Model Kuramoto

Bartosz Zbik

2024-05-11

Polecam zacząć od przeczytania artykułu na wikipedii `https://en.wikipedia.org/wiki/Kuramoto_model`.

Generalnie rozważmy układ $N \gg 1$ oscylatorów na cyklach granicznych. Położenie i-tego oscylatora jest jednoznacznie opisane przez jego fazę $\theta_i \in [0, 2\pi]$. Fazy oscylatorów chcą się zsynchronizować. Dynamika układu jest opisana przez równianie (1). Chcemy zaobserwować, że w zależności od tego jaka jest wartość parametru sprzężenia, to zachowanie układu jest zupełnie inne.

Treść Problemu: Warunki początkowe losujemy ze standardowego rozkładu normalnego (potem możecie zrobić inne, ja np. wziąłem Cauchy'ego). Analityczna wartość parametru krytycznego jest już wyznaczona (7) i chcecie zrobić ładne rysunki jak układ ewoluuje i pooglądać numerycznie jak wygląda zbieżność (jak wyłania się z tego synchronizacja). Proponuję na początek $N = 128$ (z Julią to 512 spokojnie się liczyło na moim laptopie) i $K \in \{\frac{1}{4}K_c, \frac{1}{2}K_c, K_c, \frac{3}{2}K_c, 2K_c\}$.

Wskazówka implementacyjne: Skorzystaj z tożsamości trygonometrycznych aby się przekonać, że problem nie jest kwadratowy, ale liniowy.

Problem jest oparty na pracy `https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4`.

1 Opis problemu raz jeszcze (był w sprawozdaniu, to nie kasowałem)

Model dany jest przez układ N równań

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) \tag{1}$$

Definiujemy parametr prządku r i fazę ψ

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}, \tag{2}$$

co pozwala przepisać układ równań w postaci

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - rK\sin(\theta_i - \psi) \tag{3}$$

Rozwiązywałem go obliczając w każdym kroku całkowania najpierw r i ψ, a potem poszczególne przyrosty wynikające z równania (3) co sprowadzało się do złożoności $\mathcal{O}(3N)$ (albo $\mathcal{O}(2N)$ w zależności, czy $e^{i\theta}$ wymaga obliczenia dwóch funkcji trygonometrycznych czy jednej) , a nie $\mathcal{O}(N^2)$.

Funkcje `kuramoto!` i `kuramotoorder` są wykorzystywane przez solver do rozwiązania równania. Warunki początkowe $\theta_i(0)$ oraz parametry ω_i są losowane, a cała procedura schowana jest w funkcjach `findsol` (dla $\omega \sim \mathcal{N}(0,1)$) oraz `findcauchysol` (dla ω z rozkładu Cauchy'ego). Funkcje `asymptoticnormal` i `asymptoticcauchy` służą już tylko do wygenerowania rysunków i nie ma tam żadnej logiki związanej z samym rozwiązaniem problemu.

2 Kod

3 Wizualizacja wyników

Przy rozwiązywaniu przyjąłem $N = 512$ i dla każdej wartości K wygenerowałem 30 rozwiązań. W rozwiązaniu jako estymator parametru porządku r brałem średnią po realizacjach, co nie zawsze dawało wynik zgodny z teorią. Prawdopodobnie dlatego, że $r \in [0, 1]$, więc przykładowo dla $K < K_c$ fluktuacje r jedynie zawyżają $< r >$.

Na wszystkich poniższych rysunkach szare krzywe odpowiadają poszczególnym trajektoriom, ciągła niebieska linia odpowiada średniemu r liczonemu po trajektoriach, a linia przerywana odpowiada analitycznie wyznaczonej wartości r. W nagłówkach rysunków podawałem r i $< r >$ z dokładnością do trzech cyfr po przecinku.

3.1 Rozkład Normalny

Dla ω pochodzącego ze standardowego rozkładu normalnego

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\omega^2}{2}} \tag{4}$$

Wartość krytyczną wyznaczamy dzieląc równianie

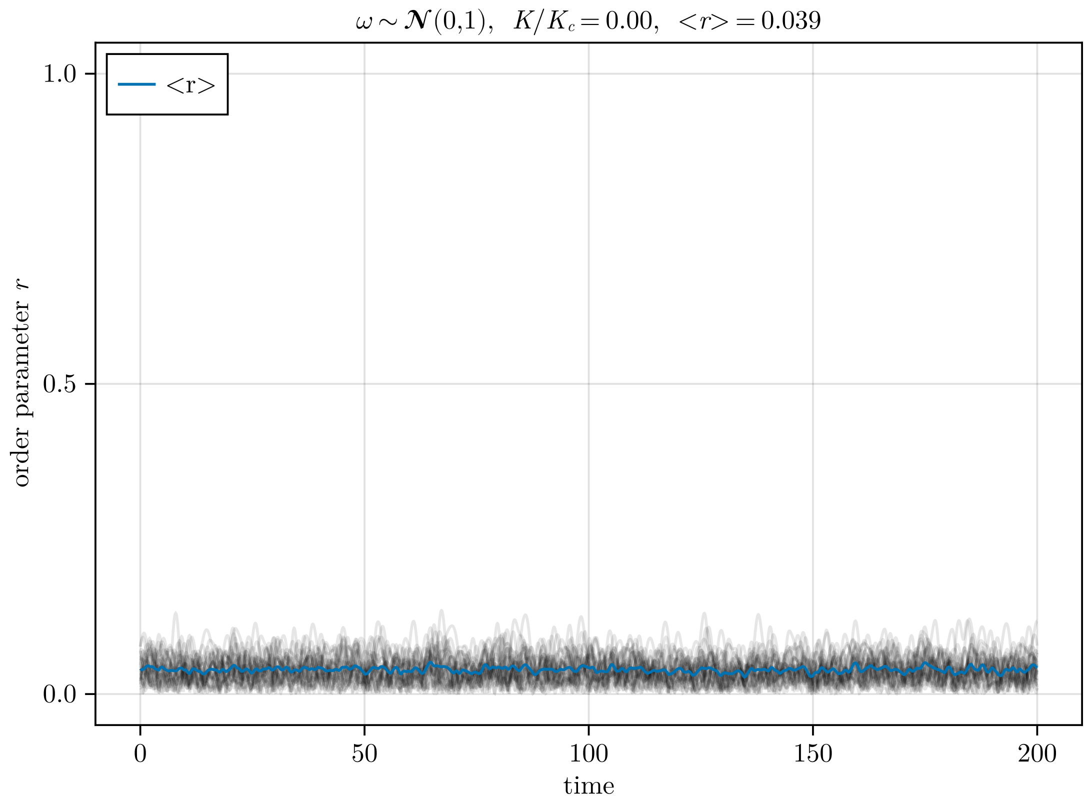
$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Kr \sin\theta) d\theta \tag{5}$$

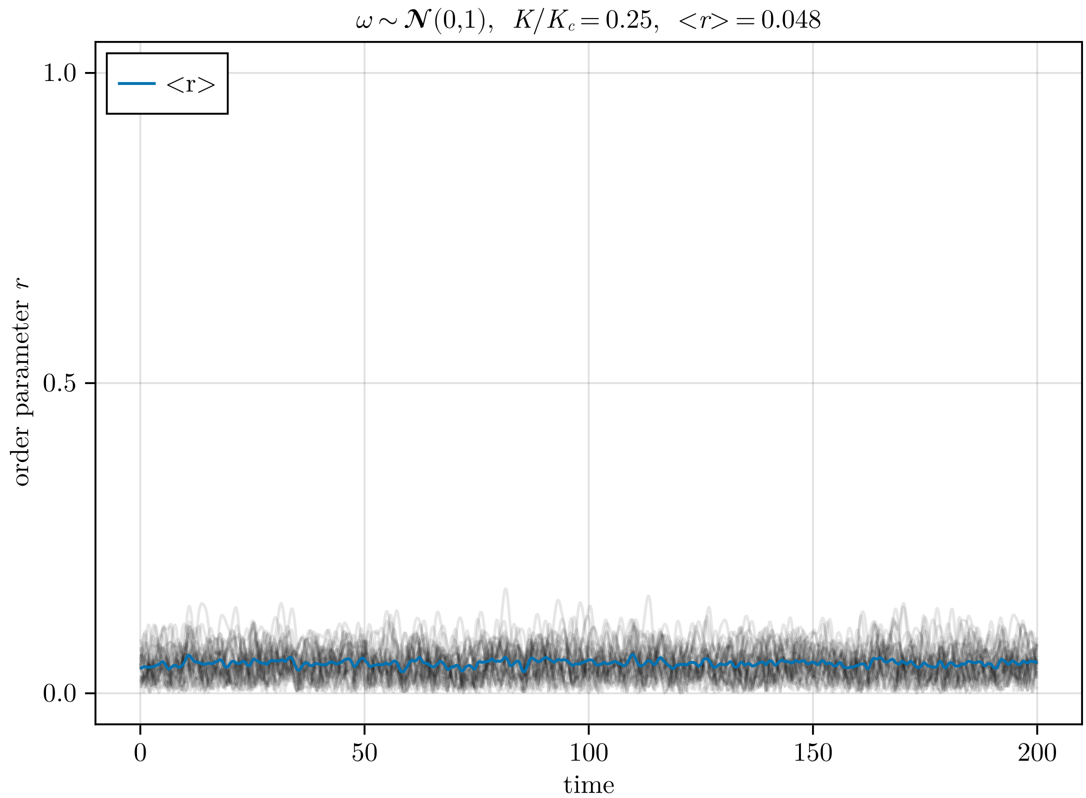
przez r i przechodząc do granicy $r \to 0^+$. Dostajemy

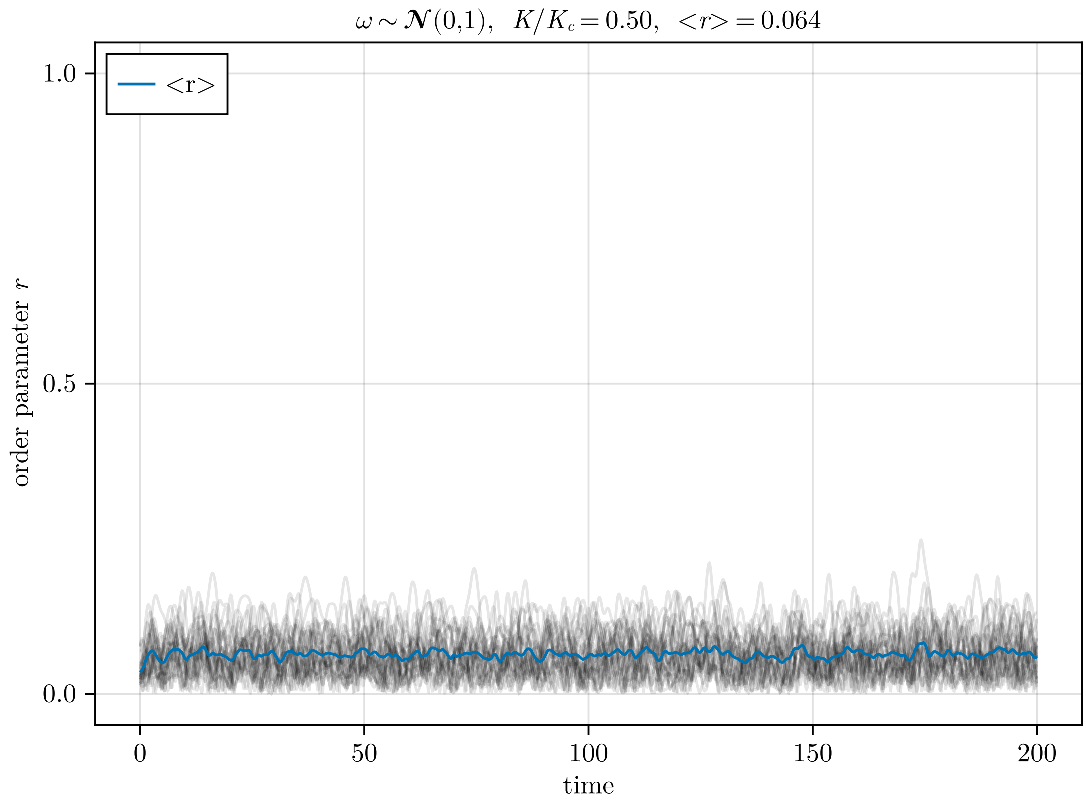
$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\theta = \frac{\pi K}{2\sqrt{2\pi}}. \tag{6}$$

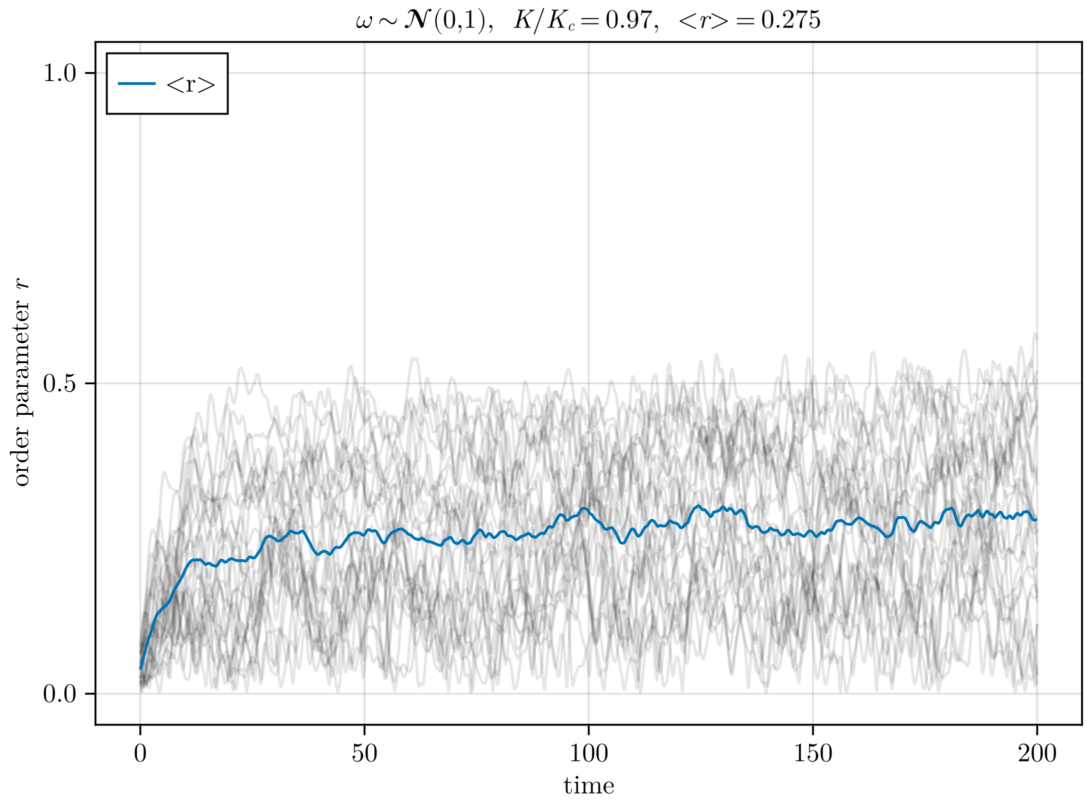
Zatem

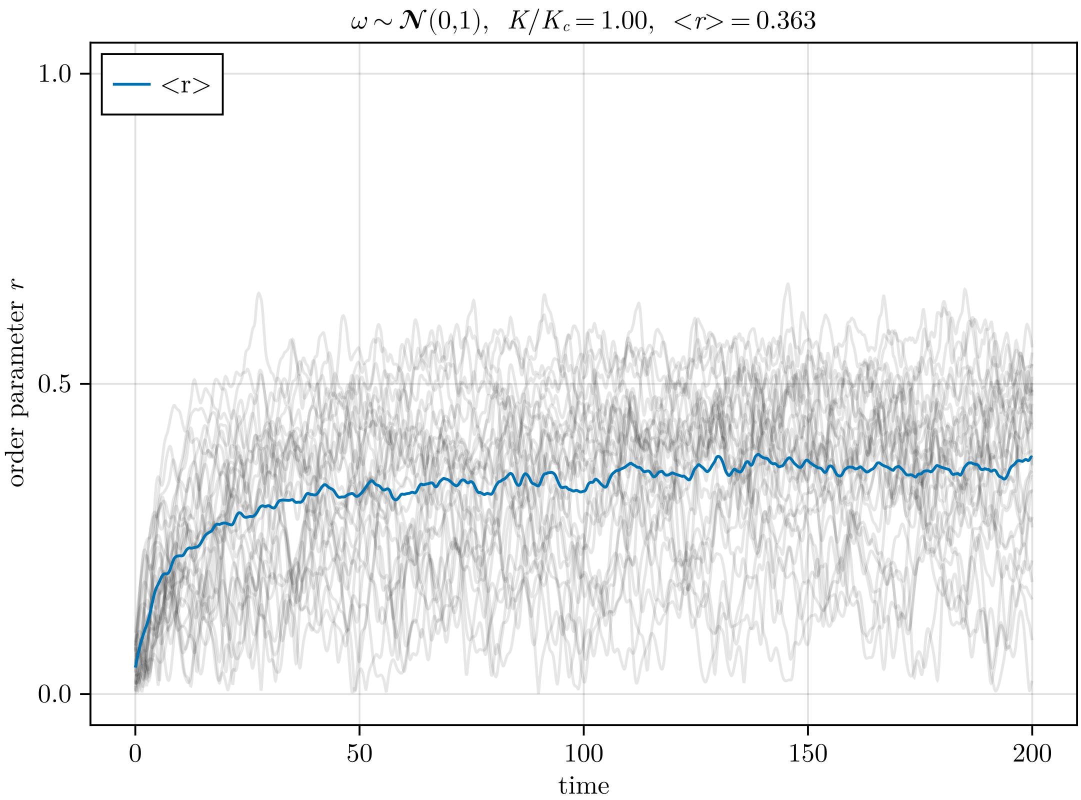
$$K_c = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \tag{7}$$

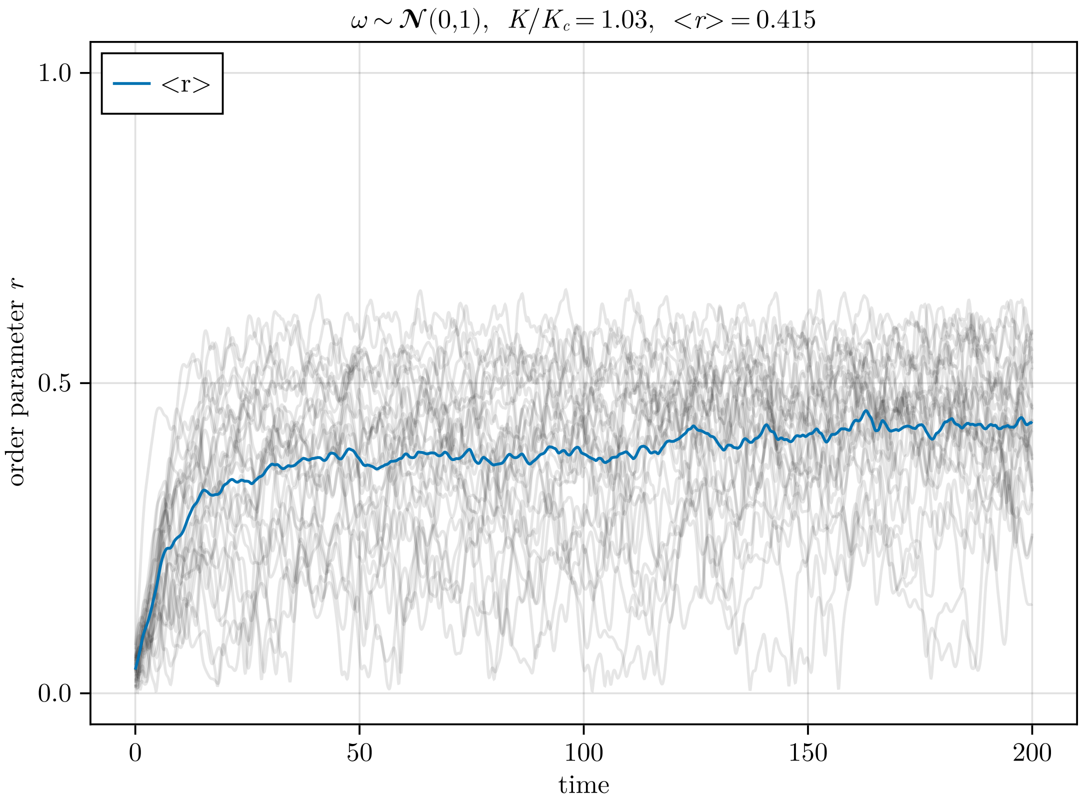

$\omega \sim \mathcal{N}(0,1)$, $K/K_c = 0.00$, $<r> = 0.039$
<r>
order parameter r
time
0.0
0.5
1.0
0
50
100
150
200

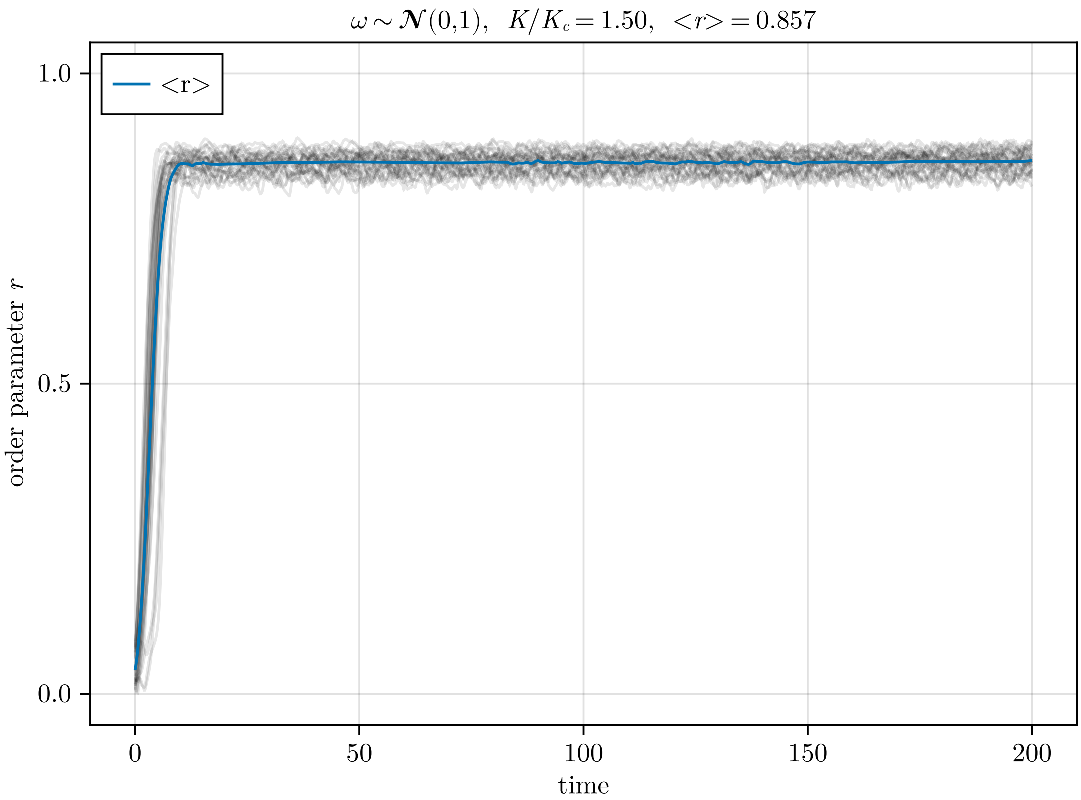

$\omega \sim \mathcal{N}(0,1)$, $K/K_c = 0.25$, $<r> = 0.048$
<r>
order parameter r
time
0.0
0.5
1.0
0
50
100
150
200

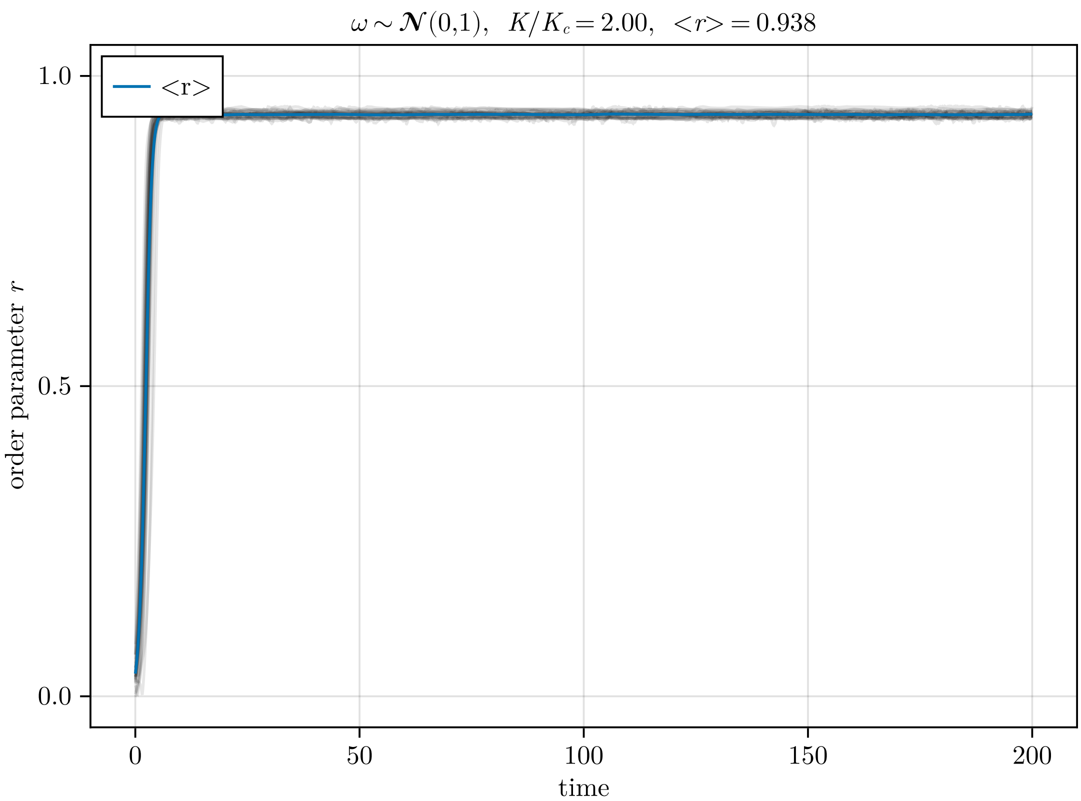

$\omega \sim \mathcal{N}(0,1)$, $K/K_c = 0.50$, $<r> = 0.064$
<r>
1.0
0.5
0.0
order parameter r
0
50
100
150
200
time

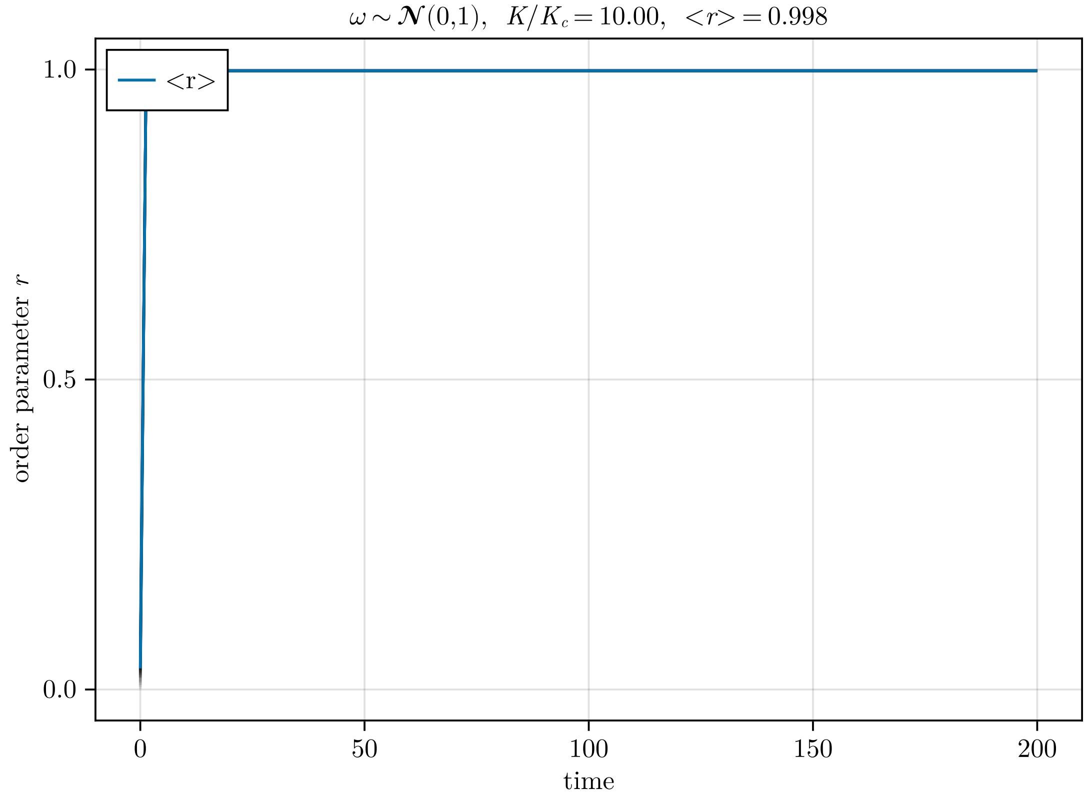

$\omega \sim \mathcal{N}(0,1)$, $K/K_c = 0.97$, $<r> = 0.275$
<r>
1.0
0.5
0.0
order parameter r
0
50
100
150
200
time


$\omega \sim \mathcal{N}(0,1), \quad K/K_c = 1.00, \quad <r> = 0.363$
<r>
1.0
0.5
0.0
order parameter r
0
50
100
150
200
time


$\omega \sim \mathcal{N}(0,1), \quad K/K_c = 1.03, \quad <r> = 0.415$
<r>
1.0
0.5
0.0
order parameter r
0
50
100
150
200
time


$\omega \sim \mathcal{N}(0,1)$, $K/K_c = 1.50$, $<r> = 0.857$
<r>
order parameter r
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200
time


$\omega \sim \mathcal{N}(0,1)$, $K/K_c = 2.00$, $<r> = 0.938$
<r>
order parameter r
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200
time


$\omega \sim \mathcal{N}(0,1), \ \ K/K_c = 10.00, \ \ <r> = 0.998$
1.0
0.5
0.0
order parameter r
<r>
0
50
100
150
200
time

3.2 Rozkład Cauchy'ego

Dla ω pochodzącego z rozkładu Cauchy'ego

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}. \tag{8}$$

Wyznaczamy parametr krytyczny z równania (całkowanie w Matematice)

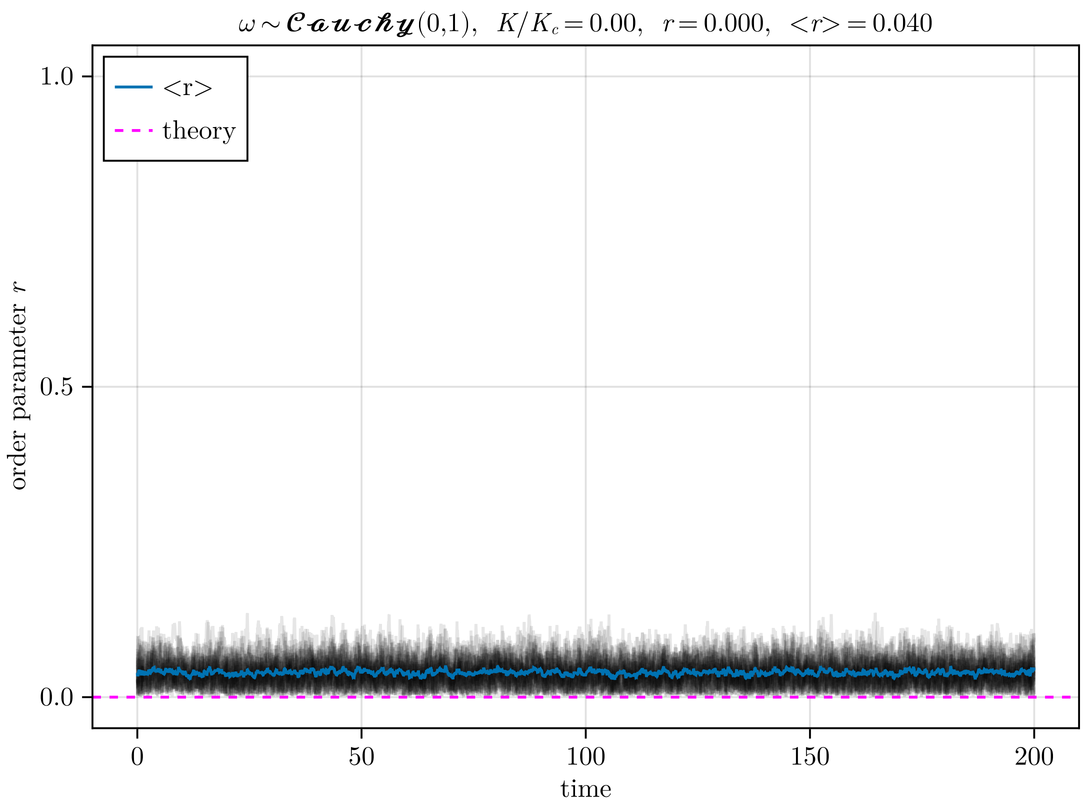
$$r = Kr\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Kr\sin\theta)d\theta = 2Kr\frac{1}{2+2\sqrt{1+K^2r^2}}, \tag{9}$$

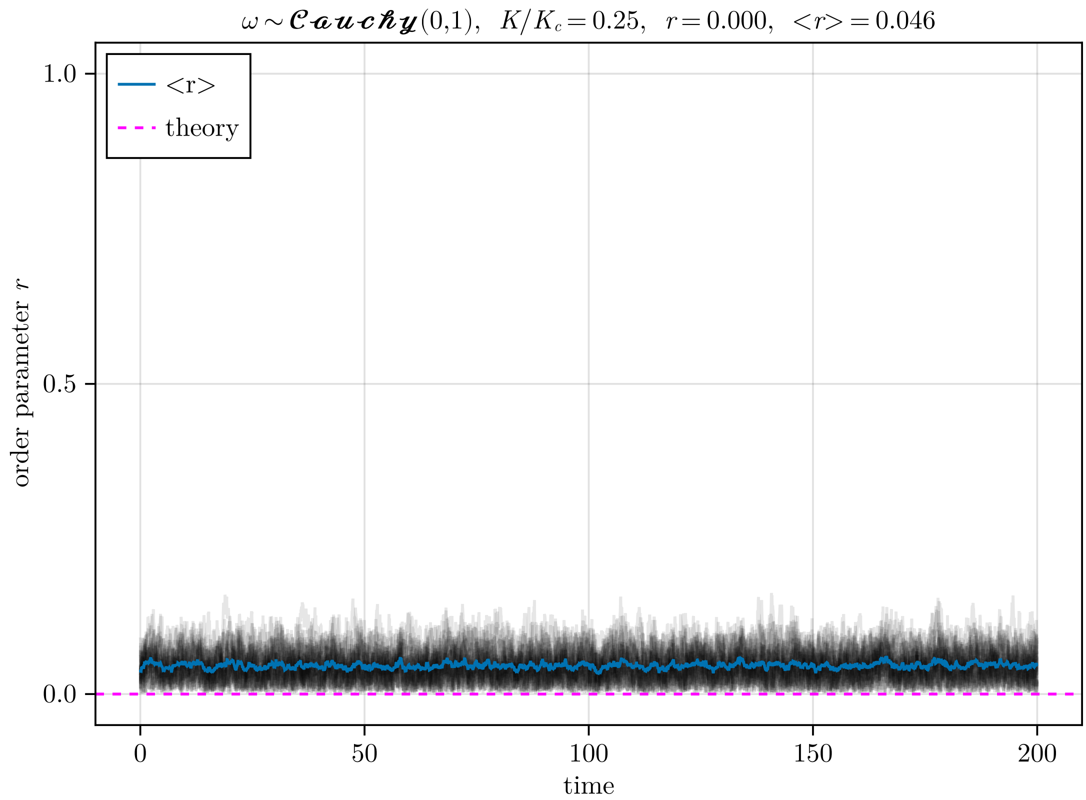
co po przekształceniu daje

$$r = \sqrt{\frac{K-2}{K}} \quad \text{dla } K > 2 \tag{10}$$

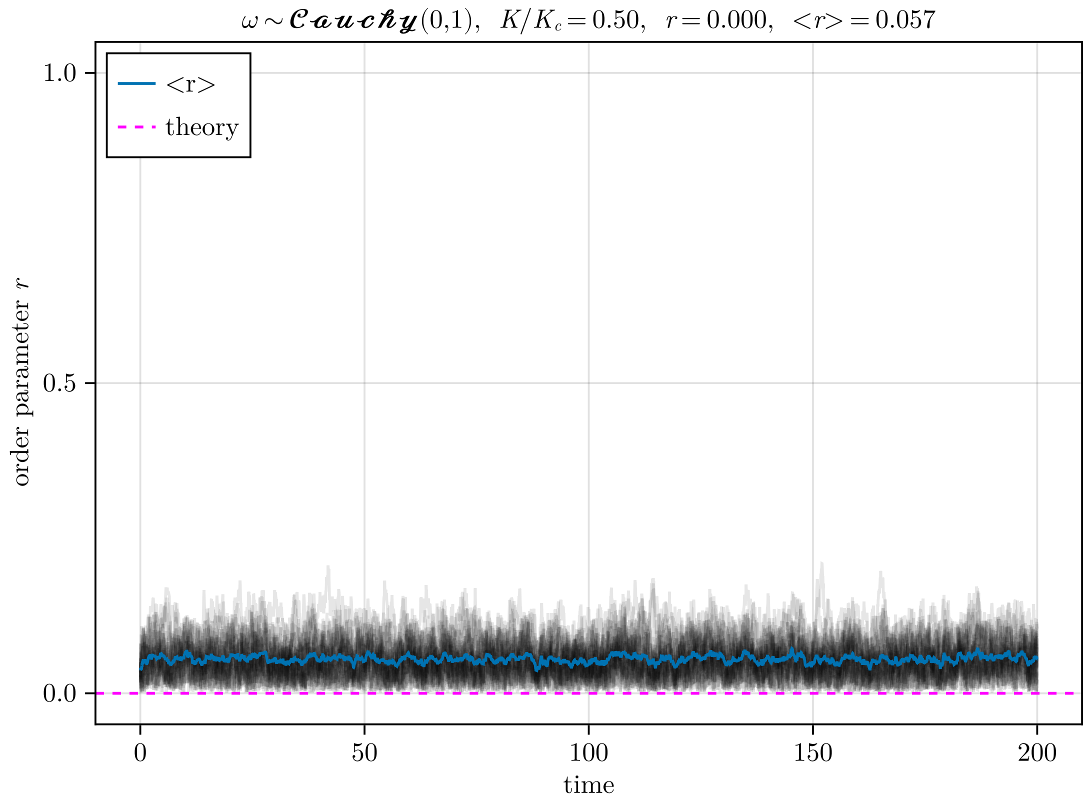
oraz wartość krytyczną

$$K_c = 2 \tag{11}$$

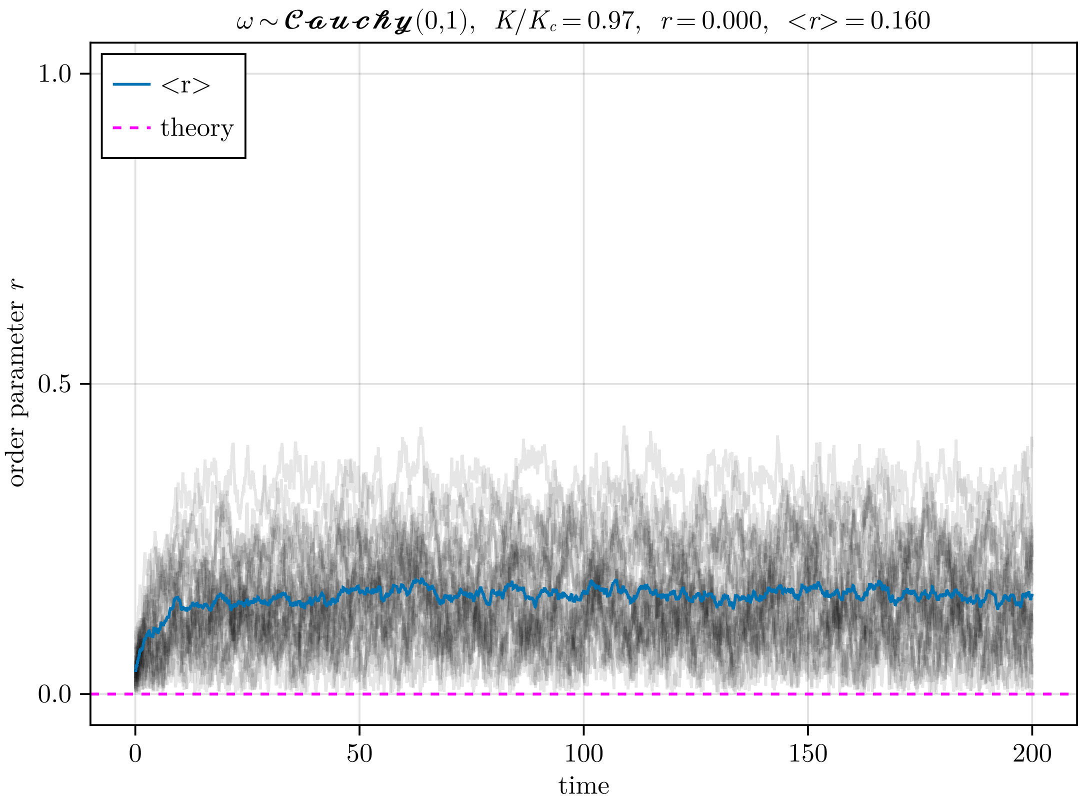




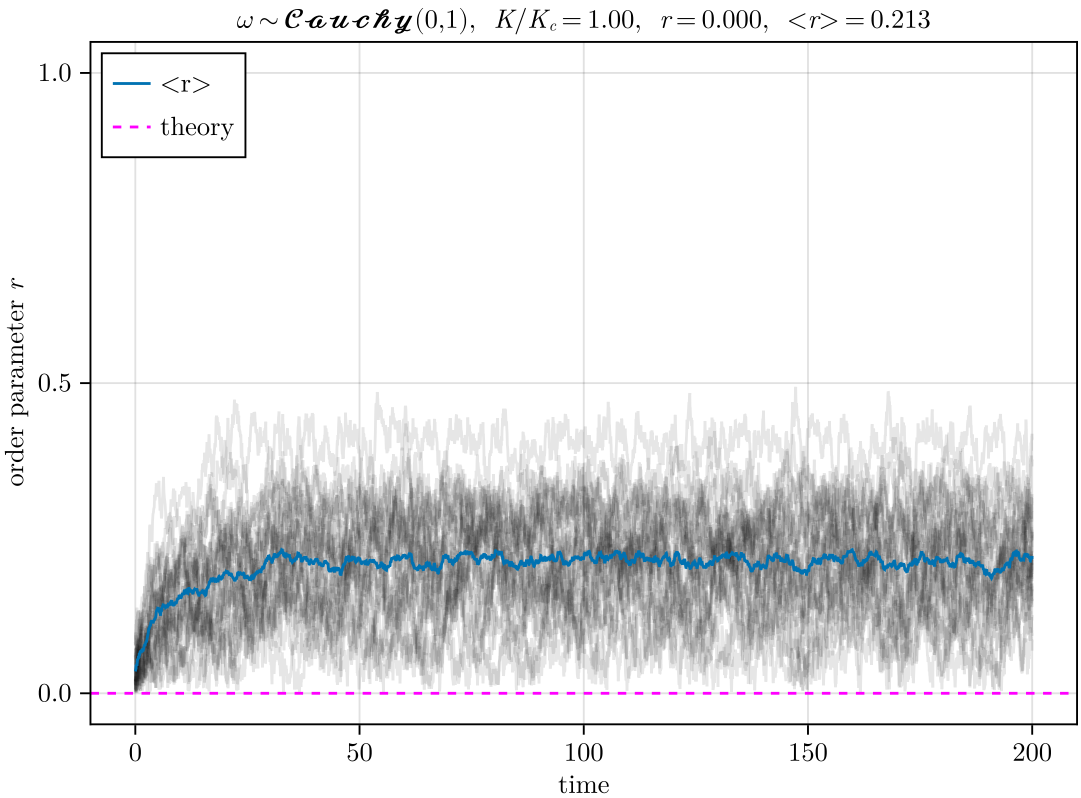
$\omega \sim \mathcal{Cauchy}(0,1)$, $K/K_c = 0.25$, $r = 0.000$, $<r> = 0.046$
<r>
theory
order parameter r
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200
time



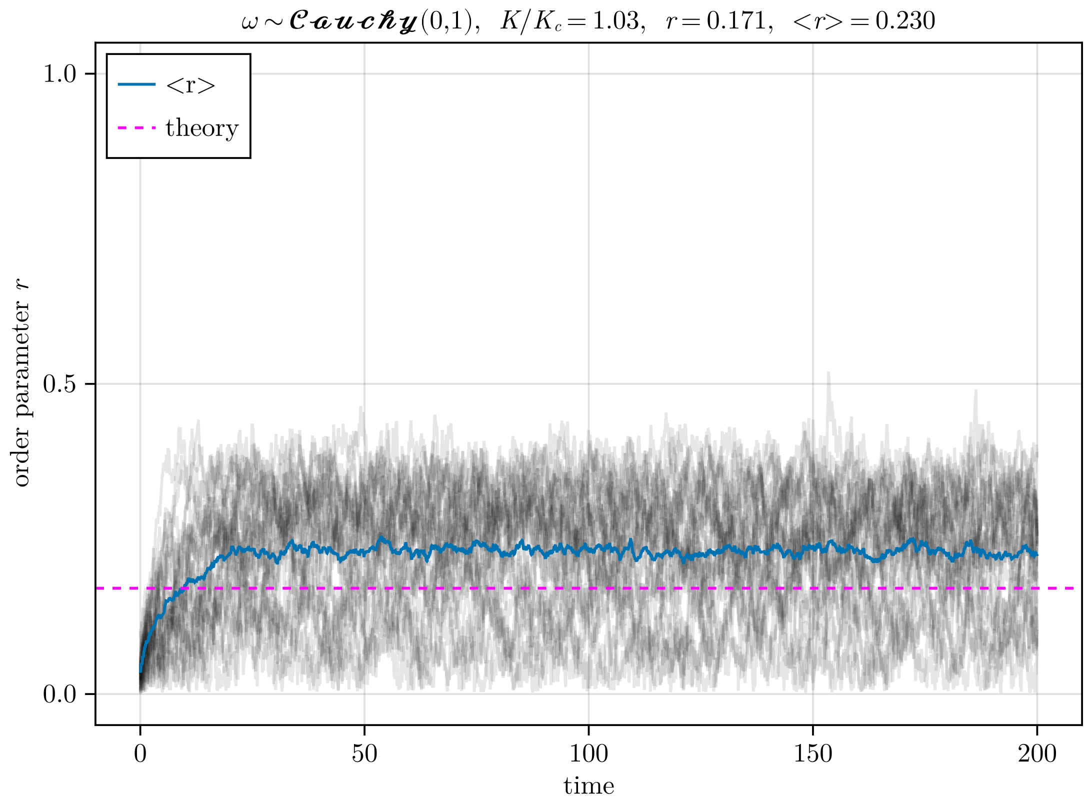
$\omega \sim \mathcal{Cauchy}(0,1)$, $K/K_c = 0.50$, $r = 0.000$, $<r> = 0.057$
<r>
theory
order parameter r
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200
time



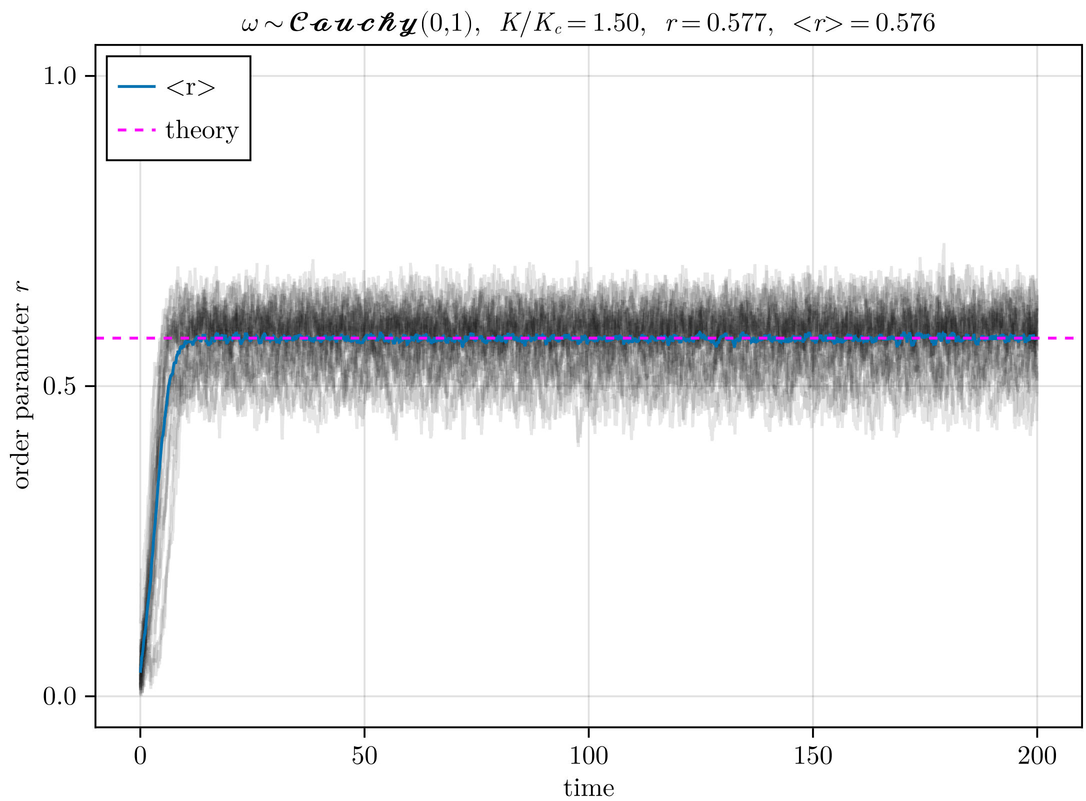
ω ∼ Cauchy(0,1), K/K_c = 0.97, r = 0.000, <r> = 0.160
<r>
theory
order parameter r
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200
time



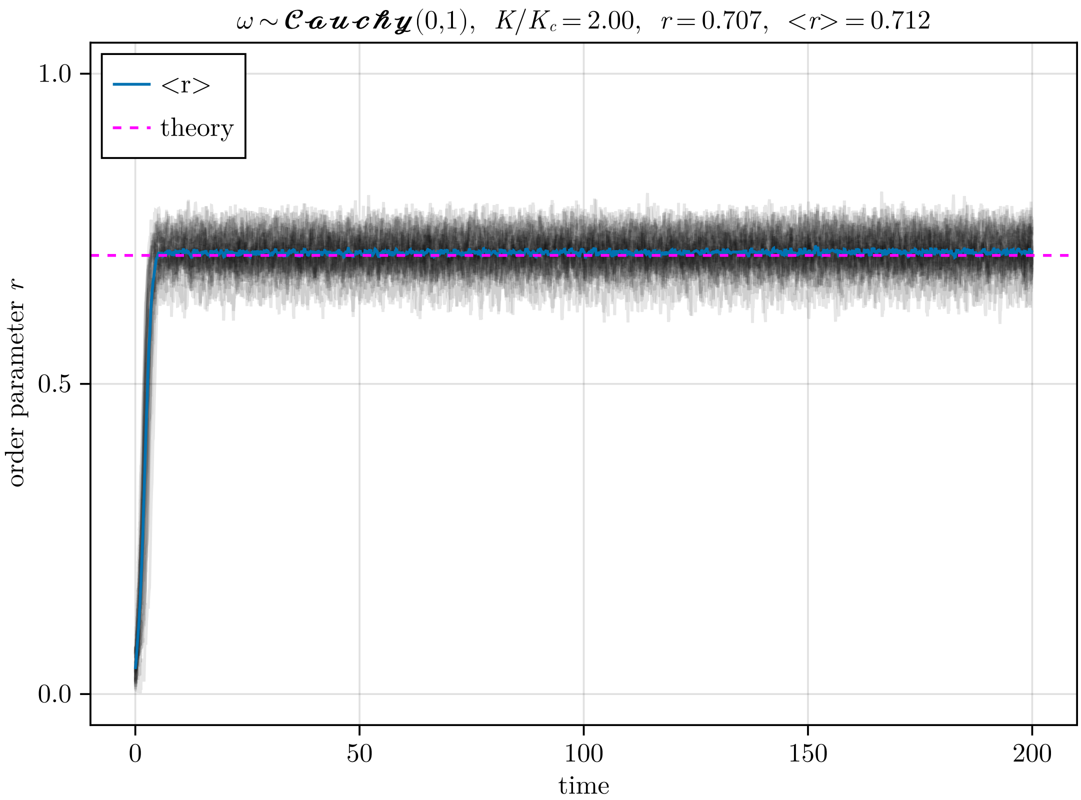
ω ∼ Cauchy(0,1), K/K_c = 1.00, r = 0.000, <r> = 0.213
<r>
theory
order parameter r
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200
time

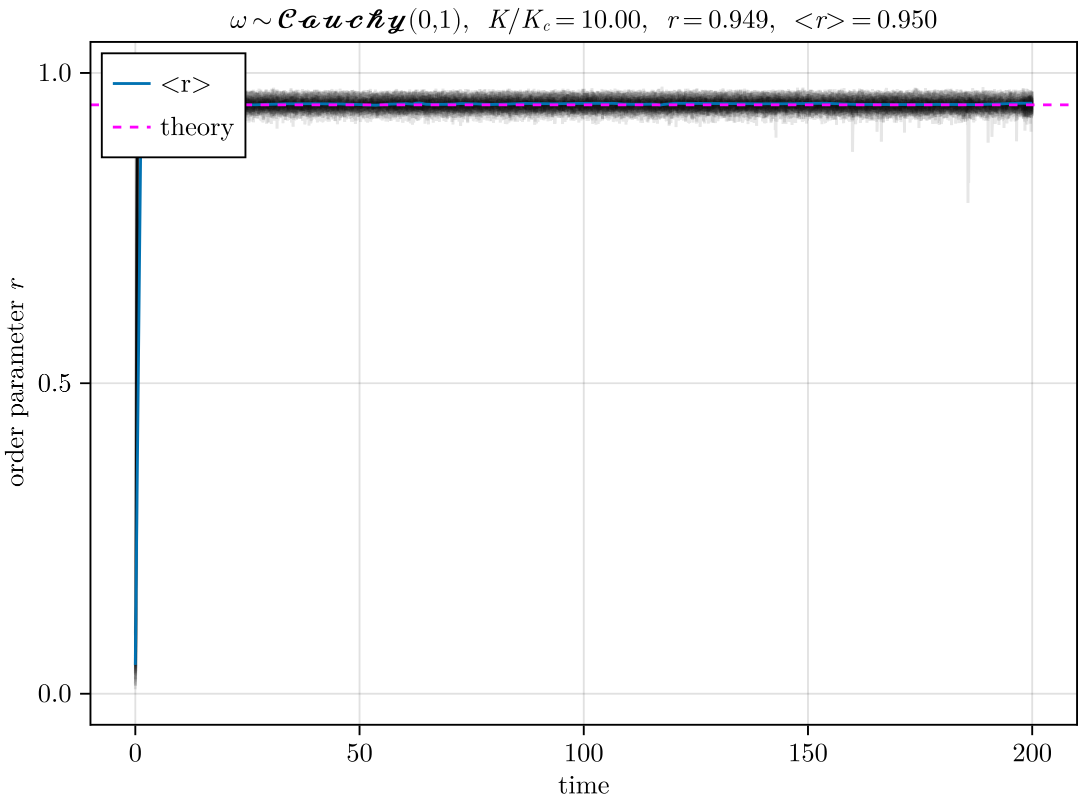


$\omega \sim \mathcal{Cauchy}(0,1)$, $K/K_c = 1.03$, $r = 0.171$, $\langle r \rangle = 0.230$
<r>
theory
order parameter r
time



$\omega \sim \mathcal{Cauchy}(0,1)$, $K/K_c = 1.50$, $r = 0.577$, $\langle r \rangle = 0.576$
<r>
theory
order parameter r
time


ω ∼ Cauchy(0,1), K/Kc = 2.00, r = 0.707, <r> = 0.712
<r>
theory
order parameter r
time
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200


ω ∼ Cauchy(0,1), K/Kc = 10.00, r = 0.949, <r> = 0.950
<r>
theory
order parameter r
time
1.0
0.5
0.0
0
50
100
150
200