6 Suites fondamentales

Nous continuerons ce cours avec l'étude de trois suites usuelles : les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

6.1 Suite arithmémtique

Definition 6.1 *Une suite arithmétiques est une suite dont l'écart entre les termes successif est identique. On le nommera la raison, noté r.*

On peut immédiatement donner l'expression itérative d'une telle suite.

Proposition 6.2 *Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 s'écrit de manière itérative comme suit :*

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{r} u_2 \xrightarrow{r} u_3 \quad \ldots \quad u_n \xrightarrow{r} u_{n+1}$

u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}
u_0	u_0+r	u_1+r	u_2+r			u_n+r
		$(u_0+r)+r$	$(u_0+2r)r$			
u_0	u_0+r	u_0+2r	u_0+3r		$u_0+n\times r$	

Proposition 6.3 *Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 s'écrit*

$$u_n = u_0 + nr.$$

De ces propositions, on déduit immédiatement qu'une suite arithmétique est croissante si $r > 0$ et décroissante si $r < 0$. Il est souvent nécessaire de sommer les premiers termes d'une suite arithmétique. On utilisera alors la formule suivante.

<u>Preuve.</u>

$$u_{n+1} - u_n = \cancel{u_0} + (n+1)r - (\cancel{u_0} + nr)$$

$$= nr + r - nr = r.$$

$r > 0$

$u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} > u_n$

croissante

$r < 0$

$u_{n+1} < u_n$

décroissante

Proposition 6.4 *La somme des $k+1$ premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par*

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n = u_0 + \cdots + u_k = \underbrace{(k+1)}_{\text{nombre de termes}} \underbrace{\frac{u_0 + u_k}{2}}_{\text{moyenne du premier et du dernier terme.}}$$

Preuve : Somme des k premiers entiers :

$$2(1+2+\dots+k) = \begin{array}{r} 1 + 2 + \dots + k-1 + k \\ + \quad k + k-1 + \dots + 2 + 1 \\ \hline (k+1)+(k+1)+(\dots)+ k+1 + k+1 \end{array}$$

$$= k(k+1)$$

Donc $1+2+\dots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

$$\sum_{n=0}^{k} U_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_k$$

$$= U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + \dots + (U_0 + kr)$$

$$= (k+1)U_0 + (1+2+\dots+k)r$$

$$= \frac{(k+1)2U_0}{2} + \frac{k(k+1)}{2}r = (k+1)\left(\frac{2U_0 + kr}{2}\right)$$

$$= (k+1)\frac{U_0 + U_0 + kr}{2} = (k+1)\frac{U_0+U_k}{2}$$

6.2 Suite géométrique

Definition 6.5 *Une suite géométrique est une suite dont le coefficient multiplicateur entre les termes successifs est identique. On le nommera la raison, noté q.*

On peut immédiatement donner l'expression itérative d'une telle suite.

Proposition 6.6 *Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 s'écrit de manière itérative comme suit :*

$$u_{n+1} = u_n \times q.$$

	$\times q$	$\times q$			$\times q$
u_0	u_1	u_2	$\dots$	u_n	u_{n+1}
u_0	$u_0 \times q$	$u_1 \times q$			$u_n \times q$
u_0	$u_0 \times q$	$(u_0 \times q)\, q$			
		$u_0 \times q^2$		$u_0 \times q^n$	

Proposition 6.7 *Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 s'écrit*

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Proposition 6.8 *La somme des $k+1$ premiers termes d'une suite géométrique est donnée par*

nombre de termes

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n = u_0 + \cdots + u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Preuve.

On montre d'abord l'égalité P_n

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ par récurrence.}$$

Initialisation : P_1 est vraie : $\frac{q^2-1}{q-1} = \frac{(q+1)\cancel{(q-1)}}{\cancel{q-1}} = 1+q$

• Supposons que P_n est vraie pour un certain n

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- Montrons le au rang $n+1$.

$$1+q+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

D'où l'hérédité et

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1+q+\dots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On a $u_n = u_0 q^n$

$$\sum_{n=0}^{k} u_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^k$$

$$= u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^k\right)$$

$$= u_0 \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

6.3 Suite arithmético-géométrique

Definition 6.9 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Toute suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ est appelée* suite arithmético-géométrique.

Si $a = 1$ la suite est arithmétique. On exclut ce cas dans ce qui suit.

Une suite arithmético-géométrique non stationnaire est entièrement déterminée par ses trois premiers termes.

Proposition 6.10 *Si $a \neq 1$, le calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ se ramène à celui d'une suite géométrique.*

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$: $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique. $\alpha = ?$

On veut

$$v_{n+1} = q v_n$$

$$u_{n+1} - \alpha = q(u_n - \alpha)$$

$$a u_n + b - \alpha = q u_n - q\alpha$$

On pose $q = a$ $\Rightarrow$ $\cancel{a u_n} + b - \alpha = \cancel{a u_n} - a\alpha$

On a donc $q = a$ et $b - \alpha = -a\alpha$

$$\iff b = \alpha - a\alpha = (1-a)\alpha$$

$$\iff \alpha = \frac{b}{1-a}$$

$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = a u_n + b \end{cases}$ et $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ qui est géométrique de raison $q = a$

$$v_n = v_0 \, a^n$$

$$u_n - \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$$

... faisable.

Preuve.

Puisque $a \neq 1$, on peut poser $\alpha = \frac{b}{1-a}$. Alors α vérifie

$$a\alpha + b = \alpha.$$

Ainsi, la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_n - \alpha$$

vérifie

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = a(u_n - \alpha) = av_n.$$

Elle est donc géométrique de raison a. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 a^n, \text{ avec } v_0 = u_0 - \alpha = u_0 - \frac{b}{1-a}.$$

On en déduit le terme général de (u_n) en fonction de a et b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + \alpha = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

□

Exemple Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Il existe α réel que $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison q.

$$v_{n+1} = v_n q$$

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha)q$$

$$2u_n + 1 - \alpha = qu_n - \alpha q$$

$$q = 2.$$

$$\cancel{2u_n} + 1 - \alpha = \cancel{2u_n} - 2\alpha$$

$$\iff 1-\alpha = -2\alpha$$

$$\iff 1 = -\alpha \iff \alpha = -1.$$

On v_n est géométique de raison 2.

$$v_n = v_0 \times 2^n$$

$$u_n - \alpha = (u_0 - \alpha)\, 2^n$$

$$u_n + 1 = (u_0 + 1)\, 2^n \qquad u_0 = 3$$

$$u_n + 1 = 4 \times 2^n$$

$$u_n = 4 \times 2^n - 1 = 2^{n+2} - 1$$