Examen

L'examen dure 3 heures. **Aucun document** (cours, polycopié, corrections de TDs et TPs, etc) ou calculette ne sont autorisés pendant cet examen. La **rédaction** et la **présentation** de la copie sont largement prises en compte dans la note finale, prenez donc le temps de bien rédiger vos solutions. Les questions avec une * sont plus difficiles. Vous pouvez sauter des questions et utiliser les réponses des questions précédentes.

Exercice 1 (Question de cours)**.**

1. Définir $\bigcup_{i\in I} E_i$ et $\bigcap_{i\in I} E_i$.
2. Rappeler la définition de l'ensemble des formules propositionnelles.
3. Définir ce qu'est une tautologie.
4. Écrire l'ensemble des parties de $\{1,2,3,4\}$.

Exercice 2 (Théorie des ensembles)**.** Soient deux ensembles E et F inclus dans un ensemble G.

1. Soit $A \subset E \cap F$, A est-elle une partie de E ? de F ? En déduire une comparaison de $\mathscr{P}(E\cap F)$ en termes de $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(F)$.
2. Soit B un ensemble qui satisfait $B \subset E$ et $B \subset F$. A-t-on $B \subset E \cap F$? En déduire une comparaison de $\mathscr{P}(E\cap F)$ et $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.
3. Montrer que $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$. La réciproque est-elle vraie (justifier) ?
4. Montrer que $A \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} A \times B_i$.

Exercice 3 (Logique)**.** Expliquer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes (on rappelle qu'un nombre premier est un entier strictement plus grand que 1 qui n'est divisible que par 1 et lui-même) :

1. Pour tout réels positifs x, y, $(x+y)/2$ est plus grand ou égal à $\sqrt{xy}$ et il y a égalité si $x = y$.
2. Tout sous-ensemble non-vide de l'ensemble des entiers contient un plus petit élément.
3. Il existe un nombre infini de nombres premiers.
4. * Pour tout polynôme de degré 2 à coefficients réels et pour tout réel y, il existe au plus deux valeurs de x telles que $P(x) = y$.

Exercice 4 (Négation et contraposées)**.** Écrire la contraposée des implications suivantes :

1. $ab = 0$ implique $(a = 0) \vee (b = 0)$.
2. $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$ implique $m = p$ et $n = q$.
3. $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon)$ implique $a = 0$.

Écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E^n, (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}, \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists (p_1, \dots, p_k) \in \mathscr{P}^k, \exists (r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k, n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$.
3. * $\forall x \in I, \exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, (|y - x| \leq \eta \Rightarrow |\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - a| \leq \varepsilon)$.

Exercice 5 (Différence symétrique)**.** * Soient E un ensemble et $F \subset \mathscr{P}(E)$. On rappelle que $A \Delta B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall A \in F, \forall B \in F, (A\Delta B \in F$ et $A \cap B \in F)$
2. $\forall A \in F, \forall B \in F, (A\Delta B \in F$ et $A \cup B \in F)$
3. $\forall A \in F, \forall B \in F, (A \cup B \in F$ et $A \smallsetminus B \in F)$