Negative Research - метод Омар Хайяма

Кубический метод Омара Хайяма — это метод решения кубических уравнений:

$$f(x) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0, \qquad (0)$$

где a, b, c, d — действительные числа, $a \neq 0$.

Кубический метод Омара Хайяма назван в честь персидского математика и поэта Омара Хайяма, известного своим вкладом в алгебру. Кубический метод Омара Хайяма основан на идее построения вдавленного кубического уравнения с теми же корнями, что и исходное уравнение.

Проблема

Омар Хайям ищет корни многочлена третьей степени с действительными коэффициентами a, b:

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Данное равенство является вдавленным кубическим уравнением.

Из исходного уравнения (0) многочлен (1) получается с помощью замены $x = x_0 + \frac{b}{3a}$. Данное линейное преобразование никак не влияет на потерю корней. При этом

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2},$$

$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}.$$

Омар Хайям в своем методе ищеn корни исходного уравнения с помощью решения системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = sx \\ x^2 = ty \end{cases}. \qquad (2)$$

Выразим y из второго уравнения системы:

$$y = \frac{x^2}{t}. \qquad (3)$$

Подставим выражение для y (3) в систему (2):

$$\frac{x^4}{t^2} = x(s - x)$$

или

$$x^3 + t^2x = t^2s. \qquad (4)$$

Сравнивая уравнения (1) и (4), составим систему зависимости коэффициентов:

$$\begin{cases} t^2 = p \\ s = \frac{q}{p} \end{cases}. \qquad (5)$$

Таким образом, метод Омар Хайяма работает только для случаев, когда p, q, t, s являются действительными положительными числами и не может решать уравнения, которые этим условиям не удовлетворяют, например, $x^3 = 0$, где $p = 0$.

Рассмотрим дискриминант кубического многочлена (1)

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2$$

Известно, что

- При $\Delta > 0$ кубический многочлен имеет три различных вещественных корня.
- При $\Delta = 0$ он имеет кратный корень (либо один корень кратности 2 и один корень кратности 1, и тот, и другой вещественные; либо один-единственный вещественный корень кратности 3).
- При $\Delta < 0$ кубический многочлен имеет один вещественный корень и два комплексных корня (являющихся комплексно-сопряжёнными).

Поскольку у нас значения p, q всегда положительные для метода Омар Хайяма, это значит, что $\Delta < 0$ всегда. А значит данный метод может искать лишь один действительный корень из трех корней многочлена (1) для случая, когда он имеет один действительный корень и два комплексных корня.