Part I

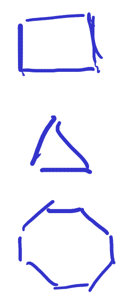
Logique mathématique

1 Définitions

On définit les notions suivantes :

- une **proposition** est un énoncé qui est soit vrai, soit faux ;
- Vrai (1) ou Faux (0) sont appelés **valeurs de vérité** ;

variable

"  est un triangle"

F
V
F

- un **prédicat** est un énoncé contenant une ou plusieures variables et qui se transforme en proposition suivant la valeur de ces variables.

"x est pair" est un prédicat

2 est pair Vrai

3 est pair Vrai.

2 Quantificateurs – Connecteurs logiques – Ensembles

Lorsqu'on évalue un prédicat, on peut toujours se ramener à la théorie des ensembles, en considérant l'ensemble des éléments qui satisfont le prédicat. Dans l'exemple précédent, le prédicat est vrai sur l'ensemble solution de l'équation $x + 6 = 10$. De manière moins abstraite, considérer le prédicat "le vêtement est blanc" nous ramène à l'ensemble des vêtements blancs. On rappelle d'abord les quantificateurs.

$$\underbrace{\underbrace{\forall x \in \mathbb{N}}_{\text{quantification}} \quad \underbrace{x \text{ est pair}}_{\text{prédicat}}}_{\text{proposition}} \qquad F.$$

- Le quantificateur universel “quel que soit” ou “pour tout” noté $\forall$ utilisé pour signifier que tout élément x d’un ensemble E vérifie une propriété $P(x)$, la syntaxe étant :

$$(\forall x \in E)\ \ (P(x)). \tag{2.1}$$

$\forall$ = "quelque soit".

$\in$ "est un élément de"

$\subset$ "est une sous-partie de"

$x \in \mathbb{N}$.
↑ un nombre entier

$A \subset \mathbb{N}$
↑ un sous ensemble
ex: les nombres pairs.

$\exists$ il existe.

- Le quantificateur existentiel "il existe" noté $\exists$ pour signifier qu'il existe au moins un élément x de E vérifiant la propriété $P(x)$, la syntaxe étant :

$$(\exists x \in E) \mid (P(x)). \tag{2.2}$$

Il existe un nombre divisible (dont le reste dans la division est 0) par tous les entiers.

Vrai car 0 vérifie la proposition.

Pour signifier qu'il existe un et un seul x dans E vérifiant la propriété $P(x)$, on utilisera la notation :

$$(\exists! x \in E) \mid (P(x)).$$

$\in$	appartient à	$x \in A$	x est dans A
$\forall$	pour tout, quelque-soit	$\forall x \in A$	pour tout x dans A
$\exists$	il existe, pour un certain	$\exists x \in A$	il existe x dans A

En utilisant les quantificateurs, il faudra faire attention à l'ordre d'apparition de ces derniers. Par exemple les assertions suivantes, où f est une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble E :

(1) $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$

Vrai si fonction majorée

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\exists M \in \mathbb{R}}_{\text{donc il existe un } M \text{ pour chaque } x.} \quad f(x) \leq M$

$M = f(x) + 1$ fonctionne toujours.

Toujours vrai.

<u>Note</u> : Si (1) est vraie, alors (2) est vraie.

Négation de P : notée $\overline{P}$ ou $\neg P$

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

L'élaboration de nouvelles assertions à partir d'autres se fait en utilisant les connecteurs logiques de négation, de conjonction, de disjonction, d'implication et d'équivalence. Dans ce qui suit, P et Q désignent des assertions.

- La négation de P, notée $\neg P$, ou non P ou $\overline{P}$, est l'assertion qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

  Par exemple la négation de l'assertion : " x est strictement positif " est " x est négatif ou nul " .

  P : $x > 0$ $\qquad \overline{P} = x \leq 0$

- La conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ (lire P et Q), est l'assertion qui est vraie uniquement si P et Q sont toutes deux vraies (et donc fausse dans les trois autres cas).

P : ascenseur 1 fonctionne

Q : ascenseur 2 fonctionne

$P \wedge Q$ = asc 1 fonctionne et asc 2 fonctionne
= les 2 fonctionne

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

⚠ "ou" n'est pas exclusif :

∧ et
∨ ou

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- La disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ (lire P ou Q), est l'assertion qui est vraie uniquement si l'une des deux assertions P ou Q est vraie (donc fausse si P et Q sont toutes deux fausses). Il faut remarquer que le "ou" pour "ou bien" est inclusif, c'est-à-dire que P et Q peuvent être toutes deux vrais dans le cas où $P \vee Q$ est vraie.

P : ascenseur 1 fonctionne

Q : ascenseur 2 fonctionne

$P \vee Q$ = l'asc 1 fonctionne ou le 2 (non exclusif)

= au moins un fonctionne.

$\overset{P}{\text{carré}} \Rightarrow \overset{Q}{\text{rectangle}}$

rectangle $\not\Rightarrow$ carré.

P	Q	P→Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Un carré ne peut pas ne pas être un rectangle. $V \Rightarrow F$ est faux.

- L'implication, notée $P \to Q$, est l'assertion qui est fausse uniquement si P est vraie et Q fausse (donc vraie dans les trois autres cas). On peut remarquer que si P est fausse, alors $P \to Q$ est vraie indépendamment de la valeur de vérité de Q. L'implication est à la base du raisonnement mathématique. En partant d'une assertion P (ou de plusieurs), une démonstration aboutit à un résultat Q. Si cette démonstration est faite sans erreur, alors $P \to Q$ est vraie et on notera $P \Rightarrow Q$ (ce qui signifie que si P est vraie, alors Q est vraie). Dans ce cas, on dit que P est une condition suffisante et Q une condition nécessaire. On peut remarquer que l'implication est transitive, c'est-à-dire que si P implique Q et Q implique R, alors P implique R.

- L'équivalence de P et Q, notée $P \leftrightarrow Q$, est l'assertion qui est vraie uniquement si $P \to Q$ et $Q \to P$ sont toutes deux vraies. Dans le cas où $P \leftrightarrow Q$ est vraie on dit que P est Q sont équivalentes et on note $P \Leftrightarrow Q$ (ce qui signifie que P et Q sont, soit toutes deux vraies, soit toutes deux fausses). Dans ce cas, on dit que Q est une condition nécessaire et suffisante de P.

$$P \Leftrightarrow Q$$

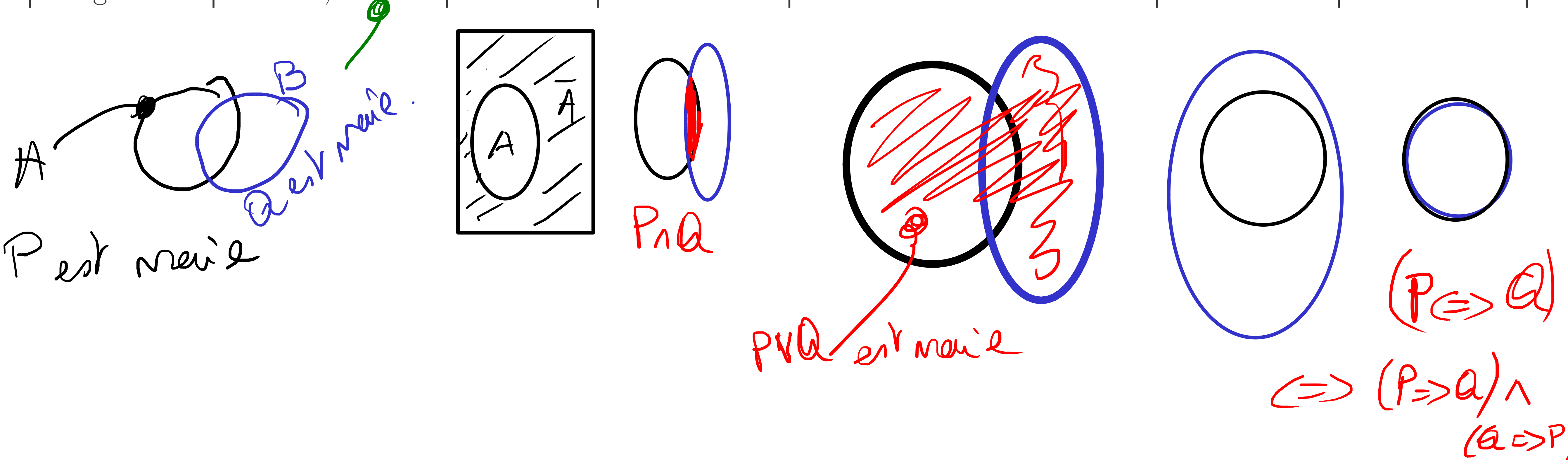
Diagramme de Venn

Un prédicat est toujours sur un certain ensemble.

On associe au prédicat l'ensemble des ses "vrais"

On donne alors le tableau des connecteurs logiques suivants.

Connecteur		Négation	Conjonction	Disjonction (non exclusif)	Implication	Équivalence
Notations	P (resp. Q)	Non P $\neg P$ $\bar{P}$	P et Q $P \wedge Q$	P ou Q $P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
Diagramme	$x \in A, x \in B$	$\bar{A}$	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \subset B$	$A = B$



On note que la proposition $P \Rightarrow Q$ ne donne aucune valeur de vérité à la proposition $Q \Rightarrow P$.

On peut également résumer les connecteurs logiques dans une table de vérité, donnant toutes les valeurs de vérité possibles aux propositions utilisées.

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

pour nier une proposition, on change chaque quantifieur puis on nie le prédicat

3 Négation

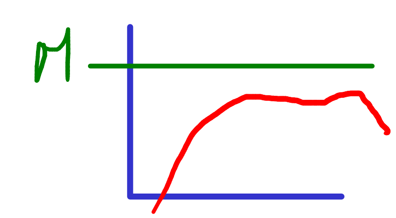
Il est intéressant de pouvoir formuler la négation d'une proposition. Soient $p(x)$ et $q(x)$ des prédicats

Quantificateurs	Négation	Stratégie
$\forall x, p(x)$	$\exists x, \bar{p}(x)$	Trouver un contre-exemple
$\exists x, p(x)$	$\forall x, \bar{p}(x)$	Tout x contredit $p(x)$

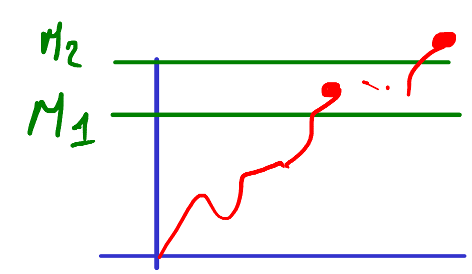
Connecteurs	Négation	Stratégie
$p(x)$ et $q(x)$	$\bar{p}(x)$ ou $\bar{q}(x)$	Contredire l'un des prédicats
$p(x)$ ou $q(x)$	$\bar{p}(x)$ et $\bar{q}(x)$	Contredire les deux prédicats
$p(x) \Rightarrow q(x)$	$p(x)$ et $\bar{q}(x)$	Trouver un élement vérifiant $p(x)$ et contredisant $q(x)$

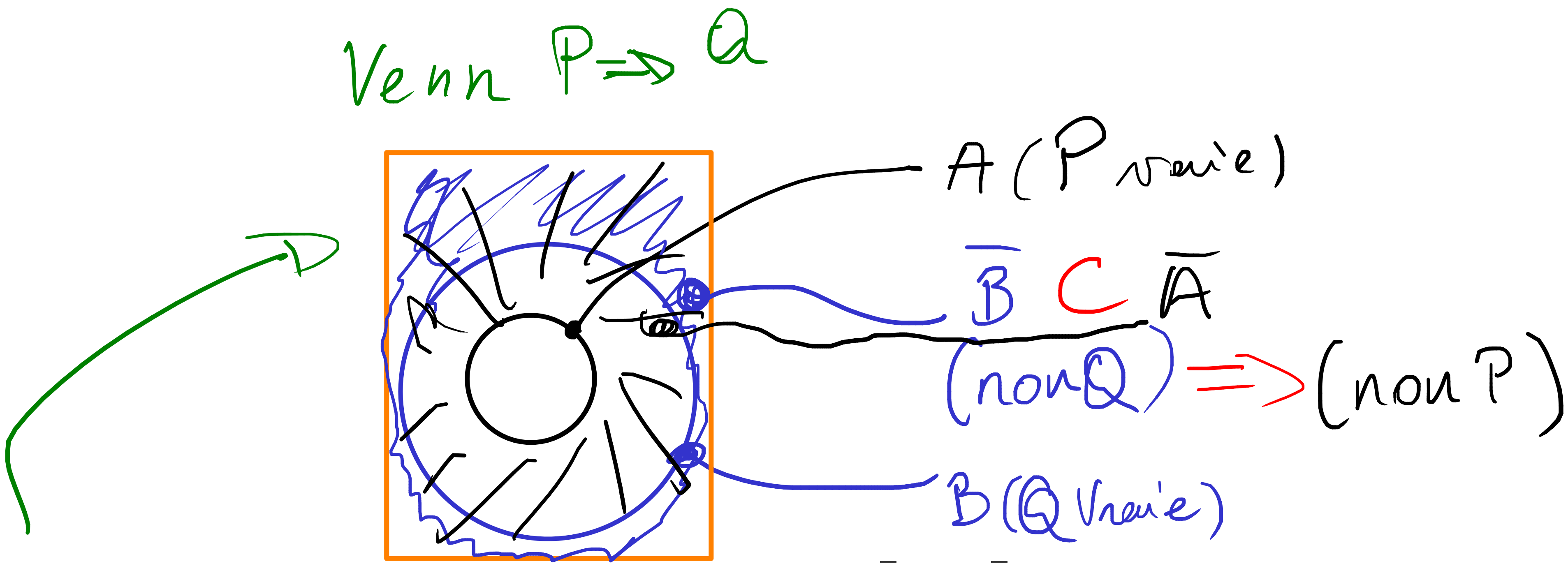
Exemple (fonction majorée)

$P : \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$



$\bar{P} : \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > M$





Proposition 3.1 *L'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$. Cette équivalence est appelée contraposée.*

Lois de Morgan

P — asc 1 fonctionne

Q — asc 2 fonctionne

$P \wedge Q$: les 2 fonctionnent (pas de dépanneur)

$\overline{P \wedge Q}$: au moins 1 en panne — dépanneur

$$\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$P \vee Q$: au moins 1 fonctionne (montée en asc)

$\overline{P \vee Q}$: aucun ne fonctionne (escalier)

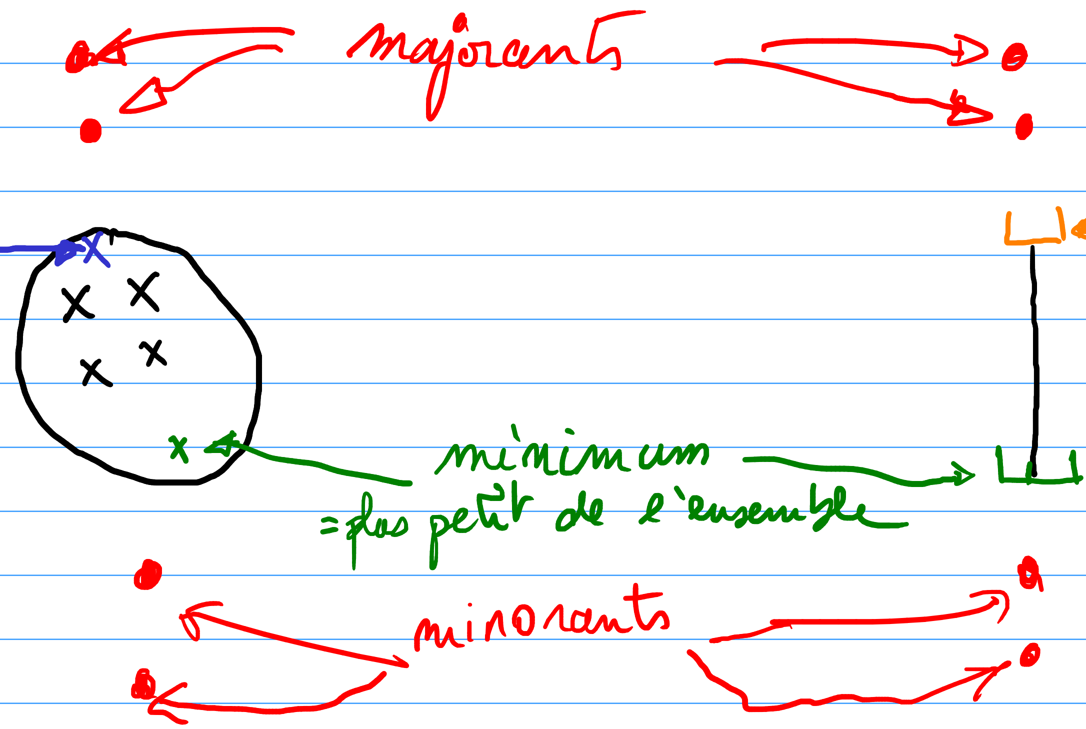
$$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

4 Bornes inférieures et supérieures

Exemples introductifs

Ensemble : famille d'objet ayant quelque-chose en commun.

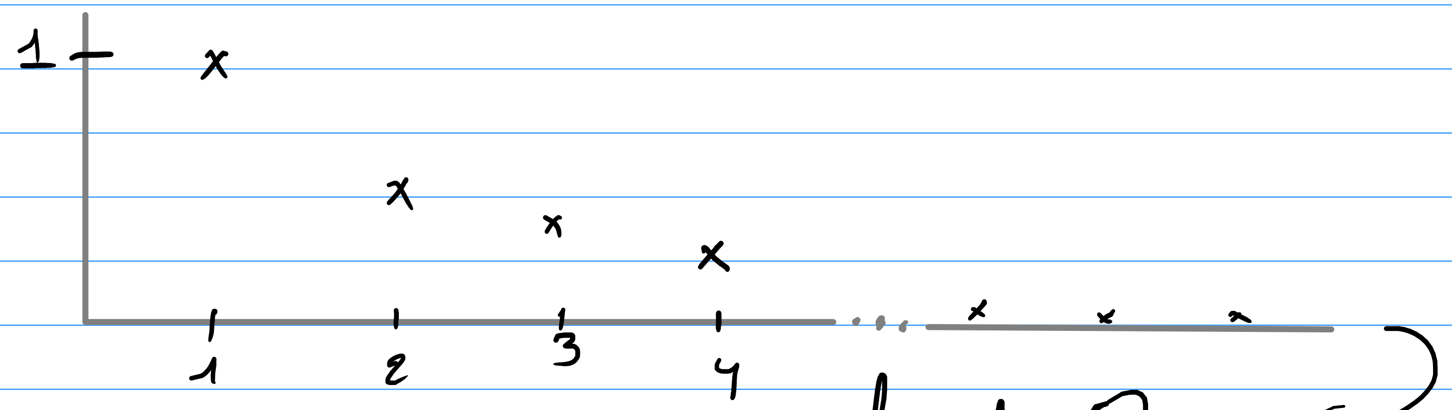
maximum
= plus grand de l'ensemble



intuitivement,
le plus grand élément
est exclu de l'ensemble
C'est le supremum
(ou borne supérieure)

D'où les notions à venir : majorants / minorants / maximum / minimum
supremum (borne supérieure) / infimum (borne inférieure)

Autre exemple : $\left\{ \frac{1}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\{1, 2, \dots, k, \dots\}$



On se rapproche de 0 sans le toucher.

0 est la borne inférieure (infimum) de l'ensemble. C'est un minorant. Mais ce n'est pas un minimum car il n'est pas dans l'ensemble.

$E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$ bien souvent
ou $\mathbb{Z}$

4 Bornes inférieures et supérieures

sous ensemble de E.

Definition 4.1 *Soit E un ensemble de nombres et $A \subset E$ une partie non vide de E. Un nombre $a \in E$ est* maximum *(ou* plus grand élément*) de A dans E si :*

- $a \in A$
- $\forall b \in A, \quad b \leq a.$

le plus grand élément de A.

Ce nombre a est alors noté $\max(A)$.

Définition du minimum :

Soit $A \subset E$. Le minimum a de A vérifie :

- $a \in A$
- $\forall b \in A, \quad a \leq b$.

Il est noté $\min(A)$.

Proposition 4.2 *Si A possède un maximum, alors ce maximum est unique. On le note* $\max A$.

Démonstration : Soient a_1 et a_2 des max. de A :

- a_1 et a_2 sont dans A.
- $\forall b \in A \quad b \leq a_1$ et $b \leq a_2$.

Mais $a_1 \in A$ donc $a_1 \leq a_2$
et $a_2 \in A$ donc $a_2 \leq a_1$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \\ a_2 \leq a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2$$

Donc le maximum est unique.

Definition 4.3 *Soit E un ensemble de nombres et $A \subset E$ une partie non vide de E. Un nombre $M \in E$ est* majorant *de A dans E si*

$$\forall b \in A, \qquad M \geq b.$$

Dans ce cas, on dit que A est majorée *par M.*

Définition du minorant : Soit $A \subset E$. m est un minorant de A

$$\iff \quad \forall b \in A, \quad b \geq m.$$

(on ne suppose plus que M et m sont dans l'ensemble)

$\Rightarrow$ ils ne sont pas uniques.

Remarque 4.4 *Une partie A d'un ensemble de nombre E peut avoir plusieurs majorants.*

Exemple. Soit $A = \{2, 3, 5\} \subset \mathbb{N}$.

5 est le maximum de A.

5 - 6 - 8 sont des majorants.

Definition 4.6 *On dit que* $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, *est* bornée *dans* E *si* A *est majorée et minorée dans* E.

Proposition 4.7 *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *possède un minimum.*

$\frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ Donc $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

$\pi \notin \mathbb{Q}$

Exemple. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$. Alors $A \neq \emptyset$ et A n'a pas de minimum.

$\hookrightarrow$ $]0,1] \cap \mathbb{Q}$ n'a pas de minimum.

Preuve : Supposons que le minimum de A est a :

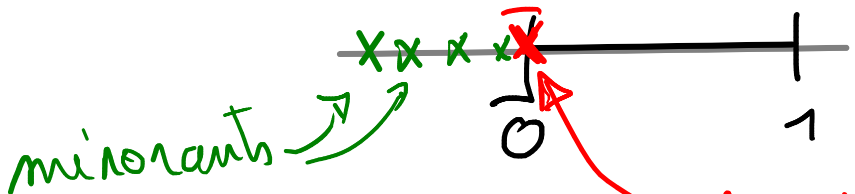
- $a > 0$ et $a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a = \frac{c}{d}$ $c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^*$. $c \neq 0$.
- $\forall b \in A$, $b \geq a$.

Posons $\frac{a}{2} = \frac{c}{2d}$ avec $c > 0$ et $2d \in \mathbb{Z}^*$. Donc $\frac{a}{2} \in A$ et $\frac{a}{2} \leq a$.

Ce qui contredit la définition du minimum - D'où l'absurdité.

Donc le minimum n'existe pas.

Dans l'exemple précédent, 0 est une borne inférieure mais pas un minimum



le plus grand des minorants est la borne inférieure.

Definition 4.8 *Soit E un ensemble de nombres, et soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.*

- *On dit que A* admet une borne supérieure *si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un minimum. Dans ce cas, ce minimum est appelé la* borne supérieure *de A, notée* $\sup A$.

  sup(A) = minimum des majorants

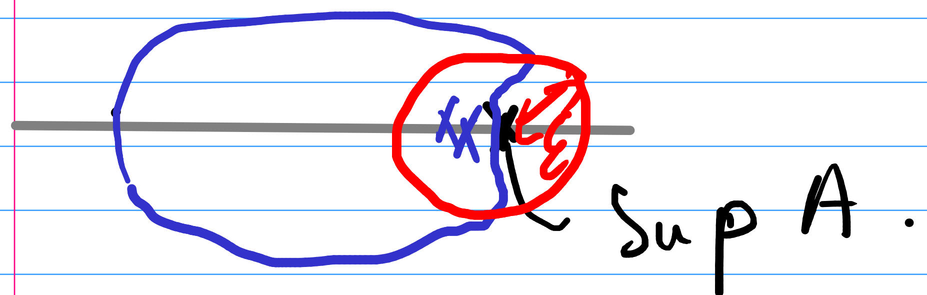
- *On dit que A* admet une borne inférieure *si A est minorée et si l'ensemble des minorants de A admet un maximum. Dans ce cas, ce maximum est appelé la* borne inférieure *de A, notée* $\inf A$.

  inf(A) = maximum des minorants.

Caractérisation :

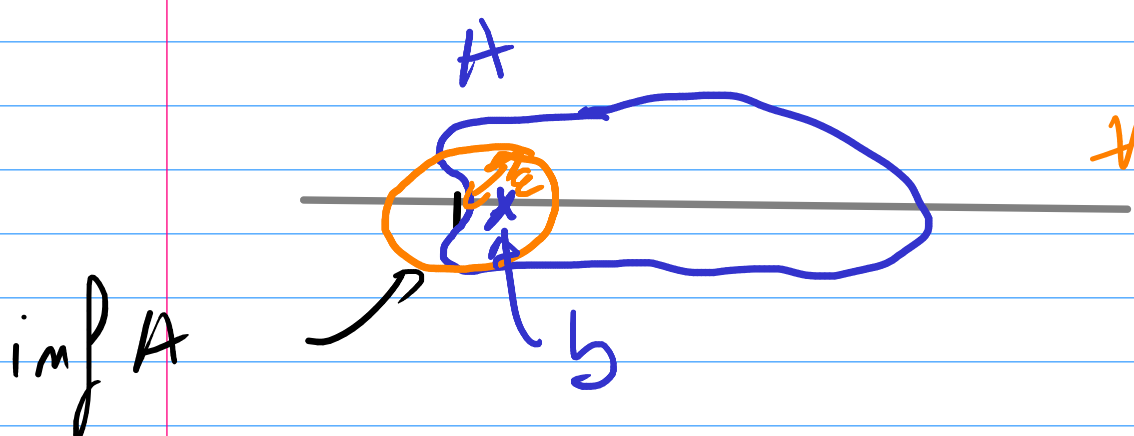
- Le sup(A) est un majorant :
  - $\forall b \in A \quad b \leq \sup(A)$.

C'est aussi le plus petit, donc le plus proche :



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in A \qquad \sup A - b < \varepsilon$.

- L'inf(A) est un minorant :
  - $\forall b \in A \qquad b \geq \inf(A)$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in A \qquad b - \inf(A) < \varepsilon$.

Exemple Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x\}$. Alors $A \neq \emptyset$ (car $1 \in A$) et $\inf A = 0$.

Démonstration : • 0 est minorant de A. En effet

$\forall x \in A \quad x > 0$.

• Montrons la proximité de 0.

Montrons que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in A : \quad b - 0 < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit n un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$n > \frac{1}{\varepsilon} > 0.$$

passage à l'inverse

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

est dans $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

donc $\frac{1}{n} \in A$.

On a donc trouvé un élément de A tel que

$$\frac{1}{n} - 0 < \varepsilon.$$

Donc 0 est bien la borne inférieure de A.