7 Application à la finance

$$50€ \xrightarrow{\text{augmentation de } 10\%} 50 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 50 \times 1,1 = 55€$$

$$50€ \xrightarrow{\text{baisse de } 10\%} 50 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 50 \times 0,9 = 45€$$

Pb :

Vendeur : -10% sur HT

Enseignant de maths : -11% sur TTC (TVA = 20%) car baisse plus forte sur prix plus haut

Vendeur : $P_{HT}\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1+\frac{20}{100}\right)$

Enseignant : $P_{HT}\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{11}{100}\right)$

$$= P_{HT}\left(1-\frac{11}{100}\right)\left(1+\frac{20}{100}\right)$$

L'enseignant propose donc un prix plus bas.

Taux annuel 5%, mais les opérations se font tous les mois. À quel taux ?

$$\underbrace{K\left(1+\frac{5}{100}\right)}_{\text{Au bout d'un an}} = K\underbrace{\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{t}{100}\right)}_{12 \text{ fois } = 12 \text{ mois}} = K\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12}$$

Capital

Exemple fondamental. On pose un taux annuel de 5%. Calculons le taux mensuel. Il est à noter qu'une augmentation de coefficient $(1+5/100)$ sur une année correspond à douze augmentations de $(1+t/100)$ sur une année. En posant K le capital initial,

$$\begin{aligned} \cancel{K}\left(1+\frac{5}{100}\right) &= \cancel{K}\left(1+\frac{t}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{t}{100}\right) \\ &= \cancel{K}\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12}. \end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^{1/12} = \left(1+\frac{t}{100}\right)^{12/12}$$

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^{1/12} = 1+\frac{t}{100}$$

```
> 1.05^(1/12)
[1] 1.004074
```

$\longrightarrow 1+\frac{t}{100} = 1{,}004$ et $t = 0{,}4\,\%$.

7.1 Vocabulaire

- **Valeur actuelle :** capital initial placé.
- **Valeur future :** capital obtenu au bout des n périodes prévues.
- **capitalisation :** calcul d'une valeur future à partir du taux d'intérêt et de la valeur actuelle.
- **actualisation :** calcul d'une valeur actuelle à placer pour obtenir une valeur future.

Avec une certaine maîtrise des concepts liés aux suites arithmétiques et géométrique, on peut s'apercevoir que les quantités usuelles utilisées en finance en sont une application directe.

$$\begin{tikzcd} \text{Valeur actuelle} \arrow[r, bend left, "\text{capitalisation}"] & \text{Valeur futur} \arrow[l, bend left, "\text{actualisation.}"] \end{tikzcd}$$

Une somme initiale C

des intérêts sur C $\quad I = C\frac{t}{100}$

d'intérêt fixe I est versé à chaque période.

$\Rightarrow$ suite arithmétique de raison $I = C\frac{t}{100}$
de premier terme $C_0 = C$.

7.2 Placements à intérêts simples

Definition 7.1 *Dans un placement à intérêts simples, le capital placé C produit à chaque période les mêmes intérêts correspondant à $t\%$ du capital C.*

Proposition 7.2 *Le capital acquis C_n au bout de n périodes correspond au nième terme d'une suite arithmétique de raison $Ct/100$ et de premier terme $C_0 = C$, i.e.*

$$C_n = \underset{C_0}{C} + \underbrace{C\frac{t}{100}}_{I} \times n.$$

$$C_0 = K$$

$$\times\left(1+\frac{r}{100}\right) \quad C_1 = C_0\left(1+\frac{t}{100}\right) = K\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

(La somme augmentée des intérêts)

$$\times\left(1+\frac{r}{100}\right) \quad C_2 = C_1\left(1+\frac{t}{100}\right)$$

les intérêts portent sur ce qu'il y a sur le compte

$$\times\left(1+\frac{r}{100}\right) \quad C_3 = C_2\left(1+\frac{t}{100}\right)$$

7.3 Placement à intérêts composés

Dans ce placement, les intérêts rapportent des intérêts. En voici une définition.

Definition 7.3 *Dans un placement à intérêts composés, le capital K placé au taux t% produit à chaque période des intérêts qui viennent grossir le capital sur lequel sera calculé les intérêts de la période suivante.*

On dit que les intérêts sont capitalisés.

Proposition 7.4 *Le capital acquis K_n au bout de n périodes correspond au nième terme d'une suite géométrique de raison $1 + t/100$ et de premier terme $K_0 = K$, i.e.*

$$K_n = K\left(1+\frac{t}{100}\right)^n.$$

Suite géométrique de premier terme $C_0 = K$ et de raison $\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

$$C_n = K\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

Fry est congelé 31/12/1999

il est décongelé le 01/01/3000

(1000 ans après).

1 \$ en 1999 - 2,5 % d'intérêt par an.

$$C_0 = 1$$

$$C_{3000} = 1 \times \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{1000} \simeq 52 \text{ milliards.}$$

```
> 1.025^1000
[1] 52949930179
```

Placement boursier

rendement $t\%$

(intérêts composés)

Evolution $\quad K \qquad K \qquad K$

$$K\left(1+\frac{t}{100}\right) \qquad K\left(1+\frac{t}{100}\right) \qquad \dots$$

Compte en banque

$$\underbrace{K\frac{t}{100}}_{\text{intérêt}} + K\frac{t}{100} + \dots$$

Total $\quad K \qquad K+\frac{Kt}{100} \qquad K+\frac{2t}{100} \qquad K+\frac{3t}{100} \quad \dots$

Intérêt simples.

Rappel

Augmentation de 20% $\quad K\left(1+\frac{20}{100}\right) = K \times 1{,}2$

Diminution de 20% $\quad K\left(1-\frac{20}{100}\right) = K \times 0{,}8$.

Une augmentation annuelle de 20% revient à une une augmentation mensuelle de t%, 12 fois de suite :

$$\cancel{K}\left(1+\frac{20}{100}\right) = \cancel{K}\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{t}{100}\right)$$

$$\left(1+\frac{20}{100}\right) = \left(1+\frac{t}{100}\right)^{12}$$

$$\left(1+\frac{20}{100}\right)^{1/12} = \left(1+\frac{t}{100}\right)^{12/12} = 1+\frac{t}{100}$$

$$1+\frac{t}{100} = 1{,}0153. \qquad t = 1{,}53\,\%.$$

Compte à intérêts simples :

- On fixe un capital initial K
- les intérêts sont calculés sur le capital initial K à chaque période (taux t).

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$		$t=n$
Initial	K	K	K	K		K
intérêts versé		$K\frac{t}{100}$	$K\frac{t}{100}$	$K\frac{t}{100}$	...	$K\frac{t}{100}$
Total	K	$K+K\frac{t}{100}$	$K+2\frac{Kt}{100}$	$K+3\frac{Kt}{100}$		$K+n\frac{Kt}{100}$

Suite arithmétique de premier terme K et de raison $\frac{Kt}{100}$

Compte à intérêts composés

- K capital initial
- les intérêts sont une augmentation de la somme présente sur le compte au moment du calcul. (taux t).

$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
K	$K\left(1+\frac{r}{100}\right)$	$K\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$	$K\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$ ...

$t=n$ $\quad K\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

Suite géométrique de raison $\left(1+\frac{r}{100}\right)$ de premier terme K_0.

7.4 valeur acquise d'une suite d'annuités.

On souhaite placer des annuités A constantes (une par an) avec un intérêt composé de $t\%$. La valeur acquise au bout de n années est

K capital initial

$t=0$ K

$t=1$ $K\left(1+\frac{t}{100}\right)+A$

$t=2$ $\left(K\left(1+\frac{t}{100}\right)+A\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)+A$

$t=3$ $\left(K\left(1+\frac{t}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{t}{100}\right)+A\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)+A$

$t=4$ $$\left(K\left(1+\frac{t}{100}\right)^3+A\left(1+\frac{t}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{t}{100}\right)+A\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)+A$$

$$=K\left(1+\frac{t}{100}\right)^4+A\left(1+\frac{t}{100}\right)^3+A\left(1+\frac{t}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{t}{100}\right)+A.$$

$$\vdots$$

$t=n$ $$K_n=K\left(1+\frac{t}{100}\right)^n+\underbrace{A\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n-1}+A\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n-2}+\cdots+A\left(1+\frac{t}{100}\right)+A}$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $U_0=A$ et de raison $q=1+\frac{t}{100}$

$$K_n=K\left(1+\frac{t}{100}\right)^n+A\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$q \leftarrow 1+\frac{t}{100}$

$$K_n=K\left(1+\frac{t}{100}\right)^n+A\,\frac{1-(1+t/100)^n}{-t/100}$$

Note: On parle d'annuité de façon générale mais la périodicité des versements peut-être mensuelle. Le taux t est alors le taux mensuel.

7.5 Calcul de la mensualité d'un crédit

L'enjeu est d'établir la formule de la mensualité constante m d'un crédit. Nous utiliserons un formalisme différent du tableau d'amortissement classique et considérerons la dette liée au capital emprunté C au taux mensuel t (exprimé sous forme décimale et non pourcentage[3]) remboursé en n mensualités.

La dette C est prêtée au temps $T = 0$. La première mensualité est versée au temps $T = 1$ juste après application du taux d'intérêt, etc.

t directement en pourcentage dans ce qui suit

$3\% \Rightarrow t = 0{,}03$

On a la dynamique

dettes

$T = 0$	C
$T = 1$	$C \times (1 + t) - m$

$T=2 \quad (C(1+t) - m)(1+t) - m$

$T=3 \quad (C(1+t)^2 - m(1+t) - m)(1+t) - m$

$T=4 \quad (C(1+t)^3 - m(1+t)^2 - m(1+t) - m)(1+t) - m$

$T=4 \quad C(1+t)^4 - m(1+t)^3 - m(1+t)^2 - m(1+t) - m$

$T = n$ $\quad K_n = C(1+t)^n \underbrace{- m(1+t)^{n-1} - m(1+t)^{n-2} - \cdots - m(1+t) - m}_{}$

somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $(1+t)$ et de premier terme $-m$.

$$K_n = C(1+t)^n - m\,\frac{1-(1+t)^n}{1-(1+t)} = C(1+t)^n - m\,\frac{1-(1+t)^n}{-t}$$

Problème : Trouver la mensualité m pour rembourser le crédit après n mensualités.

$$\Longleftrightarrow \quad K_n = 0$$

$$C(1+t)^n - m\,\frac{1-(1+t)^n}{-t} = 0$$

$$C(1+t)^n = m\,\frac{1-(1+t)^n}{-t}$$

$$m = C(1+t)^n \times \frac{-t}{1-(1+t)^n}$$

$$m = -Ct\,\frac{(1+t)^n}{1-(1+t)^n}$$

$$m = -Ct\,\frac{\cancel{(1+t)^n}}{\left(\frac{1}{(1+t)^n} - 1\right)\cancel{(1+t)^n}}$$

$$m = \frac{-Ct}{(1+t)^{-n} - 1}$$

$$m = \frac{Ct}{1-(1+t)^{-n}}$$

7.6 Un problème de dépréciation

Puisque le temps, c'est de l'argent, un produit manufacturé se déprécie avec le temps, que ce soit par une perte de fraîcheur, ou un coût de stockage... Le problème suivant est issu d'une problématique financière réelle. On parlera d'unité de produit, une simple multiplication permet de passer d'une quantité à un montant.

- Je commence ma période avec 50 unités d'un produit.
- À la fin de la période, je veux avoir 400 unités de ce produit.
- Quel montant dois-je produire chaque mois sachant que ma base totale de produit perd chaque mois 4.2% de sa valeur ?

On part avec $Q_i = 50$ la quantité initiale et Q la quantité produite chaque mois. Voici la dynamique.

$t = 0$	Q_i				
$t = 1$	$Q_i \times 0.958$	$+Q$			
$t = 2$	$Q_i \times 0.958^2$	$+Q \times 0.958$	$+Q$		
$t = 3$	$Q_i \times 0.958^3$	$+Q \times 0.958^2$	$+Q \times 0.958$	$+Q$	
$t = 4$	$Q_i \times 0.958^4$	$+Q \times 0.958^3$	$Q_i \times 0.958^2$	$+Q \times 0.958$	$+Q$
$\vdots$					
$t = n$	$Q_i \times 0.958^n$	$+Q \times 0.958^{n-1}$	$+ \cdots +$	$Q \times 0.958$	$+Q$

À la date $t = n$, puisque $Q_i = 50$, j'ai

$$\iff \quad \frac{(400 - 50 \times 0.958^n) \times 0.042}{1 - 0.958^n} = Q$$