

CC1 Algèbre linéaire 2021

08/12/2021

Soit n un entier non-nul. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Muni des lois de compositions usuelles, $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Une fonction réelle est paire si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

Exercice 1

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par $f(x, y) = (x, x + y)$.

1. La fonction f est-elle linéaire?
2. Quel est le noyau $Ker(f)$ de f ?
3. Quelle est l'image $Im(f)$ de f ?

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R} définie par $f(P) = P(0)$.

1. La fonction f est-elle linéaire?
2. Quel est le noyau $Ker(f)$ de f ?
3. Quelle est l'image $Im(f)$ de f ?

Exercice 3

Notons E l'ensemble des polynômes pairs de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel.
2. Donner une base de E .
3. Quelle est la dimension de E ?
4. La famille $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est-elle une base de E ?