Première année de Licence MIASHS

TD corrigé – Analyse 1[1]

Julien GREPAT[2]

1 Éléments de logique

2 Variations des suites

3 Terme général d'une suite définie par récurrence

Exercice 3.1 *Afin d'assurer son appartement, un couple compare deux propositions:*

- *Proposition A : le montant de l'assurance est de* 200 *euros la première année puis augmente de 10 euros par an,*
- *Proposition B : le montant de l'assurance est de* 180 *euros la première année puis augmente de* 6 *% par an.*

On note a_n *le montant de l'assurance avec la proposition A et* b_n *celui avec la proposition B la* n*-ième année. Ainsi* $a_1 = 200$ *et* $b_1 = 180$*.*

(i) Étude de la proposition A.

(a) Calculer a_2 puis a_3.

(b) Donner la nature de la suite (a_n) en précisant sa raison.

(c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, a_n en fonction de n.

Correction.

$$a_1 = 200; \qquad a_2 = 210; \qquad a_3 = 220$$

. La suite est arithmétique de raison 10 et de premier terme $a_1 = 200$. On a donc

$$a_n = 200 + 10(n-1), \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

[1] Reproduction et diffusion interdite sans l'accord de l'auteur

[2] Contact : `julien.grepat@univ-grenoble-alpes.fr`

(ii) Étude de la proposition B.

(a) Calculer b_2 puis b_3.

(b) Donner la nature de la suite (b_n) en précisant sa raison.

(c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, b_n en fonction de n.

Correction.

$$b_1 = 180; \qquad a_2 = 180 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 190,8; \qquad a_3 = 190,8 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) \approx 202,25.$$

La suite est géométrique de raison 1,06 et de premier terme $a_1 = 180$. On a donc

$$a_n = 180 \times 1,08^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(iii) Quelle proposition est la plus avantageuse si le couple conserve son assurance pendant 10 ans ? Justifier la réponse.

Correction.

Formulaire : Somme des termes d'une suite arithmétique : $u_1 + u_2 + \ldots + +u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}.$ Somme des termes d'une suite géométrique où q est la raison de la suite et $q \neq 1$: $u_1 + u_2 + \ldots + +u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$

- Pour la proposition A, nous sommons les 10 années de cotisation :

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = 10 \times \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 2450.$$

- Pour la proposition B,

$$\sum_{i=1}^{10} b_i = 180 \times \frac{1 - 1,06^{10}}{1 - 1,06} = 2372.54$$

C'est la deuxième proposition qui est la plus intéressant à 10 ans.

Exercice 3.2 *Soit* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
Déterminer le terme général de (u_n).
Indication. La suite (u_n) *est une suite arithmetico-géométrique.*

Correction.

D'après le cours, il existe α tel que $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison 3.

Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 3u_n + 1 - \alpha$, et on souhaite que cette quantité soit égale à $3v_n = 3(u_n - \alpha)$.

Il suit que α vérifie

$$1 - \alpha = -3\alpha, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$v_n = v_0 \times 3^n, \qquad v_0 = u_0 - \alpha = 1 + \frac{1}{2} = 1,5.$$

On conclut que

$$u_n = v_n + \alpha = v_n - \frac{1}{2} = 1,5 \times 3^n - 0,5.$$

Exercice 3.3 *Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{a+1+u_n}{a}$. Déterminer le terme général de (u_n).*

Correction. La suite (u_n) est une suite arithmetico-géométrique :

$$u_{n+1} = \frac{a+1}{a} + \frac{1}{a}u_n.$$

D'après le cours, il existe α tel que $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison $1/a$.
Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \frac{a+1}{a} + \frac{1}{a}u_n - \alpha,$$

et on souhaite que cette quantité soit égale à $\frac{1}{a}v_n = \frac{1}{a}(u_n - \alpha)$.
Il suit que α vérifie

$$\frac{a+1}{a} - \alpha = -\frac{1}{a}\alpha, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a+1}{a} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \frac{a+1}{a-1}.$$

On a donc

$$v_n = v_0 \times \frac{1}{a^n}, \qquad v_0 = u_0 - \alpha = 1 - \frac{a+1}{a-1} = \frac{-2}{a-1}.$$

On conclut que

$$u_n = v_n + \alpha = \frac{-2}{a-1} \times \frac{1}{a^n} + \frac{a+1}{a-1}.$$

Exercice 3.4 *On s'intéresse au terme général des suites vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$. On appelle (R) cette relation.*

(i) Montrer qu'il existe exactement deux suites géométriques de terme général q^n, avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant la relation (R). On note q_1 et q_2 leur raison respective.

Correction.

Soit une suite géométrique $u_n = q^n$ vérifiant (R). Alors

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \Longleftrightarrow \quad q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \quad \Longleftrightarrow \quad q^n q^2 = q^n q + q^n \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 = q + 1.$$

Trouver q revient à résoudre l'équation du second degré

$$q^2 - q - 1 = 0.$$

Dont le discriminant $\Delta = 5$ est positif. Cette équation admet donc deux racines réelles q_1 et q_2(qu'on évitera de calculer).

(ii) *Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = aq_1^n + bq_2^n$ vérifie (R).*

Correction.

$$\begin{array}{rcl} v_n & = & aq_1^n + bq_2^n \\ v_{n+1} & = & aq_1^{n+1} + bq_2^{n+1}. \end{array}$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} v_n + v_{n+1} & = & aq_1^n + bq_2^n + aq_1^{n+1} + bq_2^{n+1} \\ & = & aq_1^n(1+q_1) + bq_2^n(1+q_2) \end{array}$$

Or, dans la question précédente, nous avons vu que

$$q_i^2 = q_i + 1.$$

D'où

$$v_n + v_{n+1} = aq_1^n \times q_1^2 + bq_2^n \times q_2^2 = aq_1^{n+2} + bq_2^{n+2} v_{n+2}.$$

(iii) *Soient(u_n) et (v_n) deux suites vérifiant (R) et telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.*

Correction.

Soit (P_n) la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$.

Initialisation : $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) soit vraie, i.e. $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$. On a

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = v_{n+1} + v_n = v_{n+2}.$$

Donc $u_{n+1} = v_{n+1}$ et $u_{n+2} = v_{n+2}$. Donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie et $u_n = v_n$ pour tout n.

(iv) *Déduire des deux questions précédente que pour toute suite (u_n) vérifiant (R), il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 0$, $u_n = aq_1^n + bq_2^n$.*

Correction.

La question (iii) nous dit qu'il suffit de fixer les termes u_0 et u_1 pour définir de manière unique la suite. Posons $v_n = aq_1^n + bq_2^n$. Pour toute valeur de u_0 et u_1, il existe un unique coupe (a, b) vérifiant $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ (il suffit de résoudre un système). Par conséquent, la suite u_n est identique à la suite v_n et donc, toute suite u_n s'écrit $aq_1^n + bq_2^n$.