Podstawy mechaniki kwantowej

Notatki z wykładu

14 marca 2025

Spis treści

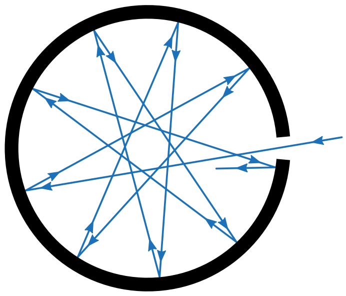
1 Historia powstania fizyki kwantowej

1.1 Zapomnijmy o mechanice klasycznej

Związek z nią będzie jasny, kiedy pójdziemy głębiej w teorię.

1.2 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Eksperyment Stefana-Boltzmanna (1878) badał promieniowanie cieplne emitowane przez ciało doskonale czarne. Ciało doskonale czarne to obiekt, który pochłania całe promieniowanie i emituje je zgodnie z temperaturą.



Rysunek 1: Ciało doskonale czarne. *Źródło: Wikipedia*

Pokazano, że całkowita energia wypromieniowywana przez takie ciało jest proporcjonalna do czwartej potęgi jego temperatury absolutnej

$$R(T) = \sigma T^4,$$

gdzie R to moc promieniowania na jednostkę powierzchni, T to temperatura w kelwinach, a σ to stała Stefana-Boltzmanna.

Całkowita moc promieniowania to

$$R(T) = \int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda,$$

gdzie λ to długość fali, a $\rho(\lambda, T)$ to spektralna funkcja rozkładu.

W 1893 Wien zauważył, że spektralna gęstość promieniowania nie zależy od λ i T osobno, ale od ich iloczynu λT

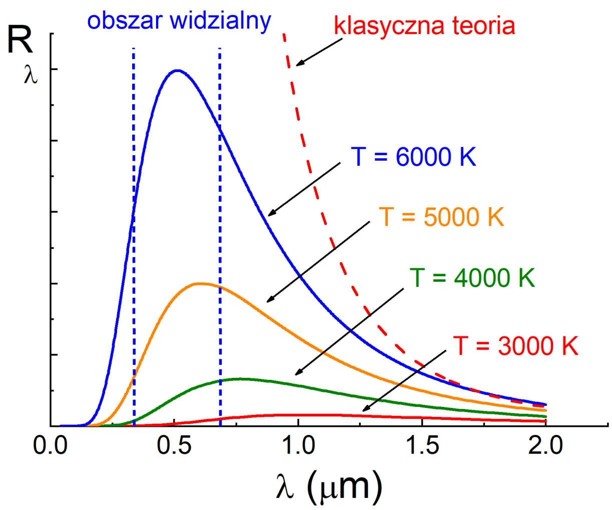
$$\rho(\lambda, T) = \lambda^{-5} f(\lambda T).$$

1.3 Prawo Rayleigha-Jeansa

W klasycznej elektrodynamice, promieniowanie elektromagnetyczne opisane jako fale stojące daje rozkład energii w funkcji długości fali. Liczba takich fal o długości od λ do $\lambda + d\lambda$ to

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} \cdot \bar{\epsilon},$$

gdzie $\bar{\epsilon}$ to średnia energia takiej fali. Wzór ten jest dokładny dla długich fal, ale prowadzi do problemu z „katastrofą ultrafioletową” przy krótkich falach, co zostało skorygowane przez teorię kwantową Plancka.



Rysunek 2: Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego w wybranych temperaturach. *Źródło: Zbigniew Kąkol, Jan Żukrowski (e-Fizyka, AGH)*

1.4 Teoria kwantowa Plancka

W 1900 roku Planck zaproponował, że ciała emitują światło w postaci kwantów ($\epsilon = n\epsilon_0$)

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0 \exp\left(-\frac{n\epsilon_0}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\epsilon_0}{kT}\right)} = \cdots = \frac{\epsilon_0}{\exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right) - 1},$$

gdzie $\epsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ jest energią jednego kwantu promieniowania.

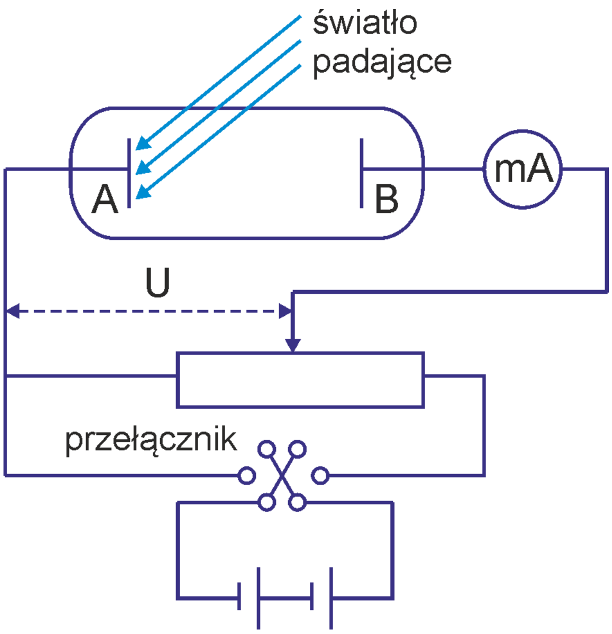
Z tego wyrażenia Planck otrzymał rozkład promieniowania w funkcji długości fali, który ma postać

$$\beta(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1},$$

Wzór ten zgadza się z wynikami eksperymentalnymi, eliminując problem „katastrofy ultrafioletowej”.

1.5 Efekt fotoelektryczny

Efekt fotoelektryczny to zjawisko emisji elektronów z powierzchni metalu pod wpływem padającego na niego światła.



Rysunek 3: Układ do obserwacji zjawiska fotoelektrycznego. *Źródło: Zbigniew Kąkol, Jan Żukrowski (e-Fizyka, AGH)*

W 1900 roku doświadczenia Lenarda wykazały, że energia elektronów zależy od częstotliwości światła, a nie jego intensywności. Einstein sformułował wzór efektu fotoelektrycznego

$$\frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = h\nu - W,$$

gdzie W to funkcja pracy metalu (zależna od rodzaju metalu).

1.6 Widma atomowe i model Bohra

Newton (1660) badał rozszczepienie światła. Melvill (1755) odkrył, że różne pierwiastki mają charakterystyczne linie widmowe. Kirchhoff (1855) zauważył, że widmo zależy od typu atomu i istnieją zarówno widma emisyjne, jak i absorpcyjne.

Balmer (1885) podał wzór:

$$\lambda = C \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4}.$$

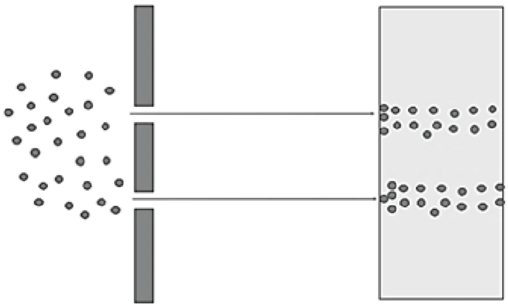
Rydberg sformułował bardziej ogólny wzór:

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

2 Funkcja falowa

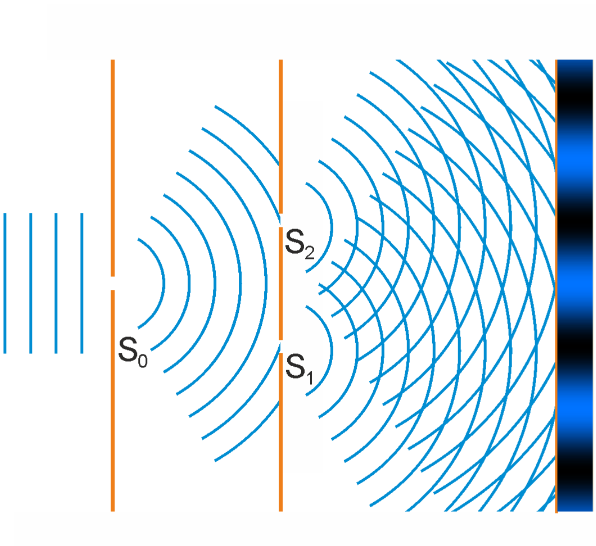
2.1 Eksperyment z dwoma szczelinami

Eksperyment z dwoma szczelinami to doświadczenie, w którym światło przechodzi przez dwie szczeliny i na ekranie za nimi pojawia się interferencja.



Rysunek 4: Eksperyment z dwoma szczelinami. *Źródło: Ranjbar, Vahid. (2023)*

2.2 Eksperyment ze światłem



Rysunek 5: Eksperyment z dwoma szczelinami. *Źródło: Zbigniew Kąkol, Jan Żukrowski (e-Fizyka, AGH)*

Amplituda światła: $A(\vec{r}, t)$
Intensywność światła: $I = |A|^2$

$$I = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* + A_1^* A_2$$

Jest to skutek superpozycji.

2.3 Proste zagadnienie

Amplitudy w dwóch miejscach:

$$A_1 = a_1 \exp[i(\omega t - kr_1 + \delta_1)]$$

$$A_2 = a_2 \exp[i(\omega t - kr_2 + \delta_2)]$$

Niech $a_1 = a_2 = a$ i $\delta_1 = \delta_2$. Dla dużych odległości ($D >> d$), fale są płaskie:

$$r_1^2 = D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

Stąd:

$$r_1^2 - r_2^2 = 2xd$$
$$r_1 - r_2 \approx \frac{xd}{D}$$

Intensywność końcowa:

$$\begin{aligned} I &= \left(a \cdot e^{i\omega t}\right)^2 \cdot \left[e^{-ikr_1} + e^{-ikr_2}\right] \\ &= 2a^2 \left(\cos\left(kr_1 - kr_2\right) + 1\right) \\ &= 2a^2 \left(1 + \cos\left(k(r_1 - r_2)\right)\right) \\ &= 2a^2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{x} \cdot \frac{xd}{D}\right)\right) \end{aligned}$$

2.4 Funkcja falowa swobodnego elektronu

$e^- \sim$ fala (formalna definicja później)

Niech $\Psi(x, y, z, t) \sim A(\vec{z}, t)$.

$|\Psi|^2 = P$ – „Intensywność" fali elektronowej, prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w tej chwili w danym miejscu.

Dla dwóch funkcji falowych:

$$\Psi = \Psi_A + \Psi_B$$
$$P \sim |\Psi_A + \Psi_B|^2$$

Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w danej przestrzeni $= 1$. Zatem

$$\int |\Psi(z, t)|^2 dz = 1.$$

Funkcja falowa znormalizowana do jedynki. Funkcja falowa jest całkowalna kwadratowo.

Superpozycja:

$$\begin{aligned} \Psi &= c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 \\ \Psi_1 &= |\Psi_1|e^{i\alpha_1} \\ \Psi_2 &= |\Psi_2|e^{i\alpha_2} \end{aligned}$$

Stąd:

$$|\Psi|^2 = |c_1\Psi_1|^2 + |c_2\Psi_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[c_1c_2\Psi_1\Psi_2 e^{i\alpha_1 - \alpha_2}\right]$$