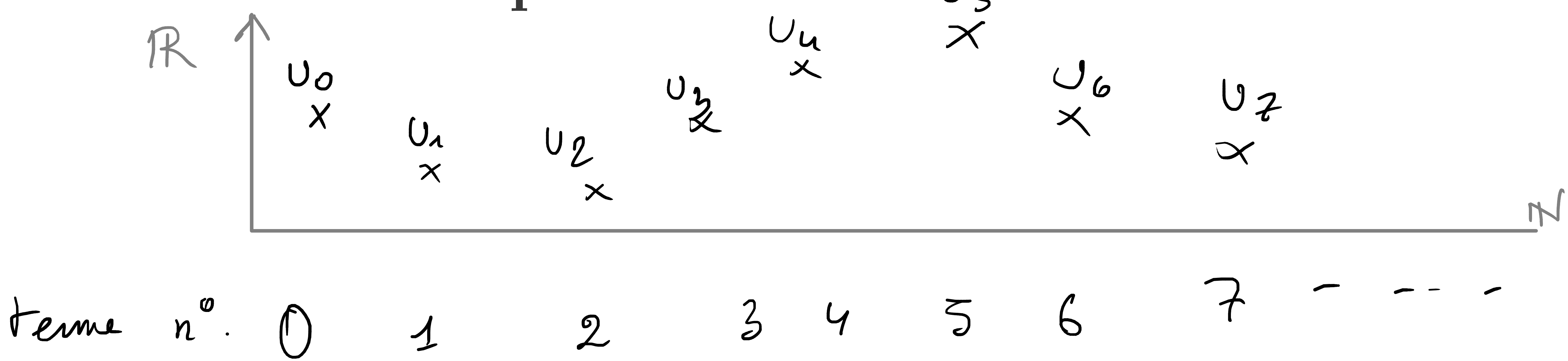
Part II

Suites numériques



$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres.

5 Définitions et propriétés générales

5.1 Définition

Definition 5.1 *Une suite numérique est un ensemble de nombres indexé par les entiers.*

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$ définition itérative

$$U_n = f(n)$$ définition explicite

Exemple : $f(x) = 2x + 1$

définition itérative $\begin{cases} U_0 = 10 & U_{n+1} = f(U_n) = 2U_n + 1 \\ U_0 = 10 & U_1 = 2 \times 10 + 1 = 21 \quad U_2 = 2 \times 21 + 1 = 43 \quad U_3 = 2 \times 43 + 1 = 87 \end{cases}$

définition explicite $\{ U_n = f(n)$ alors $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$ $U_{100} = 2 \times 100 + 1 = 201$

Note : Une suite n'a pas toujours une définition par des formules mathématiques

Exemple : le plus grand chiffre tiré au loto.

Grand problème : Passer de la forme itérative à la forme explicite.

$$\begin{cases} u_{n+1} \geq u_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} - u_n \geq 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{si } u_n > 0 \,; & \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 . \end{cases}$$

5.2 Monotonie

Definition 5.2 • *On dira qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante (resp. strictement croissante) si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $u_{n+1} \geq u_n$ *(resp.* $u_{n+1} > u_n$*).*

- *On dira que la suite est décroissante (resp. strictement décroissante) si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $u_{n+1} \leq u_n$ *(resp.* $u_{n+1} < u_n$*).*

$$\begin{cases} u_{n+1} \leq u_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} - u_n \leq 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{si } u_n > 0 : & \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \end{cases}$$

Il existe des suites ni croissante, ni décroissante :

$U_n = (-1)^n \qquad U_0 = 1 \quad U_1 = -1 \quad U_2 = 1 \quad U_3 = -1 \quad U_4 = 1 \ \ldots$

Proposition 5.3 *La suite définie explicitement par $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction, a les même propriétés que la fonction f.*

Si f est croissante alors U_n est croissante.

Si f est décroissante alors U_n est décroissante.

Exemple Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$. Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n \times 2} - \frac{n \times 2}{2^n \times 2} = \frac{1}{2^{n+1}} \times (n+1-2n)$$

$$= \frac{-n+1}{2^{n+1}}$$

négatif. pour $n \geqslant 2$.

positif.

Pour $n \geqslant 2$, $U_{n+1} - U_n \leq 0 \iff U_{n+1} \leq U_n$ - $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n=2$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ C'est un ensemble.

5.3 Bornes

Definition 5.4 *Une suite* (u_n) *est* majorée *(resp.* minorée, bornée*) si l'ensemble* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *est majoré (resp. minoré, borné) dans* $\mathbb{R}$.

Autrement dit, par exemple, (u_n) est majorée si :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{u_1, \dots, u_n, \dots\}$ est majoré.

$$\exists M : \underbrace{\forall x \in (u_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\forall u_n} \quad x \le M.$$

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}}_{\forall u_n} : \quad u_n \le M$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée : $\quad \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\quad \exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n \leq M$.

Proposition 5.5 *Une suite est majorée (resp. minorée, bornée) si et seulement si elle l'est à partir d'un certain rang.*

Preuve : • "$\Rightarrow$" est évident : si u_n est majorée à partir du rang 0 alors elle l'est "à partir d'un certain rang" (0).

• "$\Leftarrow$" : Soit M : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq M$

$$M' = \max(\underbrace{u_0, u_1, \dots, u_{n_0}}_{\text{nombre fini de termes}}, M)$$

Montrons que M' majore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si $n \leq n_0$ alors $u_n \leq \max(u_0, \dots, u_{n_0}) \leq M'$
- Si $n \geq n_0$ alors $u_n \leq M \leq M'$

Donc M' majore la suite.

Rappel : $|-9| = 9$ $\quad |9| = 9$

$|-9| = -(-9)$

si $x \geq 0$ $\quad |x| = x$

si $x < 0$ $\quad |x| = -x$

Proposition 5.6 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Note : $|u_n| \geq 0$ – Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors elle est bornée.

Preuve : * " $\Rightarrow$ " : Montrons que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :

U_n est bornée : $\exists m, M \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq U_n \leq M$.

- Si U_n est positive, $|U_n| = U_n$ et $m \leq |U_n| \leq M$ donc $(|U_n|)_n$ est bornée.
- Si U_n est négative, $|U_n| = -U_n$ $\quad m \leq U_n \leq M$

$$\Leftrightarrow \quad -m \geq \underbrace{-U_n}_{=|U_n|} \geq -M$$

- Si U_n change de signe, et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \underset{\text{négatif}}{m} \leq U_n \leq \underset{\text{positif}}{M}$

$M' = \max(-m, M)$ alors $M' \geq -m$ et M

$$-M' \leq m \leq U_n \leq M \leq M'$$

Puisque $-M' \leq U_n \leq M'$ $\times(-1)$

$M = -(-M') \geqslant -U_n \geqslant -M'$

et $|U_n| = \begin{cases} U_n & \text{si } U_n \text{ est positif} \\ -U_n & \text{si } U_n \text{ est négatif} \end{cases}$.

Donc $|U_n| \leq M'$

Donc $|U_n|$ est majorée.

* Réciproquement, $|U_n|$ est majorée.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n| \leq M$

$\hookrightarrow$ si $U_n \geqslant 0$; $0 \leq U_n \leq M$

$\hookrightarrow$ si $U_n \leq 0$; $-U_n \leq M$

$\Leftrightarrow 0 \geqslant U_n \geqslant -M$

Donc $-M \leq U_n \leq M$.

donc bornée $\blacksquare$

5.4 Récurrence

Pour montrer une propriété indéxée par $n \in \mathbb{N}$, la propriété suivante est précieuse.

Theorem 5.7 (Axiome de récurrence) *Soit P_n une propriété indéxée par $n \in \mathbb{N}$. Si les propriétés suivantes sont vraies :*

- ***Initialisation*** *:* P_0
- ***Hérédité*** *:* $\forall n \in \mathbb{N}, (P_n \implies P_{n+1})$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n *est vraie.*

Exemple : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

$$u_0 = 1/4$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

P_n : $0 \leq u_n \leq 1$

- P_0 est vraie car

$$0 \leq u_0 = 1/4 \leq 1$$

Hypothèse de récurrence

- Supposons que P_n est vraie : $0 \leq u_n \leq 1$.
- Montrons que P_{n+1} est vraie :

P_n est vraie $\quad 0 \leq u_n \leq 1$

$$\sqrt{0} \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{1}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

NB : $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Récurrence

- Définir P_n.
- Initialisation (P_0 est vraie)
- Supposons que P_n est vraie pour un certain n.
- Montrons P_{n+1}

utiliser l'hypothèse de récurrence.

P_{n+1} est vraie

Conclure ! Ainsi, si P_n est vraie pour un certain n, P_{n+1} est vraie. Par récurrence, la propriété est démontrée pour tout n.

Exemple Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$. Montrer, par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n \leq 1.$$

On pose $P_n : 0 \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : $P_0 : 0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ est vraie.

Hypothèse de récurrence : P_n est vraie au rang n.

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Montrons P_{n+1}.

P_n est vraie : $\bullet\ 0 \leq u_n \leq 1$

et $-1 \leq -u_n \leq 0$

et encore $0 = 1-1 \leq 1-u_n \leq 1-0 = 1$

Par produit $0 \times 0 \leq u_n(1-u_n) \leq 1 \times 1$

$0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On a montré que, pour tout n, P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie

Par récurrence, P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.