

# 中学生数学学科自我监控能力的发展

章建跃\* 林崇德

(北京师范大学)

**摘要** 发展数学学科自我监控能力是数学教学的核心问题。从总体上看,中学生数学学科自我监控能力随学生年龄的增长、数学知识的积累而不断发展,这种发展具有年龄阶段性特征,符合从他控到自控、从不自觉经自觉到自动化、迁移性逐渐提高、敏感性逐渐增强、从局部到整体等基本规律。当前中学生数学学科自我监控能力的发展落后于其他心理能力的发展,自我监控能力的培养是中学数学教学最大的薄弱环节。

**关键词** 中学生 数学学科 自我监控能力 发展

中学生数学学科自我监控能力,是指学生为了保证数学学习的高效和成功,在整个数学学习过程中将自己的数学活动做为意识对象,对其进行积极主动的计划、检验、调节和管理,以实现学习目标的能力。我们的一项验证性研究证明,中学生数学学科自我监控能力结构由计划、检验、调节、管理和评价等5个因素组成。数学学科自我监控能力的培养,实质是培养学生数学学习的自我意识,使他们形成自我评价数学学习的习惯和能力,掌握矫正和控制数学活动过程的技能,养成对数学思想方法的悟性,从而深刻领悟数学的真谛。这是提高数学学习效率、发展数学素养的根本途径。因此,发展数学学科自我监控能力是数学教学的核心问题。为此,必须首先认清其发展规律。

## 一 中学生数学学科自我监控能力发展的量变特征

我们以随机选取的587名中学生为被试,采用自编的《中学生数学学科自我监控能力问卷》和《中学生数学学习问卷》搜集数据,采用单因素方差分析(one-way analysis of variance)方法,考察中学生数学学科自我监控能力的发展情况。结果表明,在正常学校教育条件下,中学生数学学科自我监控能力的发展有其年龄阶段性,但发展速度比较平

缓,“检验”在整个中学阶段的发展没有显著性差异。中学生数学学科自我监控能力的发展落后于其他心理能力的发展。由此可以说,自我监控能力的培养是中学数学教学最大的薄弱环节。

学生在解题后的反思水平较差是数学学科自我监控能力发展水平低的集中表现。例如,学生对“如何总结解题关键?”的回答是:“先分析,再实践”;“思考问题要灵活,选好切入点是关键”;“应该抓关键”;“做题要有层次”;“找准条件间的关系”;“把握平衡原则”;“找突破口,思维有序”等。显然,这些回答与具体问题的关系比较松散,不能切中要害。相当数量的学生没有反思的习惯。多数学生在谈解题体会时只会说:“需要掌握更多的知识,灵活运用”;“应先对题目进行初步分析,不能盲目地去做”;“要善于发现解题的最关键步骤,分析题目特征,一种方法行不通时要及时变换方法”;“要积极思考”等。可见,学生对思维过程的反省呈现表面化。

数学学科自我监控能力的发展是学生思维能力发展的重要方面。本研究的结果显示,这种能力需要有意识地培养。当前中学生数学学科自我监控能力的发展落后于其他心理能力,这与教学中“功利主义”的做法密切相关。数学学科自我监控能力往

\* 章建跃, 北京新街口外大街19号 北京师范大学发展心理研究所, 100875

往是在对所学知识的系统化进程中表现出来的,它的重点在于对思维活动的检查和调节:反思自己是怎样发现和解决问题的;运用了哪些基本的思考方法、技能和技巧;走过哪些弯路;有哪些容易发生(或发生过)的错误,原因何在;该记取哪些经验教训等。然而,教师在教学中往往偏重于知识容量,很少要求学生反思学习过程,也不给学生以反思技能的指导和训练,学生也很少自觉地进行反思。80%以上的学生认为会解数学题就是学好数学的标志;75%左右的学生认为题目做得越多数学成绩就会越好。缺乏对学习过程的反思是造成学习质量低下、数学思维发展水平不高的主要原因之一。

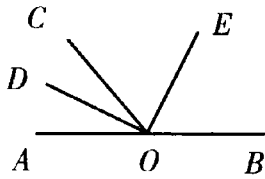
## 二 中学生数学学科自我监控能力发展的一般趋势

总体上看,中学生数学学科自我监控能力的发展符合从他控到自控、从不自觉经自觉到自动化、敏感性逐渐增强、迁移性逐渐提高、从局部到整体等基本规律。

### 1 从他控发展到自控

他控是指数学学习活动受外界因素的控制和调节,自控则指数学学习活动受主体自己的控制和调节。数学学习活动的他控主要受教师或教科书的控制,如经常表现为“老师(或书上)这样说的”;也受问题情景的控制。

例如,初二学生解“如图, $O$ 是直线 $AB$ 上一点, $OD$ 、 $OE$ 分别是 $\angle AOC$ 、 $\angle COB$ 的平分线,设 $\angle AOC=46^\circ$



$32'$ ,求 $\angle DOE$ 的度数”时,90%以上的学生都采用了先求 $\angle COB$ ,再求 $\angle DOC$ 和 $\angle COE$ ,再由 $\angle DOC + \angle COE$ 而得结果。在回答“注意过 $\angle DOE$ 度数的特殊性吗?请根据这一特殊性检查一下自己的解题过程……”时,学生普遍答“注意过”,但对解题过程只检查解题步骤和计算的准确性,没有对解题方法进行检验和反思,因而给出新解法的学生只有6%。这是典型的他控表现。“他控”表现在两个方面:一是条件“ $\angle AOC = 46^\circ 32'$ ”把学生的思维引向求 $\angle DOC$ 和 $\angle COE$ ;二是受“习惯”控制:平时解的都是“条件恰好”的问题,老师也经常强调条件没用完的解答肯定是值得怀疑的,因此必须把条件全部用上才算放心。这样,即使得到提醒,学生也很难对自己的思维作出调节。有的学生写道:“这是双平分线题型,中间角一定是 $90^\circ$ ”,但具体解题时,仍然通过求 $\angle DOC$ 和 $\angle COE$ 来得到 $\angle DOE$ 的度

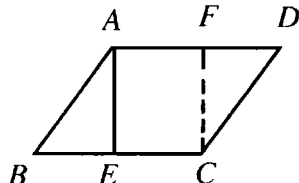
数。

随着数学学习的深入和数学知识(特别是数学思想方法)的积累,学生的自我监控技能逐渐形成。初三学生开始较多注意“为什么”,他们脑子里有“可能吗?”这样的疑问,较多的高中生解题时能注意先分析问题结构,考虑如何转换条件,并对解题方法有一定的比较和选择。如高一学生解“已知二次函数图像的对称轴是 $X=1$ ,图像过点 $(-2, -5)$ ,且在 $X$ 轴上所截取的线段长为4,求这个二次函数的解析式”时,41%以上的同学采用了“二根法”。之所以采用此法,是因为它比“顶点式”更方便。高三学生解已知 $X^2 + Y^2 + 4X + 2Y + 4 \leq 0$ ,求证, $-\sqrt{5}-4 \leq X+2Y \leq \sqrt{5}-4$ 时,50%以上的同学能将条件转换为圆面,将结论转换为直线系 $X+2Y=t$ ( $t$ 为参数),有的还能将结论进一步转换为“点 $(X, Y)$ 到直线 $X+2Y+4=0$ 的距离不大于1”,从而得到此问题的本质结构:由于直线 $X+2Y+4=0$ 过圆面中心,因此问题的实质是“圆面上的点到直径的距离不超过半径”。这表明,随着年龄的增长和数学观念的发展,学生对自己数学学习活动的自我意识在增长,计划、监察和调节数学学习活动的自我意识在提高。不过,当前中学生数学学科自我监控中他控的比重仍然很大,这与教师没有对学生的自我监控能力进行有意识培养直接相关。

### 2 从不自觉经自觉到自动化

初中低年级学生在数学学习中的自我监控没有自觉性,具体表现在学习中缺乏计划性,不懂得先分析后动手的重要性,盲目尝试的成分大;缺乏必要的检验技能;解题的逻辑性不强,缺乏系统性、条理性,因果关系比较模糊;对结果的评价往往就事论事。例如,初一学生解“如图平行四边形 $ABCD$ 的面积为28,

$EC=3$ , $AE=4$ ,求 $\triangle ABE$ 的面积”时,能够想出3种方法的学生不到18%,其



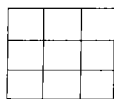
原因主要是学生没有从图形结构出发,有计划有顺序地将 $\triangle ABE$ 的面积表征为 $(BE \cdot AE) \div 2$ ,四边形 $ABCD$ 与梯形 $CDAE$ 面积之差,四边形 $ABCD$ 与矩形 $AECF$ 面积之差的一半, $\triangle ABC$ 与 $\triangle AEC$ 面积之差等,在思维的灵活性、思想方法转换的自觉性等方面表现不佳。高一学生的数学学习自我监控就表现出一定的自觉性。如解答“空间四边形 $ABCD$ 中, $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ 分别为 $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$ 上的点,如果直线 $EF$ 、 $HG$ 交于点 $P$ ,求证 $A$ 、 $C$ 、 $P$ 三点共线”

时,部分学生在所作几何图形直观性较差时能调整图形位置,使其直观性更强些;在解答二次函数问题时,相当一部分学生能先分析问题结构再选择解题方法,绝大部分学生都能利用草图帮助分析。学生对数学学习的自我监控水平与其对相应的数学思想方法的熟悉程度密切相关。例如,上述立体几何问题是高一学生刚接触的,部分学生在所作图形直观性不强时,不会对其位置进行调整;大部分学生在问题转换上出现困难。实际上,这个问题可以表征为“ $A$ 、 $C$ 、 $P$ 为两个平面的公共点”,转换后还可以表征为“直线 $EF$ 、 $HC$ 、 $AC$ 共点”、“平面 $ABC$ 、平面 $ACD$ 、平面 $EFHC$ 共点”等。而在解二次函数题时,他们都能做到先作草图,引进适当的符号,对解题方法进行比较后再选择出恰当的方法,当发现用“一般式”解题在计算上比较复杂时,能及时转换思路。

必须指出,除某些方面(如先画图、引进适当符号等属于“技术性”层次的监控技能)外,中学生数学学科自我监控自动化水平较低。绝大部分学生缺乏自我监控的意识和技能,既不在数学课后回顾和总结重点内容,也不在解题后总结解题的关键,进一步追求更好的解法,更不考虑将思想方法推广到同类问题中去,以及对问题进行推广引申。他们往往听完课后就忙着解题,获得正确答案就心满意足。在学生的意识中,多做题才实在,很多学生认为解题后的反思是浪费时间。

### 3 迁移性逐渐提高

所谓迁移性逐渐提高,即中学生数学学科自我监控的过程或方式可以从一个具体的数学活动情景迁移或应用到与其相同或相似的其他数学活动情景中去。中学生数学学科自我监控能力的发展水平与学生所掌握的数学思想方法的抽象程度密切相关。做为一种自我监控策略,数学思想方法的抽象水平越高,其适用范围就越广,从某种意义上说,数学的广泛应用性就是指数学思想方法的广泛应用性。正如布鲁纳指出的,学生掌握的数学原理越抽象,几乎归结为定义,则这种原理的适用性就越广泛。因此,当学生所掌握的数学思想方法抽象水平不断提高,对其本质及作用的认识不断加深,用它来指导数学实践活动的意识和自觉性随之不断增强,这就是学生在数学学习中自我监控过程方式迁移性提高的表现。如解“将1,2,3,4,5,6,7,8,9这9个数字分别填入下图的9个方格中



(此图称为三阶幻方),使每行、每列及对角线上的三个数字之和(这个和称为“魔数”)均相等”时,低年级学生对问题结构的理解、给出解题方法等都

受具体情景的限制和影响,往往就事论事,解题时只

考虑当前问题的细节而不会从整体结构上去分析和把握问题,导致思维活动方式局限于具体情境,难以实现向相似情景的迁移。由于高年级学生掌握了等差数列等知识,对问题的数字结构特征把握准确,懂得如何分析数字结构、从什么角度看问题、从哪些方面作出推广和怎样推广,因而思想方法的概括程度较高,能够比较顺利地实现自我监控过程的迁移。正是由于学生将“如何分析”、“从什么角度看问题”、“怎样才能作出推广”等自我监控过程和方式较恰当地应用于新情景,才使新问题的有效解决得以保证。因此,迁移性的不断提高是中学生数学学科自我监控能力提高的重要标志。

### 4 敏感性逐渐增强

所谓敏感性逐渐增强,即学生根据数学学习中各因素间的关系及发展变化,对学习进程作出迅速而有效的调节和矫正的能力在增强。敏感性一般包括两方面:一是对数学问题(学习材料)中的条件、结论及涉及的主要数学概念、原理及其相互关系的敏感性。这方面的敏感性决定着学生对数学问题的条件、结论及相互关系的觉察与认知。如果这方面的敏感性不强,就有可能遗漏、忽视某些重要信息,特别是忽视关于条件与条件、条件与结论之间内在联系的线索,或者被数或形的表现形式所迷惑而忽视隐含条件导致理解错误等,直接影响其自我监控中信息反馈的水平和下一步的调节。二是根据具体问题情景,调动有关知识经验、数学思想方法(解题策略)的敏感性,如上述高一立体几何题,学生根据不同的位置表征,调动起证明“三点共线”的基本策略以及相应的“四大公理”及其推论、线面关系、面面关系等数学知识。这方面的敏感性与自我监控中的调节水平密切相关,因为它影响着调控策略与方法的选取。如果灵敏程度不高,那么就会在问题情景与解题策略、方法的匹配上发生困难,使相关知识、策略、方法的激活速度和质量以及所提取的知识、策略、方法的适用性受到影响,不能实现有效的自我监控。

数学学科自我监控水平较高者对学习情景中的线索及变化情况比较敏感,对问题中各条件及其相互关系、结论及其变形等都能较好地知觉和分析,并据此而调动起数学思维策略,达成对数学学习及时有效的调控。例如,有的高三学生在解“三阶幻方”问题时想到:数字是连续自然数,有一个“中间数”5;与5等距离的两数之和均为10,具有对称性,中间格要用4次,与其他所有数字都有关系,因而只能填“中间数”5,“魔数”15为奇数,因而可对“对角线”作奇偶分析;……显然,这些学生对问题的数字特征非常敏感,由此导出的解题方法也出人意料。如有的学生由“对角线”的

奇偶性相同而得可能的情况有:

奇	A	偶	奇	E	奇	偶	P	偶
C	5	D	G	5	H	R	5	S
偶	B	奇	奇	F	奇	偶	Q	偶

(1)

(2)

(3)

再由“魔数”15为奇数而知只有(3)正确。而绝大部分初中学生对上述数据特征就没有这种敏感性,在解题时所用的方法大多数是“尝试错误”性的,当尝试过程出现困难,解题难以继续时,采用的补救措施是再来一次“新的尝试”,很少能从数字结构特征上去寻找线索。

因此,敏感性是衡量数学学科自我监控水平的重要指标。敏感性的增强过程是中学生数学学科自我监控能力水平发展的表现。

### 5 从局部监控到整体监控

所谓从局部监控到整体监控,即中学生数学学科自我监控在深度和广度方面都在逐渐发展。低年级中学生很少对数学学习过程进行反馈和矫正,他们往往只对学习结果进行检查、核对,答案正确就结束学习,他们的学习往往“一竿子扎到底”,出现错误就一错到底。这表明他们的数学学科自我监控水平较低,对数学学习的监控是“结果性”的而不是“过程性”的。高年级中学生开始懂得在数学学习的各阶段进行自我监控。有的高三学生在解决问题时首先是在读题的基础上搞清未知是什么?已知是什么?条件是什么?然后引进适当符号以使问题具体化,或者画个图以使问题更加直观。接着再考虑:与问题相关的知识有哪些?以前是否解决过类似的问题?能否将问题重新叙述,或将问题用自己熟悉的语言来表述?能否将问题进行适当的分解与组合?在具体解题时还会考虑:是否利用了所有数据?问题所包含的数学概念和原理是否都考虑了,这一步骤的正确性明显吗?能否证明它的正确性?在获得答案后,他们会考虑:怎样检验这个论证?是否还有更好的方法来导出结论?这个结果或方法有没有普遍意义?显然,能够这样做的学生已经把自我监控与调节贯穿于数学学习的全过程,做到及时、充分而有效地反馈。这是自我监控趋于成熟的表现。

除“过程性”自我监控的发展外,还有在同一层次上的不同侧面、不同角度的自我监控与调节。低年级中学生在数学学习中往往只从一个角度或一个侧面考虑问题,如他们在编题时,在时间、速度和距离三者之间往往只从距离这一角度出发,而且是“单向性”的。随着年级的增高和数学知识经验的积累,学生的思维逐渐走向综合化,他们逐渐认识到从不同角度、不同侧面考虑问题的重要性。如解“三阶幻方”题时,初中学生解题效率低的重要原因是思考时只注意使一排、一列或“对角线”的三数之和为15,结果往往使得其他排、列不能满足“和为15”的要求;高中学生能全方位考虑问题,他们在具体解题时既能考虑重点(如先填中间位置以及数字5),也能考虑数字间的平衡,如将数字分组(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),显然这对提高解题速度和正确率是非常重要的。

数学学习中从局部到整体的自我监控,与数学知识、数学思想方法从具体到抽象的发展密切相关。从思想方法看,有针对具体问题解答的“解题术”,也有具有普遍原则意义的解题思维模式(如“关系映射反演方法”),更高层次的还有统领整个体系的全局性思想方法(如公理化方法)。从数学知识的获得过程来说,它是一个选择和识别的过程,在一个数学情景中,包含了许多“数学事物”,它们可以有各种各样的组合,通过从中选择有用的组合,进而作出新的成果,产生有价值的新思想和新概念。数学家之所以能做到这些,非常重要的一点是他们能克服思维的惯性,善于发现那些容易被人忽视的不同点或差异性,从而层层深入地揭示出各“数学事物”间的本质联系和内在规律。在这个过程中,正如著名数学哲学家拉卡托斯所说的,猜想与反驳起了非常重要的作用,数学知识就是在这种不断猜想与反驳的交互作用下获得增长的,“是靠尝试错误,经过多次猜想、多次反驳才得到它们的。”因此,对已有数学知识(包括结论及其证明过程)的不断批判,使原来不太严格的论证或“思想实验”逐渐趋于严格,就成了“数学发现的逻辑”。显然,在这个“猜想与反驳”的过程中,主体的自我监控也就由局部逐渐向整体发展。

由以上论述不难得出,从局部监控到整体监控是数学学习中自我监控发展的又一个重要特征。

(责任编辑 杨太清)