

CC3 Algèbre linéaire 2022

10/03/2022

Soit n un entier non-nul. \mathcal{M} désigne l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. \mathbf{I} désigne la matrice identité de \mathcal{M} et \mathbf{O} désigne la matrice nulle de \mathcal{M} .

Soit A une matrice donnée de \mathcal{M} . On suppose qu'il existe une matrice B de \mathcal{M} telle que $BA = \mathbf{I}$.

1. A peut-elle être la matrice nulle?
2. A peut-elle être la matrice identité?
3. On définit la fonction f de \mathcal{M} dans \mathcal{M} par $f(M) = AM$. Montrer que f est linéaire.
4. Montrer que $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{O}\}$.
5. En déduire que f est surjective.
6. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}$ telle que $AC = \mathbf{I}$.
7. Montrer que $C = B$ (On pourra calculer BAC de deux façons).