

CC4 Algèbre 2022

31/03/2022

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$. M^t désigne la matrice transposée. On définit les matrices suivantes

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$N_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$0_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelle application linéaire f_α peut être associée à M_α ?
2. Déterminer $\text{Ker}(f_\alpha)$ et $\text{Im}(f_\alpha)$. Énoncer le théorème du rang pour f_α .
3. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Calculer $M_\alpha M_\beta$.
4. Calculer M_α^p .
5. Calculer M_α^{-1} et M_α^t .
6. Existe-t-il une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice associée à f_α soit diagonale?
7. Quelles applications linéaires f_α peuvent être associées à N_α et 0_α ?
8. Les matrices N_α et 0_α commutent-elles?