Contrôle Continu – Session 1 – Algèbre linéaire 3 – octobre 2024 – Année 2024-25 – Licence 2 MIASHS

Nom : ....

Prénom : ....

Numéro identifiant : _______________

Le sujet comprend 2 page.s, une feuille A4 recto-verso manuscrite autorisée, calculatrices autorisées. Les six premiers exercices sont à remplir sur le sujet, les deux derniers sur la copie.

Exercice 1.1 (2 points) *Montrer.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{y} > x.$$

Soit $x (\neq -1)$; $y = \frac{1}{1+x}$ alors $\frac{1}{y} = 1+x > x$; (si $x = -1$, $y = 2$ alors $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} > -1 = x$)

Exercice 1.2 (2 points) *Formaliser.*

Une puissance entière de 2 est supérieure ou égale à 1000 seulement si son exposant est supérieur ou égal à 10.

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $2^n \geq 1000 \Longrightarrow n \geq 10$

Exercice 1.3 (2 points) *Écrire la négation de*

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ avec } x > 1, \exists y \in \mathbb{R} : \quad xy < 1.$$

$\exists x \in \mathbb{R}$ avec $x > 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $xy \geq 1$

Exercice 1.4 (2 points) *Écrire à l'aide du symbole $\sum$, puis calculer.*

$$8 \times 1 + 8 \times (\underbrace{1+1}_{2}) + 8 \times (\underbrace{1+1+1}_{3}) + \ldots + 8 \times (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{35 \text{ uns}}) = \sum_{i=1}^{35} 8 \times i = 8 \sum_{i=1}^{35} i$$

$$= 8 \times \frac{35 \times 36}{2} = 5040$$

Exercice 1.5 (2 points) *Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \frac{1}{n} - \sqrt{n}$.*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \sqrt{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \underbrace{- \sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 0$$

$\boxed{\text{la suite est décroissante}}$

$n+1 > n$

$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Leftrightarrow 0 > -\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$n+1 > n$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$

Exercice 1.6 (4 points) *Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \boxed{\frac{1}{4}} u_n - 1$.*

(i) *Calculer* $U_0 = 1$ $\quad U_1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ $\quad U_2 = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) - 1 = -\frac{19}{16}$ $\quad U_3 = \frac{1}{4}\left(-\frac{19}{16}\right) - 1$

$u_3 =$ $-\frac{83}{64}$ ....

(ii) *Déterminer α tel que la suite $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique de raison q à déterminer. (On ne demande aucune justification)*

$-1 = \frac{3}{4}\alpha$

$-1 - \alpha = -\frac{1}{4}\alpha$

- $\alpha =$ $-\frac{4}{3}$ ....

- $q =$ $\frac{1}{4}$ ....

$v_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = \cancel{\frac{1}{4} U_n} - 1 - \alpha$

$\frac{1}{4} v_n = \frac{1}{4}(U_n - \alpha) = \cancel{\frac{1}{4} U_n} - \frac{1}{4}\alpha$

(iii) *Déterminer le terme général de (u_n).*

$v_n = v_0 \times \frac{1}{4^n} = (U_0 - \alpha) \times \frac{1}{4^n} = \left(1 + \frac{4}{3}\right)\frac{1}{4^n} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4^n}$

....

et $v_n = U_n - \alpha \Rightarrow U_n = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4^n} + \alpha = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4^n} - \frac{4}{3}$

Exercice 1.7 (3 points) *Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{\frac{x}{x+1} : x \geq 1\}$.*

(i) *Justifier que $\frac{2}{3} \in A$, et que $\frac{1}{3} \notin A$.*

(ii) *Montrer que $\frac{1}{2}$ est le plus petit élément de A.*

Indication : Il faut montrer : $\frac{1}{2} \in A$ et $\forall y \in A$, $y \geq \frac{1}{2}$.

(iii) *Montrer que 1 est la borne supérieure de A.*

Indication : Montrer que

- $\forall y \in A$, $y \leq 1$ *(1 majore A)*

- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in A$, $y > 1 - \varepsilon$ *(aucun $1 - \varepsilon$ ne majore A)*

Exercice 1.8 *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n (u_n + 1)$.*

(i) *Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.*

(ii) *En déduire les variations de n.*

Ex 1.7 : $A = \left\{ \frac{x}{1+x} \quad x \geq 1 \right\}$

(i) *Justifier que* $\frac{2}{3} \in A$, *et que* $\frac{1}{3} \notin A$.

- $x = 2 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{2}{3} \in A$.

- On cherche x : $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = 1 + x$
$\Leftrightarrow 2x = 1$
$\Leftrightarrow x = 1/2$

Pour être dans A, $x \geq 1$. Ce n'est pas le cas.

(ii) *Montrer que* $\frac{1}{2}$ *est le plus petit élément de* A.
Indication : Il faut montrer : $\frac{1}{2} \in A$ *et* $\forall y \in A$, $y \geq \frac{1}{2}$.

- $\frac{1}{2} \in A$. On pose $x = 1$, $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2} \in A$.

- Mq. $\forall y \in A$, $y \geq \frac{1}{2}$ et $y = \frac{x}{1+x}$

$$\frac{x}{1+x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \geq 1 + x$$
$$\Leftrightarrow x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \forall x \geq 1 \quad \frac{x}{1+x} \geq \frac{1}{2}$$

$\forall y \in A$, $y \geq \frac{1}{2}$.

(iii) *Montrer que 1 est la borne supérieure de A.*

Indication : Montrer que

- $\forall y \in A,\ y \leq 1$ *(1 majore A)*
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ y > 1 - \varepsilon$ *(aucun $1-\varepsilon$ ne majore A)*

- $y \in A$, $\exists\ x$: $y = \frac{x}{1+x} \leq 1$ car $1+x \geqslant x$.

- Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $y \in A$: $y \geqslant 1-\varepsilon$

$$\iff \frac{x}{1+x} \geqslant 1-\varepsilon$$

$$\iff x \geqslant (1-\varepsilon)(1+x)$$

$$\iff x \geqslant 1-\varepsilon + (1-\varepsilon)x$$

$$\iff x - (1-\varepsilon)x \geqslant 1-\varepsilon$$

$$\iff \varepsilon x \geqslant 1-\varepsilon$$

$$\iff x \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Avec $x \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, $y = \frac{x}{1+x} \geqslant 1-\varepsilon$.

Donc 1 est borne sup.

Exercice 1.8 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n(u_n+1)$.

(i) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 2$.

(ii) En déduire les variations de n.

(i) On pose P_n : $0 \leq U_n \leq 2$

Montrons par récurrence que P_n est vraie.

– Initialisation : $0 \leq U_0 = 1 \leq 2$ – Donc P_0 est vraie

– Hérédité : Supposons que P_n est vraie $0 \leq U_n \leq 2$

Montrons que P_{n+1} est vraie : $0 \leq \frac{1}{3} U_n(U_n+1) \leq 2$

Puisque P_n est vraie : $0 \leq U_n \leq 2$

$1 \leq U_n + 1 \leq 3$

Par produit : $0 \leq U_n(U_n+1) \leq 6$

$$\underbrace{0 \leq \frac{1}{3} U_n(U_n+1)}_{U_{n+1}} \leq 2$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, on a montré que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3} U_n(U_n+1) - U_n = \frac{1}{3} U_n^2 + \frac{1}{3} U_n - U_n$

$= \frac{1}{3} U_n^2 - \frac{2}{3} U_n = \frac{1}{3} U_n (U_n - 2)$

$0 - 2 \leq U_n - 2 \leq 2 - 2 \Rightarrow (U_n - 2) \leq 0$ et $\frac{1}{3}U_n \geq 0$.

$U_{n+1} - U_n \leq 0 \Leftrightarrow U_n$ décroissante.

Contrôle Continu – Session 1 – Algèbre linéaire 3 – octobre 2024 – Année 2024-25 – Licence 2 MIASHS

Nom : ....

Prénom : ....

Numéro identifiant : ______________

Le sujet comprend 2 page.s, une feuille A4 recto-verso manuscrite autorisée, calculatrices autorisées. Les six premiers exercices sont à remplir sur le sujet, les deux derniers sur la copie.

Exercice 1.9 (2 points) *Montrer.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, \quad xy > 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $y = \frac{1}{x}$ et alors $xy = x \times \frac{1}{x} = 1 > 0$.

Exercice 1.10 (2 points) *Formaliser.*

Pour que le produit de deux nombres réels soit négatif ou nul, il faut qu'au moins un des deux nombres soit négatif ou nul.

$xy \leq 0 \Longrightarrow x \leq 0$ ou $y \leq 0$.

Exercice 1.11 (2 points) *Écrire la négation de*

$$\forall x \in \mathbb{R} \textit{ avec } x > 1, \exists y \in \mathbb{R} : \quad xy < 1.$$

$\exists x \in \mathbb{R}$ avec $x > 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $xy \geq 1$

Exercice 1.12 (2 points) *Écrire à l'aide du symbole $\sum$, puis calculer.*

$$3 \times \underset{1}{1} + 3 \times (\underset{2}{1+1}) + 3 \times (\underset{3}{1+1+1}) + \ldots + 3 \times (\overset{25}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{25 \textit{ uns}}}) = \sum_{i=1}^{25} 3i = 3\sum_{i=1}^{25} i$$

$$3 \times \frac{25 \times 26}{2} = 975$$

Exercice 1.13 (2 points) *Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \sqrt{n} - \frac{1}{n}$.*

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(\sqrt{n} - \frac{1}{n}\right) = \underbrace{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

≥ 0

$n+1 > n$

$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$

$n < n+1$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$

et (u_n) est croissante.

Exercice 1.14 (4 points) *Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$.*

(i) Calculer $U_0 = 1$ $\quad U_1 = \frac{1}{3} \times 1 - 1 = -\frac{2}{3}$ $\quad U_2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 = -\frac{11}{9}$ $\quad U_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{11}{9}\right) - 1$

$u_3 =$ $-\frac{38}{27}$

(ii) Déterminer α tel que la suite $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique de raison q à déterminer. (On ne demande aucune justification)

$-\alpha - 1 = -\frac{1}{3}\alpha$

$-1 = \frac{2}{3}\alpha$

- $\alpha =$ $-3/2$
- $q =$ $\frac{1}{3}$

$v_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = \frac{1}{3} U_n - 1 - \alpha = \cancel{\frac{1}{3} U_n} - \alpha - 1$

$\hookrightarrow v_n \times q = q \times (U_n - \alpha) = \cancel{\frac{1}{3} U_n} - \frac{1}{3}\alpha$

(iii) Déterminer le terme général de (u_n).

$v_n = v_0 q^n = (U_0 - \alpha) q^n = \frac{5}{2} \times \frac{1}{3^n}$; $v_n = U_n - \alpha \iff U_n = \frac{5}{2} \times \frac{1}{3^n} + \alpha = \frac{5}{2} \times \frac{1}{3^n} - \frac{3}{2}$

Exercice 1.15 (3 points) *Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{\frac{1}{x+1} : x \geq 1\}$.*

(i) Justifier que $\frac{2}{5} \in A$, et que $\frac{3}{4} \notin A$.

(ii) Montrer que $\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de A.

Indication : Il faut montrer : $\frac{1}{2} \in A$ et $\forall y \in A$, $y \leq \frac{1}{2}$.

(iii) Montrer que 0 est la borne inférieure de A.

Indication : Montrer que

- *$\forall y \in A$, $y \geq 0$ (0 minore A)*
- *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in A$, $y < 0 + \varepsilon$ (aucun $0 + \varepsilon$ ne minore A)*

Exercice 1.16 (3 points) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n(u_n + 1)$.*

(i) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

(ii) En déduire les variations de n.

Exercice 1.15 (3 points) *Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{\frac{1}{x+1} : x \geq 1\}$.*

(i) *Justifier que $\frac{2}{5} \in A$, et que $\frac{3}{4} \notin A$.*

- $\frac{2}{5} = \frac{1}{x+1} \iff 2(x+1) = 5$

$\iff x = 1{,}5 \geqslant 1$

$\frac{2}{5} \in A$.

- $\frac{3}{4} = \frac{1}{x+1} \iff 3(x+1) = 4$

$\iff x+1 = \frac{4}{3}$

$\iff x = \frac{1}{3} \leq 1$

$\frac{3}{4} \notin A$.

(ii) *Montrer que $\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de A.*

Indication : Il faut montrer : $\frac{1}{2} \in A$ et $\forall y \in A$, $y \leq \frac{1}{2}$.

- $\frac{1}{2} \in A$ avec $x = 1$, $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$

- Soit $y \in A$, $y = \frac{1}{1+x}$ avec $x \geqslant 1$

$\iff 1+x \geqslant 2$

$\iff \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2}$

D'où le résultat.

(iii) *Montrer que 0 est la borne inférieure de A.*

Indication : Montrer que

- $\forall y \in A,\ y \geq 0$ *(0 minore A)* $\qquad x \geqslant 1$ alors $y = \frac{1}{x+1} \geqslant 0$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ y < 0 + \varepsilon$ *(aucun $0+\varepsilon$ ne minore A)*

Soit $\varepsilon > 0$, $\quad y = \frac{1}{1+x} < \varepsilon$

$$\iff 1 < (1+x)\varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} < 1 + x$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < x$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad y = \frac{\cancel{x}\,1}{1+x}$ avec $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \implies y < \varepsilon$.

Exercice 1.16 (3 points) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n(u_n+1)$.*

(i) *Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 3$.*

(ii) *En déduire les variations de n.*

(i) Soit $P_n : \quad 0 < u_n < 3$

Montrons par récurrence que P_n est vraie

Initialisation: $\quad 0 < U_0 = 2 < 3 \qquad P_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie i.e. $\quad 0 < U_n < 3$

et montrons que P_{n+1} est vraie _

$0 < u_n < 3$

$0 < u_n + 1 < 4$

$0 < u_n(u_n+1) < 12$

$0 < \frac{1}{4} u_n(u_n+1) < 3 \Leftrightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 3$

Donc P_{n+1} est vraie. Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(ii) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} u_n(u_n+1) - u_n = \frac{1}{4} u_n^2 + \frac{1}{4} u_n - u_n$

$= \frac{1}{4} u_n^2 - \frac{3}{4} u_n$

$= \frac{1}{4} u_n (u_n - 3)$

$0 < u_n < 3$ alors $u_n - 3 < 0$

D'où $u_{n+1} - u_n < 0$ et u_n décroissante.