_1 + A\delta_2}{2\delta_1}$$

В данном случае мы можем найти решение задачи без вычисления кубического корня.

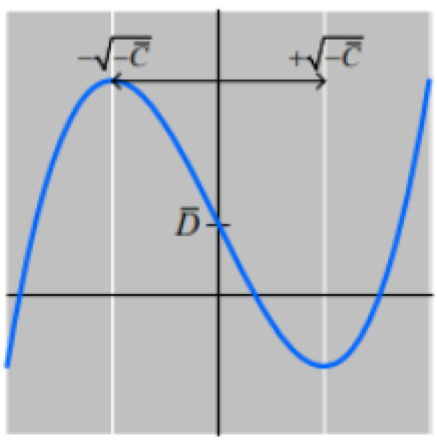
Уравнение типа 111

В данном случае $\Delta > 0$.

Следует заметить, что для многочлена (10) первая производная примет вид

$$3\tilde{x}^2 + 3\overline{C} = 0$$

Отсюда получаем, что локальные экстремумы будут в точках $\tilde{x} = \pm\sqrt{-\overline{C}}$



Чтобы квадратный корень имел смысл, нужно убедиться в отрицательности $\overline{C}$ при условии $\Delta > 0$. Она следует из уравнения syzygy:

$$4\overline{C}^3 = -\tilde{A}^2\Delta - \overline{D}^2$$

Далее делается попытка тригонометрической замены. Мы хотим выявить взаимосвязть между $\tilde{x}$ и $cos\theta$ и провести аналогию между (10) и

$$4cos^3\theta - 3cos\theta - cos3\theta = 0 \qquad (13)$$

Делая предположение, что в результате мы получим равенство $\tilde{x} = cos\theta$, нам необходимо поместить все корни в интервал $(-1; 1)$. Иными словами, нам необходимо сжать кривую по оси Ох, чтоб поместить корни трехчлена ближе к центру координат. Для этого выполним замену:

$$\tilde{x} = 2\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}}$$

Подставляя в (10), получаем:

$$(2\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}})^3 + 3\overline{C}(2\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}}) + \overline{D} = 0$$

$$-8\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}}^3 + 6\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}\tilde{\tilde{x}} + \overline{D} = 0$$

Делим все коэффициенты на $-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}$:

$$4\tilde{\tilde{x}}^3 - 3\tilde{\tilde{x}} + \frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}} = 0$$

Снова смотря на (13), делаем вывод, что $\tilde{\tilde{x}} = cos\theta$ и $cos3\theta = \frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}$.

Отсюда получаем выражение для первого корня:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos(\frac{1}{3}cos^{-1}(\frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}))$$

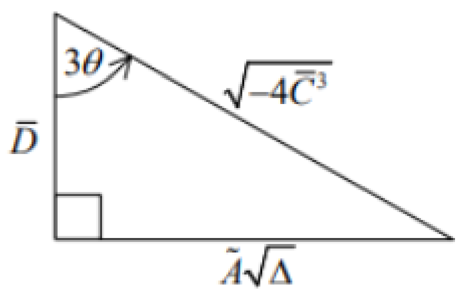
Теперь необходимо убедиться, что $\frac{\overline{D}}{-2\overline{C}\sqrt{-\overline{C}}}$ меньше единицы по модулю. Это также следует из уравнения syzygy:

$$-4\overline{C}^3 = \tilde{A}^2\Delta + \overline{D}^2 \qquad (14)$$

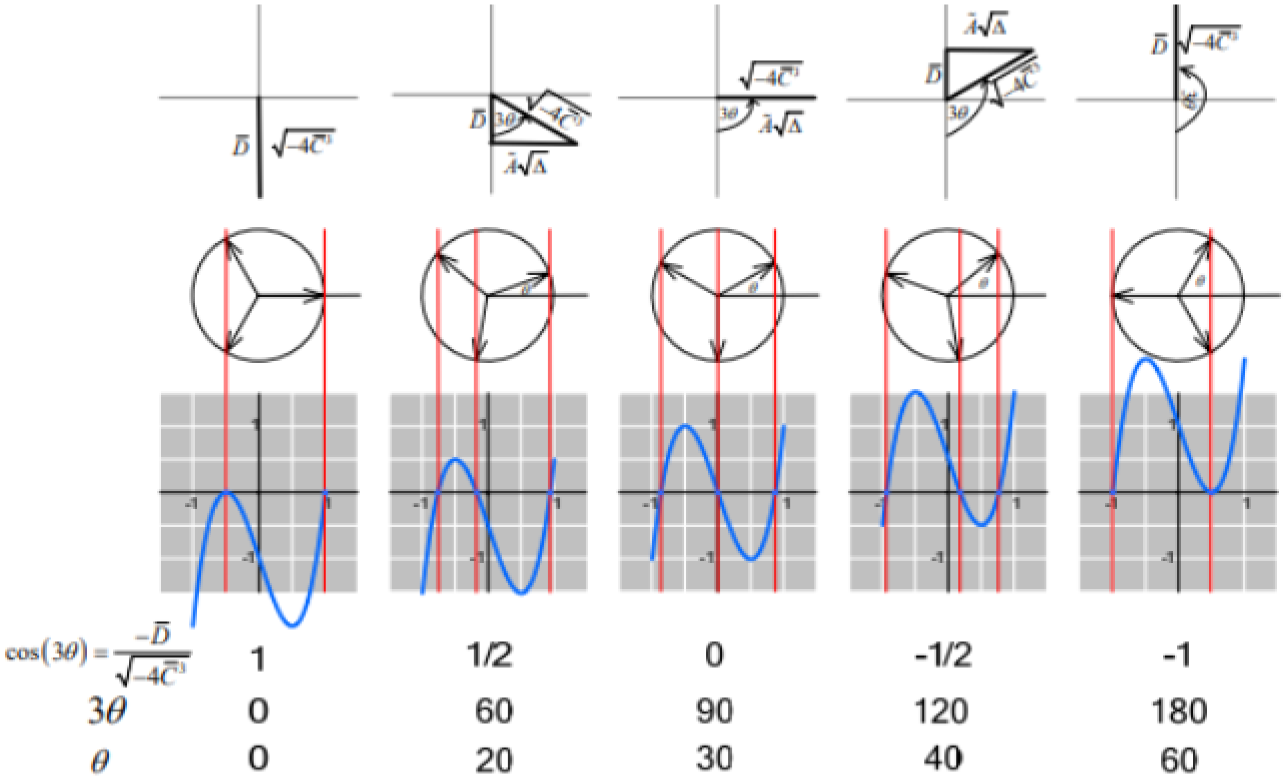
$$\overline{D}^2 < -4\overline{C}^3$$

$$\frac{\overline{D}^2}{-4\overline{C}^3} = (\frac{\overline{D}}{\sqrt{-4\overline{C}^3}})^2 < 1$$

На самом деле, равенство (14) можно рассматривать как запись теоремы Пифагора, тогда геометрическое его представление будет выглядяеть так:



Для того, чтобы найти оставшиеся корни, Джеймс Блинн приводит иллюстрацию, на которой показывает все случаи расположения графика многочлена с тремя действительными различными корнями:



Когда θ пробегает от 0° до 60°, график пересекает ось Ox в трех точках. Каждому графику сопоставляется единичная окружность с тремя векторами из центра координат. Углы между векторами фиксированны и равны 120°. Сумма этих векторов обнуляется так же как и сумма корней кубического многочлена. Из графиков делаем вывод, что выражения для корней:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos\theta$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = cos(\theta - 120°)$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = cos(\theta + 120°)$$

При подстановке этих выражений в уравнение можно убедиться в их правильности. Формулы можно переписать, используя формулы для косинуса суммы и разности:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos\theta$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{2}cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = -\frac{1}{2}cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta$$

Пользуясь тем, что сумма корней равна нулю, перепишем:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = cos\theta$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{2}cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = -\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2$$

Возвращаясь к тильда - пространству:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = 2\sqrt{-\overline{C}}cos\theta$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = 2\sqrt{-\overline{C}}(-\frac{1}{2}cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta) \qquad (15)$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = 2\sqrt{-\overline{C}}(-\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{\tilde{x}}_2)$$

Уравнение типа 3

Для кубического полинома с корнем кратности 3 $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. А значит и $\Delta = \overline{C} = \overline{D} = 0$.

Если мы подставим данные значения в выражение (7) для корней, выведенное из тождества Ферро и Тарталья, получим $p = q = 0$. Тогда $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0$.

Если пользоваться тригонометрическими формулами (15), корни также обнуляются, т. к.$\overline{C} = 0$. Тем не менее, после этапа undepressing нулевой корень встает на своё место в оригинальном пространстве.