

- Année 2021/22, L1 MIASHS
- Session rattrapage S1: Algèbre linéaire
- Enseignant responsable: Jacques Istas
- Durée: 2h
- Matériel autorisé: une feuille A4

SUJET

Exercice 1

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 12x - 4y = z\} \\E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - y^2 = 0\} \\E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y - z = 0\} \\E_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3z(2x^2 + 4y^2) = 0\}.\end{aligned}$$

Exercice 2

Vrai ou faux? Justifiez votre réponse!

1. L'ensemble $\{0\}$ est un espace vectoriel.
2. L'ensemble $\{-2, 0, 2\}$ est un espace vectoriel.
3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels (d'un même espace vectoriel plus grand) est un espace vectoriel.

4. La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel est un espace vectoriel.
5. La somme de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel est un espace vectoriel.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles. Les trois fonctions $x \rightarrow \sin x$, $x \rightarrow \sin(-2x)$, $x \rightarrow \sin(7x)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 4

Soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ une famille de réels deux à deux distincts. La famille de fonctions réelles ($x \rightarrow e^{-\beta_i x}$, $i = 1, 2, \dots, n$) est-elle libre?