Première année de Licence MIASHS

TD – Analyse 1[1]

Julien GREPAT[2]

Contents

[2]Contact : `julien.grepat@univ-grenoble-alpes.fr`

1 Éléments de logique

Exercice 1.1 (Calcul propositionnel)

(i) *Dire si la proposition est vraie ou fausse.*

- *(a)* $(2 > 0)$ *et* $(2 \geq 1)$ *;*
- *(b)* $(2 > 0)$ *ou* $(2 \leq 1)$ *;*
- *(c)* $(2 > 0)$ *et* $(2 \leq 1)$.

(ii) *Écrire la négation de la proposition suivante, où x et y désignent des nombres réels fixés.*

$$(x > 3) \text{ et } (y > 10).$$

(iii) *La lettre x désigne un nombre réel fixé. Dire, selon les valeurs de x, si la proposition indiquée est toujours vraie, toujours fausse, ou parfois vraie et parfois fausse.*

- *(a)* $((x > 2)$ *ou* $(x < 2))$ *;*
- *(b)* $(x > 3) \implies (x > 2)$ *;*

(iv) *Écrire la contraposée des implications suivantes, où x et y désignent des nombres réels fixés.*

- *(a)* $(x > 3) \implies (x > 2)$ *;*
- *(b)* $(x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } x > y) \implies \left(\frac{1}{x} < \frac{1}{y}\right)$ *;*

(v) *Écrire la proposition à l'aide du connecteur $\implies$, et indiquer (sans preuve) si elle est vraie pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.*
Indication. $2^{10} = 1024$.

- *(a)* *pour que $2^n \geq 1000$, il faut que $n \geq 15$;*
- *(b)* *pour que $2^n \geq 1000$, il suffit que $n \geq 15$.*

Exercice 1.2 (Quantificateurs)

(i) *Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :*

- *(a)* *Dans $\mathbb{R}$, il y a au moins un nombre, qui une fois inversé, est un entier.*
- *(b)* *Tout nombre réel positif ou nul est égal au carré d'un nombre réel positif ou nul.*

(ii) *Écrire la négation de la proposition suivante, puis indiquer (sans preuve) si la proposition est vraie ou si sa négation est vraie.*

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad x^2 \geq x.$$

(iii) *Pour l'assertion suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse.*
Si elle est fausse, modifier un unique quantificateur pour qu'elle devienne vraie.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad x + y = 2.$$

Exercice 1.3 (Démonstrations)

(i) *Démontrer la proposition suivante.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \qquad y > x.$$

(ii) *Montrer la proposition suivante à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.*

Le nombre 0 *n'a pas d'inverse.*

Indication. On dit qu'un nombre réel a *possède un inverse s'il existe un réel* b *tel que* $a \times b = 1$.

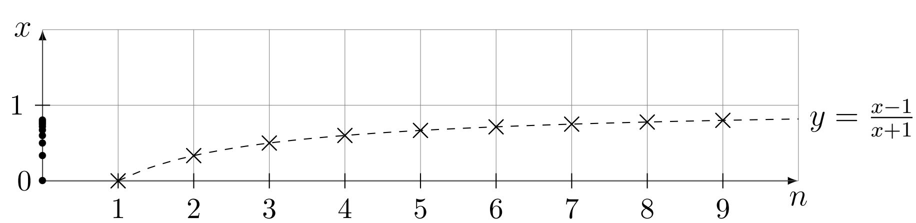
(iii) *Montrer les implications suivantes soit directement, soit en considérant leur contraposée.*

(a) *Quel que soit* $n \in \mathbb{N}$, *ou bien* n *est pair, ou bien* $n+1$ *est pair.*
Indication. Utiliser : (1) Un entier est pair (resp. impair) s'il peut s'écrire $2k$ *(resp.* $2k+1$*) avec* k *un entier, et (2) Tout entier est ou bien pair ou bien impair.*

(b) *Quel que soit* $n \in \mathbb{N}$, *si* n^2 *est pair, alors* n *est pair.*

Exercice 1.4 (Bornes)

On considère l'ensemble A *contenu dans* $\mathbb{R}$ *défini par* $A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
Quelques éléments de A *ont été représentés dans la figure ci-dessous (sur l'axe des ordonnées).*



L'objectif de cet exercice est de montrer $\sup A = 1$, *c'est à dire :*

- *L'ensemble* A *est majoré par* 1 *:* $\forall x \in A,\ x \leq 1$
- *L'ensemble* A *n'est majoré par aucun réel inférieur à* 1 *:* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > 1 - \varepsilon$.

(i) *Exemples :*

- *Montrer que* $0.9 \in A$, $0.92 \in A$, *mais* $0.91 \notin A$.
- *Comment formaliser la propriété :* $x \in A$ *?*

(ii) *(a)* *Montrer :* $\forall x \in A,\ x \leq 1$.
Indication. Utiliser la formalisation de $x \in A$ *(question 1.b).*

(b) *Soit* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

- *On suppose* $\varepsilon > 1$. *Quel est le signe de* $1 - \varepsilon$ *? En déduire :* $\exists x \in A,\ x > 1 - \varepsilon$.
- *On suppose* $\varepsilon \leq 1$. *Déterminer un* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\frac{n-1}{n+1} > 1 - \varepsilon$. *En déduire :* $\exists x \in A,\ x > 1 - \varepsilon$.

(iii) *Conclure.*

Exercice 1.5 *Soit* $A = \left\{ \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N} \right\}$. *Montrer que* $\inf A = 0$.

2 Variations des suites

Exercice 2.1 *Calculer les 4 premiers termes des suites de terme général :*

(i) $u_n = n^2 - 3n - 4$;

(ii) $u_n = \frac{n}{10^n}$;

(iii) $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$;

(iv) $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{1}{j}$;

(v) $u_n = (-1)^n + 1$.

Exercice 2.2 *Étudier les variations de la suite de terme général :*

(i) $u_n = n^2 + 3n - 4$;

(ii) $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$;

(iii) $S_n = \sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i^2}$;

(iv) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

*Indication. On pourra utiliser la technique de l'*expression conjuguée *:*
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Exercice 2.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.*
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$, et en déduire les variations de (u_n).

Exercice 2.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, et en déduire les variations de (u_n).*

3 Terme général d'une suite définie par récurrence

Exercice 3.1 *Afin d'assurer son appartement, un couple compare deux propositions:*

- *Proposition A : le montant de l'assurance est de* 200 *euros la première année puis augmente de 10 euros par an,*
- *Proposition B : le montant de l'assurance est de* 180 *euros la première année puis augmente de* 6 *% par an.*

On note a_n le montant de l'assurance avec la proposition A et b_n celui avec la proposition B la n-ième année. Ainsi $a_1 = 200$ et $b_1 = 180$.

(i) Étude de la proposition A.

 (a) Calculer a_2 puis a_3.
 (b) Donner la nature de la suite (a_n) en précisant sa raison.
 (c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, a_n en fonction de n.

(ii) Étude de la proposition B.

 (a) Calculer b_2 puis b_3.
 (b) Donner la nature de la suite (b_n) en précisant sa raison.
 (c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, b_n en fonction de n.

(iii) Quelle proposition est la plus avantageuse si le couple conserve son assurance pendant 10 ans ?

Exercice 3.2 *Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$.*
Déterminer le terme général de (u_n).
Indication. La suite (u_n) est une suite arithmetico-géométrique.

Exercice 3.3 *Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{a+1+u_n}{a}$.*
Déterminer le terme général de (u_n).
Indication. La suite (u_n) est une suite arithmetico-géométrique.

Exercice 3.4 *On s'intéresse au terme général des suites vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$ pour tout $n \geq 0$. On appelle (R) cette relation.*

(i) Montrer qu'il existe exactement deux suites géométriques de terme général q^n, avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant la relation (R). On note q_1 et q_2 leur raison respective.

(ii) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = aq_1^n + bq_2^n$ vérifie (R).

(iii) Soient(u_n) et (v_n) deux suites vérifiant (R) et telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

(iv) Déduire des deux questions précédentes que pour toute suite (u_n) vérifiant (R), il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 0$, $u_n = aq_1^n + bq_2^n$.

4 Complément 1 – Archive de Contrôle continu

Exercice 4.1 *Formaliser à l'aide de quantificateurs et du connecteur* $\Longrightarrow$ *:*
Pour qu'un entier naturel soit multiple de 2*, il suffit qu'il soit multiple de* 4.

Indication. Définition : Un entier naturel n est multiple d'un entier naturel ℓ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k \times \ell$.

Exercice 4.2 *Donner la négation de la proposition* P,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, \quad xy < 1,$$

puis indiquer (sans justifier) si P *est vraie, non* P *est vraie ou si aucune des propositions* P *et non* P *n'est vraie.*

Exercice 4.3 *Le prédicat suivant est-il toujours vrai, toujours faux, ou parfois vrai et parfois faux ? Justifier.*

$$\left(\frac{1}{x} < 1\right) \Longrightarrow (x > 1).$$

Exercice 4.4 *Montrer*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x - 5y > 0.$$

Exercice 4.5 *Soit* $A = \left\{\frac{1}{\sqrt{n+3}} : n \in \mathbb{N}\right\}$. *Formaliser puis montrer que* $\inf A = 0$.

Indication : On pourra distinguer les cas $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$.

Exercice 4.6 *Étudier les variations de la suite* (u_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4.7 *Soit* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$. *Donner le terme général de* (u_n).

Exercice 4.8 *Soit, pour tout* $n \geq 1$, *la suite* $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

(i) *Écrire* S_n *à l'aide du symbole* $\sum$.

(ii) *Montrer que* (S_n) *est strictement croissante.*

(iii) *Montrer par récurrence :* $\forall n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

5 Application à la finance

Exercice 5.1 *Le PEL rémunère à 2,25% par an. On place 10 000 euros en capital initial puis 45 euros par mois. Donner la dynamique du compte mois par mois.*

Remarque. Dans ce qui suit, nous allons donner un taux annuel et réfléchir avec des annuités, une période cohérente. Il est indispensable de convertir le taux annuel en taux équivalent mensuel si le remboursement est mensuel.

Exercice 5.2 *L'entreprise SAVOL, spécialisée dans la fabrication de drones, souhaite ouvrir une nouvelle chaîne de production afin de commercialiser un nouveau produit. Pour financer cet investissement, elle décide d'emprunter 120000 euros auprès d'un établissement financier. L'emprunt, au taux annuel de 3 %, sera remboursé en 5 annuités constantes.*

L'entreprise établit un tableau d'amortissement en essayant une annuité de 26500 euros.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
1		Taux annuel	3 %			
2						
3	Année	Capital restant dû en début d'année	Intérêts de l'année	Amortissement du capital	Annuité constante	Capital restant dû en fin d'année
4	Année 1	120000,00	3600,00	22900,00	26500,00	97100,00
5	Année 2	97100,00	2913,00	23587,00	26500,00	73513,00
6	Année 3	73513,00	2205,39	24294,61	26500,00	49218,40
7	Année 4	49218,40	1476,55	25023,45	26500,00	24194,94
8	Année 5					
9						

Ce tableau, est dressé en calculant pour chaque année:

- *I'intérêt : capital en début d'année × taux d'intérêt*
- *l'amortissement : annuité − intérêts*
- *le capital en fin d'année : capital en début d'année − amortissement.*

(i) Compléter la dernière ligne correspondant à l'année 5.

(ii) D'après le tableau d'amortissement précédemment complété, l'annuité doit-elle être inférieure ou supérieure à 26500 euros? Justifier la réponse.

(iii) Établir la formule de calcul d'une annuité a constante.

(iv) Calculer l'annuité constante, arrondie à l'euro, permettant de rembourser le capital de 120000 euros emprunté sur 5 ans.

(v) En déduire le coût total du crédit avec cette nouvelle annuité.

Exercice 5.3 *Une entreprise souhaite proposer une nouvelle gamme de dragées, elle décide donc d'emprunter 150000 euros auprès d'un établissement financier afin de se développer. L'emprunt, au taux annuel de 3 %, sera remboursé en 6 ans par versement annuel constant, nommé annuité a. On rappelle la formule de calcul d'une annuité constante :*

$$a = C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}.$$

où C est le capital emprunté, t le taux annuel et n le nombre d'annuités. L'établissement financier établit le tableau d'amortissement suivant.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1		*Taux annuel*	*3 %*		
2					
3	*Année*	*Capital restant dû en début d'année*	*Intérêts de l'année*	*Amortissement du capital*	*Annuité constante*
4	1	150000,00		23189,63	27689,63
5	2		3804,31	23885,31	27689,63
6	3	102925,05	3087,75	24601,87	27689,63
7	4	78323,19	2349,70		27689,63
8	5	52983,26	1589,50	26100,13	27689,63
9	6	26883,13	806,49	26883,13	27689,53

(i) Montrer que le montant de l'annuité constante est d'environ 27689,63 euros.

(ii) Calculer les valeurs obtenues en cellules C4, B5 et D7.

(iii) Quel est le coût total de ce crédit ?

6 Convergence des suites

Exercice 6.1 (À partir de la définition)

(i) Montrer, à partir de la définition : $\lim \frac{n+1}{n+2} = 1$.

(ii) Montrer, à partir de la définition : $\lim \frac{1}{n} = 0$.

(iii) Montrer, à partir de la définition : $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

Exercice 6.2 *Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes.*

(i) $\lim \frac{n^2-1}{n+1}$ *;*

(ii) $\lim \frac{1-5n+6n^2}{n-2n^2}$ *;*

(iii) $\lim \sqrt{\frac{1}{n}+1}$ *;*

(iv) $\lim(n^2 - n)$ *;*

(v) $\lim \frac{n^2+n}{n^3+1}$ *;*

(vi) $\lim \frac{n^2-n+1}{10^{50}n+1}$ *;*

(vii) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ *;*

(viii) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}}$

(ix) $\lim \frac{\sqrt{1+n+n^2}-1}{n}$ *;*

Exercice 6.3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n}$.

(i) Montrer : $\forall n \geq 1,\ n\sqrt{n} > (n-1)\sqrt{n+1}$.

(ii) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

$$\forall n \geq 1, \qquad \sqrt{1} + \ldots + \sqrt{n} > \frac{n\sqrt{n}}{2}.$$

(iii) En déduire $\lim u_n$.

Exercice 6.4 *(i) Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

(a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

(b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*

- *monotone,*
- *convergente,*
- *déterminer sa limite.*

(ii) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

- *(a)* *Montrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.
- *(b)* *En déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*
  - *monotone,*
  - *convergente,*
  - *déterminer sa limite.*

(iii) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

- *(a)* *Montrer par récurrence que* (u_n) *est bien définie, puis que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
- *(b)* *En déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*
  - *monotone,*
  - *convergente,*
  - *déterminer sa limite.*

7 Complément 2 – Archive de Contrôle terminal

Exercice 7.1 *Étudier les variations de la suite* (u_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 7.2 *Soit* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1.$$

Donner le terme général de (u_n) *puis étudier sa convergence.*

Exercice 7.3 *Démontrer, à partir de la définition,*

$$\lim \frac{1-n}{1+n} = -1.$$

Exercice 7.4 *Soit, pour tout* $n \geq 1$, *la suite*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

(i) Écrire S_n à l'aide du symbole $\sum$.

(ii) Montrer que (S_n) est strictement croissante.

(iii) Montrer par récurrence,

$$\forall n \geq 1, \quad S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

(iv) En déduire que (S_n) est convergente.

Remarque : On peut montrer que $\lim S_n = \pi^2/6$ (non demandé).

Exercice 7.5 *Calculer judicieusement*

(i) $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n + \frac{1}{n}}\right)$;

(ii) $\lim \left(n\sqrt{n^2+1} - n^2\sqrt{n+1}\right)$;

(iii) $\lim \frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$.

Exercice 7.6 *On considère un plan épargne logement basé sur des versements mensuels réguliers et qui offre une rémunération sous forme d'intérêts annuels.*

- *Le titulaire dépose un premier versement* $C_0 = 4000$ *euros.*
- *Le titulaire du produit s'engage à effectuer des versements mensuels d'un montant* M *minimum de 45 € par mois.*

- *Le taux d'intérêt est fixé à 4% par an.*

(i) Calculer le taux mensuel.

(ii) Donner le montant après chaque versement mensuel M sur les 4 premiers mois.

(iii) Donner la formule pour calculer la valeur C_n à partir de C_0 et de M.

(iv) On souhaite une somme de 11000 euros au bout de 6 ans. Donner la formule de la mensualité M versée.

(v) Calculer, au centime, l'annuité M versée.