

# Zagadnienia na obronę

Matematyka

7 lipca 2025

## Spis treści

<b>Analiza matematyczna</b>	<b>2</b>
1. Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG) . . . . .	2
2. Pochodna funkcji . . . . .	3
3. Całka Riemanna, całki oznaczone i nieoznaczone . . . . .	4
4. Szereg Taylora i Maclaurina . . . . .	5
5. Kryteria zbieżności szeregów . . . . .	6
6. Ekstrema funkcji (jednej i wielu zmiennych) . . . . .	7
7. Liczby zespolone . . . . .	7
8. Transformata Fouriera . . . . .	8
<b>Rachunek prawdopodobieństwa i procesy stochastyczne</b>	<b>9</b>
9. Proces Poissona . . . . .	9
10. Proces Wienera (Ruch Browna) . . . . .	9
11. Prawa Wielkich Liczb (PWL): Słabe i Mocne . . . . .	10
12. Metoda Monte Carlo . . . . .	11
13. Stacjonarność procesu stochastycznego (w węższym i szerszym sensie) . . .	11
14. Funkcja charakterystyczna . . . . .	12
15. Martynały . . . . .	13
<b>Statystyka</b>	<b>13</b>
16. Metody estymacji parametrów . . . . .	13

17.	Regresja liniowa . . . . .	14
18.	Testowanie hipotez statystycznych . . . . .	14
<b>Algebra</b>		<b>15</b>
19.	Wyznacznik macierzy . . . . .	15
20.	Wartości i wektory własne . . . . .	15
21.	Układy równań liniowych . . . . .	16
<b>Metody numeryczne</b>		<b>16</b>
22.	Metody numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych . . . . .	16
23.	Metody znajdowania miejsc zerowych funkcji . . . . .	17
24.	Interpolacja wielomianowa . . . . .	17

## Analiza matematyczna

### 1. Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG)

#### Definicja:

Centralne Twierdzenie Graniczne mówi, że jeśli  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależnymi, identycznie rozłożonymi zmiennymi losowymi o skończonej wartości oczekiwanej  $\mu$  i skończonej wariancji  $\sigma^2$ , to suma (lub średnia) tych zmiennych po odpowiednim przeskalowaniu dąży rozkładem do rozkładu normalnego, gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Formalnie:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

#### Założenia:

1. Zmienne są niezależne.
2. Mają ten sam rozkład (i.i.d.).
3. Istnieje skończona wartość oczekiwana  $\mu$  i skończona wariancja  $\sigma^2$ .

#### Zastosowanie:

- Uzasadnienie stosowania rozkładu normalnego w statystyce.

- Budowa przedziałów ufności i testów statystycznych.
- Modelowanie błędów pomiaru i zjawisk losowych w naukach przyrodniczych i społecznych.

### Uogólnienia:

- **Lindeberga i Lyapunowa CTG:** wersje dla zmiennych niezależnych, ale niekoniecznie identycznie rozłożonych.
- **CTG dla rozkładów alfa-stabilnych (gdy wariancja nieskończona):** Jeśli zmienne mają ciężkie ogony (np. rozkład Pareto), suma po odpowiednim przeskalowaniu może dążyć nie do rozkładu normalnego, lecz do rozkładu **alfa-stabilnego**. Wtedy:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} S_\alpha(\cdot)$$

gdzie  $0 < \alpha < 2$ ,  $S_\alpha$  – rozkład alfa-stabilny,  $b_n \sim n^{1/\alpha}$ .

## 2. Pochodna funkcji

### Definicja:

Pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  to granica ilorazu różnicowego (jeśli istnieje):

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

### Interpretacja geometryczna:

Pochodna to **nachylenie stycznej** do wykresu funkcji w punkcie  $x_0$ . Pokazuje, jak szybko zmienia się wartość funkcji.

### Metody obliczania:

- **Analityczne:** Reguły różniczkowania (iloczyn, iloraz, złożenie funkcji – reguła łańcuchowa).
- **Numeryczne:** Przybliżenia różnicowe, np.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{różnica prosta})$$

lub centralna:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

### 3. Całka Riemanna, całki oznaczone i nieoznaczone

#### Całka Riemanna (konstrukcja):

Dla funkcji  $f$  określonej na przedziale  $[a, b]$ , całka oznaczona to granica sum Riemanna:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

gdzie  $\mathcal{P}$  to podział przedziału,  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

#### Całka oznaczona:

$$\int_a^b f(x) dx$$

zwraca liczbę, interpretowana jako pole pod wykresem funkcji między  $a$  i  $b$ .

#### Całka nieoznaczona:

$$\int f(x) dx$$

zbiór wszystkich funkcji pierwotnych  $F(x)$ , takich że  $F'(x) = f(x)$ .

#### Własności:

- Liniowość:  $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$
- Monotoniczność, addytywność względem przedziału
- Jeśli  $f$  ciągła na  $[a, b]$ , to całkowna

#### Podstawowe twierdzenia rachunku całkowego (Newtona-Leibniza):

1. Jeśli  $F$  – funkcja pierwotna  $f$ , to:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. Jeśli  $f$  ciągła, to funkcja:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jest różniczkowalna i  $F'(x) = f(x)$

#### 4. Szereg Taylora i Maclaurina

##### Wzór Taylora:

Dla funkcji  $f$  nieskończenie różniczkowalnej w punkcie  $a$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

##### Szereg Maclaurina:

To szczególny przypadek szeregu Taylora dla  $a = 0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

##### Warunki zbieżności:

- Zbieżność szeregu nie oznacza automatycznie równości z funkcją – potrzebna **zbieżność jednostajna** lub spełnienie warunku z resztą:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty$$

- Dla wielu funkcji rozwinięcie Taylora zbiega tylko w otoczeniu punktu  $a$  (promień zbieżności  $R > 0$ ).

##### Zastosowania:

- Aproksymacja funkcji (szczególnie w analizie numerycznej)
- Obliczenia przybliżone (np. trygonometryczne, wykładnicze)
- Rozwiązywanie równań różniczkowych
- Fizyka (np. rozwinięcia wokół stanu równowagi)

## 5. Kryteria zbieżności szeregów

### Kryterium porównawcze:

Jeśli  $0 \leq a_n \leq b_n$  dla dużych  $n$ , i  $\sum b_n$  zbieżny, to  $\sum a_n$  też zbieżny. Odwrotnie: jeśli  $\sum a_n$  rozbieżny i  $a_n \geq b_n \geq 0$ , to  $\sum b_n$  też rozbieżny.

### Kryterium d'Alemberta (ilorazowe):

Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

to:

- jeśli  $L < 1 \rightarrow$  szereg zbieżny,
- jeśli  $L > 1$  lub  $= \infty \rightarrow$  rozbieżny,
- jeśli  $L = 1 \rightarrow$  brak informacji (kryterium nie rozstrzyga).

### Kryterium Cauchy'ego (pierwiastkowe):

Jeśli

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

to:

- $L < 1 \rightarrow$  szereg zbieżny,
- $L > 1 \rightarrow$  rozbieżny,
- $L = 1 \rightarrow$  kryterium nie rozstrzyga.

### Kryterium Leibniza (dla szeregów naprzemiennych):

Jeśli  $a_n$  są dodatnie, monotonicznie malejące i  $\lim a_n = 0$ , to szereg:

$$\sum (-1)^n a_n$$

jest **zbieżny** (ale niekoniecznie bezwzględnie).

## 6. Ekstrema funkcji (jednej i wielu zmiennych)

Dla funkcji jednej zmiennej  $f(x)$ :

- **Warunek konieczny:** Jeśli  $f$  ma ekstremum lokalne w punkcie  $x_0$ , to  $f'(x_0) = 0$  (lub nie istnieje).
- **Warunek wystarczający:**
  - Jeśli  $f''(x_0) > 0$ , to minimum lokalne.
  - Jeśli  $f''(x_0) < 0$ , to maksimum lokalne.
  - Jeśli  $f''(x_0) = 0$ , potrzebne dalsze badanie (np. wyższe pochodne lub wykres).

Dla funkcji wielu zmiennych  $f(x, y, \dots)$ :

- **Warunek konieczny:** Punkt krytyczny  $\nabla f = 0$  (wszystkie pochodne cząstkowe równe 0).
- **Warunek wystarczający (test Hessego):** Obliczamy macierz Hessego  $H$  (macierz drugich pochodnych).
  - Jeśli  $H$  dodatnio określona  $\rightarrow$  minimum.
  - Ujemnie określona  $\rightarrow$  maksimum.
  - Nieokreślona  $\rightarrow$  punkt siodłowy.
  - Zdegenerowana  $\rightarrow$  test nie rozstrzyga.

**Ekstrema na zbiorach domkniętych:**

Sprawdzamy wartości funkcji:

- w punktach krytycznych wewnątrz zbioru,
- na brzegu (np. ograniczając funkcję do brzegu i szukając ekstremów),
- porównujemy wartości – największa/minimalna to ekstrema globalne.

## 7. Liczby zespolone

**Postać algebraiczna:**

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

**Postać trygonometryczna:**

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arg z$$

**Postać wykładnicza (Eulera):**

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{bo } e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

**Wzór de Moivre'a:**

Dla  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :

$$z^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

Lub ogólniej:

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

## 8. Transformata Fouriera

**Definicja (dla funkcji całkowlanej  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ):**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

**Własności:**

- Liniowość
- Przesunięcie:  $f(x - a) \leftrightarrow e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi)$
- Skalowanie:  $f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$
- Transformata pochodnej:

$$f'(x) \leftrightarrow 2\pi i \xi \cdot \hat{f}(\xi)$$

- Transformata funkcji parzystej jest rzeczywista, nieparzystej – urojona

**Związek z funkcją charakterystyczną:**

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej  $X$ :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

to (z dokładnością do stałej) **odwrotna transformata Fouriera** rozkładu prawdopodobieństwa  $X$ . Jest to analogiczna transformata, ale z  $e^{itx}$  zamiast  $e^{-2\pi i x \xi}$ .



# Rachunek prawdopodobieństwa i procesy stochastyczne

## 9. Proces Poissona

### Definicja:

Proces Poissona to losowy proces skokowy  $(N(t))_{t \geq 0}$ , opisujący liczbę zdarzeń, które zaszły do czasu  $t$ , gdzie odstępy między kolejnymi zdarzeniami są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$ .

### Własności:

1. **Start w zerze:**  $N(0) = 0$ .
2. **Niezależność przyrostów:** Liczba zdarzeń w niepokrywających się przedziałach czasu jest niezależna.
3. **Stacjonarność przyrostów:** Rozkład liczby zdarzeń zależy tylko od długości przedziału czasu.
4. **Rozkład:**  $P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

### Generowanie trajektorii:

Generujemy kolejne odstępy między zdarzeniami  $T_i$  z rozkładu wykładniczego  $Exp(\lambda)$ , a następnie tworzymy czasy zdarzeń  $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ . Proces przyjmuje wartość  $n$  na przedziale  $[S_n, S_{n+1})$ .

## 10. Proces Wienera (Ruch Browna)

### Definicja:

Proces Wienera  $(W(t))_{t \geq 0}$  to proces stochastyczny o ciągłych trajektoriach, który spełnia:

1.  $W(0) = 0$ ,
2. niezależność przyrostów,
3. przyrosty mają rozkład normalny:  $W(t+s) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t)$ ,
4. trajektorie są ciągłe z prawdopodobieństwem 1.

### Własności:

- Średnia:  $E[W(t)] = 0$ ,
- Wariancja:  $\text{Var}[W(t)] = t$ ,
- Niezależność i stacjonarność przyrostów,
- Gaussianowska natura: każde skończone zbiory wartości mają rozkład normalny.

### Samopodobieństwo:

Dla dowolnej stałej  $a > 0$ , proces  $W(at)$  ma taki sam rozkład jak  $\sqrt{a}W(t)$ . To oznacza, że proces jest **samopodobny rzędu**  $H = 1/2$ .

### 11. Prawa Wielkich Liczb (PWL): Słabe i Mocne

Prawa Wielkich Liczb opisują warunki, w których średnia arytmetyczna ciągu niezależnych zmiennych losowych zbiega do wartości oczekiwanej.

#### Słabe Prawo Wielkich Liczb (SPWL):

Jeśli  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne, identycznie rozłożone (i.i.d.) z  $E[X_i] = \mu$ , to

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu.$$

(Zbieżność w prawdopodobieństwie.)

#### Mocne Prawo Wielkich Liczb (MPWL):

Dla tego samego ciągu:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

(Zbieżność prawie na pewno.)

### Rodzaje zbieżności zmiennych losowych:

1. Zbieżność prawie na pewno (a.s.):  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$ ,
2. Zbieżność w prawdopodobieństwie:  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ ,

3. **Zbieżność w rozkładzie (dystrybuancji):**  $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$  dla punktów ciągłości  $F_X$ ,
4. **Zbieżność w średniej kwadratowej:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0$ .

Zależności:

Zb. a.s.  $\Rightarrow$  zb. w prawdopodobieństwie  $\Rightarrow$  zb. w rozkładzie.

## 12. Metoda Monte Carlo

### Idea:

Metoda Monte Carlo polega na użyciu losowania (symulacji) do przybliżenia wartości liczbowych, np. całek, wartości oczekiwanych, rozwiązań równań itp.

### Przykład:

Aby oszacować wartość oczekiwaną  $E[f(X)]$ , generujemy  $X_1, \dots, X_n$  i obliczamy

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

Dla dużego  $n$ ,  $\hat{\mu}_n \approx E[f(X)]$ .

### Podstawa teoretyczna:

**Prawa Wielkich Liczb** – gwarantują, że  $\hat{\mu}_n \rightarrow E[f(X)]$  przy rosnącym  $n$ , co uzasadnia poprawność metody.

### Zalety:

- Łatwość implementacji,
- Możliwość zastosowania w problemach wysokowymiarowych lub trudnych analitycznie.

## 13. Stacjonarność procesu stochastycznego (w węższym i szerszym sensie)

### Stacjonarność w węższym sensie (tzw. stacjonarność drugiego rzędu):

Proces  $(X_t)_{t \in T}$  jest stacjonarny w węższym sensie, jeśli:

1.  $E[X_t] = \mu = \text{const}$ ,
2.  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$  – zależy tylko od przesunięcia  $h$ , a nie od  $t$ .

### Stacjonarność w szerszym sensie (ściśle stacjonarny):

Proces  $(X_t)$  jest stacjonarny w szerszym sensie, jeśli rozkład  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  jest taki sam jak  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$  dla dowolnych  $t_1, \dots, t_k$  i  $h$ . (Inaczej: cały rozkład jest niezmienniczy na przesunięcia czasu.)

### Przykłady:

- **Proces stacjonarny w sensie szerokim:** proces autoregresyjny AR(1) z  $|\phi| < 1$ .
- **Proces ściśle stacjonarny:** proces o niezależnych i identycznie rozłożonych zmiennych  $X_t \sim \text{Exp}(\lambda)$ .
- **Proces Wienera:** nie jest stacjonarny – wariancja rośnie z czasem.

## 14. Funkcja charakterystyczna

### Definicja:

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej  $X$  to funkcja  $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

### Własności:

1. Zawsze istnieje (również dla zmiennych bez momentów),
2.  $\varphi_X(0) = 1$ ,
3.  $|\varphi_X(t)| \leq 1$ ,
4. Funkcja charakterystyczna określa jednoznacznie rozkład zmiennej losowej,
5.  $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$ ,
6. Dla niezależnych  $X, Y$ :  $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$ .

### Zastosowanie:

- Identyfikacja rozkładu,
- Dowód twierdzenia centralnego granicznego (CLT),
- Badanie zbieżności w rozkładzie,
- Ułatwia obliczenia przy sumach niezależnych zmiennych.

## 15. Martyngały

### Definicja:

Proces  $(X_n)_{n \geq 0}$  to **martyngał** względem filtracji  $(\mathcal{F}_n)$ , jeśli:

1.  $X_n$  jest  $\mathcal{F}_n$ -mierzalny,
2.  $E[|X_n|] < \infty$ ,
3.  $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$  prawie na pewno.

### Intuicja:

Brak przewagi w grze – przyszła wartość średnia równa jest obecnej, biorąc pod uwagę dostępną informację.

### Przykłady:

- $X_n = S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ , gdzie  $\xi_i$  są niezależne, mają wartość oczekiwaną 0.
- $X_n = E[Y | \mathcal{F}_n]$ , gdzie  $Y$  ma skończoną wartość oczekiwaną.
- Proces  $W(t)$  – proces Wienera – jest martyngałem względem swojej naturalnej filtracji.

## Statystyka

### 16. Metody estymacji parametrów

#### Metoda największej wiarygodności (MLE)

Polega na wyznaczeniu takich wartości parametrów rozkładu, które maksymalizują funkcję wiarygodności – czyli prawdopodobieństwo zaobserwowania danej próby. Rozwiązanie uzyskuje się zwykle poprzez różniczkowanie logarytmu funkcji wiarygodności i rozwiązanie układu równań.

#### Metoda momentów

Polega na przyrównaniu teoretycznych momentów rozkładu (np. wartości oczekiwanej, wariancji) do odpowiadających im momentów empirycznych wyznaczonych z próby. Liczbę równań dobiera się do liczby estymowanych parametrów.

## 17. Regresja liniowa

### Model regresji liniowej

Model opisuje zależność zmiennej zależnej  $Y$  od jednej lub więcej zmiennych niezależnych  $X$ :  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon$  gdzie  $\varepsilon$  to składnik losowy.

### Założenia modelu klasycznego (Gaussa-Markowa):

- Liniowość modelu względem parametrów
- $E(\varepsilon) = 0$
- $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$ , stała wariancja (homoskedastyczność)
- Brak autokorelacji składników losowych
- Niezależność obserwacji
- Zmienna losowa  $\varepsilon$  ma rozkład normalny (dla wnioskowania)

### Estymacja parametrów – metoda najmniejszych kwadratów (MNK)

Parametry modelu estymuje się przez minimalizację sumy kwadratów reszt:  $\min_{\beta} \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  Rozwiązanie analityczne:  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

## 18. Testowanie hipotez statystycznych

### Błąd I rodzaju

Popełniamy go, gdy odrzucamy hipotezę zerową  $H_0$ , mimo że jest prawdziwa. Prawdopodobieństwo tego błędu to poziom istotności  $\alpha$ .

### Błąd II rodzaju

Popełniamy go, gdy nie odrzucamy  $H_0$ , mimo że hipoteza alternatywna  $H_1$  jest prawdziwa. Prawdopodobieństwo tego błędu to  $\beta$ .

### p-wartość

To najmniejsze możliwe  $\alpha$ , dla którego odrzucilibyśmy  $H_0$  przy zaobserwowanej statystyce testowej. Jeżeli p-wartość  $< \alpha$ , odrzucamy  $H_0$ .

## Test Kołmogorowa-Smirnowa (K-S)

To nieparametryczny test zgodności, porównujący dystrybucję empiryczną z dystrybucją teoretyczną (jednowymiarowy przypadek). Statystyka testowa to maksymalna wartość bezwzględna różnicy między tymi funkcjami. Służy np. do sprawdzania normalności.

## Algebra

### 19. Wyznacznik macierzy

#### Definicja:

Wyznacznik to liczba przypisana macierzy kwadratowej, oznaczana np.  $\det(A)$ , wykorzystywana m.in. do badania odwracalności macierzy. Macierz jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera.

#### Metody obliczania:

- **Rozwinięcie Laplace’a:** rozwinięcie względem dowolnego wiersza lub kolumny przy użyciu mniejszych wyznaczników (minorów). Dobrze nadaje się dla małych macierzy.
- **Eliminacja Gaussa:** przekształcamy macierz do postaci trójkątnej; wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej, z uwzględnieniem znaków wynikających z zamian wierszy.

#### Interpretacja geometryczna:

Dla macierzy  $2 \times 2$  lub  $3 \times 3$ , wyznacznik odpowiada odpowiednio polu powierzchni lub objętości równoległoboku/równoległościanu rozpiętego przez kolumny macierzy. Znak wyznacznika informuje o orientacji układu (np. dodatni – zachowana orientacja).

### 20. Wartości i wektory własne

#### Definicja:

Dla macierzy kwadratowej  $A$ , liczba  $\lambda$  jest **wartością własną**, jeśli istnieje niezerowy wektor  $v$ , taki że:

$$Av = \lambda v$$

Wektor  $v$  nazywany jest **wektorem własnym** odpowiadającym wartości  $\lambda$ .

## Zastosowania:

- **Diagonalizacja macierzy:** jeśli macierz  $A$  ma  $n$  liniowo niezależnych wektorów własnych, to można ją przedstawić w postaci  $A = PDP^{-1}$ , gdzie  $D$  to macierz diagonalna z wartościami własnymi. Ułatwia to np. potęgowanie macierzy.
- **Zastosowania praktyczne:** analiza stabilności układów dynamicznych, PCA (analiza głównych składowych), mechanika kwantowa, przetwarzanie obrazów, grafy.

## 21. Układy równań liniowych

### Liczba rozwiązań:

Układ równań liniowych może mieć:

- jedno rozwiązanie (układ oznaczony),
- nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony),
- brak rozwiązań (układ sprzeczny).

### Twierdzenie Kroneckera-Capellego:

Układ równań liniowych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy głównej  $A$  jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej  $(A|b)$ .

- Jeśli ten rząd jest równy liczbie niewiadomych  $\rightarrow$  układ oznaczony.
- Jeśli mniejszy  $\rightarrow$  nieskończenie wiele rozwiązań.
- Jeśli różny  $\rightarrow$  układ sprzeczny.

## Metody numeryczne

### 22. Metody numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych

#### Metoda Eulera

To najprostsza metoda numeryczna dla równań postaci  $y' = f(x, y)$ , z danym warunkiem początkowym  $y(x_0) = y_0$ . Przybliżenie wyznacza się iteracyjnie:  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$  gdzie  $h$  to krok siatki. Metoda ma rząd dokładności 1 i może być niestabilna przy większym kroku.



## Metody Rungego-Kutty

To rodzina dokładniejszych metod; najczęściej stosowana to metoda RK4 (czwartego rzędu):  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$  gdzie  $k_1, k_2, k_3, k_4$  to przybliżenia nachyleń w różnych punktach przedziału. RK4 zapewnia wysoką dokładność przy umiarkowanym koszcie obliczeniowym.

## 23. Metody znajdowania miejsc zerowych funkcji

### Metoda bisekcji

Polega na iteracyjnym dzieleniu przedziału  $[a, b]$ , w którym funkcja zmienia znak (czyli  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ). W każdej iteracji wybiera się połowę przedziału, w której występuje zmiana znaku. Metoda jest wolna (zbieżność liniowa), ale zawsze zbieżna.

### Metoda Newtona (Newtona-Raphsona)

Stosuje wzór:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  Wymaga znajomości pochodnej  $f'(x)$  i odpowiedniego punktu startowego. Zbieżność jest kwadratowa, ale może zawieść, jeśli  $f'(x_n) \approx 0$  lub punkt startowy jest źle dobrany.

## 24. Interpolacja wielomianowa

### Idea

Interpolacja polega na znalezieniu wielomianu  $P_n(x)$ , który przechodzi przez dane punkty  $(x_i, y_i)$ . Przykładowe metody to Lagrange'a lub Newtona. Celem jest aproksymacja funkcji znanej tylko w punktach.

### Efekt Rungego

Przy interpolacji wielomianowej na równomiernej siatce, szczególnie dla funkcji o dużych zmianach (np.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ), wielomian może silnie oscylować na końcach przedziału. Zjawisko to nazywa się efektem Rungego i wskazuje, że zwiększanie stopnia wielomianu nie zawsze poprawia jakość interpolacji.