Première année de Licence MIASHS

Renforcement disciplinaire en mathématiques[1]

Julien GREPAT[2]

Contents

I Révisions – CALCUL ALGEBRIQUE 4

1 Somme de termes et produit de facteurs 4

1.1 Exemples . . . 4
1.2 Valeurs interdites . . . 4

2 Développer et factoriser 4

2.1 Identités remarquables . . . 4
2.2 Méthode : Factoriser une expression . . . 5
2.3 Méthode : Factoriser en utilisant une identité remarquable . . . 5

3 Les fractions 5

3.1 Arithmétique . . . 5
3.2 Simplifier les fractions . . . 6
3.3 La somme . . . 6
3.4 Le produit . . . 7
3.5 La division . . . 7
3.6 Le signe . . . 7

4 Équation du premier degré 8

4.1 Définition . . . 8
4.2 Résolution . . . 8

5 Équation du second degré 8

5.1 Définition . . . 8
5.2 Résolution . . . 8
5.3 Note . . . 9

[2]Contact : `julien.grepat@gmail.com`

6 Inéquation du premier degré **9**
6.1 Définition . . . 9
6.2 Résolution . . . 9

7 Équation–produit **10**
7.1 Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation–produit . . . 10

8 Équation–quotient **10**
8.1 Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation–quotient . . . 11

9 Signe d'une expression **11**
9.0.1 Signe d'une différence . . . 11
9.1 Fonctions affines . . . 12
9.1.1 Signe d'un produit . . . 13
9.1.2 Signe d'un carré . . . 13
9.1.3 Signe d'un quotient . . . 14
9.2 Démarche . . . 14
9.3 Trinôme du second degré . . . 14
9.4 Résolution d'inéquations . . . 14
9.4.1 Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit . . . 14
9.4.2 Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient . . . 15

II Fonctions **16**

10 Définition **16**

11 Représentations d'une fonction **16**
11.1 Tableau de valeurs . . . 16
11.2 Représentation graphique . . . 16
11.3 Forme algébrique . . . 17
11.4 Domaine de définition . . . 17
11.4.1 Continuité . . . 17

12 Résolution de l'équation $f(x) = k$ **17**
12.1 Résolution algébrique . . . 17
12.2 Résolution approchée . . . 18
12.2.1 Graphiquement . . . 18
12.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 19
12.2.3 Application . . . 19
12.2.4 À la calculatrice . . . 20

13 Fonctions de référence **21**

13.1 Fonctions affines : fonctions $f(x) = -0.3x + 2$ et $f(x) = 0.3x + 2$ 21
13.2 Paraboles : fonctions $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 6x - 6$ et $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ 22
13.3 Racine carrée : fonctions $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ et $f(x) = \sqrt{x+8} = (x+8)^{1/2}$ 22
13.4 Hyperboles : fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \frac{2}{x+2}$ 23

14 Rappel sur les puissances **23**
14.1 Comprendre la notation x^n 23
14.2 Comprendre la notation x^{-n} 23
14.3 Formules de calcul sur les puissances 24
14.4 la racine carrée 24

15 Les fonctions exponentielle et logarithme **24**
15.1 La fonction exponentielle 24
15.2 La fonction logarithme népérien 25

16 Dérivation **26**
16.1 formules de dérivée 27
16.2 Signe de la dérivée et variations de la fonction 27

III Proportions–Taux d'évolution–suites numériques **29**

17 Proportion – pourcentage **29**
17.1 Définitions 29
17.2 Augmentation – réduction 29
17.3 Évolution 30
17.4 Taux moyen 30

18 Suites **31**
18.1 Généralités 31
18.2 Suite arithmémtique 32
18.3 Suite géométrique 32

Part I

Révisions – CALCUL ALGEBRIQUE

1 Somme de termes et produit de facteurs

1.1 Exemples

Sommes (ou différences) de termes	Produits de facteurs
$x-3$	$(6x+1)(x-1)$
$(2x+4)+3x$	$2(1+6x)$
$(5-x)-(9+9x)$	$(8-x)(2+x)$
	$(3+8x)(x-8)^2$

1.2 Valeurs interdites

Pour certaines expressions dépendantes de x, il existe des valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer l'expression. Par exemple :

$$A(x) = \frac{x+5}{4+x}.$$

Pour $x=-4$, $4+x=0$. Il n'est donc pas possible de calculer $A(-4)$. Pour l'expression $A(x)$, x désigne un nombre réel différent de -4.

2 Développer et factoriser

Definition 2.1 *Développer c'est transformer un produit en une somme (ou différence) de termes. Factoriser c'est transformer une somme en un produit de facteurs.*

$$x(4-y) \quad \underset{\overset{\leftarrow}{\text{FACTORISER}}}{\overset{\overset{\text{DEVELOPPER}}{\rightarrow}}{=}} \quad 4x-xy$$

2.1 Identités remarquables

Proposition 2.2 *Pour tous nombres réels a et b, on a :*

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2,\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

2.2 Méthode : Factoriser une expression

Pour factoriser, il faut trouver dans chacun des termes de l'expression un facteur commun. Il s'agit ici de $2 + 3x$.

$$\begin{aligned} B &= 3(2+3x) - (5+2x)(2+3x) \\ &= (2+3x)(3-(5+2x)) \\ &= (2+3x)(3-5-2x) \\ &= (2+3x)(-2-2x). \end{aligned}$$

Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :

$$\begin{aligned} D &= 5(1-2x) - (4+3x)(2x-1) \\ &= 5(1-2x) + (4+3x)(1-2x) \\ &= (1-2x)(5+(4+3x)) \\ &= (1-2x)(9+3x) \end{aligned}$$

2.3 Méthode : Factoriser en utilisant une identité remarquable

Factoriser l'expression suivante

$$A = (3x+1)^2 - 49,$$

on reconnaît une identité remarquable du type $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. avec $a = 3x+1$ et $b = 7$.

$$\begin{aligned} A &= (3x+1)^2 - 49 \\ &= (3x+1)^2 - 7^2 \\ &= ((3x+1)-7)((3x+1)+7) \\ &= (3x+1-7)(3x+1+7) \\ &= (3x-6)(3x+8). \end{aligned}$$

3 Les fractions

3.1 Arithmétique

Nous rappelons ici quelques définitions d'arithmétiques indispensables à la manipulation efficace des fractions.

Definition 3.1 *Soit a un nombre entier. On appelle multiple de a tout nombre qui s'écrit $a \times b$ où b est un nombre entier.*

Par exemple, $30 = 3 \times 10$ est un multiple de 3.

Definition 3.2 *Soit a un nombre entier. Le nombre entier b est un diviseur de a s'il n'y a pas de reste dans la division (entière) de a par b.*

Dans l'exemple précédent, 3 est un multiple de 3.

Definition 3.3 *Un nombre premier est un nombre qui n'a pour diviseur que 1 et lui-même.*

Les premiers nombres premiers sont $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17$. Mise à part 2 ils sont tous impairs.

Proposition 3.4 *Tout nombre entier peut se décomposer en produit de facteurs premiers.*

Par exemple, $70 = 2 \times 5 \times 7$ est la décomposition en facteurs premiers de 70.

Definition 3.5 *On appelle PPCM le plus petit multiple commun de deux nombres.*

Par exemple, 15 et 10 ont pour PPCM le nombre 30.

Definition 3.6 *On appelle PGCD le plus grand diviseur de deux nombres.*

Par exemple, 9 et 15 ont pour PGCD le nombre 3. On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD. Nous ne nous attarderont pas plus sur ces notions.

3.2 Simplifier les fractions

On rappelle la définition suivante.

Definition 3.7 *La division de a par b peut se noter a/b ou*

$$\frac{a}{b}.$$

Il s'agit alors de la fraction de a sur b, a est alors le numérateur et b le dénominateur.

La propriété suivante est **la seule** qui permette de simplifier une fraction.

Proposition 3.8 *Pour tous nombres $a,\ b$ et c, on a*

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

On pourra utiliser la décomposition en nombres premiers pour simplifier une fraction. Par exemple,

$$\frac{15}{70} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{14}.$$

Definition 3.9 *Une fraction que l'on ne peut pas simplifier est nommée irréductible.*

Pour faciliter le calcul mental, il sera indispensable de simplifier les fractions à chaque étape de calcul, c'est à dire, ne travailler qu'avec des fractions irréductibles.
Attention : on ne peut pas simplifier une fraction de sommes :

$$\frac{2+7}{2+3} \neq \frac{7}{3}.$$

3.3 La somme

Pour calculer une somme de fractions, il vous faut les mettre au même dénominateur. En effet, si votre ami Évariste veut $2/3$ de tarte et votre ami Valère $2/5$, il vous est difficile de savoir si une tarte suffit. Vous allez donc compter en 15ièmes.

La méthode la plus simpliste, mais peu efficace, est d'utiliser comme dénominateur commun le produit des deux dénominateurs, lié a l'utilisation de la Proposition 3.8.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{10}{150} + \frac{15}{150} = \frac{25}{150}.$$

Ce qui donne après simplification 1/6. Les calculs peuvent s'avérer très pénibles. La méthode plus fine consiste à utiliser comme dénominateur commun le PPCM des deux dénominateurs, dans notre exemple 30. Ainsi,

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{2}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{30}.$$

Bien plus agréable à simplifier...

3.4 Le produit

Le produit de deux fractions s'effectue termes à termes tant au dénominateur qu'au numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} &= \frac{3 \times 2}{5 \times 7} \qquad (3.1) \\ &= \frac{6}{35}. \end{aligned}$$

Lors de l'étape (3.1), on n'oubliera pas d'utiliser la Proposition 3.8 pour simplifier si besoin.

3.5 La division

Diviser une fraction par une autre revient à multiplier la première par l'inverse de la seconde :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} &= \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} \\ &= 2 \times \frac{5}{3} \qquad (3.2) \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Notons qu'il est indispensable à la ligne (3.2) de simplifier grâce à la Proposition 3.8.

3.6 Le signe

Lorsqu'on considère la fraction $-2/3$, il est à noter qu'on considère l'expression

$$(-1) \times \frac{2}{3}.$$

Notons que

$$-1 = \frac{1}{-1}.$$

Ce signe $-$ peut alors voyager pour nous arranger :

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{-2}{-3}.$$

4 Équation du premier degré

4.1 Définition

Une équation est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre (souvent x), appelée inconnue de l'équation.

Une solution de cette équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie. Résoudre une équation, c'est en trouver toutes les solutions.

4.2 Résolution

Pour résoudre une équation, on a besoin de la transformer, tout en s'assurant que la nouvelle équation obtenue après transformation possède exactement les mêmes solutions que l'équation initiale. Pour ce faire, nous avons deux règles à notre disposition données par la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Pour résoudre une équation, on pourra utiliser les règles suivantes.*

- *Une égalité reste vraie si on ajoute ou soustrait une même quantité aux deux membres :*

$$x + 3 = 5 \iff x + 3 - 3 = 5 - 3,$$

  soit $x = 2$ *et l'équation est résolue.*

- *Une égalité reste vraie si on multiplie ou divise par une même quantité aux deux membres :*

$$3x = 5 \iff (3x)/3 = 5/3,$$

  soit $x = 5/3$ *et l'équation est résolue.*

- *de manière générale, une égalité reste vraie si on applique un unique procédé aux deux membres, dans leur globalité.*

5 Équation du second degré

5.1 Définition

Une équation du second de degré est une égalité qui fait intervenir une inconnue x ainsi que son carré x^2. La résoudre revient à chercher toutes le valeurs qui vérifient l'équation. Il peut y en avoir une, deux ou aucune.

5.2 Résolution

Une équation du second degré peut toujours s'écrire sous la forme

$$ax^2 + b + c = 0,$$

où a, b et c sont des nombres réels. On va résoudre en deux temps.

(i) Calcul du déterminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

(ii) Le nombre de solutions dépend de la valeur du discriminant Δ :

- si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle.
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

5.3 Note

La racine carrée d'un nombre a est le nombre noté $\sqrt{a}$ dont le carré vaut a. Par exemple, 2 est la racine carrée de 4, et donc $\sqrt{4} = 2$. On observera que

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad \text{et} \qquad \sqrt{a^2} = a.$$

6 Inéquation du premier degré

6.1 Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre (souvent x), appelée inconnue de l'inéquation.

Une solution de cette inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie. Résoudre une inéquation, c'est en trouver toutes les solutions.

6.2 Résolution

Pour résoudre une inéquation, on a besoin de la transformer, tout en s'assurant que la nouvelle inéquation obtenue après transformation possède exactement les mêmes solutions que l'inéquation initiale. Pour ce faire, nous avons trois règles à notre disposition regroupées dans la proposition suivante.

Proposition 6.1 *On pourra utiliser les règles suivantes pour résoudre une inéquation.*

- *On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres de l'inéquation.*

  Par exemple, en ajoutant 5 aux deux membres :

$$x - 5 \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - 5 + 5 \geq 2 + 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 7.$$

- *On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant (ou divisant) les deux membres de l'inéquation par un même nombre strictement positif.*

  Par exemple, en multipliant par $1/2$ les deux membres :

$$2x \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 1.$$

- *On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant (ou divisant) les deux membres de l'inéquation par un même nombre strictement négatif,* **à condition de changer le sens de l'inégalité.**

  Par exemple, en multipliant par $-1/2$ les deux membres :

$$-2x \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} \times (-2x) \leq -\frac{1}{2} \times 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -1.$$

7 Équation–produit

Definition 7.1 *Toute équation du type $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques de x, est appelée équation–produit.*

Nous rencontrerons plus particulièrement des équations–produits de la forme :

$$(ax + b)(cx + d) = 0.$$

Proposition 7.2 *Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul. Le cas particulier de l'équation-produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à*

$$ax + b = 0 \qquad \text{ou} \qquad cx + d = 0.$$

7.1 Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation–produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0.$$

(i) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation–produit :

$$\begin{aligned} (3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) &= 0, \\ (3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] &= 0, \\ (3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) &= 0, \\ (3x + 1)(-9x - 6) &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Par la proposition 7.2, on en déduit que

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 0, \\ 3x &= -1, \\ x &= -\frac{1}{3}; \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} -9x - 6 &= 0, \\ -9x &= 6, \\ x &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(iii) Les solutions sont donc $-1/3$ et $-2/3$.

8 Équation–quotient

Definition 8.1 *Toute équation du type $P(x)/Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques de x (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée équation–quotient.*

Proposition 8.2 *Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation–quotient $P(x)/Q(x) = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.*

Par exemple, l'équation

$$\frac{x+2}{x+3} = 0$$

a pour solution $x = -2$.

8.1 Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation–quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}.$$

(i) L'équation n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

(ii) On ramène un membre à zéro,

$$1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0.$$

(iii) On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation–quotient :

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)} &= 0, \\ \frac{(x-3)(2-x) - (x+3)(2-x) - 2(x-3)}{(x-3)(2-x)} &= 0. \end{aligned}$$

(iv) On développe et on réduit le numérateur

$$\frac{2x - x^2 - 6 + 3x - 2x + x^2 - 6 + 3x - 2x + 6}{(x-3)(2-x)} = 0,$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0.$$

(v) On utilise la proposition 8.2 pour conclure :

$$4x - 6 = 0 \qquad \text{et} \qquad x \neq 2,\ x \neq 3.$$

D'où $x = 3/2$.

9 Signe d'une expression

9.0.1 Signe d'une différence

Il s'agit bien de la détermination du signe d'une différence qui peut poser question. En effet, le signe d'une somme est immédiat :

(i) la somme de deux nombres positifs, tel $3 + 5$, est positive,

(ii) la somme de deux termes négatif est négative, comme $-5 - 3$.

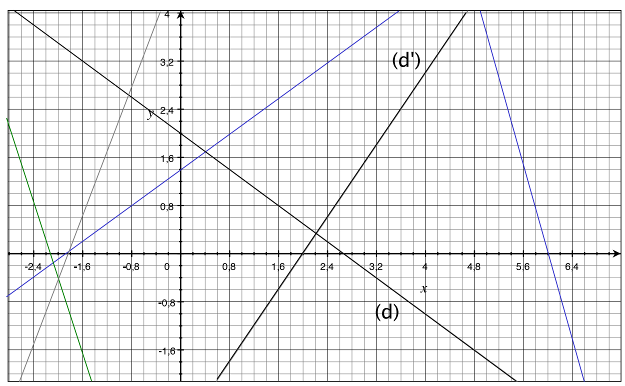
Proposition 9.1 *La quantité $(a - b)$, avec a et b deux nombres, a le signe suivant*

$a < b$	$a > b$
$-$	$+$

Dans notre exemple, on voit immédiatement que, pour $x = 3$, la quantité $2x - 1$ est positive (en vertue du tableau précédant), tout comme $2x + 1$ au vu des remarques précédantes. En pratique, on aura à étudier le signe d'une expression affine. On utilisera les résultats de la partie suivante.

9.1 Fonctions affines

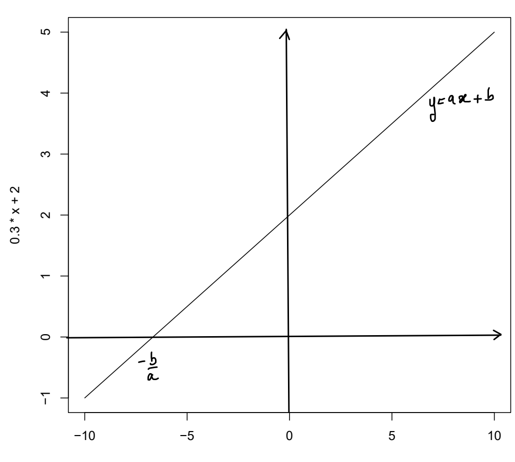
On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel. Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Sa représentation graphique est une droite.



Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses. Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} ax + b &= 0, \\ ax &= -b, \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

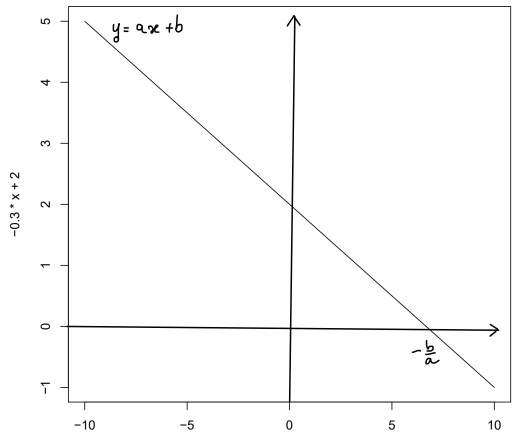
- Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.



On obtient le tableau de signes suivant pour $ax + b$:

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.



On obtient le tableau de signes suivant pour $ax + b$:

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

- Exemple :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$2x + 6$		$-$	0	$+$	

9.1.1 Signe d'un produit

Étudions maintenant le signe d'un produit.

Proposition 9.2 *La quantité $a \times b$, avec a et b deux nombres, a le signe suivant*

$a \ddots b$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$

.

On en déduira donc que, pour $x = 3$, la quantité $(2x - 1)(2x + 1)$ est positive.

9.1.2 Signe d'un carré

Proposition 9.3 *Un carré est toujours positif ou nul.*

Quelque soit la valeur de x, la quantité $(3x - 5)^2$ est positive.

9.1.3 Signe d'un quotient

La règle est similaire à celle d'un produit.

Proposition 9.4 *La quantité a/b, avec a et b deux nombres, a le signe suivant*

$a \cdot\cdot b$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$

.

9.2 Démarche

On utilisera toujours la même démarche pour connaître le signe d'une expression :

(i) repérer les carrés (ou les puissances paires),

(ii) étudier le signe de chaque somme,

(iii) utiliser les règles de signe de produit et quotient pour deux termes, puis pour ces deux termes et un troisième, et ainsi de suite.

9.3 Trinôme du second degré

Proposition 9.5 *Soit le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels. Le trinôme est du signe de a sauf entre les racines.*

Par conséquent, si le trinôme ne possède pas de racines ou n'a qu'une racine double, il sera du signe de a sur $\mathbb{R}$.

9.4 Résolution d'inéquations

9.4.1 Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$(3 - 6x)(x + 2) > 0.$$

(i) On remarque que ce problème revient à étudier le signe du produit $(3 - 6x)(x + 2)$.

(ii) Le signe de $(3 - 6x)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x + 2$. On résume dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.

x	$-\infty$		-2		$1/2$		$+\infty$
$3 - 6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3 - 6x)(x + 2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(iii) On en déduit que $(3 - 6x)(x + 2)$ est positif pour $x \in] - 2; 1/2[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $] - 2; 1/2[$.

9.4.2 Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0.$$

(i) L'équation n'est pas définie pour $3x - 2 = 0$, soit $x = 2/3$. Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

(ii) On remarque que ce problème revient à étudier le signe du quotient $(2 - 6x)/(3x - 2)$.

(iii) Le signe de $(2 - 6x)/(3x - 2)$ dépend du signe des expressions $(2 - 6x)$ et $(3x - 2)$. On résume dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$		$1/3$		$2/3$		$+\infty$
$2-6x$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2-6x)/(x+2)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = 2/3$.

(iv) On en déduit que $(2 - 6x)/(3x - 2)$ est négatif ou nul pour $x \in]-\infty; 1/3] \cup]2/3; +\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty; 1/3] \cup]2/3; +\infty[$.

Part II

Fonctions

10 Définition

On note Pr le prix de x articles. La négociation amène à la grille suivante :

x	Pr
1	2
2	4
3	6
4	8
10	18
50	90
100	150

Puisque le prix Pr dépend de x, on notera $Pr(x)$ le prix de x articles. Ainsi

$$Pr(1) = 2, \qquad Pr(2) = 4, \qquad Pr(50) = 90, \qquad \cdots$$

On dit alors que $Pr(x)$ est une fonction de x. Plus précisément, une fonction est un procédé qui, à une quantité x, associe une grandeur $f(x)$.

11 Représentations d'une fonction

11.1 Tableau de valeurs

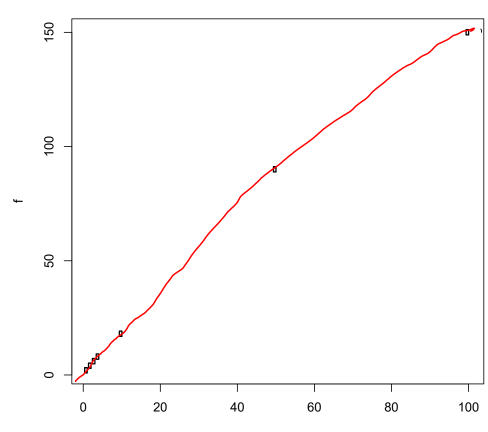
Le tableau précédent, donnant les valeurs de $f(x)$ pour un certain nombre de valeurs de valeurs de x s'appelle le tableau de valeurs. On a l'habitude de le représenter horizontalement.

x	1	2	3	4	10	50	100
$f(x)$	2	4	6	8	18	90	150

11.2 Représentation graphique

Le graphique associant les valeurs de x en abscisse et $f(x)$ en ordonnée, c'est-à-dire repérant les points $(x, f(x))$ est nommé graphe de f. Il donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction.

Note : On tracera toujours les courbes à la main, sans règle.



11.3 Forme algébrique

Bien souvent, une formule peut permettre de calculer $f(x)$ pour chaque valeur de x. Il s'agit de la formule algébrique de la fonction f. Dans notre exemple, on pourrait prendre quelque

$$f(x) = 2 \times x - 0.03 \times x^2 + 0.00075 \times x^3 - 0.000005 \times x^4.$$

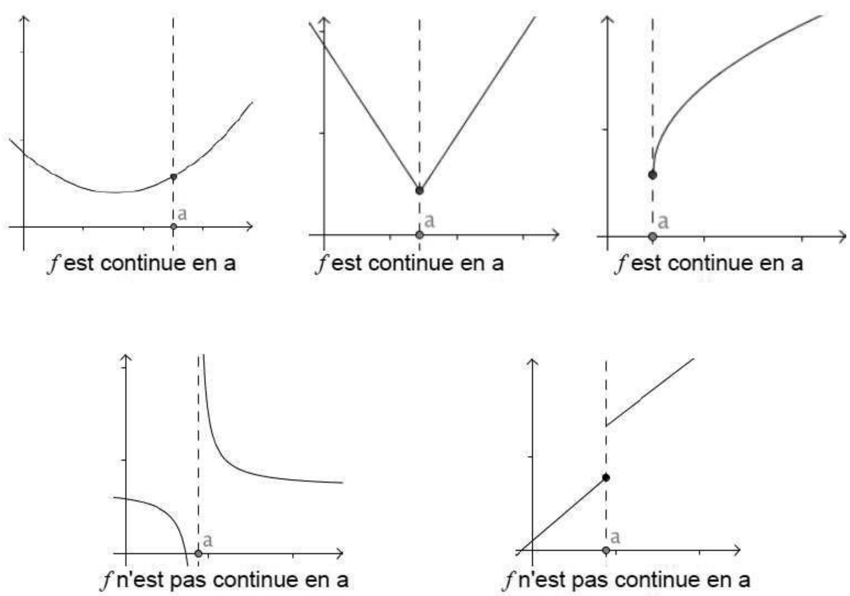
11.4 Domaine de définition

Il peut arriver qu'une fonction ne puisse donner de valeur pour un x particulier. C'est le cas de la fonction $f(x) = 1/x$, on ne peut calculer $f(0)$ puisqu'il est impossible de diviser par 0. On interdira alors cette valeur et on retirera les valeurs interdites pour former l'intervalle de définition :

$$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

11.4.1 Continuité

Proposition 11.1 *La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.*



12 Résolution de l'équation $f(x) = k$

12.1 Résolution algébrique

Lorsqu'on a la forme explicite de la fonction f il est souvent possible de déterminer de manière exacte les solutions de l'équation $f(x) = k$. On résoudra en pratique l'équation équivalente

$$f(x) - k = 0.$$

Les méthodes vues précédemment s'appliquent alors directement (équations–produit, équation–quotient, trinôme du second degré, équation avec logarithme ou exponentielle).

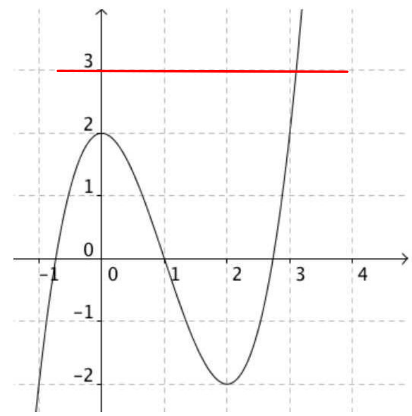
12.2 Résolution approchée

12.2.1 Graphiquement

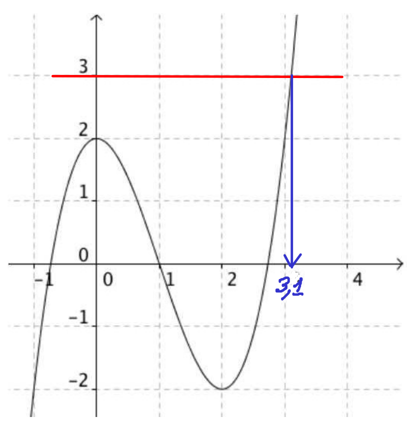
Cela revient à chercher sur le graphe de la fonction les **antécédants** de k par f. On va, par exemple, résoudre l'équation

$$f(x) = 3.$$

On se placera donc au niveau $y = 3$,



et on ira chercher le x qui amène la courbe de la fonction à toucher ce niveau, c'est-à-dire, tel que $f(x) = 3$:

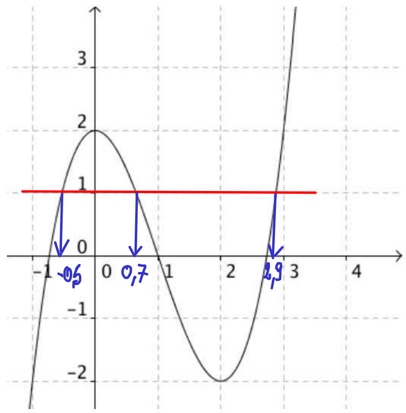


On retiendra que

$$f(x) = 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 3,1.$$

De manière équivalente, on dit que 3,1 est l'antécédent de 3 par f.

Il est à noter que l'équation $f(x) = 1$ admettra trois solutions :



qui sont, approximativement, $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0,7$ et $x_3 = 2,9$. Une équation $f(x) = k$ peut donc avoir une, plusieurs, ou aucune solution.

12.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit k un nombre réel et f une fonction, on souhaite dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = k$.

Theorem 12.1 Théorème des valeurs intermédiaires *On considère la fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$ telle que*

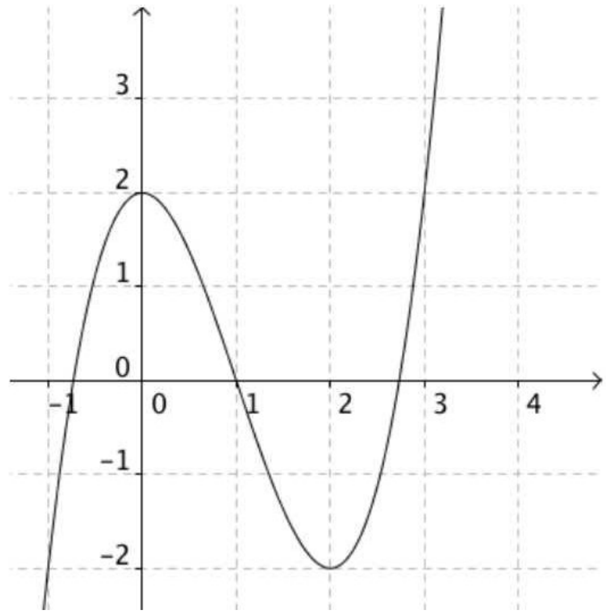
- *f est continue,*
- *f est strictement monotone,*
- *le réel k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Il existe alors un unique réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Lorsqu'une fonction change de monotonie, on pourra appliquer le théorème sur chaque ensemble d'une partition de l'ensemble définition.

12.2.3 Application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. On souhaite étudier les solutions de l'équation $f(x) = 0$ (les zéros de la fonction). Donnons d'abord les variations de f.



On a le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
sol.		1!		1!		1!	

le signe “1!” dans la dernière ligne signifiant “une unique”. Par le théorème 12.1 on a donc déduit qu’il existe exactement trois zéros de f.

12.2.4 À la calculatrice

On propose de déterminer au centième la valeur du réel c entre 2 et $+\infty$ tel que $f(c) = 0$ grâce à la calculatrice. On effectue des balayages successifs en augmentant la précision.

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18

c est compris entre 2 et 3,

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

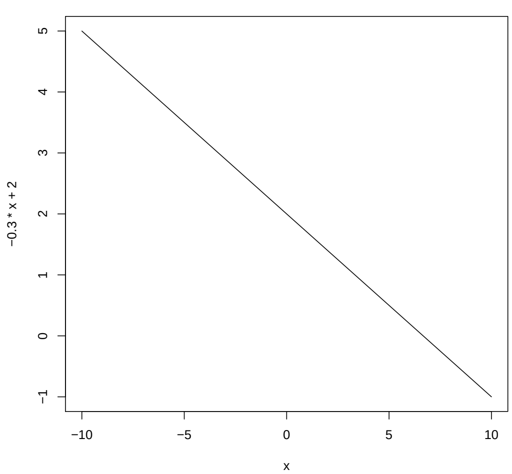
c est compris entre $2,7$ et 2.8,

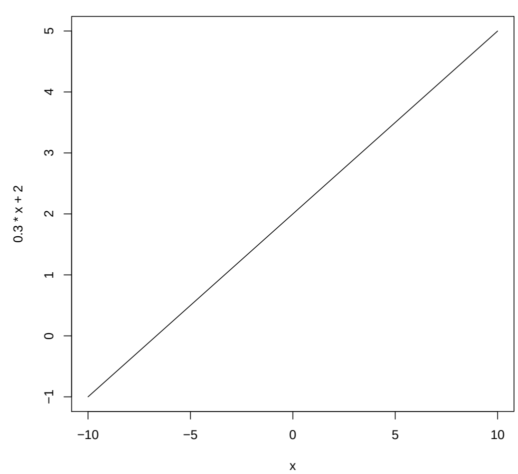
X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.048
2.75	.109

c est compris entre $2,73$ et $2,74$.

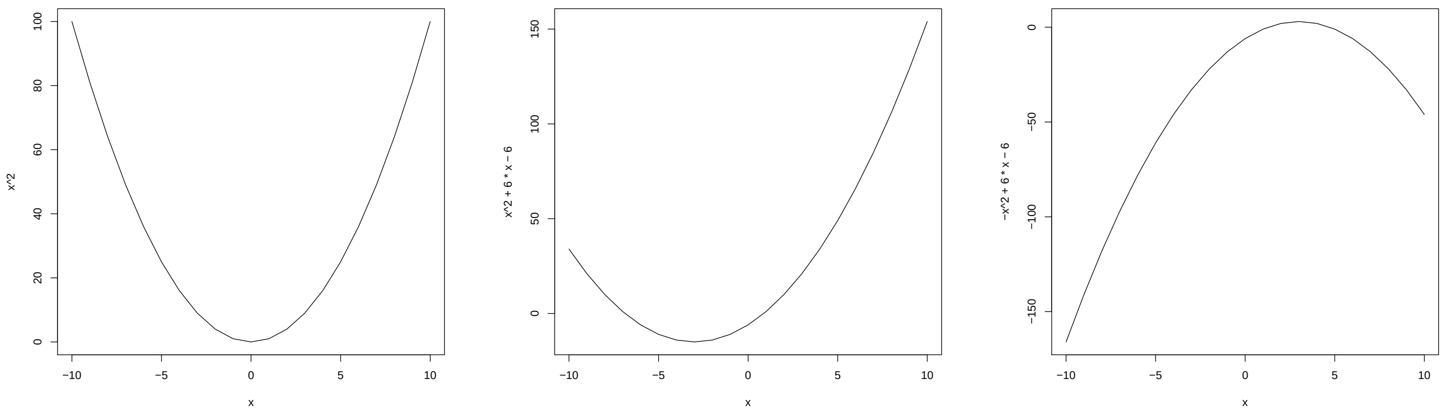
13 Fonctions de référence

13.1 Fonctions affines : fonctions $f(x) = -0.3x + 2$ et $f(x) = 0.3x + 2$

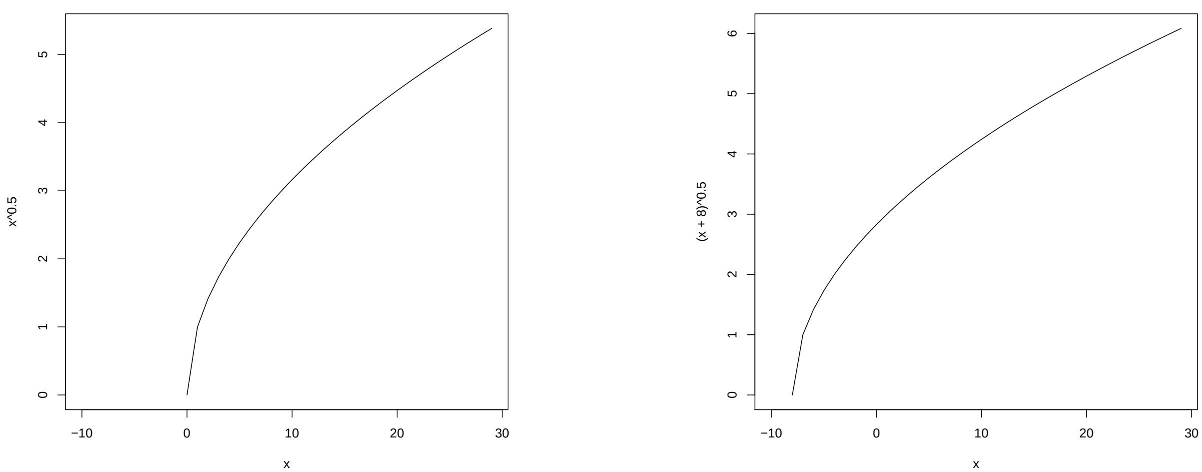




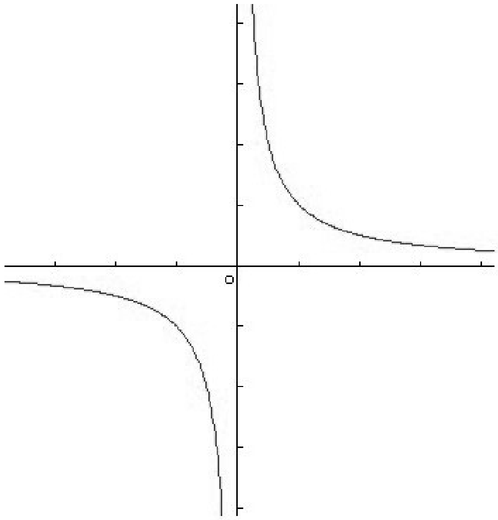
13.2 Paraboles : fonctions $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 6x - 6$ et $f(x) = -x^2 + 6x - 6$

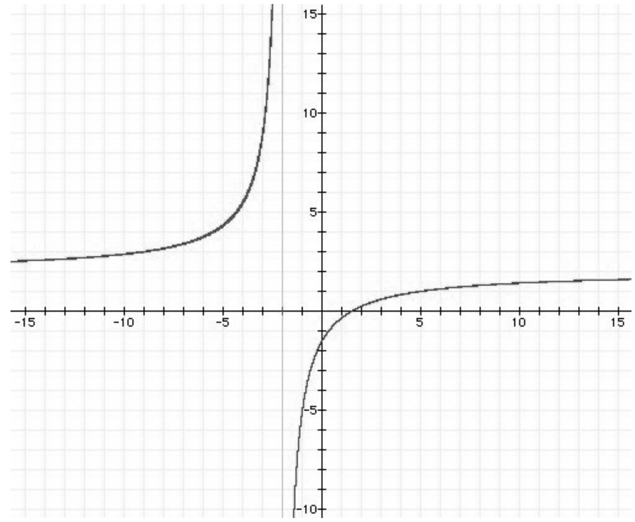


13.3 Racine carrée : fonctions $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ et $f(x) = \sqrt{x+8} = (x+8)^{1/2}$



13.4 Hyperboles : fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \frac{2}{x+2}$





14 Rappel sur les puissances

14.1 Comprendre la notation x^n

Soit x un nombre différent de 0, et n un entier positif ($n \geq 2$). On note x^n, et on prononce "x exposant n" ou "x puissance n", le produit de n facteurs tous égaux à x :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n facteurs}.$$

De plus, on a $x_1 = x$ et $x_0 = 1$.

Exemples :

- $7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7$
- $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5)$
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4}$
- $(-35)^1 = -35$
- $17^0 = 1$

Attention à l'importance des parenthèses !

- $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3$ alors que $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
- $\dfrac{2^2}{7} = \dfrac{2 \times 2}{7}$ alors que $\left(\dfrac{2}{7}\right)^2 = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{2}{7}$

14.2 Comprendre la notation x^{-n}

Soit x un nombre différent de 0, et n un entier positif ($n \geq 1$). On note x^{-n}, l'inverse de x^n :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n facteurs}}.$$

14.3 Formules de calcul sur les puissances

Soient n et p des nombres réels, on a

$$x^n \times x^p = x^{n+p}; \qquad \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}; \qquad (x^n)^p = x^{np}; \qquad (x \times y)^n = x^n \times y^n.$$

Démontrer ces formules est un exercice intéressant.

14.4 la racine carrée

On rappelle que la racine carrée $\sqrt{a}$ d'un nombre a est le nombre dont le carré vaut a. Par exemple, 2 est la racine carrée de 4, et donc $\sqrt{4} = 2$. On rappelle que

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad \text{et} \qquad \sqrt{a^2} = a.$$

D'après la formule $(x^n)^p = x^{np}$, il devient cohérent d'écrire $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. En effet :

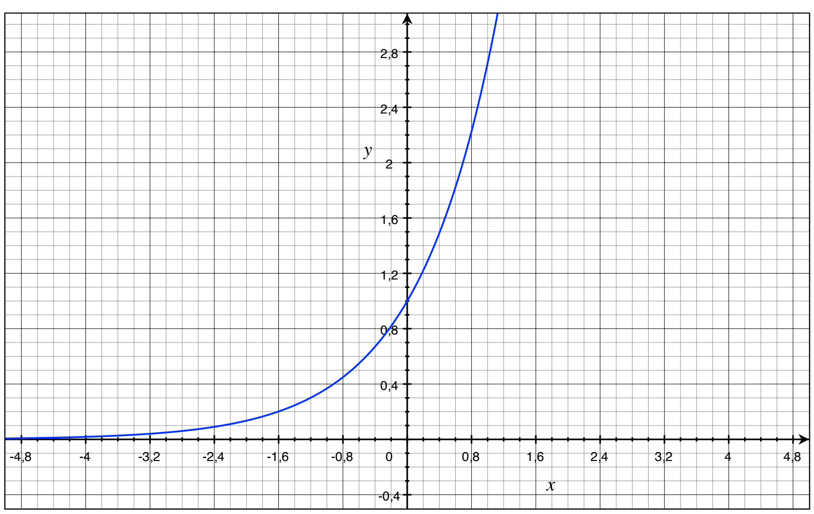
$$a = (\sqrt{a})^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\times 2} = a^1 = a.$$

15 Les fonctions exponentielle et logarithme

15.1 La fonction exponentielle

La fonction **exponentielle**, notée $\exp(x)$ ou e^x est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe la puissance x du nombre e avec

$$\exp(1) = e \simeq 2.71828...$$



La courbe représentative de la fonction exponentielle est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ et se situe au-dessus de l'axe des abscisses : L'exponentielle est toujours positive.

Propriétés : La fonction exponentielle vérifie les règles de calcul suivantes :

(i) $e^0 = 1$,

(ii) $e^x e^y = e^{x+y}$,

(iii) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$,

(iv) $(e^x)^y = e^{xy}$.

Ces règles de calculs sont les mêmes que celles régissant toutes les puissances !

15.2 La fonction logarithme népérien

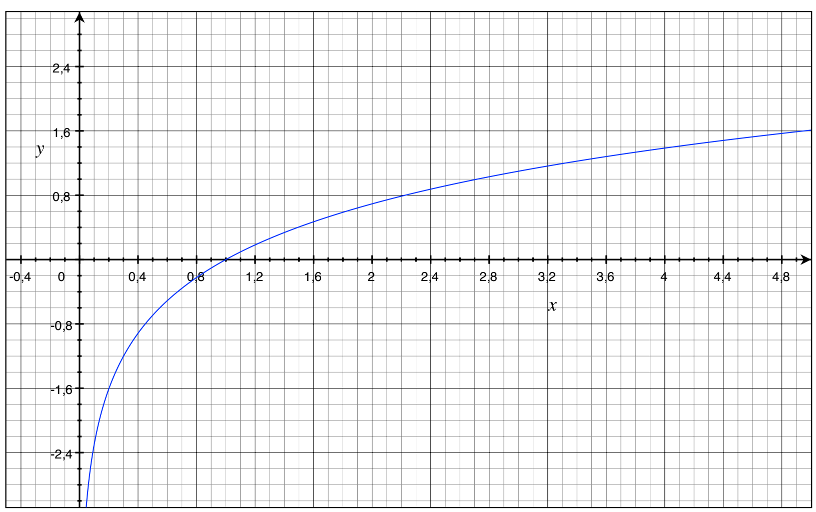
La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln(x)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\text{si } x = e^y \text{ alors } y = \ln(x).$$

Remarque :

(i) Cette définition entraîne que $\ln(e^x) = x$.

(ii) L'équation $e^x = y$ admet une unique solution pour tout $y > 0$, il s'agit de $x = \ln y$.



La courbe représentative de la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Propriétés : La fonction logarithme népérien vérifie les règles de calcul suivantes :

(i) $\ln(1) = 0$,

(ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

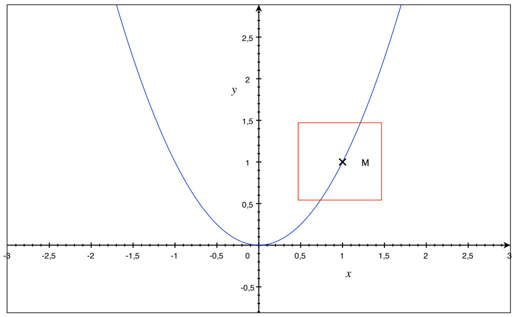
(iii) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,

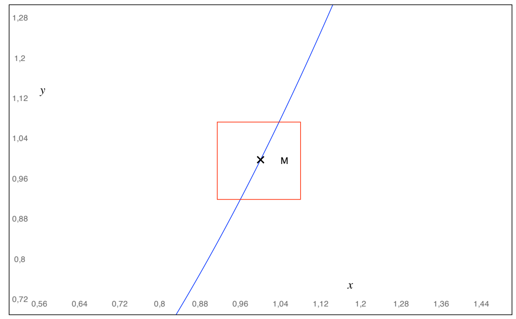
(iv) $\ln(x^y) = y\ln(x)$.

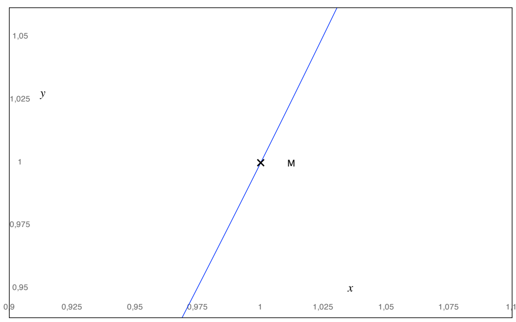
Ces règles de calculs sont symétriques à celles de l'exponentielle.

16 Dérivation

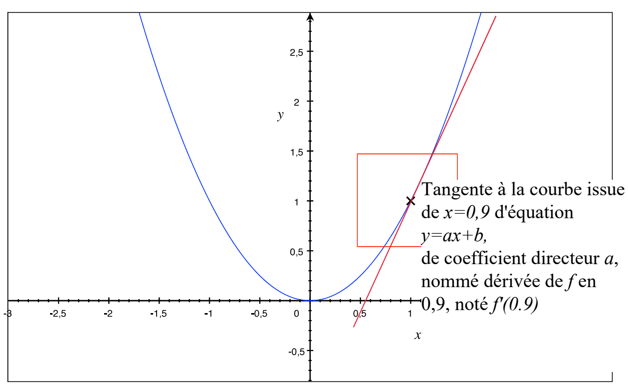
Lorsque l'on effectue des zooms successifs autour d'un point M de la représentation graphique d'une fonction f, voici ce que l'on obtient :







Plus on se "rapproche" du point M, plus la courbe représentative de la fonction f prend l'apparence d'une droite : cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f au point M**. Cette tangente peut être vue comme une droite qui vient toucher, frôler la courbe.



Definition 16.1 *Soit f une fonction définie sur un ensemble D et soit $a \in D$. Si la représentation graphique de f admet une tangente (non verticale) au point $M(a, f(a))$, alors le coefficient directeur de cette tangente est appelé **nombre dérivé** de la fonction f en a. Ce coefficient directeur sera noté $f'(a)$.*

Definition 16.2 *Lorsque l'on peut calculer le nombre dérivé d'une fonction f en tout nombre x d'un intervalle I, on dit que la fonction f est **dérivable** sur l'intervalle I, et la fonction qui associe à tout* *nombre x le nombre dérivé de la fonction f en x est appelée* ***fonction dérivée de*** *f, et sera notée $f' : x \mapsto f'(x)$.*

16.1 formules de dérivée

Les formules permettant de calculer les dérivées usuelles sont les suivantes :

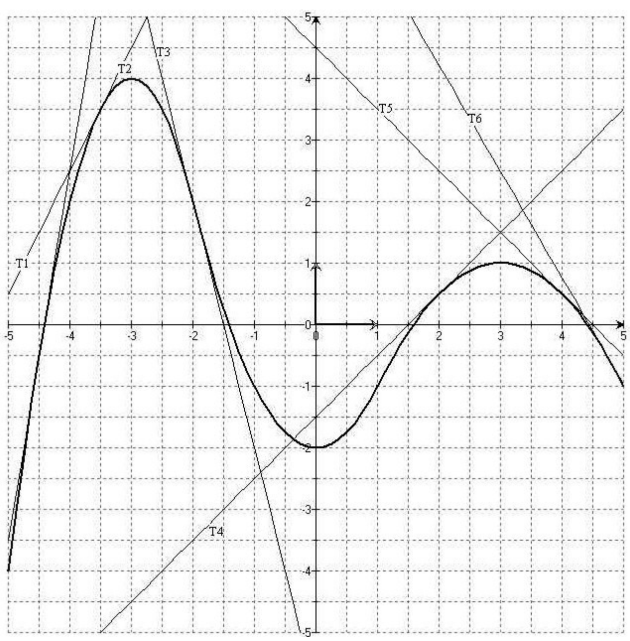
$f(x)$	$f'(x)$	Exemples	$f'(x)$
k	0	$k = -2, 12, ..., 25$	0
x	1	$3x$	3
x^2	$2x$		
e^x	e^x		
$ln(x)$	$1/x$		

Il est souvent possible de décomposer les fonctions plus complexes en addition, soustraction, produit ou quotient de fonctions simples que l'on sait dériver. Pour cela, nous avons besoin du résultat suivant :

$(u(x)+v(x))'$	$u'(x)+v'(x)$
$(k \times u(x))'$, k une constante	$k \times u'(x)$
$(u(x) \times v(x))'$	$u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$
$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'$, $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2}$
$(e^{u(x)})'$	$u' \times e^{u(x)}$
$(ln(u(x)))'$, $u > 0$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

16.2 Signe de la dérivée et variations de la fonction

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5; 5]$ ainsi que quelques-unes de ses tangentes :



On s'aperçoit que si le signe de la dérivée (coefficient directeur de la tangente) est positif, la tangente est croissante, et la fonction, proche, l'est aussi. C'est le cas pour T1, T2, T4. En revanche, si le signe de la dérivée est négatif, la tangente est décroissante, ainsi que la fonction qui lui ressemble localement, cas T3, T5, T6. On synthétise dans le théorème suivant.

Theorem 16.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable sur I, de dérivée f'. On a :*

- *f croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I,*
- *f décroissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I.*
- *f constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout x dans I.*

Ainsi, pour déterminer le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I, il suffit de connaître le signe de sa dérivée f' sur cet intervalle et on renvoie aux révisions sur les tableaux de signe. On donnera les conséquences suivantes.

Corollary 16.4 *La fonction f dérivable de dérivée f' admet un minimum local ou un maximum local si f' s'annule et change de signe.*

Part III

Proportions–Taux d'évolution–suites numériques

17 Proportion – pourcentage

17.1 Définitions

Une proportion quantifie la part d'une sous-population dans une population de référence.

Definition 17.1 *Soit E une population de référence d'effectif n_E. On s'intéresse à une sous-population A ($A \subset E$) de cette population E d'effectif n_A. La proportion de A dans E est donnée par*

$$p = \frac{n_A}{n_E}.$$

Une proportion est donc un nombre compris entre 0 et 1. Pour le calcul d'une proportion, l'identification de la population de référence est aussi importante que l'identification de la sous-population. On pourra donner cette proportion en pourcentage.

Definition 17.2 *Soit p une proportion. On peut définir cette proportion en ramenant l'effectif de la population de référence à 100 individus. Ainsi cette proportion sera*

$$\frac{100 \times p}{100}.$$

On écrira $t\%$ où $t = 100 \times p$.

17.2 Augmentation – réduction

On peut s'intéresser à l'évolution d'une quantité ou d'une population entre deux instants. On parlera d'augmentation ou de réduction.

Proposition 17.3 *Une augmentation de $t\%$ de la quantité y s'écrit*

$$y \times \left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

Une diminution de $t\%$ de la quantité y s'écrit

$$y \times \left(1 - \frac{t}{100}\right).$$

Il est à noter que puisque l'on peut changer l'ordre des facteurs dans un produit, on peut changer l'ordre des augmentations et des réductions d'une quantité. Par exemple, faire une réduction de 10% sur le prix HT y est équivalent à faire une réduction de 10% sur le prix TTC. En effet,

$$y\left(1 - \frac{10}{100}\right)\left(1 + \frac{20}{100}\right) = y\left(1 + \frac{20}{100}\right)\left(1 - \frac{10}{100}\right).$$

Nous attirons également l'attention sur le fait que faire une augmentation de 10% puis une diminution de 10% à un prix y, ne permet pas de retrouver le prix inital y :

$$y\left(1 + \frac{10}{100}\right)\left(1 - \frac{10}{100}\right) = y\left(1 - \left(\frac{10}{100}\right)^2\right) = y\left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

17.3 Évolution

Il est important de pouvoir apréhender les fluctuations temporelles d'une quantité et donc de pouvoir décrire une évolution. Deux types de problèmes peuvent se poser. Le premier consiste à décrire l'évolution d'un même produit au cours du temps. On pourra alors parler en terme de données brutes. Il peut également être intéressant de comparer l'évolution de deux produits différents. Pour comparer ces deux produits dont les standards ne sont pas les mêmes, on étudiera l'évolution en terme de proportion. On parlera de taux d'évolution. On considère les évolutions suivantes :

évolution	unités	expression	hausse	baisse
valeurs de départ et d'arrivée	unité des valeurs	y_1 et y_2	$y_1 = 120$ et $y_2 = 138$	$y_1 = 1000$ et $y_2 = 864$
variation absolue	unité des valeurs	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta y = 138 - 120 = 18$	$\Delta y = 864 - 1000 = -136$
coefficient multiplicateur	sans unité	$CM = \frac{y_2}{y_1}$	$CM = \frac{138}{120} = 1,15$	$CM = \frac{864}{1000} = 0,864$
variation relative	sans unité	$\frac{\Delta y}{y_1}$	$\frac{138-120}{120} = 0,15$	$\frac{864-1000}{1000} = -0,136$
taux dévolution	%	$t = \frac{\Delta y}{y_1} \times 100$	$\frac{138-120}{120} \times 100 = 15$	$\frac{864-1000}{1000} \times 100 = -13,6$
indice simple de y_2, base 100 en y_1	%	$I_2 = \frac{y_2}{y_1} \times 100$	$\frac{138}{120} \times 100 = 115$	$\frac{864}{1000} \times 100 = 86,4$

Note : Si la quantité étudiée est un pourcentage, la variation absolue s'exprime en **points de pourcentage**. En effet, si un homme politique passe de 40% à 20% d'opinion favorable sur une population de 1000 personnes, il a perdu 20 points de pourcentage. Dire qu'il a perdu 20% d'opinion favorable est un contre-sens : il part de 400 opinions favorables et passe à 200 opinions favorables, il perd donc 50% d'opinions favorables.

Proposition 17.4 *Le taux d'évolution décrit dans le tableau précédent renvoie à la même notion que dans la propriété 17.3.*

Proof. Soient y_1 la quantité initiale et y_2 la quantité finale. On a

$$\begin{aligned} & y_2 = y_1\left(1+\frac{t}{100}\right) \\ \iff\quad & y_2 = y_1 + \frac{y_1 \times t}{100} \\ \iff\quad & y_2 - y_1 = \frac{y_1 \times t}{100} \\ \iff\quad & \frac{y_2 - y_1}{y_1} \times 100 = t. \end{aligned}$$

17.4 Taux moyen

Supposons qu'une entreprise ait un chiffre d'affaire qui ait augmenté de 30% en cinq ans. Quel est le taux d'évolution moyen annuel du chiffre d'affaire de l'entreprise ?

Pour répondre à cette question, notons C le chiffre d'affaire, t le pourcentage moyen d'évolution du chiffre d'affaire et posons l'équation :

$$\begin{aligned} C\left(1+\frac{30}{100}\right) &= C\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right) \\ &= C\left(1+\frac{t}{100}\right)^5. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left(1+\frac{30}{100}\right) = \left(1+\frac{t}{100}\right)^5.$$

En utilisant la racine 5-ème, il vient que

$$1+\frac{t}{100} = \left(1+\frac{30}{100}\right)^{1/5}.$$

Tous calculs faits, on obtient un taux moyen de $5,39\%$.

18 Suites

18.1 Généralités

Definition 18.1 *Une suite numérique est un ensemble de nombre indexé par les entiers.*

On note en général une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut prendre pour exemple la suite des nombres impairs :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 5, \quad u_4 = 7 \quad \cdots$$

Une suite peut être définie explicitement (terme à terme) :

$$u_n = f(n),$$

avec f une fonction, ou par itération :

$$u_n = f(u_{n-1}),$$

avec son premier terme u_0.

On peut prendre par exemple la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Dans le premier cas, on définira $u_n = f(n)$, et donc

$$u_1 = 1^2 + 1 = 2, \quad u_2 = 2^2 + 1 = 5, \quad u_3 = 3^2 + 1 = 10, \quad \cdots$$

Dans le second cas, on définira la suite par itération $u_n = f(u_{n-1}) = (u_{n-1})^2 + 1$ et $u_0 = 1$:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1^2 + 1 = 2, \quad u_2 = 2^2 + 1 = 5, \quad u_3 = 5^2 + 1 = 26, \quad \cdots$$

Definition 18.2 *On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$. On dira que la suite est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$;*

En pratique, on comparera la quantité $u_{n+1} - u_n$ à 0, ou u_{n+1}/u_n à 1. On peut également utiliser la proposition suivante.

Proposition 18.3 *La suite définie explicitement par $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction, a les même propriétés que la fonctin f.*

Nous continuerons ce cours avec l'étude de deux suites usuelles : les suites arithmétiques et géométriques.

18.2 Suite arithmémtique

Definition 18.4 *Une suite arithmétiques est une suite dont l'écart absolue entre les termes successif est identique. On le nommera la raison, noté r.*

On peut immédiatement donner l'expression itérative d'une telle suite.

Proposition 18.5 *Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 s'écrit de manière itérative comme suit :*

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

La proposition suivante donne son expression explicite.

Proposition 18.6 *Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 s'écrit*

$$u_n = u_0 + nr.$$

De ces propositions, on déduit immédiatement qu'une suite arithmétique est croissante si $r > 0$ et décroissante si $r < 0$. Il est souvent nécessaire de sommer les premiers termes d'une suite arithmétique. On utilisera alors la formule suivante.

Proposition 18.7 *La somme des $k + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par*

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n = u_0 + \cdots + u_k = (k+1)\frac{u_0 + u_k}{2}.$$

18.3 Suite géométrique

Definition 18.8 *Une suite géométrique est une suite dont le coefficient multiplicateur entre les termes successifs est identique. On le nommera la raison, noté q.*

On peut immédiatement donner l'expression itérative d'une telle suite.

Proposition 18.9 *Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 s'écrit de manière itérative comme suit :*

$$u_{n+1} = u_n \times q.$$

La proposition suivante donne son expression explicite.

Proposition 18.10 *Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 s'écrit*

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

De ces propositions, on déduit immédiatement qu'une suite géométrique est croissante si :

- $u_0 > 0$ et $r > 1$,
- $u_0 < 0$ et $r < 1$;

elle est décroissante si :

- $u_0 < 0$ et $r > 1$,

- $u_0 > 0$ et $r < 1$.

Il est souvent nécessaire de sommer les premiers termes d'une suite géométrique. On utilisera alors la formule suivante.

Proposition 18.11 *La somme des $k+1$ premiers termes d'une suite géométrique est donnée par*

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n = u_0 + \cdots + u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$