

## CC1 Algèbre linéaire 2021

08/12/2021

Soit  $n$  un entier non-nul.  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . Muni des lois de compositions usuelles,  $\mathbb{R}_n[X]$  est un espace vectoriel. Une fonction réelle est paire si  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ .

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x, x + y)$ .

1. La fonction  $f$  est-elle linéaire?
2. Quel est le noyau  $\text{Ker}(f)$  de  $f$ ?
3. Quelle est l'image  $\text{Im}(f)$  de  $f$ ?

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(P) = P(0)$ .

1. La fonction  $f$  est-elle linéaire?
2. Quel est le noyau  $\text{Ker}(f)$  de  $f$ ?
3. Quelle est l'image  $\text{Im}(f)$  de  $f$ ?

### Exercice 3

Notons  $E$  l'ensemble des polynômes pairs de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel.
2. Donner une base de  $E$ .
3. Quelle est la dimension de  $E$ ?
4. La famille  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  est-elle une base de  $E$ ?