

# 中学生数学学习效率成因研究

“数学教学效率论”江西子课题组

**摘要：**数学高才生和数学普通生在对数学学习的认识、动机、兴趣、态度与毅力等数学学习的非智力因素；学习的计划性、时间安排、方式与习惯，获取知识的途径等数学学习的外显行为；数学认知结构；数学学习的元认知水平等方面存在明显的差异。应将中学生数学学习效率主要归因为对数学与数学学习的认识与态度如何；数学学习的方法与习惯的优劣；数学认知结构是否良好；数学学习中的反思意识与调控能力的强弱等。

**关键词：**数学学习效率；高才生；普通生；成因

**中图分类号：**G420 **文献标识码：**A **文章编号：**1004-9894 (2005) 03-0053-04

## 1 导 言

### 1.1 研究的背景

近几十年来，我国数学基础教育取得的巨大成绩为世人所瞩目。可人们也看到：这些成绩的取得，广大数学教师和学生付出了怎样的努力和辛苦。提高数学教学效率，减轻学生学业负担，在我国基础教育中已刻不容缓。然而，近世以来以捷克教育家夸美纽斯为代表的国内外专家、学者已获取的提高教学效益的成果中，针对数学学科方面的研究还不多见。2004年3月，天津师范大学王光明教授申报的全国教育科学“十五”规划重点课题“数学教学效率论”获准立项。江西师大附中江西7个地市12所中学五十多位老师承担了子课题“数学高才生与数学普通生的学习效率比较研究”工作，5~6月用访谈、观察与记录的方式获取了中学数学高才生与普通生数学学习活动差异的许多第一手资料，并进行了初步的分析与研究。力图揭示中学生数学学习效率的成因，为全面提高教学质量，寻找新的教学途径。

### 1.2 研究的意义

根据总课题的整体目标和研究思路，从高才生与普通生数学学习的大量案例，提出中学生数学学习效率的成因，据之形成后一阶段提高中学生数学学习效率实验的变量，成为本子课题研究的基础性工作，也为总课题目标的达成起着奠基作用。

## 2 研究过程

### 2.1 样本的选取

根据2004年4月上旬在赣州召开的子课题开题暨第一次研讨会上与会代表一致认同的王光明教授对数学高才生与数学普通生的界定，“数学高才生是指那些数学学习兴趣浓厚、数学认知成绩好并维持在稳定状态，而且数学学习效率高（从过程看，能够向时间要数学学习效益；从结果看，能从数学认知成绩要数学教育效益）的学生。普通生是指那些数学学习兴趣与数学认知成绩一般，数学学习效率不高的学生”，利用子课题组提供的“中学生数学学习状况测试与调查问卷”和“中国测试网”的智商/IQ测试，各研究人员分别确定了高才生与普通生各1~2

名作为研究对象。

### 2.2 研究的方法与步骤

“五·一”长假后各研究人员利用“中学生数学学习时间记录表”“中学生数学学习效果记录表”“中学生数学学习行为观察记录表”“中学生数学学习状况访谈提纲”，采用观察、记录与访谈的方法，分别去获取高才生和普通生的数学学习情况资料。7月上、中旬，分别撰写出研究个案与案例，上交子课题组。兹就收集的资料作如下综合分析与研究。

## 3 数学高才生和数学普通生的数学学习状况比较

### 3.1 智商比较

上饶市二中研究对象智商测试结果如表1所示。

表1 上饶市二中研究对象智商测试结果

	高 才 生			普 通 生		
姓名	李先涛	孙 闪	龚丽瑶	刘 璐	徐 岚	李 力
IQ 水平	130 分	124 分	127 分	122 分	134 分	110 分

从各校提交的个案看，有43.3%的研究人员对研究对象进行了智商测试，结果与上饶市二中大体相同：高才生与普通生智商有差异，但差异不大。

### 3.2 数学学习非智力因素比较

(1) 对数学与数学学习的认识比较。

高才生与普通生都能认识到数学的工具性、实用性，数学学习的基础性与育智功能，而高才生却还对数学的科学与社会价值有更深刻的认识，对数学学习与培养理性思维的意义有更深层次的了解。

(2) 数学学习动机的比较。

高才生与普通生对数学与数学学习认识的层次性差别，导致他们数学学习动机的有所不同。各校提交的论文普遍反映“高才生学习数学的动机明确”，学习数学是“为了提高自己的综合素质”，而普通生学习数学的目的较为狭隘，一位普通生学习数学是“为了能走出小山村，为了能回报辛苦劳作的父母”代表了相当一部分普通生的心理。

(3) 数学学习兴趣的比较。

高才生与普通生的学习兴趣也存在着差异。“高才生对数学有浓厚的学习兴趣……平时能全身心地投入到数学学

收稿日期：2005-06-15

基金项目：全国教育科学“十五”规划重点课题——数学教学效率论（EHA030431）

作者简介：江西子课题组主要成员：舒昌勇、骆魁敏、朱涤非、徐小林、许敏、饶安民、龚浩生、万国荣、骆文娟、刘烈炎、林文绍、肖圣明、吴文皓、周建华。江西子课题负责人舒昌勇，本文执笔舒昌勇。

习中去,有时达到废寝忘食的地步”,“每当自己通过努力解决了一个问题的时候,就有一种成就感,自己也很喜欢去寻找这种感觉”。而“普通生对数学的学习兴趣一般”,“在学习数学的过程中获得乐趣的体验不够强烈,对数学学习存在焦虑感”。

#### (4) 数学学习态度与毅力的比较.

高才生因为“数学基础扎实”,“学习态度端正”,因而“有顽强的毅力,能经受住种种磨练”.相对来说,普通生“缺乏毅力,做事总是虎头蛇尾”,“一遇到困难和挫折就不能控制自己坚持学习”,“会有听天由命的思想”.遗憾的是,他们又往往“缺少来自家庭的鼓励和督促”。

### 3.3 数学学习外显行为比较

#### (1) 数学学习的计划性比较.

多数研究人员“在访谈中了解到,高才生学习有长期目标,短期计划,并能实施自我监控,不断调整方案,以达到最佳效果”,“对自己制订的计划的执行较为严格”.而普通生“基本上是被老师牵着鼻子走”,“很少给自己设定数学学习目标,经常是脚踩西瓜皮,滑到哪里算哪里”,“计划偶尔也有,但往往执行不了多久”。

#### (2) 数学学习时间的比较.

从多数个案反映的情况看,高才生与普通生“都用较多的时间来学习数学”,宜丰中学罗柳英老师却还发现他们在学习各环节的时间分配上有所不同.表 2 是高才生 L 和普通生 X 一天内数学学习时间分布情况.

表 2 数学学习时间分布(单位:分)

	课堂 40 分钟分布			课外时间分布			时间总数
	听老师讲解	自己思考	课堂练习	复习预习	布置作业	课外自我练习	
L	15~25	20~30	8~10	25~30	15~20	25~35	105~125
X	30~35	5~10	10~15	10~15	30~35	30~40	110~130

从表 2 中“可以看出……高才生 L 学习数学的时间是靠前的,即他学在老师(课堂教学)的前面.普通生 X 学习数学的时间是靠后的,即她跟在老师的后面学习”.高才生与普通生在学习时间分配上所表现出的主动学习与被动学习状态由此可见一斑.

#### (3) 数学学习方式的比较.

高才生“能先预习,再听老师讲课”,“听课能抓住重点”,“一般在课堂上就能消化所讲内容”,注重复习这一环节,“其学习方式一般采取听课→阅读课本与参考书→进行解题实践→进一步复习思考的四步曲”.普通生“只是偶尔预习”,因而常打无准备之仗,对“力难从心(的内容),最后只好随波逐流,任其自然了”,“复习时漫无目的,翻书到哪页就看那页”,“其学习方式一般采取听课→作业两步曲”。

#### (4) 数学学习习惯的比较.

高才生一般都“具有惜时守时、严谨认真、独立思考和勤奋自学的学习习惯”;上课时“在难听懂的地方常常发问”,“教师提出问题时,回答较为积极”,“每天都主动去做了不少课本外的练习”.普通生在课堂上“容易受外界干扰,(注意力)不

稳定”,“讨论时,也是人云亦云,没有养成独立思考的习惯”;“对课本外的作业做得较少”,“在数学学习上具有依赖心理”。

#### (5) 获取数学知识的途径比较.

“高才生获取知识途径多样化”,“能够通过广泛的课外阅读,扩大知识面”,“普通生获取知识的主要途径是来自老师课堂的讲解”.宜丰中学罗柳英老师提供的一个典型例子是“学完组合数性质后,虽然老师要求学生通过查找资料学习杨辉三角的知识,但 4 位普通生都未去完成,而 4 位高才生……有两个在学校图书馆借到有关书籍,有一个上网查了,有一个在老师处借到有关书目”。

### 3.4 数学学习认知结构比较

#### (1) 认知策略的比较.

##### ① 概念与定理的学习.

高才生与普通生在学习概念与定理时理解的深度与广度不同.江西师大附中在研究中发现,高才生在“两个正数的算术平均数与几何平均数”定理的学习中,除用作差法证明外,还能根据不等式两边的结构特征,将  $a$ 、 $b$  看作一个直角三角形的两直角边的长,从右边  $\sqrt{ab}$  联想到射影定理中直角三角形斜边上的高,从左边  $\frac{a+b}{2}$  联想到直角三角形斜边上的中线,由此很自然地产生了定理的几何证法.普通生虽能想到“作差”比较法,却不知对“差”如何变形.至于几何证法,根本无法利用新旧知识构思出来.

##### ② 概念与定理的记忆.

以下是乐平中学许敏老师与两位学生就指数函数  $y = a^x$  与幂函数  $y = x^a$  的一段对话.

师:你们是如何记忆  $y = a^x$ 、 $y = x^a$  的?

普通生:主要按课本上学习它们的先后顺序记忆,时间长了也总是弄混.

高才生:初中学过  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  等幂的表示形式,所以就想到形如  $y = a^x$  的函数为幂函数,那么另一个就是指数函数.

师:你们能否说出  $y = a^x$ 、 $y = x^a$  的性质?

普通生:这两个函数的性质是……(未能说出).

高才生在纸上分别画出了  $y = x^2$  和  $y = x^3$  的图像,依据  $y = x^2$  和  $y = x^3$  图像说出  $y = a^x$  的性质,而在说明  $y = x^a$  的性质时,则画的是  $y = 2^x$ 、 $y = 3^x$  的图像.

这说明高才生在记忆数学概念、公式与符号时,善于联系自己学过的知识,借助具体的经验背景,对抽象的数学符号赋予具体的含义;而普通生却缺乏这种意识,以至在他们的认知结构中许多知识是孤立地罗列着,记忆不清而弄混也就在所难免了.

##### ③ 对定理运用条件系统的关注.

江西师大附中在研究中还发现,高才生在学习“两个正数的算术平均数与几何平均数”定理时,特别关注定理运用的条件:“一正( $a > 0$ ,  $b > 0$ )、二定(积为定值或和为定值)、三相等( $a = b$ )”;同时还会想到利用二次函数也可求最值,并去比较这两种方法的本质区别,知道用二次函数求最值适

合于二次式. 普通生在利用均值不等式求最值时, 不能明确为什么要同时满足3个条件, 不会与二次函数求最值法产生联想, 更谈不上找出它们的区别与联系了.

## (2) 问题解决的比较.

### ① 对“审题”环节的认识.

“普通生认为‘审题’就是‘读题’, 读懂题意就行. 一般读一遍至两遍题目就进行解题……常有看错题或理解不到位而出错的现象. 高才生则不同, 他认为‘审题’是成功解题的关键, 不但要读懂题意, 还要认真寻找已知条件与未知条件之间的内在联系, 并在解题过程随时再读题……确定思路是否正确.”

### ② 解决问题时思维所臻于的境界

傅学顺先生曾借用东晋著名文学家陶渊明的《桃花源记》来比喻各类学生解题所能臻于的不同境界: “中等生(普通生)不仅会欣赏桃花林, 而且会下到桃花溪里打鱼, 但到了桃林尽处, 溪流源头, 便以为‘山穷水尽’了; 高才生不仅可以发现山洞, 而且凭‘仿佛若有光’, 就可以联想到山洞那头必有天地, 并且大胆采取行动.”<sup>[1]</sup>罗柳英老师提供的一个案例生动地说明了这种情况. 该案例给予充足时间, 让一名高才生L与一名普通生X对同一道题进行一题多解, 然后老师针对每个人的每种解法逐一与学生交流, 获取其思维的真实过程.

题目: 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 均为实常数), 若 $f(x_1)=f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$ , 求 $f(x_1+x_2)$ .

普通生X给出了3种解法. 方法一是仅把题目中的已知条件 $f(x_1)=f(x_2)$ 直接转译成 $ax_1^2+bx_1+c=ax_2^2+bx_2+c$ , 求出 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ 使问题得到解决, 此时其思维尚处于一种表层的自然状态. 方法二是从要求 $f(x_1+x_2)$ 出发, 则要求出 $x_1+x_2$ 的值, 再回过头来从已知 $f(x_1)=f(x_2)$ 去求出 $x_1+x_2$ , 使问题得到解决, 其思维已进入了由果索因的、有目标的思维状态, 但层次还不深. 方法三, X只是提出了一个猜想 $f(x_1+x_2)=f(0)=c$ , 虽未能证明, 但说明她的思维已进入了发散阶段. 如果说方法一、方法二是普通生X在“欣赏桃花林”, “下到桃花溪里打鱼”, 方法三则是她仅“到了桃林尽处, 溪流源头, 便以为‘山穷水尽’了”, 以至没有“发现山洞”而折回去了.

高才生L给出的5种解法, 显示出其思维层层深入的轨迹: 方法一(与X相同的直接法), L的思维处于表层. 方法二与方法三(特殊值法)由题设条件联想到二次函数与一元二次方程的关系而令 $f(x_1)=f(x_2)=0$ , 再由要求的 $x_1+x_2$ 联想到用韦达定理的两个内涵去解决问题, 显示出L的思维从一般转化为特殊, 通过联想臻于发散. 方法四与方法五是图像法, 通过数形结合, 把 $f(x_1)=f(x_2)$ 这一条件直观地反映在抛物线图形的上并予运用, 使问题得以解决. 难能可贵的是在运用方法四后思维进一步特殊化而产生的方法五: 0与 $x_1+x_2$ 恰好也关于 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称, 而 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$ 正好与对称轴一致, 这就使问题的解答变得更为简化. 如果说前3种方法L

是处于“欣赏桃花林”, “下到桃花溪里打鱼”的层次, 方法四与方法五L却是发现并进入了山洞, 并在探寻桃花源这片新天地了.

### ③ 解题时原有知识与经验的正迁移.

宜丰中学的个案讲到, 高才生在解一道各项是分子均为1的分数的杨辉三角题时, 能把归纳数列通项公式时分别观察数列各项符号、分子、分母, 然后综合起来的方法迁移到本题中来运用, 把分母分离出来写成杨辉三角的形式, 再每行分别提取一个公因数使之还原成标准的杨辉三角, 使问题得以解决.

### ④ 解一题得一题抑或是解一题得一串.

南昌十五中一位高才生在证明了不等式 $\log_2^3 > \log_3^4$ 后, 又顺利的证明了 $\log_2^5 > \log_5^6$ , 进而又提出由上二式归纳出来的更一般的形式 $\log_n^{n+1} > \log_{n+1}^{n+2}$ 应该成立的问题, 并努力去寻求其证明的方法. 这就表明高才生不像普通生那样满足于解一题得一题, 而是追求解一题得一串. 他们会自觉地拓展思维的触角, 让它向所有可能的方向伸展, 最大限度地使解过的每一道题都构成与之相连的一个网络.

## 3.5 数学学习元认知比较

### (1) 对自己学习状况的认识.

高才生对自己的数学学习状况一般都能有清醒的估计, 知道自己的长处和优势, 也知道自己的不足与存在的问题. 而普通生多数只觉得自己“目前的学习状况并不乐观”, “在平时的学习过程中感到较为吃力”, 当你要他谈具体一些时, 往往又觉得无从谈起.

### (2) 对自己学习过程的反思与调控.

① 高才生会“在一阶段学习后总结反思学习的知识, 与自己原有的知识结构进行整合, 形成新的知识体系”; 而普通生“对于所学的知识不会比较, 不善于整理归纳, 知识松散零乱”, 致使在运用时提取不便而学习效果不佳.

② 高才生“重视解题的思维方向”, 不会拿到题目就匆忙上路, “思维受阻时, 能及时调整自己的解题策略”, “回过头去分析题意, 或者换个角度寻求解题思路”; 而普通生解题时, 稍有眉目, 就盲目挺进, “导致在问题陷入僵局时, 不能自拔”, 无端花费不该花的时间, 导致解题效率的低下.

③ “在解题之后, 高才生常常会作些反思, 如有无更好的方法? 这个解法的关键是什么?” “对待老师批改的作业或试卷一般都会去查找错因, 加以订正”, “专门建立一本‘错题集’, 把错题抄下认真分析并注明失误原因”; 而普通生“做完之后也只是检查解题过程和结果是否正确”, “对待自己错误的解题不会去看具体的原因, 更很少有一个错误记录”.

## 4 数学高才生和普通生的数学学习效率成因分析

### 4.1 智商的影响

高才生与普通生智商有差异, 但差异不大, 这与心理学随机人群的智商呈正态分布的结论是相吻合的. 心理学的研究还告诉我们, 智商所归属的思维品质与元认知分别是思维整体结构功能的外在与内在组织形式, 大量的研究表明, 后者与

前者存在一种因果关系,这就意味着学生的元认知水平的发展必将带来其智力与思维能力的提升.

#### 4.2 对数学与数学学习的认识与态度

资料反映,高才生普遍对数学与数学学习有一个较为科学、全面的认识,对数学有较浓厚的兴趣,这使他们对数学知识会产生一种渴求的心理,从而能自觉、主动地学习,碰到困难也能千方百计地克服,表现出顽强的学习毅力,以致能不断地取得良好的学习效益,而这又使他们对学习更充满信心,更努力地投入学习,所以对数学与数学学习的认识与态度也应该是导致学习效率高低的一个重要因素<sup>[2-3]</sup>.

#### 4.3 数学学习的方法与习惯

对高才生和普通生数学学习外显行为的分析我们发现,数学学习的方法与习惯也应是导致学习效率高低的一个重要原因.因为高才生普遍在学习的计划性、学习时间的安排、学习方式、学习习惯等方面都比普通生技高一筹<sup>[4-5]</sup>.各个学习阶段制订的计划常使他们的学习有条不紊,课堂学习、课下作业、考前复习妥善的时间安排让他们在有限的时间内获取学习效益的最大值,科学、合理的学习方式使他们一份耕耘就能有一份收获,良好的学习习惯让他们的知识仓库日趋丰盈.

#### 4.4 数学认知结构

在资料分析中我们看到,由于高才生记忆系统中贮存了大量的数学知识和解决数学问题的思路、方法与技巧,清楚地了解它们之间的联系,积累了比较丰富的解题经验,所以在平时的学习与各种形式的检测中,他们得心应手,娴熟老到,用很经济的时间就能圆满地完成学习任务;而普通生由于在这些方面的差异,在学习与考试中往往疲于应对,捉襟见肘,神龙顾首不顾尾,学习效益与高才生相去甚远.这种因数学认知结构的差异而导致的不同结果,让人认识到应把数学认知结构作为学习效率的一个归因.

#### 4.5 数学学习中的反思意识与调控能力

在对各校个案的研究中我们还发现,一些高才生对自己的数学学习能从整体上去把握,对自己的学习行为能进行监控并不断地调节,在解题过程中,始终盯着目标,不断调整自己的思维,经过一段时间的学习后,会自觉地去回顾、归纳与梳理所学过的内容<sup>[6-7]</sup>;每次作业与考试后,不像普通生那样只关注得分与每题结果,对做对的题会进一步去反思,做错的题会去查找错处与错因,有人还会做下记录.这些表征一个学生元认知水平的行为,高才生与普通生之间呈现出明显的差异,使我们认识到应把它作为学习效率的一个归因.

### [参 考 文 献]

- [1] 傅学顺. 中学高材生数学思维的基本特征[J]. 数学教育学报, 1992, 1 (1): 94.
- [2] 陈琼, 翁凯庆. 试论数学学习中的理解学习[J]. 数学教育学报, 2003, 12 (1): 17-19.
- [3] 苏玉国, 傅海伦. 影响高中学生数学学习情感的因素分析[J]. 数学教育学报, 2003, 12 (3): 64-66.
- [4] 王学沛, 李尚莹. 数学教育实践中实施素质教育的问题及其解决[J]. 数学教育学报, 2003, 12 (4): 59-62.
- [5] 于新华, 杨之. 数学理解的层次性及其教学意义[J]. 数学教育学报, 2005, 14 (2): 23.
- [6] 宁连华, 王作鹏, 李桂强. 数学探究学习过程的自我监控活动研究[J]. 数学教育学报, 2004, 13 (2): 37-38.
- [7] 周根龙. 试论数学教学反思[J]. 数学教育学报, 2003, 12 (1): 91.

### Study on Cause of Formation of Middle School Students' Mathematics Study Efficiency

Jiangxi Workshop of Mathematics Teaching Efficiency

**Abstract:** That was different between outstanding students and ordinary students in many aspects of mathematics study. The differences embodied many aspects including cognition, interest, attitude, perseverance, schedule of study, method, way of getting knowledge, cognition structure of mathematics and so on. Middle school students' mathematics study efficiency attributed mainly to understand and attitude of mathematics study, method and custom, good cognition structure of mathematics and so on.

**Key words:** mathematics study efficiency; outstanding students; ordinary students; cause of formation

[责任编辑: 周学智]