# Révisions – Analyse Réelle 1 – Licence 1 MIASHS

**Exercice 4.1** *Formaliser à l'aide de quantificateurs et du connecteur* $\implies$ *:*
*Pour qu'un entier naturel soit multiple de 2, il suffit qu'il soit multiple de 4.*

*Indication.* Définition : Un entier naturel $n$ est multiple d'un entier naturel $\ell$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k \times \ell$.

**Correction.**
$$\forall n \in \mathbb{N}, ((\exists k \in \mathbb{N}, n = 4k) \implies (\exists k' \in \mathbb{N}, n = 2k')).$$

**Exercice 4.2** *Donner la négation de la proposition $P$,*
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, \quad xy < 1,$$
*puis indiquer (sans justifier) si $P$ est vraie, non $P$ est vraie ou si aucune des propositions $P$ et non $P$ n'est vraie.*

**Correction.** non $P$ :
$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, \quad xy \geq 1.$$
La proposition $P$ est vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^*$. Je pose $y = \frac{1}{x} - x$. Alors
$$xy = x\left(\frac{1}{x} - x\right) = 1 - x^2.$$
Or $x \neq 0$ donc $x^2 > 0$. Donc $-x^2 < 0$ et $1 - x^2 < 1$. Ainsi $xy < 1$.

**Exercice 4.3** *Le prédicat suivant est-il toujours vrai, toujours faux, ou parfois vrai et parfois faux ? Justifier.*
$$\left(\frac{1}{x} < 1\right) \implies (x > 1).$$

**Correction.**

- Le prédicat est vrai pour $x = 1$, car alors l'implication est $(F \implies F)$, qui vaut vrai.
- Le prédicat est faux pour $x = -1$, car alors l'implication est $(V \implies F)$, qui vaut faux.

Donc le prédicat est parfois vrai, parfois faux.

**Exercice 4.4** *Montrer*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x - 5y > 0.$$

**Correction.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = \frac{x}{5} - 1$. Alors
$$x - 5y = x - 5(\frac{x}{5} - 1) = x - x + 5 = 5 > 0.$$

**Exercice 4.5** *Soit* $A = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}+3} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Formaliser puis montrer que* $\inf A = 0$.

*Indication :* On pourra distinguer les cas $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$.

**Correction.** Je dois montrer : (a) $\forall x \in A$, $x \geq 0$, et (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $x < \varepsilon$.

Preuves :

(a) Soit $x \in A$. Alors $x = \frac{1}{\sqrt{n}+3}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On sait que $1 \geq 0$, $\sqrt{n} \geq 0$ et $3 \geq 0$, donc $x \geq 0$.

(b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$, avec $\varepsilon > 0$. On traite les cas $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ séparément.

- Cas $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$. On pose $n = 1 \in \mathbb{N}$. On pose
$$x = \frac{1}{\sqrt{n}+3}.$$
Alors $x \in A$.
De plus $n > 0$ donc $\sqrt{n}+3 > 3$ et donc
$$x = \frac{1}{\sqrt{n}+3} < \frac{1}{3}.$$
Puisque $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$, On obtient bien $x < \varepsilon$.
- Cas $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. On pose
$$n = E\left( (\frac{1}{\varepsilon} - 3)^2 \right) + 1.$$
On sait que $n \in \mathbb{Z}$ et
$$n > (\frac{1}{\varepsilon} - 3)^2 \geq 0$$
(c'est un carré, donc positif). Ainsi, $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$x = \frac{1}{\sqrt{n}+3}.$$
Alors $x \in A$. De plus,
$$n > (\frac{1}{\varepsilon} - 3)^2,$$
donc
$$\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 3,$$
donc
$$\sqrt{n} + 3 > \frac{1}{\varepsilon}$$
et donc
$$x = \frac{1}{\sqrt{n}+3} < \varepsilon.$$

**Exercice 4.6** *Étudier les variations de la suite* $(u_n)$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

**Correction.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}} - \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}. \end{aligned}$$
En utilisant la technique de l'expression conjuguée sur chaque terme, j'obtiens alors :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-1}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})} - \frac{-1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} - \frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}. \end{aligned}$$
Par ailleurs, $0 < n < n+1$ et $0 < n+1 < n+2$, donc
$$0 < \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \qquad \text{et} \qquad 0 < \sqrt{n+1} < \sqrt{n+2},$$
donc, par produit
$$0 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} < \sqrt{n+1}\sqrt{n+2},$$

et par somme

$$0 < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}.$$

Alors, par produit,

$$0 < \sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) < \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}).$$

Ainsi, par inversion de nombres positifs,

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} > \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}.$$

Par conséquent, $(u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

**Exercice 4.7** *Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$. Donner le terme général de $(u_n)$.*

**Correction.** La suite est arithmético-géométrique. Je résous

$$\alpha = \frac{2}{3}\alpha - 1.$$

Je trouve $\alpha = -3$. Je pose, pour tout $n \geq 0$,

$$v_n = u_n - (-3).$$

Alors, puisque $-3 = \frac{2}{3}(-3) - 1$, j'obtiens, pour tout $n \geq 0$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (-3) = \frac{2}{3}u_n - 1 - (-3) = \frac{2}{3}u_n - 1 - (\frac{2}{3}(-3) - 1) = \frac{2}{3}(u_n - (-3)) = \frac{2}{3}v_n.$$

Ainsi, $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Par conséquent, son terme général est

$$v_n = v_0(\frac{2}{3})^n = (u_0 - (-3))(\frac{2}{3})^n = 4(\frac{2}{3})^n.$$

**Exercice 4.8** *Soit, pour tout $n \geq 1$, la suite $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.*

*(i) Écrire $S_n$ à l'aide du symbole $\sum$.*

*(ii) Montrer que $(S_n)$ est strictement croissante.*

*(iii) Montrer par récurrence : $\forall n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.*

**Correction.**

(i) Pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

(ii) Pour tout $n \geq 1$,

$$S_{n+1} - S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + 1\frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + 1\frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

donc $(S_n)$ est strictement croissante.

(iii) Soit, pour tout $n \geq 1$, $P_n$ la propriété

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

**Intialisation.** J'ai $S_1 = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1$. Or $1 \leq 1$ donc $P_1$ est vérifiée.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. Alors

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + 1\frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

par hypothèse de récurrence.

Or

$$-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}-(-\frac{1}{n+1})=\frac{-(n+1)^2+n+n(n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-n^2-2n-1+n+n^2+n}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}\leq 0,$$

et donc

$$-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq -\frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$S_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n+1}.$$

Donc $P_{n+1}$ est vérifiée.

**Conclusion.** D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$P_n : S_n \leq 2-\frac{1}{n}$$

est vérifiée.