UGA
Université
Grenoble Alpes

- Année 2021/22, L1 MIASHS
- Examen final: Algèbre linéaire
- Enseignant responsable: Jacques Istas
- Date: 02/05/2022
- Durée: 2h
- Matériel autorisé: une feuille A4

SUJET

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifiez vos réponses !

1. Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ contient au maximum quatre éléments.
2. Deux plans distincts de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ s'intersectent en une droite.
3. La dimension du noyau d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^2$ est supérieur ou égal à 3.
4. Le rang d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ est inférieur ou égal à 2.
5. La trace du produit de deux matrices carrées de même taille est égale au produit des traces.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On définit l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme P associe

$$f(P) \quad = \quad P(1)X + P(0)(X^2 - 5).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Quelles sont les dimensions de $Ker f$ et de $Im f$?

Exercice 3

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Notons P le plan d'équation $x - 2y - z = 0$ et Δ la droite engendrée par le vecteur $(2, -1, 3)$.

1. Pourquoi peut-on définir la projection π sur le plan P parallèlement à la droite Δ?
2. Déterminer les images par π des vecteurs $(-4, 2, -6)$ et $(3, 2, -1)$ (Indication: ne pas se lancer dans de gros calculs).
3. Déterminer une base (e_1, e_2) de P et une base e_3 de Δ.
4. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
5. Ecrire la matrice M de π dans la base $\mathcal{B}$.
6. Soit n un entier strictement positif. Calculer M^n.