সংখ্যাতত্ত্ব

মুতাসিম মিম

একাদশ শ্রেণি

রাজশাহী কলেজ, রাজশাহী

10.12.2013

mutasimmim@yahoo.com

সূচি

অধ্যায় ১

বিভাজ্যতা

সংজ্ঞাঃ

বিভাজ্যতা(divisibility): a ও b দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে a দ্বারা b বিভাজ্য বলতে বোঝায় যে এমন একটি পূর্ণ সংখ্যা c আছে যেন ac=b হয়। a দ্বারা b বিভাজ্য কে a|b লেখা হয়। যেমনঃ 3 দ্বারা 42 সংখ্যাটি বিভাজ্য, কারণ এমন একটি সংখ্যা 14 আছে যেন 3x14=42.

উৎপাদক এবং গুণিতকঃ a দ্বারা b বিভাজ্য হলে a কে b এর একটি উৎপাদক বলে। আর b কে a এর গুণিতক বলা হয়। উপরের উদাহরণে 3 ও 14 উভয়েই 42 এর উৎপাদক এবং 42 হল 3 ও 14 এর গুণিতক।

এখন বিভাজ্যতা সম্পর্কিত কয়েকটি সরল কিন্তু গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য দেখা যাক।

উপপাদ্য(১.১).
I)a দ্বারা b বিভাজ্য হলে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা c এর জন্য bc ও a দ্বারা বিভাজ্য হবে।

II)a দ্বারা b ও c উভয়েই বিভাজ্য হলে a দ্বারা b+c ও b-c উভয়েই বিভাজ্য হবে।

প্রমাণঃ বিভাজ্যতার সংজ্ঞা ব্যবহার করে নিজে প্রমাণ কর।

সমস্যা ১। একটি পূর্ণসংখ্যা দ্বারা 678 ও 679 উভয়কেই ভাগ করা যায়। সংখ্যাটি কত?

মৌলিক ও যৌগিক সংখ্যা (prime and composite numbers): 1 হতে বড় কোন সংখ্যাকে 1 ও সেই সংখ্যা ছাড়া অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা না গেলে সেই সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা বলে। যেমন 2,3,997 সংখ্যাকে 1 এবং এই সংখ্যাগুলো ছাড়া অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা

যায় না। তাই এরা প্রত্যেকেই মৌলিক সংখ্যা। 1 হতে বড় সংখ্যাগুলোর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা ছাড়া আর সব সংখ্যা যৌগিক সংখ্যা।

লক্ষ্য কর, 1 সংখ্যাটি মৌলিকও নয়, যৌগিকও নয়। 1 কে ইউনিট নাম্বার বলা হয়।

সমস্যাঃ১। 2 একটি মৌলিক সংখ্যা। এটি ছাড়া আর কোন জোড় সংখ্যা কি মৌলিক সংখ্যা হতে পারে?

২।দুটি ক্রমিক সংখ্যার প্রত্যেকেই কি মৌলিক হতে পারে?হলে এরকম কত জোড়া সংখ্যা আছে?

৩। দুটি মৌলিক সংখ্যার যোগফল 999. সংখ্যা দুটি কত কত?

৪। $17p=19q$, যেখানে p,q মৌলিক সংখ্যা। p ও q এর মান বের কর।

৫।p^2+p সংখ্যাটির দুটি মৌলিক উৎপাদক আছে। p এর মান কি কি হতে পারে?

উপপাদ্য(১.২). যেকোনো পূর্ণসংখ্যাকেই এক বা একাধিক মৌলিক সংখ্যার গুনফল হিসাবে লেখা যায়।

প্রমাণঃ নিজে কর।

ডিভিশন এলগরিদমঃ১.৩। a ও b যেকোনো দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে, যেখানে $b\neq 0$, এমন দুটি অনন্য পূর্ণসংখ্যা c,d পাওয়া যাবে যেখানে $a=bc+d$ এবং $0\leq d<a$ হবে।

প্রমাণঃ এই সেটটি দেখঃ $S=\{\ldots\ldots,-3b,-2b,-b,0,b,2b,3b,\ldots\ldots,kb,\ldots\}$। যদি a সংখ্যাটি এই সেটের কোন সংখ্যার সমান হয় তাহলে আমরা পাবো $sb=a$ বা, $0+sb=a$. আর যদি a সংখ্যাটি এই সেট এর কোন সংখ্যার সমান না হয়, তাহলে a নিশ্চয় এই সেট এর দুটি সংখ্যার মাঝে থাকবে। ধরা যাক, $sb<a<b(s+1)$, তাহলে $a-sb=d$, যেখানে $0<d$.

আবার, যদি $d\geq b$ হয়, $a=d+sb\geq b+sb=b(s+1)$ যা , $sb<a<b(s+1)$ শর্ত কে লঙ্ঘন করে। সুতরাং বলা যায় $b>d$. c,d যে অনন্য হবে তা নিজে প্রমাণ কর।

শেষ উপপাদ্যঃ মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম।

প্রমাণঃ ধরা যাক, কেবলমাত্র k সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা আছে, যাদের $p_1,p_2,\ldots\ldots,p_k$ দ্বারা নির্দেশ করা হল। $n=p_1p_2\ldots\ldots p_k+1$ সংখ্যাটি দেখ। এই সংখ্যাটি যদি যৌগিক সংখ্যা হয় তাহলে এর অবশ্যই কোন মৌলিক উৎপাদক থাকবে, যেটি হবে আমাদের জানা k টি মৌলিক সংখ্যার মধ্যে কোন একটি। কিন্তু এই মৌলিক সংখ্যার যেকোনোটি দ্বারা n কে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 1, অর্থাৎ n নিজেই একটি মৌলিক সংখ্যা। তাহলে আমরা আরেকটি নতুন মৌলিক সংখ্যা পেয়ে গেলাম।

লক্ষ্য কর, 1 হতে শুরু করে কিছু সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা জানা থাকলে আরেকটি মৌলিক সংখ্যা বের করার পদ্ধতি আমরা পেয়ে গেলাম। এখান থেকে আরও বলা যায়, যদি p_k দ্বারা k তম মৌলিক সংখ্যা বোঝানো হয়, তবে $p_k \le p_1p_2\ldots..p_{k-1}+1$

অধ্যায় ২

মোডুলার এরিথমেটিক

মোডুলার এরিথমেটিকঃ সংখ্যা তত্ত্বের অনেক সমস্যা সমাধানে মোডুলার এরিথমেটিক একটি শক্তিশালী টুল। এর বৈশিষ্ট্যগুলো ব্যাবহার করে অনেক ফলাফলের প্রমাণ সহজে করা যায়, আবার এটি অনেক প্রমাণ সংক্ষিপ্ত করে দেয়। নিচের সংজ্ঞাটি দেখা যাক।

সংজ্ঞাঃ a,b পূর্ণসংখ্যা। a-b সংখ্যাটি যদি আরেকটি সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা m দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহলে এটাকে লেখা যায় $a\equiv b \pmod m$. এটাকে পড়া হয় a is congruent to b mod m(a ইজ কনগ্রুয়েন্ট টু b মড m).এখানে ≡ চিহ্ন এবং mod অপারেটর দ্বারা a,b,m সংখ্যা তিনটির মধ্যে একটি সম্পর্ক প্রকাশ করা হচ্ছে।

12-2=10. 10 সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য। তাহলে বলা যায়, $12\equiv 2 \pmod 5$. আবার 2-12=-10. তাই $2\equiv 12 \pmod 5$ ও সত্য।

নিচের উদাহরণগুলো নিজে নিজে ব্যাখ্যা করঃ

I) $1\equiv1 \pmod{1}$

II) $1\equiv1 \pmod{10}$

III) $34\equiv17 \pmod{17}$

Iv) $43\equiv3 \pmod{10}$.

v) $9\equiv1 \pmod{2}$, $9\equiv1 \pmod{4}$, $9\equiv1 \pmod{8}$

লক্ষ্য কর, m দ্বারা a ও b কে ভাগ করে একই ভাগশেষ পাওয়া গেলেই কেবল m দ্বারা (a-b) বিভাজ্য হবে বা, $a\equiv b \pmod{m}$ হবে। আবার বিপরীত দিক হতে, $a\equiv b \pmod{m}$ হলে m দ্বারা a ও b কে ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকবে।

সমস্যাঃ

I) $30\equiv4 \pmod{x}$ হলে x এর মান কত হতে পারে?

II)দেখাও যে $a\equiv b \pmod{m}$ হলে এবং k, mএর যেকোনো উৎপাদক হলে $a\equiv b \pmod{k}$ হবে।

III)দেখাও যে $a\equiv b \pmod{m}$ হলে $b\equiv a \pmod{m}$ হবে।

Iv)দেখাও যে $a\equiv b \pmod{m}$ হলে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা k এর জন্য, $a+k\equiv b+k \pmod{m}$, $a-k\equiv b-k \pmod{m}$ এবং $ak\equiv bk \pmod{m}$ হবে।

mod এর কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধর্মঃ

I) $a\equiv b \pmod{m}$ হলে এমন একটি পূর্ণ সংখ্যা kথাকবে যেন $a=b+mk$ হয়।

III) $a\equiv b \pmod{m}$ এবং $b\equiv c \pmod{m}$ হলে $a\equiv c \pmod{m}$ হবে।

II) $a\equiv b \pmod{m}$ এবং $c\equiv d \pmod{m}$ হলে $a+c\equiv b+d \pmod{m}$ হবে।

এই ধর্মগুলো সংজ্ঞা ব্যাবহার করে নিজে নিজে প্রমাণ কর।

উপপাদ্যঃ১।৪ $a \equiv b \pmod m$ এবং $c \equiv d \pmod m$ হলে $ac \equiv bd \pmod m$ হবে।

প্রমাণঃ (a-b) এবং (c-d) উভয়েই m দ্বারা বিভাজ্য। তাহলে,এদের গুণফলও m দ্বারা বিভাজ্য হবে। এখন, $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd=ac-bd+2bd-ad-bc=ac-bd+bd-bc+bd-ad=ac-bd-b(c-d)-d(a-b)$বা, $ac-bd=(a-b)(c-d)+b(c-d)+d(a-b)$ ...(1). যেহেতু ডানপক্ষের প্রত্যেকটি পদই m দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং, বামপক্ষ m দ্বারা বিভাজ্য। এই কারনে ac-bd, m দ্বারা বিভাজ্য।অর্থাৎ, $ac-bd \equiv 0 \pmod m$ বা, $ac \equiv bd \pmod m$.

অনুসিদ্ধান্তঃ $a \equiv b \pmod m$ হলে যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা k এর জন্য $a^k \equiv b^k \pmod m$.

সমস্যাঃ 1.7.13.19.....1993.1999 কে 6 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধানঃ $1 \equiv 1 \pmod 6$, $7 \equiv 1 \pmod 6$, $13 \equiv 1 \pmod 6$,........$1993 \equiv 1 \pmod 6$, $1999 \equiv 1 \pmod 6$. সবগুলো অনুসমতা গুন করে পাই, $1.7.13.19.1993.1999 \equiv 1.1.1....1 \pmod 6 \equiv 1 \pmod 6$, অর্থাৎ ভাগশেষ হবে 1.

সমস্যাঃ 9^{23} সংখ্যাটির এককের অঙ্কটি বের কর।

সমাধানঃ কোন সংখ্যাকে 10 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে সেটিই হল সংখ্যাটির এককের অঙ্ক। এখন আমরা মডুলার এরিথমেটিক ব্যাবহার করে দেখব 9^{23} কে 10 দ্বারা ভাগ করলে কত ভাগশেষ থাকে। প্রথমে দেখ, $9 \equiv -1 \pmod{10}$. উভয় পক্ষের পাওয়ার 23 নিলে, $9^{23} \equiv (-1)^{23} \equiv -1 \pmod{10}$. অর্থাৎ, $9^{23}-(-1)= 9^{23}+1$, 10 দ্বারা বিভাজ্য। যা থেকে বলা যায়, $9^{23}+1$ সংখ্যাটির শেষ অংক 0বা 9^{23} এর শেষ অংক 9.

উপপাদ্য(১।৫).যেকোনো মৌলিক সংখ্যা p এবং যেকোনো সংখ্যা $1 \leq a < p$ এর জন্য $\binom{p}{a}$, p দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণঃ $\binom{p}{a}=\frac{p!}{a!(p-a)!}$, **p** যেহেতু মৌলিক সংখ্যা, সুতরাং এটি শুধু 1 এবং b দ্বারা বিভাজ্য। ভগ্নাংশটির হর = (1 হতে a পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর গুনফল)x(1 হতে p-a পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর গুনফল)। a এবং (p-a) উভয়েই p এর চেয়ে ছোট। সুতরাং 1 হতে a পর্যন্ত সংখ্যাগুলো এবং 1 হতে p-a পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে p এর কোন উৎপাদক নেই। কিন্তু ভগ্নাংশের লবে উৎপাদক হিসাবে p আছে। সুতরাং $\binom{p}{a}$, p দ্বারা বিভাজ্য।

এখন আমরা ফার্মার উপপাদ্য প্রমাণ করব। এর জন্য আমাদের দ্বিপদী উপপাদের সাহায্য নিতে হবে। দ্বিপদী উপপাদ্যটি হল, যেকোনো দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা x,a এর জন্য,

$$(x+a)^n = \binom{n}{o}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}a+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2+\binom{n}{3}x^{n-3}a^3+.......+\binom{n}{n-1}x\ a^{n-1}+\binom{n}{n}a^n$$

এই উপপাদ্যটির প্রমাণ দেখানো এখানে অপ্রাসঙ্গিক। এটার প্রমাণের জনও একাদশ- দ্বাদশ শ্রেণির পাঠ্যপুস্তক অথবা মুন ভাইয়ের কম্বিনেটো রিক্স নোট দেখ।

এখন আমরা আগের উপপাদ্যটি ব্যাবহার করে আরেকটি ফলাফল দাড় করাবো।

উপপাদ্যঃ(১।৬). $(x+a)^p \equiv x^p+a^p \pmod p$.

প্রমাণঃ দ্বিপদী উপপাদ্য হতে পাই, $(x+a)^p = \binom{p}{o}x^p+\binom{p}{1}x^{p-1}a+\binom{p}{2}x^{p-2}a^2+\binom{p}{3}x^{p-3}a^3+.......+\binom{p}{p-1}x\ a^{p-1}+\binom{p}{p}a^p$

আগের উপপাদ্য হতে দেখা যায় যে ডানপক্ষের $\binom{p}{o}x^p$ এবং $\binom{p}{p}a^p$ পদ দুটি ছাড়া আর সব পদ p দ্বারা বিভাজ্য। এই পদ দুটিকে বামপক্ষে নিলে পাওয়া যায়, $(x+a)^p-\binom{p}{o}x^p-\binom{p}{p}a^p=$ p এর একটি গুণিতক। অর্থাৎ, $(x+a)^p - \binom{p}{o}x^p - \binom{p}{p}a^p \equiv 0 \pmod P$ বা, $(x+a)^p \equiv \binom{p}{o}x^p+\binom{p}{n}a^p \pmod p$ বা, $(x+a)^p \equiv x^p+a^p \pmod p$.

ফার্মার উপপাদ্যঃ যেকোনো মৌলিক সংখ্যা p এবং পূর্ণসংখ্যা a এর জন্য $a^p \equiv a \pmod P$

প্রমাণঃ $a^p=\{(a-1)+1\}^p \equiv (a-1)^p+1^p \equiv (a-1)^p+1 \pmod p$. $(a-1)^p=\{(a-2)+1\}^p \equiv (a-2)^p+1^p \equiv (a-2)^p+1 \pmod p$. অর্থাৎ, $a^p \equiv (a-1)^p+1 \equiv (a-2)^p+2 \pmod p$। একইভাবে দেখানো যায়,

$a^p \equiv (a-1)^p+1 \equiv (a-2)^p+2 \equiv (a-3)^p+3 \equiv (a-4)^p+4 \equiv ...... \equiv \{a-(a-1)\}^p+(a-1)\}=(1)^p+(a-1)=a \pmod P$

অর্থাৎ, $a^p \equiv a \pmod p$.

অনুসিদ্ধান্তঃ যদি p দ্বারা a বিভাজ্য না হয় তাহলে $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. কারণ ফার্মার উপপাদ্য হতে $a^p \equiv a \pmod p$, বা $p|(a^p-a)=a(a^{p-1}-1)$, যেহেতু p, a কে ভাগ করে না, কিন্তু $a(a^{p-1}-1)$ কে ভাগ করে, সুতরাং p অবশ্যই $(a^{p-1}-1)$ কে ভাগ করবে। অর্থাৎ, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$হবে।

সমস্যাঃ I) 52^{23} কে 23 দ্বারা ভাগ করলে কত ভাগশেষ হবে?

II)দেখাও যে $43^{32} \equiv 30 (\mathrm{mod}\ 31)$

একটি ব্যাবহারঃ ধরা যাক a^s কে p দ্বারা ভাগ করলে কত ভাগশেষ থাকবে তা বের করতে হবে, যেখানে s একটা অনেক বড় সংখ্যা। s কে p দ্বারা ভাগ করে এমন q,r বের কর যেন $s=pq+r$, $0 \le q < p$হয়। (উপপাদ্য ১.৩), অন্য কথায়, s কে p দ্বারা ভাগ করে ভাগফল ও ভাগশেষ বের কর। এখন, $a^s=a^{pq+r}=(a^p)^q.a^r \equiv a.a^r \equiv a^{r+1} (\mathrm{mod}\ p)$. যেহেতু $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$. অর্থাৎ, $a^s \equiv a^{r+1} (\mathrm{mod}\ p)$. এখন $a^{r+1} (\mathrm{mod}\ p)$ বের করা অনেক সহজ হবে।

অধ্যায় ৩

অয়লার ফাংশন ও অয়লার উপপাদ্য

অনুচ্ছেদ ১

অয়লার ফাংশন $\Phi(n)$

সংজ্ঞাঃ(a,b) দ্বারা a ও b এর গ.সা.গু. বোঝানো হবে।

সংজ্ঞাঃ a ও b দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে a ও b সহমৌলিক বলা হবে যদি a ও b এর মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক না থাকে। যেমন 27 ও 10 সংখ্যা দুটির মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক নেই। তাই এরা সহমৌলিক। অন্যভাবে বলা যায়, $(a,b)=1$ হলে a ও b সহমৌলিক।

সংজ্ঞাঃ n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। 1 হতে n পর্যন্ত যেসব সংখ্যা n এর সাথে সহমৌলিক তাদের সংখ্যাকে $\Phi(n)$ লেখা হয়। একে পড়া হয় ফাই অফ n.

যেমনঃ 18 সংখ্যাটি দেখা যাক। 1 হতে 18 পর্যন্ত যেসব সংখ্যার সাথে 18 এর কোন সাধারণ উৎপাদক নেই সেগুলো হল, 1,5,7,11,13,17.এখানে 6 টি সংখ্যা আছে। সুতরাং $\Phi(18)=6$. আবার,

1 হতে 15 পর্যন্ত যেসব সংখ্যার সাথে 15 এর কোন সাধারণ উৎপাদক নেই সেগুলো হল 1,2,4,7,8,11,13,14. ফলে Φ(n)=8.

অনুশীলনঃ 20 হতে 40 পর্যন্ত সবগুলো পূর্ণসংখ্যার ফাই ফাংশনের মান বের কর।

উপপাদ্যঃ n একটি মৌলিক সংখ্যা হলে $\Phi(n)$=n-1 হবে।

উপপাদ্যঃ n এমন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যেন Φ(n)=n-1. তাহলে n অবশ্যই মৌলিক সংখ্যা হবে।

প্রমাণঃ n মৌলিক হলে 1 হতে n-1 পর্যন্ত সবগুলো সংখ্যাই n এর সাথে সহমৌলিক হবে।অর্থাৎ $\Phi(n)$=n-1 হবে।আবার যদি n যৌগিক হয়, তাহলে 1 হতে n-1 পর্যন্ত অন্তত একটি সংখ্যা দ্বারা n বিভাজ্য হবে, ফলে $\Phi(n)$<n-1 হবে।

Reduced Residue System: একটি সেট S কে একটি Reduced Residue System(mod m) বলা হবে যদি m এর সাথে সহমৌলিক কোন পূর্ণসংখ্যা a এর জন্য S এ কেবল মাত্র একটি সদস্য r থাকে যেন a≡r(mod m) হয়।

S={1,3,5,7} সেটটি দেখা যাক। S সেটটি একটি Reduced Residue System(mod 8). কারণ, ধরা যাক, পূর্ণ সংখ্যা a কে 8 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল q ও ভাগশেষ r হয়, অর্থাৎ, a=8q+r. 0≤r<8. a ও 8 সহমৌলিক বলে, 8 ও r সহমৌলিক হবে। সুতরাং r হবে 1,3,5,7 এর কোন একটি। আবার, a-r=8q, a≡r(mod 8). অর্থাৎ a ও 8 সহ মৌলিক হলে a ≡ 1,3,5,7(mod 8) এর কোন একটি হবে।

একইভাবে T={-7,3,45,-41} সেটটিও একটি Reduced Residue System(mod 8), কারণ a ও 8 সহ মৌলিক হলে a ≡ 1,3,5,7(mod 8) এর কোন একটি হবে। এখন a≡1(mod 8)হলে, a≡-7(mod 8) হবে। আবার, a≡3(mod 8), a≡5(mod 8), a≡7(mod 8) হলে যথাক্রমে a≡3(mod 8), a≡45(mod 8), a≡-41(mod 8) হবে।তাহলে দেখা যাচ্ছে 8 এর সাথে সহ মৌলিক যেকোনো a এর জন্যই T সেট এ কেবল একটি সংখ্যা r পাওয়া যাচ্ছে যেন a≡r(mod 8) হয়। এজন্য T একটি Reduced Residue System(mod 8)

লক্ষ্য কর, Reduced Residue System(mod m) এর সকল সদস্যই m এর সাথে সহমৌলিক।

নিশ্চিতভাবেই বলা যায়, m একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হলে একটি Reduced Residue System(mod m) এর সদস্য সংখ্যা হবে $\Phi(m)$

সংখ্যাতত্ত্বে Reduced Residue System এর ধারণা খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

ধরা যাক,p একটা মৌলিক সংখ্যা। S={1,2,3,....,(p-1)} সেটটি দেখা যাক। p দ্বারা বিভাজ্য নয় এমন যেকোনো a এর জন্য a ও p সহমৌলিক হবে। ধরা যাক,a=pq+r, যেখানে $0<r<p$. $r\neq0$, কারণ তাহলে p দ্বারা a বিভাজ্য হতো।$0<r<p$ বা, $1\leq r\leq p-1$ হতে বলা যায়, r অবশ্যই S সেট এর সদস্য। a=pq+r হতে বলা যায় a≡r(mod p). তাহলে দেখা যাচ্ছে p এর সাথে সহমৌলিক যেকোনো a এর জন্য S এ একটি সদস্য r আছে যেন a≡r(mod p) হয়। আবার যদি কোন S এর কোন দুটি সদস্য c,d এর জন্য a≡c(mod p), a≡d(mod p) হয়, তাহলে c≡d(mod p) হবে , অর্থাৎ p|(c-d) হবে। কিন্তু তা সম্ভব নয় কারণ c,d দুটির মানই p এর চেয়ে ছোট। তাহলে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে p এর সাথে সহ মৌলিক যেকোনো a এর জন্য S এ এমন কেবল একটি সংখ্যা r আছে যেন a≡r(mod p) হয়। যার অর্থ হল S সেটটি একটি Reduced Residue System(mod p)

উপরের অনুচ্ছেদ এর সারমর্ম হল,

উপপাদ্যঃ যেকোনো মৌলিক সংখ্যা p এর জন্য {1,2,3,......,p-1} সেটটি একটি Reduced Residue System(mod p)

অনুসিদ্ধান্তঃ মৌলিক সংখ্যা p এর Reduced Residue System এ (p-1) টি উপাদান থাকবে।

নিশ্চিতভাবেই বলা যায়,

উপপাদ্যঃ m একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হলে একটি Reduced Residue System(mod m) এর সদস্য সংখ্যা হবে $\Phi(m)$

অয়লারের উপপাদ্য প্রমাণে আরেকটি ফলাফল আমাদের দরকার হবে।

উপপাদ্যঃ$\{r_1,r_2,r_3,.....,r_{p-1}\}$ একটি Reduced Residue System(mod p) হলে যেকোনো (a,p)=1 এর জন্য ও একটি Reduced Residue System(mod p) হবে। (এখানে p কে মৌলিক হতে হবে এমন নয়)

প্রমাণঃ $S=\{r_1,r_2,r_3,.....,r_{p-1}\}$, $T=\{ar_1,ar_2,ar_3,.....,ar_{p-1}\}$. S সেটটিতে p-1 সংখ্যক উপাদান আছে মধ্যে

কোন দুটি উপাদান r_1,r_2 এর জন্যই $r_1 \equiv r_2 (\text{mod } p)$ নয়। T সেটেও p-1 সংখ্যক উপাদান আছে। এটা দেখানোই যথেষ্ট যে T এর কোন দুটি উপাদান ar_i, ar_j এর জন্যই $ar_i \equiv ar_j (\text{mod } p)$ নয়। যদি $ar_i \equiv ar_j (\text{mod } p)$ হয়, তাহলে $p| ar_i-ar_j$ বা, $p|a(r_i-r_j)$. কিন্তু a, p দ্বারা বিভাজ্য নয়। সুতরাং, $p|(r_i-r_j)$ কিন্তু তা সম্ভব নয়। কারণ r_i,r_j দুটিই S সেট এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদান। সুতরাং T হল একটি Reduced Residue System(mod p)

এখন আমরা অয়লারের উপপাদ্য প্রমাণ করতে প্রস্তুত।

অয়লারের উপপাদ্যঃ **a** ও **m** দুটি সহমৌলিক পূর্ণসংখ্যা, অর্থাৎ (**a,m)=1.** তাহলে $\mathbf{a^{\Phi(m)} \equiv 1 (mod\ m).}$

প্রমাণঃ $\Phi(m)=k$ ধরা যাক(লেখার সুবিধার্থে)। m এর কোন reduced residue system এ $\Phi(m)=k$ সংখ্যক উপাদান থাকবে। ধরা যাক $S=\{r_1,r_2,r_3,.....,r_k\}$ একটি reduced residue system (mod m). যেহেতু (**a,m)=1**, তাই আগের উপপাদ্য অনুসারে $T=\{ar_1,ar_2,ar_3,.....,ar_k\}$ ও একটি reduced residue system (mod m). S এর সদস্যগুলোকে m দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষগুলো এবং T এর সদস্যগুলোকে m দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষগুলো একই হবে। অর্থাৎ T এর সদস্য প্রত্যেকটি ar_i এর জন্য S এ একটি অনন্য সদস্য r_j পাওয়া যাবে যেন $ar_i \equiv r_j (\text{mod } m)$ হয়।এমন সবগুলো অনুসমতা গুন করলে(উপপাদ্য ১.৪) পাওয়া যায় $(ar_1)(ar_2)(ar_3).......(ar_k) \equiv r_1r_2r_3.......r_k (\text{mod } m)$ বা, $a^k(r_1r_2r_3.......r_k) \equiv (r_1r_2r_3.......r_k)(\text{mod } m)$ অর্থাৎ, $m| a^k (r_1r_2r_3.......r_k - r_1r_2r_3.......r_k) = (a^k-1)\ r_1r_2r_3.......r_k$. কিন্তু $r_1,r_2,r_3,.....,r_k$ সংখ্যাগুলোর কোনটির সাথেই a এর কোন সাধারণ উৎপাদক নেই। সুতরাং $m|(a^k-1)$, বা, $a^k \equiv 1 (\text{mod } m)$, বা, $a^{\Phi(m)} \equiv 1 (\text{mod } m)$.

সমস্যাঃ দেওয়া আছে $\Phi(40)=16$. তাহলে 29^{49} কে 40 দিয়ে ভাগ করলে কত ভাগশেষ থাকে তা বের কর।

সমস্যাঃ অয়লারের উপপাদ্য ব্যাবহার করে ফার্মার উপপাদ্য প্রমাণ কর।

অনুচ্ছেদ ২

ফাই ফাংশনের মান বের করা

ফাই ফাংশনের সংজ্ঞাটি আরেকবার উল্লেখ করা হল।

সংজ্ঞাঃ n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। 1 হতে n পর্যন্ত যেসব সংখ্যা n এর সাথে সহমৌলিক তাদের সংখ্যাকে Φ(n) লেখা হয়। একে পড়া হয় ফাই অফ n.

অয়লারের উপপাদ্য ব্যাবহার করার জন্য যেকোনো সংখ্যার ফাই ফাংশনের মান বের করতে পারতে হবে।

কয়েকটি ধাপে স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য Φ(n) মান বের করার পদ্ধতি দেখান হল।

সংজ্ঞা অনুসারে, $\Phi(1)$=1. আবার আমরা আগেই প্রমাণ করেছি মৌলিক সংখ্যা p এর জন্য $\Phi(p)$= p-1. এখন আমরা মৌলিক সংখ্যা p এর জন্য p^k এর মান বের করব।

উপপাদ্যঃ p মৌলিক হলে $\Phi(p^k)=p^k-p^{k-1}$

প্রমাণঃ 1 হতে p^k পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে কেবল p এর গুনিতক গুলোরই p^k এর সাথে সাধারণ উৎপাদক আছে। এরকম সংখ্যা গুলো হল p,2p,3p,......,(p^{k-1})p, অর্থাৎ p^{k-1} টি। বাকি সংখ্যাগুলোর সাথে p^k এর কোন সাধারন উৎপাদক নেই।বাকি সংখ্যা থাকে p^k-p^{k-1} টি। অর্থাৎ $\Phi(p^k)=p^k-p^{k-1}$

উদাহরণঃ $\Phi(5^2)=5^2-5=20$. পরিক্ষা করে দেখ।

একাধিক মৌলিক উৎপাদক বিশিষ্ট সংখ্যার ফাই ফাংশনের মান বের করার পদ্ধতি এখানে দেখান হল না।

অধ্যায় ৪

লিনিয়ার অনুসমতার সমাধানঃ

নিচের অনুসমতাটি দেখ $6x\equiv1(\text{mod } 13)$. $x=11$ এটিকে সিদ্ধ করে। আবার $x=-2,24$ ও এটিকে সিদ্ধ করে। 11,-2,24 কে এই অনুসমতার সমাধান বলা হয়। $ax \equiv b(\text{mod } m)$ এই জাতীয় কনগ্রুয়েন্স কে লিনিয়ার কনগ্রুয়েন্স বলা হয়, যেখানে চলকের মাত্রা 1. এই ধরনের কনগ্রুয়েন্সের সমাধান করাই এই অধ্যায় এর উদ্দেশ্য। প্রথমে দেখা যাক কোন কোন সময়ে এর সমাধান পাওয়া যাবে আর কখন সমাধান করাই যাবে না।

উপপাদ্যঃ যদি a ও m এর গ.সা.গু দ্বারা b বিভাজ্য না হয় তাহলে $ax \equiv b(\text{mod } m)$ সমাধান করা যাবে না।।

প্রমাণঃ x এর কোন মানের জন্য $ax\equiv b(\text{mod } m)$ সত্য হলে ax-b, m দ্বারা বিভাজ্য হবে, অর্থাৎ কোন পূর্ণসংখ্যা k এর জন্য $ax-b=km$ বা, $b=ax+km$ হবে. a,m এর গ.সা.গু দ্বারা ax এবং km বিভাজ্য। সুতরাং ax+km ও a,m এর গ.সা.গু দ্বারা বিভাজ্য হবে। কাজেই b কেও a,m এর গ.সা.গু দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে। তা না হলে $b=ax+km$ হওয়াও সম্ভব না।

উপপাদ্যঃ a ও m এর গ.সা.গু দ্বারা b বিভাজ্য হলে $ax \equiv b(\text{mod } m)$ অনুসমতাটি সমাধান করা যাবে।

প্রমাণঃ মনে করি a,b,m প্রত্যেককেই a ও m এর গ.সা.গু দ্বারা ভাগ করে যথাক্রমে a_1,b_1,m_1 পাওয়া যায়। তাহলে আমাদের অনুসমতাটি দাঁড়ায় $a_1x\equiv b_1 (\text{mod } m_1)$. এখানে a_1,m_1 এর মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক নেই।

উপপাদ্যঃ যদি a ও m এর গ.সা.গু দ্বারা b বিভাজ্য হয় এবং a ও m এর গ.সা.গু d দ্বারা a,b,m প্রত্যেককে ভাগ করে যথাক্রমে a_1 ,b_1 ,m_1 পাওয়া যায়। যদি $a_1x\equiv b_1(\text{mod } m_1)$ সমাধান করা যায় ,তাহলে $ax \equiv b(\text{mod } m)$ সমাধান করা যাবে।

প্রমাণঃ ধরা যাক a ও m এর গ.সা.গু d দ্বারা a,b,m প্রত্যেককে ভাগ করে যথাক্রমে a_1 ,b_1 ,m_1 পাওয়া গেল।যদি এমন x পাওয়া যায় যেন $a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1}$, তাহলে $m_1 | (a_1 - b_1)$, বা, $m_1 d | d(a_1 - b_1)$ বা,$m | (a-b)$, অর্থাৎ, $a \equiv b \pmod m$. সুতরাং, দেখা গেল $a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1}$ সমাধানযোগ্য হলে $a \equiv b \pmod m$ ও সমাধানযোগ্য হবে।

লক্ষ্য কর উপরের উপপাদ্যে a_1 ,b_1 এর গ.সা.গু. হল 1 .

উপপাদ্যঃ $(a,m)=1$ হলে $ax \equiv b \pmod m$ অনুসমতাটির সমাধান আছে।

প্রমাণঃ ধরা যাক, $\Phi(m)=k$, $T=\{ar_1,ar_2,ar_3,.....,ar_k\}$,একটি reduced residue system (mod m). লক্ষ্য কর, যেকোনো m এর জন্য,$(1,m)=1$. reduced residue system (mod m) এর সংজ্ঞা অনুসারে, T তে এমন একটি সদস্য ar_i আছে যেন $ar_i \equiv 1 \pmod m$ হয়। উভয় পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে পাই, $a(br_i) \equiv b \pmod m$.সুতরাং br_i হল $ax \equiv b \pmod m$ এর একটি সমাধান।

লক্ষ্য কর, কেবলমাত্র একটি ar_i এর জন্যই $ar_i \equiv 1 \pmod m$ হবে।(reduced residue system (mod m). এর সংজ্ঞা)। সুতরাং একটিই সমাধান পাওয়া যাবে।

উদাহরণঃ ধরা যাক, $3x \equiv 4 \pmod{11}$ এর সমাধান বের করতে হবে। $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ একটি

Reduced residue system (mod 11). যেহেতু, $(3,11)=1$, সুতরাং এটি সমাধান করা যাবে। সেটের সবগুলো সংখ্যাকে 3 দ্বারা গুণ করে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলোর সেটও একটি Reduced residue system(mod 11)। গুণ করে প্রাপ্ত সেটটি হল, $\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$. এই সংখ্যাগুলো পরিক্ষা করলে দেখা যায় $15 \equiv 4 \pmod{11}$. $15=3 \times 5$. সুতরাং 5 হল $3x \equiv 4 \pmod{11}$ এর সমাধান।

অধ্যায় ৫

কিছু ফাংশন

ফ্লোর ফাংশন(floor function): $\lfloor x \rfloor$ দ্বারা x এর সমান বা x এর চেয়ে ছোট সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যাকে বোঝায়। যেমন $\lfloor 23.12 \rfloor$=23, $\lfloor 41.57 \rfloor$=41, $\lfloor 10 \rfloor$=10, $\lfloor -12.23 \rfloor$=-13, $\lfloor -19 \rfloor$=-19.

উপপাদ্য(৩.১). যদি x=a+θ হয়, যেখানে a একটি পূর্ণসংখ্যা এবং 0≤θ<1, তাহলে $\lfloor x \rfloor$=a. একই ভাবে, যদি $\lfloor x \rfloor$=a হয়, তাহলে এমন একটি সংখ্যা θ থাকবে যেন 0≤θ<1 এবং x=a+θ হয়।

উপপাদ্য(৩.২). পূর্ণসংখ্যা a,b,c এবং যেকোনো বাস্তব সংখ্যা d এর জন্য a=bc+d, যেখানে 0≤c<b হলে, $\lfloor a \rfloor$= $\left\lfloor \frac{bc+d}{b} \right\rfloor$=$\left\lfloor c+\frac{d}{b} \right\rfloor$, যেহেতু,0≤$\frac{d}{b}$<1, সুতরাং আগের উপপাদ্য থেকে পাওয়া যায়, $\left\lfloor c+\frac{d}{b} \right\rfloor$=c বা, $\lfloor a \rfloor$=c.

*1 হতেn পর্যন্ত kএর কতগুলো গুণিতক আছে? উত্তরঃ$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ টি .

যেমনঃ 1 হতে 13 পর্যন্ত 3 এর গুণিতক আছে $\left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor$=4 টি।

সমস্যাঃ 1 হতে 100 পর্যন্ত কত গুলো সংখ্যা আছে যাদের 8 দ্বারা ভাগ করলে 2 ভাগশেষ থাকে?

এখন আমরা দেখবো p একটি মৌলিক সংখ্যা হলে n! কে p এর সর্বোচ্চ কত পাওয়ার দিয়ে ভাগ করা যায়। n! হল 1 হতে n পর্যন্ত পূর্ণসংখ্যা গুলোর গুণফল। অর্থাৎ n!=1x2x3x........(n-1) x n. যেমন 5!=1x2x3x4x5=120

সিলিং ফাংশনঃ $\lceil x \rceil$ দ্বারা x এর চেয়ে বড় সবচেয়ে ছোট পূর্ণ সংখ্যা বোঝায়। যেমন; $\lceil 3.14 \rceil$=4,$\lceil -12.3 \rceil$=-12.

ইন্টিগ্রাল পার্ট ফাংশনঃ$[x]$ দ্বারা কোন সংখ্যার পূর্ণসাংখ্যিক অংশ বোঝায়। যেমন $[12.4]$=12, $[-34.5]$=-34

উপপাদ্যঃ $[a+b]$≥$[a]+[b]$

প্রমাণঃ নিজে কর।

এই উপপাদ্যটি অনেক সমস্যা সমাধানে কাজে লাগে।

ধরা যাক, n=$p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\ldots\ldots p_k^{a_k}$, যেখানে $p_1,p_2,\ldots,p_k$ ভিন্ন ভিন্ন মৌলিক সংখ্যা।

তাহলে nএর মোট উৎপাদক আছে $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots\ldots\ldots(a_k+1)$টি। কারণ n এর যেকোনো উৎপাদক হবে $p_1,p_2,p_3,\ldots\ldots,p_k$ মৌলিক সংখ্যা গুলোর বিভিন্ন পাওয়ারের গুনফল। p_1 এর পাওয়ার হতে পারে 0 হতে a_1 পর্যন্ত, মোট (a_1+1) রকম। p_2 এর পাওয়ার হতে পারে 0 হতে a_2 পর্যন্ত, মোট (a_2+1) রকম। এইভাবে p_k এর পাওয়ার হতে পারে 0 হতে a_k পর্যন্ত, মোট (a_k+1) রকম । অর্থাৎ পাওয়ারগুলো মোট $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots\ldots\ldots(a_k+1)$ রকমভাবে নেওয়া যেতে পারে। অর্থাৎ মোট $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots\ldots\ldots(a_k+1)$ ভাবে উৎপাদক গঠন করা যাবে।

আবার ধরা যাক, n=$p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\ldots\ldots p_k^{a_k}$, যেখানে $p_1,p_2,\ldots,p_k$ ভিন্ন ভিন্ন মৌলিক সংখ্যা।তাহলে, n এর উৎপাদকগুলোর যোগফল হবে

$$\left(\frac{-1+p_1^{1+a_1}}{-1+p_1}\right)\left(\frac{-1+p_2^{1+a_2}}{-1+p_2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{-1+p_k^{1+a_k}}{-1+p_k}\right)$$

প্রমাণের hint: n এর সবগুলো উৎপাদকের যোগফল হবে এরকমঃ

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots\ldots+p_1^{a_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots\ldots+p_2^{a_2})\ldots\ldots\ldots(1+p_k+p_k^2+\ldots\ldots+p_k^{a_k}),$$

এরপর গুণোত্তর ধারার যোগফল চিন্তা কর।

অধ্যায় ৬

বিভাজ্যতার পরিক্ষা

এই অধ্যায়ে আমরা কিছু বিশেষ সংখ্যার বিভাজ্যতার শর্ত দেখবো।

দশ ভিত্তিক যেকোনো সংখ্যার অঙ্কগুলো বাম থেকে যথাক্রমে $a_0,a_1,a_2........a_k$ হলে এটিকে n= $\overline{a_k a_{k-1} \dots \dots . a_1 a_0}$লেখা হবে।এটিকে এভাবে লেখা যায়, n=$\overline{a_k a_{k-1} \dots \dots . a_1 a_0}$ $=10^k a_k+10^{k-2}a_{k-1}+\dots\dots+10a_1+a_0$.

উপপাদ্যঃ কোন সংখ্যা 2^k দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এর শেষ k টি অংক দ্বারা গঠিত সংখ্যাটি 2^k দ্বারা বিভাজ্য হয়।

প্রমাণঃ n=$\overline{a_k a_{k-1} \dots \dots . a_1 a_0}$ $=10^k a_k+10^{k-2}a_{k-1}+\dots\dots+10a_1+a_0$. এখানে বাম দিক থেকে k টি পদের পর প্রত্যেকটি পদ 10^k এর চেয়ে বড় 10 এর পাওয়ার দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং বাম দিক থেকে k টি পদ যোগফল

উপপাদ্যঃ কোন সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এর অংকগুলোর যোগফল 3 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

প্রমাণঃ যেকোনো s এর জন্য, $10\equiv1 \pmod 3$, বা, $10^s\equiv1 \pmod 3$,বা, $10^s a_s\equiv a_s \pmod 3$. সুতরাং, s এর মান

0 হতে k পর্যন্ত চিন্তা করে সবগুলো অনুসমতা যোগ করে পাই,

$n=10^k a_k+10^{k-2}a_{k-1}+\dots\dots+10a_1+a_0\equiv a_k+a_{k-1}+a_{k-2}+\dots\dots+a_0 \pmod 3$. তাহলে দেখা যাচ্ছে কোন সংখ্যাকে 3 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ হবে, সংখ্যাটির অঙ্কগুলোর যোগফলকে 3 দ্বারা ভাগ করলেও একই ভাগশেষ হবে। ফলে যদি সংখ্যাকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ 0 হতে হয়, তাহলে এর অংকগুলোর যোগফলকে 3 দিয়ে ভাগ করলেও ভাগশেষ 0 হতে হবে। অর্থাৎ অংকগুলোর যোগফলকে 3 দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে।

উপপাদ্যঃএকটি সংখ্যা 9 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এর অংকগুলোর যোগফল 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

প্রমাণঃ লক্ষ্য কর, $10\equiv 1 \pmod 9$),ফলে $n = 10^k a_k + 10^{k-2} a_{k-1} + \ldots\ldots + 10a_1 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + a_{k-2} + \ldots\ldots + a_0 \pmod 9$. এবং ঠিক আগের উপপাদ্যের মত করে প্রমাণ কর।

উপপাদ্যঃ কোন সংখ্যা 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি সংখ্যাটির শেষ অংক 0 বা 5 হয়।

উপপাদ্যঃ $n=\overline{a_k a_{k-1} \ldots\ldots a_1 a_0} = 10^k a_k + 10^{k-2} a_{k-1} + \ldots\ldots + 10a_1 + a_0$. সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি $a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - a_{k-3} + \ldots\ldots + (-1)^k a_0$, 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

প্রমাণঃ লক্ষ্য কর, $10 \equiv -1 \pmod{11}$. s জোড় হলে $10^s a_s \equiv a_s \pmod{11}$ এবং s বিজোড় হলে $10^s a_s \equiv -a_s \pmod{11}$. এবার আগের উপপাদ্যের মত সবগুলো অনুসমতা যোগ করে পাই, $n = 10^{k-1} a_k + 10^{k-2} a_{k-1} + \ldots\ldots + 10a_1 + a_0 \equiv \pm(a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - a_{k-3} + \ldots\ldots + (-1)^k a_0) \pmod{11}$.সুতরাংn,11 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি $a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - a_{k-3} + \ldots\ldots + (-1)^k a_0$, 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

যেমনঃ 15994 সংখ্যার ক্ষেত্রে, 1-5+9-9+4=0 , যা 11 দ্বারা বিভাজ্য। ফলে 15994 সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য ।আবার, 1475 সংখ্যার ক্ষেত্রে, 1-4+7-5=-1 ,যা 11 দ্বারা বিভাজ্য নয়। সুতরাং 1475, 11 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

উপপাদ্যঃ $n=\overline{a_k a_{k-1} \ldots\ldots a_1 a_0} = 10^k a_k + 10^{k-2} a_{k-1} + \ldots\ldots + 10a_1 + a_0$. সংখ্যাটি 101 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি $\overline{a_1 a_0} - \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} - \ldots\ldots$ সংখ্যাটি 101 দ্বারা বিভাজ্য হয়। যদি k জোড় হয়, তাহলে শেষ পদ হবে $\overline{a_k}$

প্রমাণঃ আগের উপপাদ্যের মত নিজে প্রমাণ কর।

33742484 সংখ্যার ক্ষেত্রে, $84 - 24 + 74 - 33 = 101$, যা 101 দ্বারা বিভাজ্য। ফলে 33742484 , 101 দ্বারা বিভাজ্য। ভাগ করে দেখ, 99742484=101x334084.

উপপাদ্যঃ আগের দুটি উপপাদ্যের মতই প্রমাণ করা যায়, কোন সংখ্যা 1001=1000+1 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি $\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \ldots\ldots$, সংখ্যাটি 1001 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

উদাহরণঃ 7895888 এর ক্ষেত্রে, 888-895+7=0, যা 1001 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং 7895888, 1001 দ্বারা বিভাজ্য।

লক্ষ্য কর, 1001=7x11x13. অর্থাৎ কোন সংখ্যা 1001 দিয়ে বিভাজ্য হওয়ার অর্থ হল সংখ্যাটি 7,11,13 সবগুলো দ্বারা বিভাজ্য হওয়া। তাহলে দেখা যাচ্ছে আমরা কোন সংখ্যার 7,11,13 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার নিয়মও বের করে ফেলেছি।

*আগের দুটি উপপাদ্যের প্রমাণ হতে কোন সংখ্যা 10^a+1 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার শর্ত বের করতে পারবে?

অনেক ক্ষেত্রে কোন সংখ্যা মৌলিক না যৌগিক তা বের করে দেখতে হতে পারে। যেকোনো যৌগিক সংখ্যার সর্বনিম্ন মৌলিক উৎপাদক এর বর্গমূলের সমান বা তার চেয়ে ছোট হয়। কারণ যৌগিক সংখ্যার কমপক্ষে দুটি মৌলিক উৎপাদক থাকে। এখন যৌগিক সংখ্যা n এর দুটি মৌলিক উৎপাদক যদি $\sqrt{n}$ এর চেয়ে বড় হয়, তাহলে এদের গুণফল n এর চেয়ে বড় হবে, যা সম্ভব নয়। তাহলে **যদি কোন সংখ্যা n কে আমরা বিভিন্ন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে n মৌলিক না যৌগিক তা বের করতে চাই, তাহলে n কে $\sqrt{n}$ পর্যন্ত *মৌলিক* সংখ্যা গুলো দ্বারা ভাগ করে দেখাই যথেষ্ট।**

ধরা যাক, 397 সংখ্যাটি মৌলিক কিনা তা আমরা বের করতে চাই। যেহেতু $20^2=400$, $\sqrt{397}$ এর মান 20 এর চেয়ে ছোট হবে। ফলে 1 হতে 19 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যা গুলো দ্বারা ভাগ করে দেখাই যথেষ্ট।1 হতে 19 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যাগুলো হল 2,3,5,7,11,13,17,19. 397 সংখ্যাটি বিজোড়, আবার শেষ অঙ্কটি 5 নয়, সুতরাং 2, 5 এর কোনটি দ্বা রা বিভাজ্য নয়। 3+9+7=19, যা 3 দ্বারা বিভাজ্য নয়। ফলে মুল সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য নয়। সরাসরি 7,11,13,17,19 দ্বারা ভাগ করে দেখা যায়, এদের কোনটিই 397 কে ভাগ করে না। সুতরাং 397 মৌলিক সংখ্যা।

অধ্যায় ৭

বিভিন্ন ফলাফল,সমস্যা ও সমাধান

এই অধ্যায়ে সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে আমরা অনেকগুলো সমস্যা সমাধানের কৌশল শিখব। তবে এই অধ্যায়ের যেসব সমস্যার সমাধান দেওয়া আছে সেগুলোর সমাধান দেখার আগে নিজে নিজে একাধিকবার চেষ্টা করবে। তার পরও না পারলে সমাধান দেখবে। সমস্যার সমাধান মনে না রেখে সমাধানে আসলে কি করা হল তা বোঝার চেষ্টা করবে এবং সেগুলো যাতে পরে নিজে ব্যাবহার করতে পারো তার চেষ্টা করবে।

বর্গ ও শেষ অংক

ফলাফল ১।যেকোনো জোড় সংখ্যার বর্গকে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হবে। আর যেকোনো বিজোড় সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 1

প্রমাণঃ যেকোনো জোড় সংখ্যা 2 দ্বারা বিভাজ্য, ফলে এর বর্গের মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণে কমপক্ষে দুইটি 2 থাকবে, ফলে বর্গটি 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে। এখন, যেকোনো বিজোড় সংখ্যাকে 2k+1 আকারে লেখা যায়।

যেখানে k পূর্ণসংখ্যা। এখন,$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$, এখানে k ও k+1 দুটি ক্রমিক সংখ্যা, ফলে এদের মধ্যে একটি জোড় সংখ্যা থাকবেই এবং k(k+1), সংখ্যাটি 2 দ্বারা বিভাজ্য হবে।ফলে 4k(k+1) সংখ্যাটি 8 দ্বারা বিভাজ্য হবে। অর্থাৎ 4k(k+1)+1 কে 8 দ্বারা ভাগ করলে 1 অবশিষ্ট থাকবে।

উপপাদ্যঃ কোন বর্গসংখ্যাকে 3দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 0 অথবা 1. অর্থাৎ $n^2\equiv 0,1 \pmod 3$

প্রমাণঃ যেকোনো পূর্ণসংখ্যা 3k,3k+1,3k+2 এই তিন আকারের কোন একটি আকারের। $(3k)^2=9k^2\equiv 0 \pmod 3$, $(3k+1)^2=9k^2+6k+1\equiv 1 \pmod 3$ এবং, $(3k+2)^2=9k^2+12k+4\equiv 1 \pmod 3$.

উপপাদ্যঃ $n^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$, $n^2\equiv 0,1,4,9 \pmod{16}$

প্রমাণঃউপরের মত করে নিজে কর।

অন্যভাবে বললে উপরের উপপাদ্য বলছে যে কোন পূর্ণবর্গকে 4 দ্বারা ভাগ করলে কেবল 0 ও 1 ভাগশেষ থাকতে পারে।

ফলাফল ২। দেখ, 0x0=0, 1x1=1,2x2=4,3x3=9,4x4=16,5x5=25,6x6=36,7x7=49,8x8=64, 9x9=81 এখান থেকে বলা যায়, কোন পূর্ণবর্গের শেষ অংক 2,3,7,8 হতে পারে না।

সমস্যাঃ 30 টি 1 বিশিষ্ট সংখ্যা কি পূর্ণবর্গ হতে পারে?

সমাধানঃn=$\overline{111\ldots\ldots1}$ সংখ্যাটিতে 30 টি 1 আছে। n=$\overline{111\ldots\ldots100}$+11, এখানে রেখা বন্ধনীর নিচে 28 টি 1 আছে এবং এই পদটি 4 দ্বারা বিভাজ্য। আর 11 কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 3, অর্থাৎ,n কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 3 । ফলে এটি পূর্ণবর্গ হতে পারবে না।

সমস্যাঃ কোন পূর্ণবর্গ সংখ্যার শেষ দুটি অংক 0 ও 4 হতে পারে। এই দুটি সংখ্যা ছাড়া আর কোন সংখ্যা হতে পারে কি?

সমাধানঃ না। শেষ অংক দুটি 4 ছাড়া অন্য সংখ্যা হলে মুল সংখ্যাটিকে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 2 বা 3 হয়,(নিজে পরিক্ষা কর সবগুলো ক্ষেত্রে) ফলে সেটা পূর্ণবর্গ হতে পারবে না।

সমস্যাঃ একটি চার অঙ্কের পূর্ণবর্গ সংখ্যার প্রথম দুটি অংক অভিন্ন, আবার শেষ দুটি অঙ্ক অভিন্ন। পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

*এটাও দেখানো যায় যে কোন বর্গ সংখ্যার শেষ চার অংক একই হলে সেটা শুধু 0 হতে পারে। এখান থেকে বলা যায়, কোন বর্গ সংখ্যার সব অংক একই হতে পারে না।

সমাধানঃ ধরা যাক, সংখ্যাটি n=$\overline{aabb}$=1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b). এখন দেখা যাচ্ছে, n, 11 দ্বারা বিভাজ্য। যেহেতু n বর্গ সংখ্যা, সুতরাং এটি 11^2 দ্বারাও বিভাজ্য। অর্থাৎ (100a+b) সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য। আবার, (100a+b)=11x(9a)+(a+b). অর্থাৎ (a+b) এর মান 11 দ্বারা বিভাজ্য।পূর্ণবর্গের শেষ অংক 2,3,7,8 হতে পারে না। ফলে (a,b)এর সম্ভাব্য মান হতে পারে (2,9),(5,6),(7,4) আবার দেখা যাচ্ছে, n=11^2x$\frac{100a+b}{11}$. $\frac{100a+b}{11}$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং n একটি পূর্ণবর্গ। ফলে $\frac{100a+b}{11}$ এ a ও b এর সম্ভাব্য মান গুলো বসিয়ে দেখা যায়, (a,b)=(7,4) এর জন্য $\frac{100a+b}{11}$ পূর্ণবর্গ হবে। ফলে n=7744.

সমস্যাঃ 33 টি পূর্ণবর্গ সংখ্যার যোগফলও একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। এই 33 টি সংখ্যার মধ্যে ঠিক 27 টি সংখ্যা কি জোড় হতে পারে?

সমস্যাঃ একটি তিন অঙ্কের সংখ্যাকে এর অংকগুলোর যোগফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ সর্বোচ্চ কত হতে পারে?

ফার্মা ও অয়লার

সমস্যাঃ দেখাও যে,যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য, $3^{6n}-2^{6n}$ সংখ্যাটি 35 দ্বারা বিভাজ্য।

সমাধানঃ $3^{6n}-2^{6n}$ সংখ্যাটি 35 দ্বারা বিভাজ্য দেখানোর জন্য এটা দেখানোই যথেষ্ট যে, সংখ্যাটি 5 ও 7 দ্বারা বিভাজ্য।এখন, $3^6\equiv4 \pmod 5$, বা, $3^{6n}\equiv4^n \pmod 5$.আবার, $2^6\equiv4 \pmod 5$, বা, $2^{6n}\equiv4^n \pmod 5$. সুতরাং, $3^{6n}-2^{6n}\equiv0 \pmod 5$, অর্থাৎ, 5 দ্বারা $3^{6n}-2^{6n}$ বিভাজ্য। একই ভাবে প্রমাণ করা যায়, 7 দ্বারা $3^{6n}-2^{6n}$ সংখ্যাটি বিভাজ্য।

সমস্যাঃ p এমন একটি মৌলিক সংখ্যা যেটি 2^p+1 কে নিঃশেষে ভাগ করে। p এর মন কত কত হতে পারে?

সমাধানঃ স্পষ্টত, p এর মান 2 নয়। তাহলে p বিজোড় হবে।এখন, ফার্মার উপপাদ্য হতে, $2^p+1\equiv2+1\equiv3 \pmod p$. অর্থাৎ, p দ্বারা 3 বিভাজ্য । সুতরাং p=3.

সমস্যাঃ এমন সকল সংখ্যা p নির্ণয় কর যেন p দ্বারা 2^p+1 সংখ্যাটি বিভাজ্য।

সমস্যাঃ এমন সকল মৌলিক সংখ্যা p নির্ণয় কর যেন p দ্বারা 2^p-1 সংখ্যাটি বিভাজ্য।

সমস্যাঃ p একটি নির্দিষ্ট মৌলিক সংখ্যা ।এমন সকল পূর্ণ সংখ্যা a বের কর যেন p দ্বারা a^p+1 নিঃশেষে বিভাজ্য হয়।

সমাধানঃ ফার্মার উপপাদ্য হতে বলা যায়, $a^p\equiv a \pmod p$, বা, $a^p+1\equiv a+1 \pmod p$. অর্থাৎ p দ্বারা a^p+1 কে বিভাজ্য হতে হলে a+1 কেও p দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে। এখন সেটা হতে পারে যদি a, p এর কোন গুনিতকের চেয়ে 1 কম হয়, অর্থাৎ a=pk-1 আকারের কোন সংখ্যা হয়।

সমস্যাঃ p একটি নির্দিষ্ট মৌলিক সংখ্যা ।এমন সকল পূর্ণ সংখ্যা a বের কর যেন p দ্বারা a^p+k নিঃশেষে বিভাজ্য হয়।

সমস্যাঃ মনে কর p একটি মৌলিক সংখ্যা, যেখানে $a^p=b^p+c^p$. প্রমাণ কর যে, (a-b-c) সংখ্যাটি p দ্বারা বিভাজ্য।

সমস্যাঃ এমন একটি যৌগিক সংখ্যা n বের কর যেন যেকোনো পূর্ণসংখ্যা a এর জন্য, $a^n \equiv a \pmod n$ হয়।

আরও বিভাজ্যতা

*সমস্যাঃ n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং p একটি মৌলিক সংখ্যা। একটি স্থানে n সংখ্যক পূর্ণসংখ্যা আছে। এদের প্রত্যেক জোড়া সংখ্যা নিয়ে তাদের অন্তর বের করা হল।এরপর সবগুলো অন্তরফলকে গুন করা হল। n এর মান সবনিম্ন কত হলে নিশ্চিতভাবে বলা যাবে যে এই গুনফলটি p দ্বারা বিভাজ্য?

সমাধানঃ গুণফলটি p দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি অন্তত একটি অন্তর p দ্বারা বিভাজ্য হয়। (a-b) সংখ্যাটি p দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি a ও b কে p দ্বারা ভাগ করে একই ভাগশেষ হয়। আর p দ্বারা একটি সংখ্যাকে ভাগ করলে ভাগ শেষ হতে পারে 0 হতে p-1 পর্যন্ত। সুতরাং দুটি ভাগশেষ একই হতে হলে আমাদের কমপক্ষে p টি সংখ্যা থাকতে হবে। অর্থাৎ n এর মান কমপক্ষে p হতে হবে।

সমস্যাঃ উপরের প্রশ্নে যদি p এর স্থানে $p_1p_2p_3\ldots p_k$ চিন্তা করা হয়, যেখানে $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_k$ ভিন্ন ভিন্ন মৌলিক সংখ্যা, তাহলে n এর মান কমপক্ষে কত হবে?

সমস্যাঃ প্রমাণ কর যে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা a,b,c,d এর জন্য (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(b-d)(a-c) সংখ্যাটি 12 দ্বারা বিভাজ্য।

*সমস্যাঃ 99 কে সর্বনিম্ন কত দ্বারা গুণ করলে গুণফল কেবল 1 বিশিষ্ট একটি সংখ্যা হবে?

সমাধানঃ ধরা যাক, 99k=111…1=n, এখানে n সংখ্যক 1 আছে।এখন, n সংখ্যাটি 99 দ্বারা বিভাজ্য, ফলে এটি 9 ও 11 দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে, এবং তা হলেই আমাদের শর্ত পূরণ হবে। এখন n ,11 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এতে জোড় সংখ্যক 11 থাকে, আবার n, 9 দ্বারা বিভাজ্য

হবে যদি এতে 9 এর গুণিতক সংখ্যক 1 থাকে। 9 এর সর্বনিম্ন জোড় গুণিতক হল 18. তাহলে n এ 18 টি 1 আছে। অর্থাৎ k=$\frac{111...1}{99}$, যেখানে লবে 18 টি অংক আছে।

সমস্যাঃ দেখাও যে, যেকোনো স্বাভাবিক n এর জন্য, $8^n+7^n-3^n-2^n$ সংখ্যাটি 10 দ্বারা বিভাজ্য।

ফলাফলঃ যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য 4^n+n^4 সংখ্যাটি যৌগিক হবে।

প্রমাণঃ n জোড় সংখ্যা হলে 4^n+n^4 সংখ্যাটি জোড় হবে, ফলে এটি যৌগিক হবে। এখন n বিজোড় হলে, n=2k+1 লেখা যায়। তাহলে, $4^n+n^4=4^{2k+1}+(2k+1)^4$

$=(2^{2k+1})^2+\{(2k+1)^2\}^2+2.2^{2k+1}.\ (2k+1)^2-2.2^{2k+1}.\ (2k+1)^2$

$=\{2^{2k+1}+(2k+1)^2\}^2-\{2^{k+1}.(2k+1)\}^2$

$=\{2^{2k+1}+(2k+1)^2+2^{k+1}.(2k+1)\}\{\ 2^{2k+1}+(2k+1)^2-\ 2^{k+1}.(2k+1)\}$, যা দুটি সংখ্যার গুণফল। ফলে

4^n+n^4 একটি যৌগিক সংখ্যা।

****

সমস্যাঃ দেখাও যে p ও p^2+2 দুইটিই মৌলিক সংখ্যা হলে p^3+2 ও মৌলিক সংখ্যা হবে।

****

সমস্যাঃ প্রমাণ কর যে, n একটি যৌগিক সংখ্যা হলে (n-1)! সংখ্যাটি n দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণঃ (n-1)!=1x2x3x....x(n-1). এখন n যৌগিক সংখ্যা বলে n এর কমপক্ষে দুটি উৎপাদক আছে, যারা 1 হতে বড়, কিন্তু n হতে ছোট। এই উৎপাদক দুটি অবশ্যই 1 হতে (n-1) পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে আছে। সুতরাং এদের গু ণফল (n-1)! কে নিঃশেষে ভাগ করে।

সমস্যাঃ এমন সকল সংখ্যা n বের কর যেন $\sqrt{n}$ পর্যন্ত সকল মৌলিক সংখ্যা দ্বারা n বিভাজ্য হয়।

সমস্যাঃ 100! সংখ্যাটির শেষে কয়টি 0 আছে?

**সমস্যাঃ a,b,c,d ভিন্ন ভিন্ন স্বাভাবিক সংখ্যা হলে, $a!+b!=c!+d!$ হতে পারে কি?

সমস্যাঃ $1!+2!+3!+....++99!+100!$ কে 18 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমস্যাঃ m দ্বারা $(m-1)!+1$ বিভাজ্য হলে দেখাও যে m অবশ্যই মৌলিক সংখ্যা হবে।

****

একটা প্রয়োজনীয় উপপাদ্য।

উপপাদ্যঃ যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য, $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+........+ab^{n-2}+b^{n-1})$

প্রমাণঃ $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+........+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$=a(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+........+ab^{n-2}+b^{n-1})-b(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+........+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+.......+a^2b^{n-2}+ab^{n-1} \quad -a^{n-1}b-a^{n-2}b^2-a^{n-3}b^3-..........ab^{n-1}-b^n$$

$$=a^n-b^n.$$

আরেকটি উপপাদ্যঃ n বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা হলে,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+........+b^{n-1})$$

প্রমাণঃ আগেরটার মতই বন্ধনি তুলে দিয়ে সরল কর।

সমস্যাঃ দেখাও যে, 2^n+1 মৌলিক হলে n, 2^k আকারের একটি সংখ্যা হবে(n এর কোন বিজোড় উৎপাদক থাকবে না)।

সমস্যাঃ দেখাও যে, 2^n-1 মৌলিক হলে n কেও মৌলিক হতে হবে।

****

সংখ্যার উৎপাদক সংখ্যা

তৃতীয় অধ্যায়ের আমরা দেখেছি, $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\ldots\ldots p_k^{a_k}$ **হোলে, যেখানে $p_1,p_2,\ldots,p_k$** ভিন্ন ভিন্ন **মৌলিক সংখ্যা, n এর মোট উৎপাদক সংখ্যা** $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots\ldots\ldots(a_k+1)$

এখন এই উপপাদ্য ব্যাবহার করে আমরা কিছু সমস্যা সমাধান করব।

উপপাদ্যঃ কেবলমাত্র পূর্ণবর্গ সংখ্যার বিজোড় সংখ্যক উৎপাদক থাকে।

প্রমাণঃ ধরা যাক, k , n এর একটি উৎপাদক। তাহলে, $\frac{n}{k}$ সংখ্যাটি একটি পূর্ণসংখ্যা হবে এবং এটিও n এর একটি উৎপাদক হবে, কারণ, $(\frac{n}{k})k=n$.তাহলে দেখা যাচ্ছে, n এর উৎপাদকগুলকে জোড়ায় জোড়ায় ভাগ করা যাচ্ছে, যেখানে এক জোড়ার দুটি সংখ্যার গুনফল n. n পূর্ণবর্গ হলে $\sqrt{n}$ সাথে $\sqrt{n}$ এর জোড়া হবে, অন্যথায় k এবং $\frac{n}{k}$ সর্বদায় ভিন্ন হবে। অর্থাৎ, n পূর্ণবর্গ না হলে n এর জোড় সংখ্যক উৎপাদক থাকবে। আর n পূর্ণবর্গ হলে বিজোড় সংখ্যক উৎপাদক থাকবে।

সমস্যাঃ 540 এর সবগুলো উৎপাদক এর গুনফল নির্ণয় কর।

সমস্যাঃ একটি স্থানে 1 হতে 20 পর্যন্ত নাম্বার দেওয়া 20 টি বাক্স আছে, আর 1 হতে 20 রোল পর্যন্ত ছাত্র আছে। প্রথমে সবগুলো বাক্স বন্ধ ছিল।1 রোল গিয়ে সবগুলো বাক্স খুলে দিল । এরপর 2 রোল গিয়ে 2,4,6, এভাবে 20 পর্যন্ত বাক্স বন্ধ করবে। 3 রোল গিয়ে 3,6,9, ...এরকম বাক্সগুলো খুলে দিবে। এভাবে 20 রোল পর্যন্ত চলবে। সবশেষে কয়টি বাক্স বন্ধ থাকবে?

সমস্যাঃ 1 হতে 1000 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো বোর্ডে লেখা হল। এরপর প্রত্যেকটি সংখ্যা মুছে দিয়ে তার জায়গায় সংখ্যাটির উৎপাদক সংখ্যা লেখা হল। এরপর আবার এই সবগুলো সংখ্যা মুছে দিয়ে এদের যোগফল লেখা হল। এই সংখ্যাটি জোড় নাকি বিজোড়?

* মনে কর T_k দ্বারা k এর উৎপাদক সংখ্যা নির্দেশ করা হয়। তাহলে প্রমাণ কর যে,

$$T_1+T_2+T_3+\ldots\ldots+T_n=\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$$

সমস্যাঃ 420 কে কতভাবে একই সংখ্যার যোগফল হিসাবে লেখা যায়?

ডায়োফেন্টাইন সমীকরণ

$3x+2y=7$, সমীকরণের পূর্ণসাঙ্খ্যিক সমাধান হতে পারে $(x,y)=(1,2),(-1,5),(3,-1)$ ইত্যাদি. আবার, $3x^2+2y=5$ এর সমাধান হতে পারে $(1,1)$. এরকম প্রদত্ত সমীকরণের সংখ্যার চেয়ে চলকের সংখ্যা বেশি হলে এসব সমীকরণ বা সমীকরণ জোটের সমাধান এবং তা আদৌ সমাধান করা যাবে কিনা তা অনুসন্ধান করাই এই অধ্যায়ের উদ্দেশ্য।

চলকের এক মাত্রার ক্ষেত্রে

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=s$ হলে, যেখানে s ধ্রুবক, সমীকরণের সমাধান থাকবে যদি ও কেবল যদি $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ দ্বারা s বিভাজ্য হয়।

উদাহরণঃ $3x+9y=17$ সমীকরণের কোন সমাধান নেই, কারণ 3,9, এর গ.সা.গু দ্বারা 17 বিভাজ্য নয়। অন্যভাবে বলা যায়, x,y এর যেকোনো মানের জন্যই বামপক্ষ 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে, কিন্তু ডানপক্ষ হবে না। ফলে এর কোন সমাধান নেই।

সমস্যাঃ পূর্ণসংখ্যায় $17y+289z=17$ এর সমাধান আছে কি?

সমাধান বের করা।

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=s$ আকারের সমীকরণের সমাধান থাকলে অসীম সংখ্যক সমাধান থাকে, এদের একটি বের করতে পারলে বাকিগুলোও বের করা যায়। এখানে উদাহরণের মাধ্যমে একটি সমাধান করার পদ্ধতি দেখানো হল।

ধরা যাক, $5x+13y=61$ এর একটি সমাধান বের করতে হবে।

$5x=61-13y$, $x=\frac{61-13y}{5}=12-2y+\frac{1-3y}{5}$, যেখান থেকে দেখা যায়, $1-3y$, 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে। সহজেই এমন একটি সমাধান পাওয়া যায় যা হল $y=2$, তাহলে $x=7$. একটি সমাধান পেয়ে গেলাম।

আবার , reduced residue system থেকেও একটি সমাধান বের করা যায়। উপরের সমীকরণ থেকে, $13x-61=-5y$, বা, $13x\equiv61 \pmod 5$ বা, $3x\equiv1 \pmod 5$. $\{1,2,3,4\}$ এবং $\{3,6,9,12\}$ দুইটিই reduced residue system (mod5). 3,6,9,12 এর মধ্যে $6=3\times2\equiv1 \pmod 5$,অর্থাৎ $x=2$ একটি সমাধান।

সমস্যাঃ $x^2+1=39y$ সমীকরণটির পূর্ণসংখ্যায় কোন সমাধান আছে কি?

সমাধানঃ $x^2 \equiv 0,1 \pmod 3$, বা, $x^2+1 \equiv 1,2 \pmod 3$, কিন্তু ডানপক্ষ $\equiv 0 \pmod 3$. ফলে এর কোন সমাধান নেই।

এই ধরণের সমীকরণ নিয়ে কাজ করার সময় জোড় বিজোড়, বিভিন্ন সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষ ইত্যাদি নিয়ে চিন্তা করলে সুবিধা হতে পারে।

সমস্যাঃ $2^m-3^n=1$, যেখানে m,n অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এর সকল সমাধান বের কর।

সমস্যাঃ $3^n-2^m=1$, যেখানে m,n পূর্ণসংখ্যা। এর সকল সমাধান বের কর।

সমস্যাঃ x ,y পূর্ণসংখ্যা হলে $2^x-1=y^2$, $2^x+1=y^2$ সমীকরণ দুটির সকল সমাধান বের কর।

সমস্যাঃ a,b,c,d পূর্ণ সংখ্যা হলে $4^a+4^b+4^c=4^d$ এর সকল সমাধান বের কর।

অধ্যায় ৮

বর্গমূল বের করার একটি পদ্ধতি

কোন পূর্ণসংখ্যা একটি পূর্ণবর্গ হলে বর্গমূল বের করার জন্য সংখ্যাটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যেতে পারে। যেমন, $196=2x98=2^2x49=2^2x7^2=(2x7)^2$, অর্থাৎ, $196=14^2$. কিন্তু সংখ্যাটি যদি পূর্ণবর্গ না হয় অথবা পূর্ণসংখ্যাই না হয় তাহলে? কোন পূর্ণসংখ্যা পূর্ণবর্গ না হলে এর বর্গমূল অমূলদ হবে। এরকম ক্ষেত্রে দশমিকের পর এক বা দুই ঘর পর্যন্ত আসন্ন মান সহজেই বের করা যায়।

ধরা যাক আমরা 15 এর বর্গমূল দশমিকের পর একঘর পর্যন্ত বের করতে চাই।

এখন, $15=\frac{1500}{100}$. এখন 1500 এর চেয়ে ছোট সবচেয়ে বড় পূর্ণবর্গ বের করি। যেহেতু $40^2=1600$, সুতরাং $\sqrt{1500}<40$. $39^2=(40-1)^2=1600-80+1=1521$, $38^2=(40-2)^2=1600-160+4=1444$. অর্থাৎ, $38^2<1500<39^2$. তাহলে বলা যায়, $\sqrt{1500}\approx38$ বা, $\sqrt{\frac{1500}{100}}\approx\frac{38}{10}$ অর্থাৎ, $\sqrt{15}\approx3.8$. একঘর পর্যন্ত আসন্ন মান পেয়ে গেলাম। লক্ষ্য কর এখানে কিন্তু $\sqrt{1500}$ এর আসন্ন মান 38 নেওয়া হয়েছে, 39 নেওয়া হয়নি। কারণ, $\sqrt{1500}$ এর মান নিশ্চিত ভাবে 38 এর চেয়ে বড়, কিন্তু 39 এর চেয়ে ছোট।

যদি আমরা দুই ঘর পর্যন্ত আসন্ন মান পেতে চাই তাহলে? একইভাবে $15=\frac{150000}{10000}$ লেখা যায়।তখন 150000 এর চেয়ে ছোট সবচেয়ে বড় পূর্ণবর্গ বের করে নিতে হবে। সেটা হল 387^2. অর্থাৎ দুই ঘর পর্যন্ত $\sqrt{15}\approx3.87$

দশমিকযুক্ত সংখ্যা

54.3 এরকম সংখ্যার ক্ষেত্রেও আমরা আগের মত লিখব $54.3=\frac{5430}{100}$, এরপর আগের মতই বর্গমূল বের করা যাবে।

এখন কথা হতে পারে 1500 বা 150000 এর চেয়ে ছোট সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা কিভাবে বের করা যাবে। এর জন্য মূলত ট্রায়াল অ্যান্ড এরর এর উপরেই নির্ভর করতে হবে। তবে কৌশল ব্যাবহার করে হিসাবের পরিমাণ অনেকটা কমিয়ে আনা যায়।

প্রথমত সংখ্যাটি কত হতে পারে তা আন্দাজ করে নিতে হবে। যেমন 1800 এর ক্ষেত্রে বোঝা যাচ্ছে এর বর্গমুল 40 এর চেয়ে বড় হবে, যেহেতু $40^2=1600$. এখন ক্রমান্বয়ে $41^2, 42^2, ..$ বের করে দেখবো। $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ সূত্রের ব্যাবহার করে এগুলো সহজে বের করা যাবে। যেমন, $41^2=(40+1)^2=40^2+2x40x1+1^2=40^2+2x40+1=1600+81=1681$. আবার 41^2 এর মান ব্যাবহার করে 42^2 এর মান বের করব। $42^2=(41+1)^2=41^2+2x41x1+1^2=1681+82+1=1764$. বোঝা যাচ্ছে 43^2 এর মান 1800 এর চেয়ে বড় হবে।

এখন, এই পদ্ধতি ব্যাবহার করে 2,3,17,99,170,2623 এর বর্গমূল বের কর।