多項式の Hurwitz 安定性

山本・森・駒田

関川研究室

December 10, 2019

Hurwitz 多項式

定義：Hurwitz 多項式

多項式

$$P(s) = P_0 + P_1 S + ... + P_n S^n \tag{1}$$

について、全ての根が複素平面の左側にあるとき、$P(s)$ を、フルビッツ多項式という。

Hurwitz 多項式

Hurwitz 多項式の性質

1. $P(s)$ が実フルビッツ多項式ならば、全ての係数は非零かつ同符号
2. $P(s)$ が n 次フルビッツ多項式ならば、$P(i\omega)$ の偏角 $\arg[P(i\omega)]$ は連続かつ $(-\infty, \infty)$ で狭義単調増加する ω の関数。さらにその増加量は、

$$\arg[P(+i\infty)] - \arg[P(-i\infty)] = n\pi \tag{2}$$

Hurwitz 多項式

多項式 $P(s)$ について、以下の多項式を定義する

定義

$$P^{even}(s) := p_0 + p_2 s^2 + p_4 s^4 + \ldots + \tag{3}$$
$$P^{odd}(s) := p_1 s + p_3 s^3 + p_5 s^5 + \ldots + \tag{4}$$
$$P^{e}(\omega) := P^{even}(i\omega) \tag{5}$$
$$P^{o}(\omega) := \frac{P^{odd}(i\omega)}{i\omega} \tag{6}$$

Hurwitz 多項式

定義：interlace 性

- P_{2n} と P_{2n-1} が同符号
- $P^e(\omega)$ と $P^o(\omega)$ の根はすべて実数で、$P^e(\omega)$ の m 個の正根と $P^o(\omega)$ の $m-1$ 個の正根は、

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \ldots < \omega_{e,m} < \omega_{o,m} \tag{7}$$

のように隔離される。

Hurwitz 安定

Interlace 定理,Hermite-Biehler 定理

実多項式 $P(S)$ がフルビッツ安定であることと、interlace 性を満たすことは同値

Hurwitz 安定

Interlace 定理,Hermite-Biehler 定理

実多項式 $P(S)$ がフルビッツ安定であることと、interlace 性を満たすことは同値

⇒証明

$P(s)$ がフルビッツ安定ならば、$P^{even}(s)$ と $P^{odd}(s)$ の最高次係数が同符号であることは明らか。また、$P(s)$ の全ての係数を正、$n=2m$ とする。性質 1.2 より、$arg[P(i\omega)]$ は競技単調増加。$P(s)$ の根は実軸に対して対称なので、ω が $-\omega$ から 0,0 から $+\infty$ まで増加するときの偏角の増加は等しく $\dfrac{n\pi}{2}$ であり、$P(0)$ は $P_0>0$ より正の実数である。

Hurwitz 安定

Interlace 定理,Hermite-Biehler 定理

実多項式 $P(S)$ がフルビッツ安定であることと、interlace 性を満たすことは同値

⇒証明

従って、$P(i\omega)$ は $\omega : 0 \to +\infty$ で原点を $\dfrac{n\pi}{2}$ だけ回転し、$P(i\omega) = /0$ からその間に原点を通らない。よって、虚軸上を m 回横切らなければならないので、そのとき実部は 0 となる。このときの ω を

$$\omega_{R,1}, \omega_{R,2}, \ldots, \omega_{R,m} \tag{8}$$

とおく。

Hurwitz 安定

Interlace 定理,Hermite-Biehler 定理

実多項式 $P(S)$ がフルビッツ安定であることと、interlace 性を満たすことは同値

⇒証明

同様に、$P(i\omega)$ は実軸上を $m-1$ 回横切るので、そのとき虚部は 0 となる。$\omega=0$ も含めて、このときの ω を,

$$0, \omega_{I,1}, \omega_{I,2}, ..., \omega_{I,m-1} \tag{9}$$

とおく。さらに、$P(i\omega)$ は原点の周りを回転するので、明らかに、

$$0<\omega_{R,1}<\omega_{I,1}<\omega_{R,2}<\omega_{I,2}, ..., <\omega_{R,m-1}<\omega_{I,m-1}<\omega_{n,m} \tag{10}$$

であるから、$P^e(\omega)$ と $P^o(\omega)$ の正の根は隔離される。

Interlace 定理,Hermite-Biehler 定理

実多項式 $P(S)$ がフルビッツ安定であることと、interlace 性を満たすことは同値

$\Leftarrow$ 証明

$P(s)$ がインターレース性を満たし、次数が $n = 2m$ かつ P_{2m}, P_{2m-1} がどちらも静と仮定する。$P^e(\omega)$ と $P^o(\omega)$ の根は、

$$0 < \omega_{e,1}^P < \omega_{o,1}^P < \omega_{e,2}^P < \ldots < \omega_{e,m}^P < \omega_{o,m}^P \tag{11}$$

とする。ここから、

$$P^e(\omega) = P_{2m} \prod_{i=1}^{m} (\omega^2 - (\omega_{e,i}^P)^2) \tag{12}$$

$$P^o(\omega) = P_{2m-1} \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - (\omega_{o,i}^P)^2) \tag{13}$$

Hurwitz 安定

Interlace 定理,Hermite-Biehler 定理

実多項式 $P(S)$ がフルビッツ安定であることと、interlace 性を満たすことは同値

$\Leftarrow$ 証明

次数が $2m$ で係数が全て正である安定な多項式 $Q(s)$ を考える。例えば、$Q(s) = (s+1)^{2m}$ をとろう。いずれにせよ

$$Q(s) = q_1 + q_1 s + q_2 s^2 + \ldots + q_{2m} s^{2m} \tag{14}$$

$Q(s)$ は安定なので、定理前半から $Q(s)$ はインターレース性を満たし、$Q^e(\omega)$ は m 個の正の根 $\omega^Q_{e,1}, \ldots, \omega^Q_{e,m}$ を持ち、$Q^o(\omega)$ は $m-1$ 個の正の根 $\omega^Q_{o,1}, \ldots, \omega^Q_{o,m-1}$ を持ち、

$$0 < \omega^Q_{e,1} < \omega^Q_{o,1} < \omega^Q_{e,2} < \ldots < \omega^Q_{e,m} < \omega^Q_{o,m} \tag{15}$$

Hurwitz 安定

Interlace 定理,Hermite-Biehler 定理

実多項式 $P(S)$ がフルビッツ安定であることと、interlace 性を満たすことは同値

$\Leftarrow$ 証明

故に、

$$Q^e(\omega) = q_{2m} \prod_{i=1}^{m} (\omega^2 - (\omega_{e,i}^Q)^2) \tag{16}$$

$$Q^o(\omega) = q_{2m-1} \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - (\omega_{o,i}^Q)^2) \tag{17}$$

Hurwitz 安定

(つ・ω・)つ 途中なう

Hurwitz 安定

o((・ω・))o Tochu Now

Hurwitz 安定

c(・ω・c) TOCHU NOW

Hurwitz 安定

左半平面あるいは、実多項式のフルビッツ安定の問題を解き、インターレース定理、従って境界交差定理に基づく、初頭の試験手順へ発展させる。この手順はよく知られるラウスの試験に同等であると判明する。n 次の実多項式公式

$$P(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_n s^n \tag{18}$$

$$p_i > 0, i = 0, \ldots, n \tag{19}$$

$P(s)$ を指数の偶奇により、

$$P(s) = P^{even}(s) + P^{odd}(s) \tag{20}$$

に分解できるとする。

Hurwitz 安定

$n-1$ 次の多項式 ($n=2m$ の場合)

$$Q(s)=\left[P^{even}(s)-\frac{P_{2m}}{P_{2m-1}}sP^{odd}(s)\right]+P^{odd}(s) \qquad (21)$$

($n=2m+1$ の場合)

$$Q(s)=\left[P^{odd}(s)-\frac{P_{2m+1}}{P_{2m}}sP^{even}(s)\right]+P^{even}(s) \qquad (22)$$

と定義する。

$$\mu=\frac{P_n}{P_{n-1}} \qquad (23)$$

を用いて、

$$\begin{aligned}Q(s)=P_{n-1}S^{n-1}+(P_{n-2}-\mu P_{n-3})S^{n-2}+P_{n-2}S^{n-3}\\+(P_{n-4}-\mu P_{n-5})S^{n-4}+\ldots+\end{aligned}$$

Hurwitz 安定

補題 1.4

$P(s)$ が全て正係数のとき、$P(S)$ が安定⇔ $Q(s)$ が安定

証明

たとえば、$n=2m$ とし、インターレース定理を使うとすると、(a)$P(s)=p_0+\ldots+p_{2m}s^{2m}$ が安定なので、インターレース定理を満たすと仮定する。

$$0<\omega_{e,1}<\omega_{o,1}<\omega_{e,2}<\ldots<\omega_{e,m}<\omega_{o,m} \tag{24}$$

を $P^e(\omega)$ と $P^o(\omega)$ のインターレース根とする。

Hurwitz 安定

補題 1.4

$P(s)$ が全て正係数のとき、$P(S)$ が安定$\Leftrightarrow Q(s)$ が安定

証明

(1.56) より、$Q^e(\omega), Q^o(\omega)$ はそれぞれ

$$Q^e(\omega) = P^e(\omega) + \mu\omega^2 P^e(\omega), \mu = \frac{P_{2m}}{P_{2m-1}} \tag{25}$$

$$Q^o(\omega) = P^o(\omega) \tag{26}$$

で与えられる。このことから、$Q^o(\omega)$ が要する数の正の根、つまり、$P^o(\omega)$ の $m-1$ 個の根があることがすでに結論付けられる。

Hurwitz 安定

補題 1.4

$P(s)$ が全て正係数のとき、$P(S)$ が安定⇔ $Q(s)$ が安定

証明

また、$Q^e(s)$ の形から、

$$Q^e(0) = P^e(0) > 0 \tag{27}$$
$$Q^e(\omega_{0,1}) = P^e(\omega_{0,1}) < 0 \tag{28}$$
$$\ldots \tag{29}$$
$$Q^e(\omega_{0,m-2}) = P^e(\omega_{0,m-2})...(-1)^{m-2} \tag{30}$$
$$Q^e(\omega_{0,m-1}) = P^e(\omega_{0,m-1})...(-1)^{m-1} \tag{31}$$

と推定できる。故に、$Q^e(\omega)$ には $m-1$ 個の正の根 $\omega'_{e,1}, \omega'_{e,2}, ..., \omega'_{e,m-1}$ があり、$Q^o(\omega)$ の根と交錯することが確立される。さらに、$Q^e(\omega)$ は ω^2 の次数が $m-1$ なので、持ちうる正の根は唯一である。

補題 1.4

$P(s)$ が全て正係数のとき、$P(S)$ が安定$\Leftrightarrow$ $Q(s)$ が安定

証明

最後に、$Q^o(\omega)$ の最後の根 $\omega_{e,m-1}$ で $Q^e(\omega)$ の符号は $(-1)^{m-1}$ と同じであるとわかる。しかし、$Q^e(\omega)$ の最高係数は

$$q_{2m-2}(^1)^{m-1} \tag{32}$$

に過ぎない。この q_{2m-2} は $q_{2m-1} = p_{2m-1}$ と同様に厳密に正でなくてはならない。そうでなければ、$Q^e(\omega)$ は $\omega_{o,m-1}$ から $+\infty$ の間の符号変化を再び引き起こし、$Q^e(\omega)$ が m 個の正の根を持つことに矛盾する。(一方、それは ω^2 の次数が $m-1$ の多項式) 従って、$P(s)$ が安定ならば、インターレースの特性を満たし、安定する。

Hurwitz 安定

補題 1.4

$P(s)$ が全て正係数のとき、$P(S)$ が安定$\Leftrightarrow$ $Q(s)$ が安定

証明

(b) 逆に、$Q(s)$ が安定ならば、

$$P(s) = [Q^e(s) + \mu s Q^e(s)] + Q^o(s), \mu = \frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \quad (33)$$

と書ける。(a) と同じ推論により、$P^o(\omega)$ には既に必要となる $m-1$ 個の正の根があり、$P^e(\omega)$ にはすでに $P^o(\omega)$ の根と交錯する区間 $(0, \omega_{0,m-1})$ に $m-1$ 個の根がある。さらに、$\omega_{0,m-1}$ での $P^e(\omega)$ の符号は $(-1)^{m-1}$ と同じであるが、$P(s)$ の項 $P_{2m}S^{2m}$ は $+\infty$ での $P^e(\omega)$ の符号を $(-1)^m$ と同じする。従って、$P^e(\omega)$ は m 番目の正の根、

$$\omega_{e,m} > \omega_{o,m-1} \quad (34)$$

を持つので、$P(s)$ はインターレースの特性を満たし、ゆえに安定

補題 5.1

$$P_1(s) = P^{even}(s) + P_1^{odd}(s) \tag{35}$$
$$P_2(s) = P^{even}(s) + P_2^{odd}(s) \tag{36}$$

が同じ偶数部 $P^{even}(s)$ と異なる奇数部 $P_1^{odd}(s)$ と $P_2^{odd}(s)$ をそれぞれ持ち、

$$P_1^o(\omega) \leq P_2^o(\omega)(\forall \omega \in [0, \infty]) \tag{37}$$

を満たす 2 つの安定多項式とする。このとき、$P^{odd}(s)$ が

$$P_1^o(\omega) \leq P^o(\omega) \leq P_2^o(\omega)(\forall \omega \in [0, \infty])(\forall \omega \in [0, \infty]) \tag{38}$$

を満たすようなすべての多項式

$$P(s) = P^{even}(s) + P^{odd}(s) \tag{39}$$

は安定である。

補題 5.1 の証明

$P_1(s)$ と $P_2(s)$ は安定だから、$P_1^o(\omega)$ と $P_2^o(\omega)$ はどちらも $P^e(\omega)$ とインターレース定義を満たす。特に、$P_1^o(\omega)$ と $P_2^o(\omega)$ は次数が等しいだけでなく、最高次係数の符号は、$P^e(\omega)$ の最高次係数と同じである。
ここから、$P^o(\omega)$ が $P_1^o(\omega)$ や $P_2^o(\omega)$ と同次かつ最高次係数の符号が同じでない限り、$P^o(\omega)$ は 2 を満たしえない。このとき、2 の条件より、$P^o(\omega)$ の根と $P^e(\omega)$ の根は隔離する。故に、定理 1.7 から $P(s)$ は安定である。

Hurwitz test algorithm

Algorithm1.2

- $P^{(0)}(s) := P(s)$
- $P^{(i)}$ の係数が全て正であることを確認
- (1.57) に従い、$P^{(i+1)} := Q(s)$
- (2) を満たさない ($P(s)$ はフルビッツでない) か、$P^{(i-2)}$(次数 2) に達するまで (2) に戻る。この場合、条件 (2) でも十分 ($P(s)$ はフルビッツ)