- Année 2021/22, L1 MIASHS
- Examen de substitution: Algèbre linéaire
- Enseignant responsable: Jacques Istas
- Date: 27/01/2022
- Durée: 2h
- Matériel autorisé: une feuille A4

SUJET

Soit N une matrice carrée. On dit que N est nilpotente s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que N^p soit la matrice nulle. I_n désigne la matrice identité $n \times n$. Deux matrices carrées A et B commutent si $AB = BA$.

Exercice 1
Dans tout l'exercice 1, N désigne une matrice nilpotente $n \times n$.

1. I_n et N commutent-t-elle?
2. Montrer que
$$(I_n - N)(\sum_{k=0}^{p-1} N^k) \quad = \quad I_n.$$
3. Quelle est l'inverse de $I_n - N$?
4. Montrer par l'absurde que N n'est pas inversible.

5. Soient N_1 et N_2 deux matrices carrées $n \times n$ nilpotentes qui commutent.
   (a) Montrer que le produit $N_1 N_2$ est nilpotent.
   (b) Montrer que toute combinaison linéaire de N_1 et N_2 est nilpotente.

Exercice 2
On définit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) \quad = \quad (3x + y, x - y).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Quel est son noyau $Ker(f)$?
3. Quelle est son image $Im(f)$?
4. f est-elle bijective?