30501 강명석

오일러공식 유도과정

매끄러운(smooth)함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$또는 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$가 주어져 있을 때, 테일러(매클로린) 급수를 이용하여 f를 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f = e^x$일 때, $f^{(n)}(0) = 1$이기에 급수는

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \cdots$$

x에 $i\theta$를 대입한 후, 실수와 허수로 나누어 정리하면, 두 무한급수로 표현할 수 있다.

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} \cdots = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)$$

$f = \sin\theta$일 때 $f' = \cos\theta$, $f'' = -\sin\theta$, $f^{(3)} = -\cos\theta$, $f^{(4)} = \sin\theta$ ⋯ 이므로 함수의 급수는

$$\sin\theta: \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

유사하게 $f = \cos\theta$일 때 함수의 급수는

$$\cos\theta: \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!}$$

이때 $\sin\theta$는 $e^{i\theta}$의 허수부, $\cos\theta$는 $e^{i\theta}$의 실수부와 일치하므로,

$$e^{i\theta} = i \cdot \sin\theta + \cos\theta$$

임을 알 수 있다.

매클로린 급수 증명

어떠한 부드러운 함수 f가 있어, 계수를 알 수 없는 다항함수들의 합으로 이것을 표현한다 가정하자.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

여기에 0을 대입하여 $f(0) = a_0$이라는 식을 얻을 수 있다. 또한 양변에 미분을 취한 후 다시 0을 대입해 $f'(0) = a_1$이라는 식을 얻을 수도 있다. 같은 방식으로, 양변의 n계도함수를 취한 후 0을 대입해 $f^{(n)}(0) = a_n n!$이라는 식을 얻을 수 있다.

이에 따라서

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

테일러 급수 증명

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$가 성립한다.

$\int_a^x f'(t)\,dt$에 부분적분을 시행하면 $\int_a^x f'(t)\,dt = f'(0)(x-a) - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt$임을 알 수 있다.

이것을 각 단계에 대해 계속 시행해보면,

N	Partial integration
1	$\int_a^x f'(t)\,dt = f'(0)(x-a) - \int_a^x (t-x)f''(t)dt$
2	$\int_a^x (t-x)f''(t)\,dt = -\frac{(x-a)^2}{2}f''(a) - \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)dt$
3	$\int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)\,dt = \frac{(x-a)^3}{6}f'''(0) - \int_a^x \frac{(t-x)^3}{6}f''''(t)dt$
n	$\int_a^x \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt = \frac{(-1)^{n-1}(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(0) - \int_a^x \frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$

이다. 식을 정리하면

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt$$

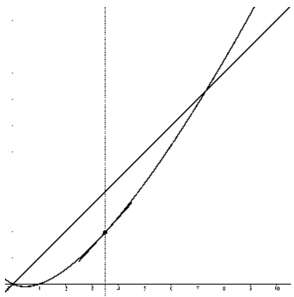
이때, 적절한 $\xi \in (a, x)$가 존재하여 아래를 만족한다.

$$(-1)^n \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

그렇다면, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$이 0에 수렴하므로,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

임을 알 수 있다.



$x = 3.5$일 때, log scale로 나타낸 x^n과 $n!$