Porównanie różnych metod numerycznego rozwiązywania liniowego układu równań różniczkowych

Bartosz Zbik

2024-03-02

Numerycznie rozwiąż:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1023x + 2023y \\ \dot{y} = -1024x - 2024y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Rozwiazanie chcemy dostać na przedziale $t \in [0, 0.125]$. Użyj trzech metod:

- Jawnej metody Eulera (z różnymi krokami czasowymi $\Delta t = 1/256, 1/512, 1/2048$)
- Runge-Kutta (z różnymi krokami czasowymi $\Delta t = 1/256, 1/512, 1/2048$)
- Niejawna metoda Eulera ($h = 1/256, 1/512, 1/2048$)

Niejawna metoda Eulera: Dany jest problem

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

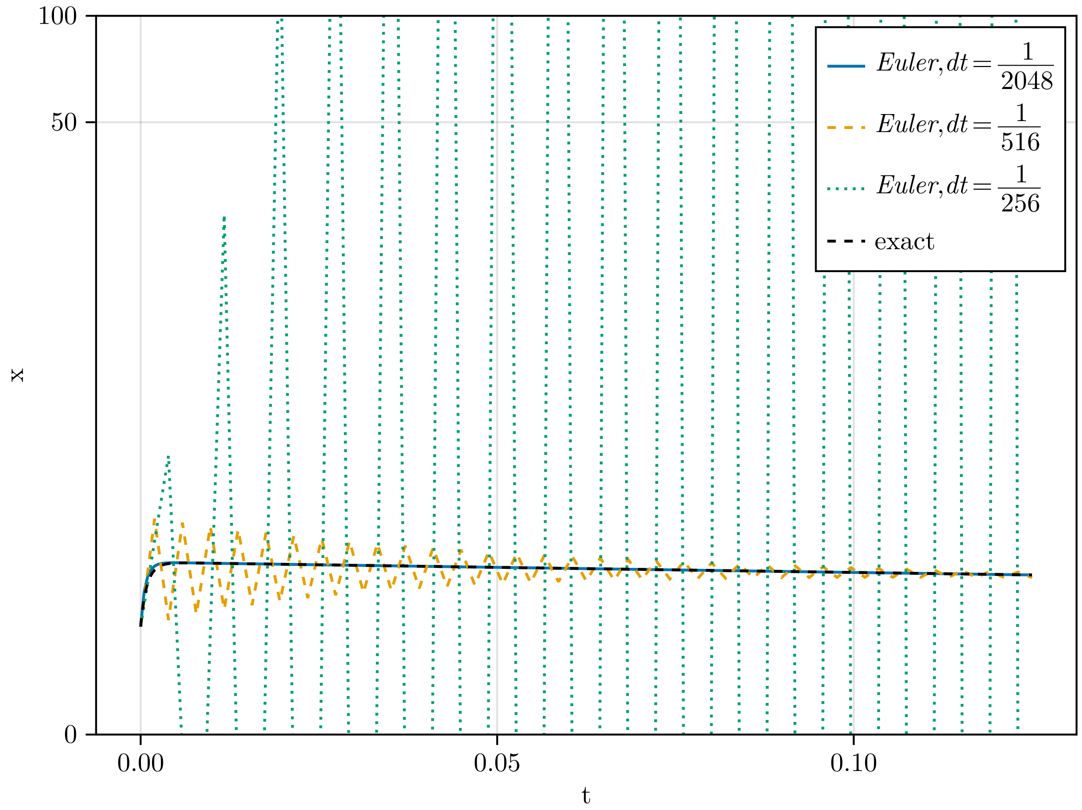
Robimy dyskretyzację i pochodną liczymy "w punkcie docelowym", a nie w punkcie w który jesteśmy

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \tag{3}$$

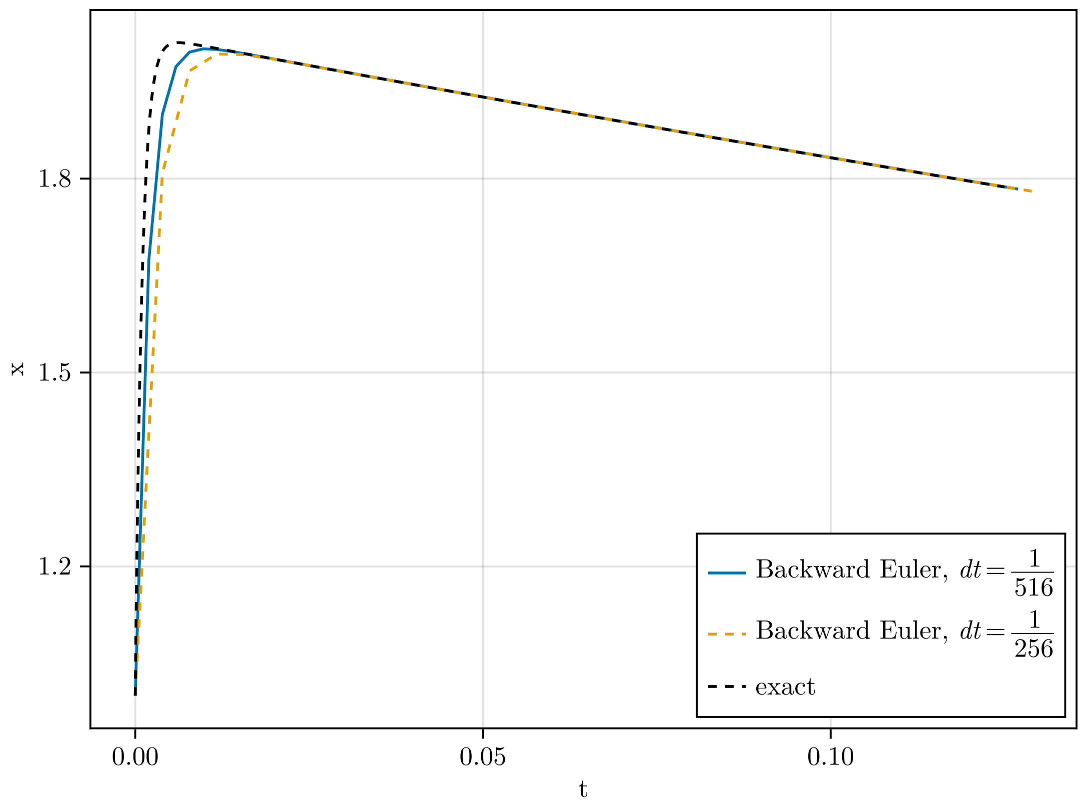
Generalnie to jest trudniejsze, ale dla r. liniowego dacie radę to odwikłać.

1 Kod

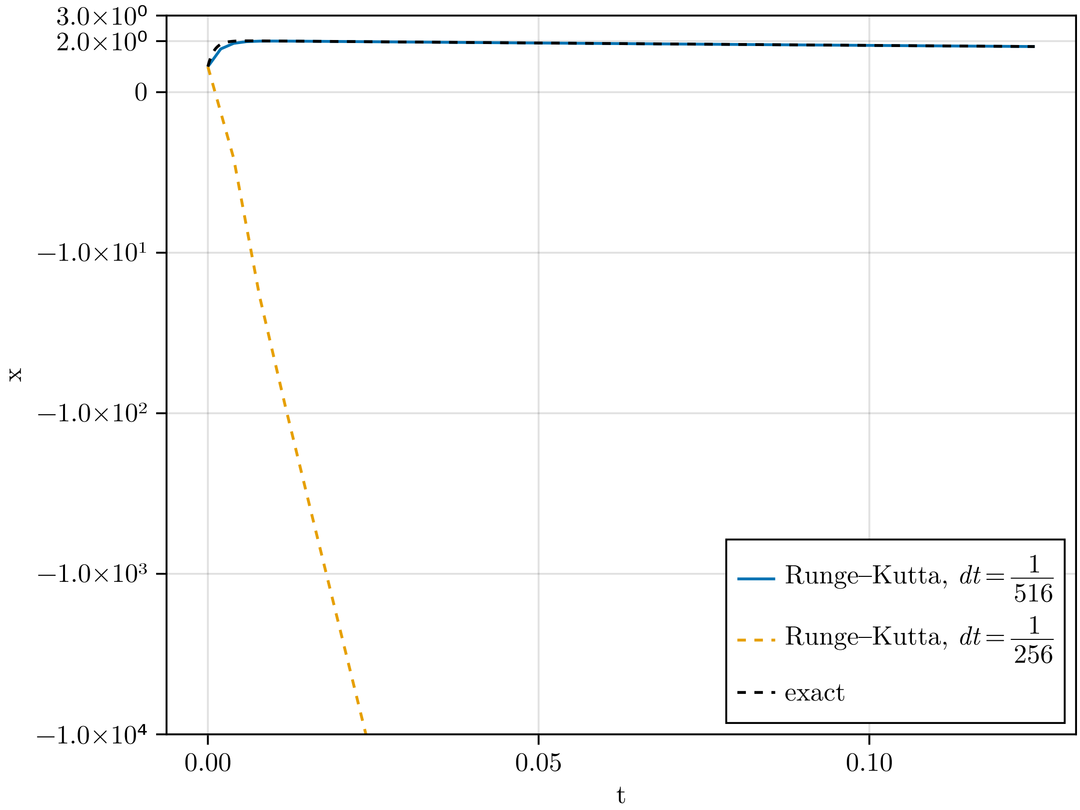
2 Wizualizacja wyników



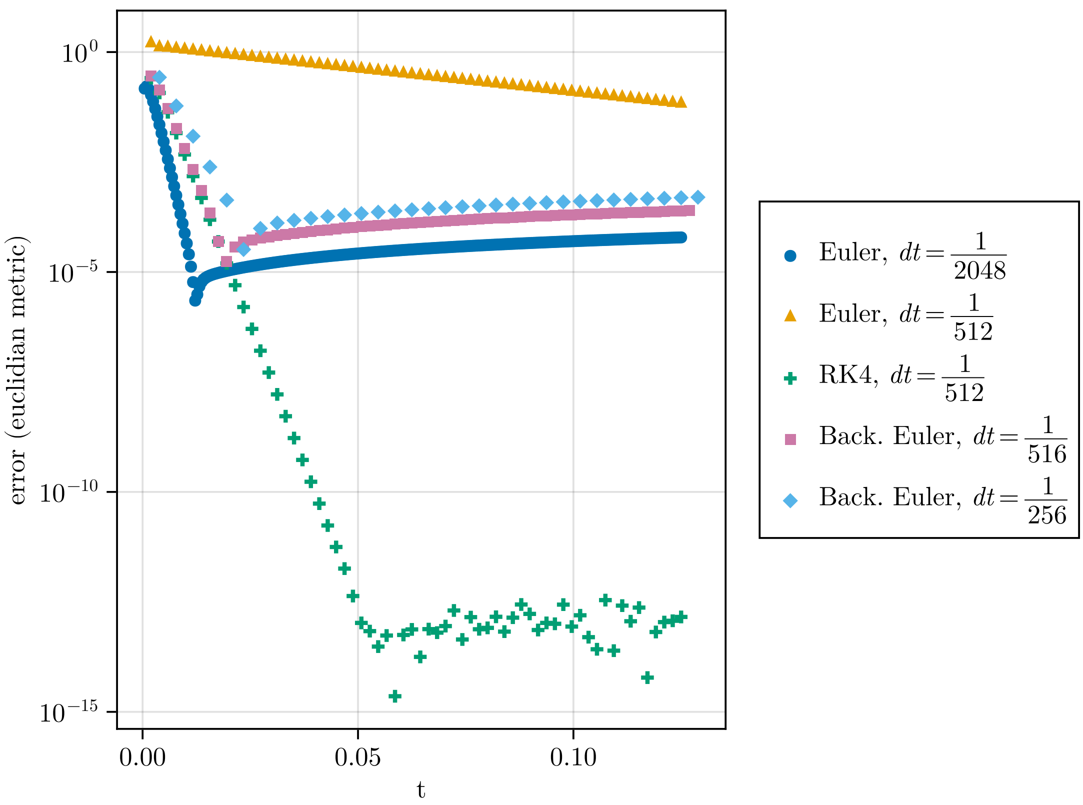
Rysunek 1: Jawna metoda Eulera z różnym krokiem czasowym.



Rysunek 2: Niejawna metoda Eulera z różnym krokiem czasowym. Tutaj konieczne jest zainwestowanie pewnej dodatkowej wiedzy o równaniu (trzeba odwrócić relację między x_{n+1}, a x_n.



Rysunek 3: Czterokrokowa metoda Rungego-Kutty ze stałym krokiem czasowym (nieadaptowalna)



Rysunek 4: Porównanie błędów numerycznych jakimi obarczone były rozwiązania poszczególnymi metodami.