CC1 Algèbre linéaire 2021

27/10/2021

Soit n un entier non-nul. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Muni des lois de compositions usuelles, $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$?

   (a)
   $$A = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0\} \ .$$

   (b)
   $$B = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = 2\} \ .$$

   (c)
   $$C = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(2) = 0\} \ .$$

2. Les applications suivantes sont-elles linéaires?

   (a)
   $$f(P) = P'^2 \ ,$$

   (b)
   $$f(P) = \int_0^1 P(u)du \ ,$$

   (c)
   $$f(P) = P(1) \ .$$

3. On note F l'ensemble des polynômes pairs à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et G l'ensemble des polynômes impairs à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

4. F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels?
5. Que contient $F \cap G$?
6. Montrer que $F + G = \mathbb{R}_n[X]$.
7. Pourquoi peut-on définir la projection $\mathbf{p}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ sur F parallèlement à G?
8. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Que vaut $\mathbf{p}(P)$?
9. Soit $P \in F$. Que vaut $\mathbf{p}(P)$?
10. Soit $P \in G$. Que vaut $\mathbf{p}(P)$?