Première année de Licence MIASHS

TD corrigé – Analyse 1[1]

Julien GREPAT[2]

1 Éléments de logique

Exercice 1.1

(i) *Dire si la proposition est vraie ou fausse. (On pourra rappeler les tables de vérité des principaux opérateurs logiques)*

(a) $(2 > 0)$ *et* $(2 \geq 1)$ *;*
Correction. *La proposition* $(2 > 0)$ *est vraie. La proposition* $(2 \geq 1)$ *est vraie. Si* P *et* Q *sont des propositions vraies, alors* $(P$ *et* $Q)$ *est vraie. Donc la proposition* $((2 > 0)$ *et* $(2 \geq 1))$ *est vraie.*

(b) $(2 > 0)$ *ou* $(2 \leq 1)$ *;*
Correction. *La proposition* $(2 > 0)$ *est vraie. La proposition* $(2 \leq 1)$ *est fausse. Dès qu'une proposition est vraie, alors* $(P$ *ou* $Q)$ *est vraie. Donc la proposition* $((2 > 0)$ *ou* $(2 \leq 1))$ *est vraie.*

(c) $(2 > 0)$ *et* $(2 \leq 1)$.
Correction. *La proposition* $(2 > 0)$ *est vraie. La proposition* $(2 \leq 1)$ *est fausse. Dès qu'une proposition est fausse, alors* $(P$ *et* $Q)$ *est fausse. Donc la proposition* $((2 > 0)$ *et* $(2 \leq 1))$ *est fausse.*

(ii) *Écrire la négation de la proposition suivante, où* x *et* y *désignent des nombres réels fixés.*

$$(x > 3) \text{ et } (y > 10).$$

Correction. *La négation de* $(P$ *et* $Q)$ *est* $((non\ P)$ *ou* $(non\ Q))$*. Ici, c'est donc* $((x \leq 3)$ *ou* $(y \leq 10))$.

(iii) *(a)* $((x > 2)$ *ou* $(x < 2))$ *;*
Correction. *Si* $x = 2$*, alors la proposition est fausse. Si* $x = 3$*, la proposition est vraie. Donc la proposition est parfois vraie et parfois fausse.*

---

[2] Contact : `julien.grepat@univ-grenoble-alpes.fr`

(b) $(x > 3) \implies (x > 2)$;
Correction. *L'implication* $(P \implies Q)$ *est équivalente à la disjonction* $((\text{non } P) \text{ ou } Q)$. *Donc ici, la proposition peut s'écrire* $((x \leq 3) \text{ ou } (x > 2))$. *Pour qu'elle soit fausse, il faut* $x > 3$ *et* $x < 2$. *Or il n'existe pas de tel* x. *Donc la proposition est toujours vraie.*

(iv) *Écrire la contraposée des implications suivantes, où* x *et* y *désignent des nombres réels fixés.*

(a) $(x > 3) \implies (x > 2)$;
Correction. *La contraposée de* $(x > 3) \implies (x > 2)$ *est*

$$(\text{non } (x > 2)) \implies (\text{non } (x > 3)),$$

c'est à dire,

$$(x \leq 2) \implies (x \leq 3)\,.$$

(b) $(x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } x > y) \implies \left(\frac{1}{x} < \frac{1}{y}\right)$;

Correction. à vérifier *La contraposée de* $(x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } x > y) \implies \left(\frac{1}{x} < \frac{1}{y}\right)$ *est*

$$(\text{non } \left(\frac{1}{x} < \frac{1}{y}\right) \implies (x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } x > y)\,,$$

c'est à dire,

$$\left(\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}\right) \implies (x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \text{ ou } x \leq y)\,.$$

(v) *Écrire la proposition à l'aide du connecteur* $\implies$, *et indiquer (sans preuve) si elle est vraie pour toute valeur de* $n \in \mathbb{N}$.
Indication. $2^{10} = 1024$.

(a) *pour que* $2^n \geq 1000$, *il faut que* $n \geq 15$;
Correction. *La proposition signifie : si* $2^n \geq 1000$, *alors* $n \geq 15$.
Elle s'écrit $(2^n \geq 1000 \implies n \geq 15)$.
C'est une proposition fausse car si par exemple $n = 10$, *alors* $(2^n \geq 1000)$ *est vraie et* $(n \geq 15)$ *est fausse, et donc* $(2^n \geq 1000 \implies n \geq 15)$ *est fausse.*

(b) *pour que* $2^n \geq 1000$, *il suffit que* $n \geq 15$.
Correction. *La proposition signifie : si* $n \geq 15$, *alors* $2^n \geq 1000$.
Elle s'écrit $(n \geq 15 \implies 2^n \geq 1000)$.
C'est une proposition vraie.

Exercice 1.2

(i) *Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :*

(a) *Dans* $\mathbb{R}$, *il y a au moins un nombre, qui une fois inversé, est un entier.*
Correction. *La proposition se formalise en :* $\left(\exists x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\right)$.

(b) *Tout nombre réel positif ou nul est égal au carré d'un nombre réel positif ou nul.*
Correction. *La proposition se formalise en :* $\left(\forall x \in [0, +\infty[,\ \exists y \in [0, +\infty[,\ x = y^2\right)$.

(ii) *Écrire la négation de la proposition suivante, puis indiquer (sans preuve) si la proposition est vraie ou si sa négation est vraie.*

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad x^2 \geq x.$$

Correction. *La négation de la proposition est :* $\exists x \in [1, +\infty[,\ x^2 < x$.
L'inéquation $x^2 \geq x$ *est vérifiée pour tout* $x \in [1, +\infty[$, *donc la proposition initiale est vraie.*
(En effet, $x^2 \geq x \iff x^2 - x \geq 0 \iff x(x-1) \geq 0 \iff x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, *donc si* $x \geq 1$, *alors* $x^2 \geq x$.*)*

(iii) *Pour l'assertion suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse.*
Si elle est fausse, modifier un unique quantificateur pour qu'elle devienne vraie.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad x + y = 2.$$

Correction. *La proposition est fausse, car sa négation* ($\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \neq 2$) *est vraie* ($x = 0$ *et* $y = 0$ *conviennent). La proposition modifiée suivante est vraie.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \qquad x + y = 2.$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. *Je pose* $y = 2 - x$. *Alors* $x + y = x + 2 - x = 2$.

Exercice 1.3

(i) *Démontrer la proposition suivante.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \qquad y > x.$$

Correction. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Je pose* $y = x + 1$. *De* $1 > 0$, *je déduis, par addition de* x *que*

$$x + 1 > x + 0, \qquad \text{c'est à dire}, \qquad y > x.$$

(ii) *Montrer la proposition suivante à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.*

Le nombre 0 *n'a pas d'inverse.*

Indication. On dit qu'un nombre réel a *possède un inverse s'il existe un réel* b *tel que* $a \times b = 1$.

Correction. *Je suppose, par l'absurde, que* 0 *possède un inverse. D'après la définition, il existe donc* $b \in \mathbb{R}$ *tel que* $0 \times b = 1$.

Or $0 \times b = 0$. *Par conséquent* $0 = 1$. *Contradiction.*

(iii) *Montrer les implications suivantes soit directement, soit en considérant leur contraposée.*

(a) *Quel que soit* $n \in \mathbb{N}$, *ou bien* n *est pair, ou bien* $n + 1$ *est pair.*
Indication. Utiliser : (1) Un entier est pair (resp. impair) s'il peut s'écrire $2k$ *(resp.* $2k + 1$*) avec* k *un entier, et (2) Tout entier est ou bien pair ou bien impair.*
Correction. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *D'après (2), je peux distinguer les cas :* n *est pair, et* n *est impair.*

Cas 1 : Si n est pair, la propriété désirée (n est pair ou $n+1$ est pair) est vraie.
Cas 2 : Si n est impair, alors d'après (1), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
Dans ce cas, $n+1 = (2k+1)+1 = 2k+2 = 2(k+1)$.
Or $k+1 \in \mathbb{N}$, donc d'après (1), $n+1$ est pair.
Ainsi, la propriété désirée (n est pair ou $n+1$ est pair) est vraie.

(b) *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.*
Correction. *On raisonne par contraposée ($(P \implies Q) \iff (nonQ \implies nonP)$) et montre que si n est impair alors n^2 est impair. On pose*

$$n = 2k+1, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

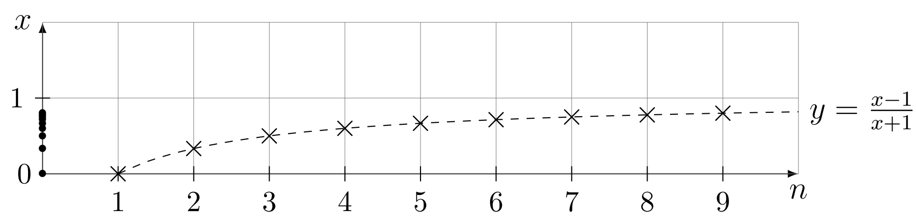
Alors

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Puisque $4l$ est pair pour tout $l \in \mathbb{Z}$, il suit que $4k^2+4k$ et pair et que, donc, $n^2 = 4k^2+4k+1$ est impair.

Exercice 1.4 (Bornes)

On considère l'ensemble A contenu dans $\mathbb{R}$ défini par $A = \left\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Quelques éléments de A ont été représentés dans la figure ci-dessous (sur l'axe des ordonnées).



L'objectif de cet exercice est de montrer $\sup A = 1$, c'est à dire :

- *L'ensemble A est majoré par 1 : $\forall x \in A,\ x \leq 1$*
- *L'ensemble A n'est majoré par aucun réel inférieur à 1 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > 1-\varepsilon$.*

(i) *Exemples :*

- *Montrer que $0.9 \in A$, $0.92 \in A$, mais $0.91 \notin A$.*
Correction. *Montrons que $0.9 \in A$, résolvons*

$$\frac{n-1}{n+1} = 0.9 \iff n-1 = 0.9(n+1) \iff 0.1n = 1.9 \iff n = 19 \in \mathbb{N}.$$

Donc 0.9 est bien dans A. Il en est de même pour 0.92, en prenant n=24. Par contre, la résolution de l'équation liée à la valeur 0.91 amène à

$$\frac{n-1}{n+1} = 0.91 \iff n-1 = 0.91(n+1) \iff 0.09n = 1.91 \iff n \approx 21,22 \notin \mathbb{N}.$$

- *Comment formaliser la propriété : $x \in A$?*
Correction.

$$x \in A \iff \exists n \in \mathbb{N},\quad x = \frac{n-1}{n+1}.$$

(ii) *(a)* *Montrer :* $\forall x \in A,\ x \leq 1$.

Correction.

Soit $x \in A$, *alors* $\exists n \in \mathbb{N}, \quad x = \frac{n-1}{n+1}, \leq 1$ *(dès lors que* $n-1 < n+1$*). Il suit que l'ensemble* A *est majoré par* 1.

(b) *Soit* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

- *On suppose* $\varepsilon > 1$. *Quel est le signe de* $1 - \varepsilon$ *?*

  Correction.

  Soit $\varepsilon > 1$, *alors* $1 - \varepsilon < 0$. *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors* $n - 1 > 0$ *et* $n + 1 > 0$. *Il suit que pour* $x \in A$ *et* $x > 0 > 1 - \varepsilon$. *Ce qu'il fallait démontrer.*
- *On suppose* $\varepsilon \leq 1$. *Déterminer un* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\frac{n-1}{n+1} > 1 - \varepsilon$.

  Correction.

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n+1} > 1 - \varepsilon \quad &\iff \quad n - 1 > (1-\varepsilon)(n+1) \\ &\iff \quad \varepsilon n > 2 - \varepsilon \\ &\iff \quad n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir n *le premier entier supérieur à* $\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$ *pour que*

$$x = \frac{n-1}{n+1} > 1 - \varepsilon.$$

D'où le résultat.

(iii) *Conclure.*

Correction.

On a donc montré que A est majoré par 1 et qu'on peut trouver un élément de A arbitrairement proche de 1. Donc la borne supérieure de A est 1.

Exercice 1.5 *Soit* $A = \left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$. *Montrer que* $\inf A = 0$.

Correction.

Naturellement, si $n > 0$, alors $1/n > 0$. Ainsi A est minoré par 0. Montrons que l'ensemble A n'est minoré par aucun réel supérieur à 0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \qquad 0 < x = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Prenons n le plus petit entier supérieur à $1/\varepsilon$. En posant $x = \frac{1}{n}$, il suit que

$$n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad \iff \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \iff \quad x < \varepsilon.$$

D'où le résultat.