

오일러 각(Euler Angle)과 각속도(Angular Velocity)

1. 서론

- 1) 자이로는 회전하는 물체의 세 축에 대한 각속도를 측정하는 센서이다. 우리는 이 각속도를 바탕으로 물체의 바디 프레임이 기준 축과 얼마나 회전했는지를 추정해야 한다.
- 2) 보통 한 축에 대해서만 회전이 일어나는 2차원 평면과 다르게, 3차원에서는 세 축에 대해 동시에 회전이 가능하다. 단순히 각의 시간 미분으로 각속도를 나타내기 어렵다.
- 3) 회전 순서가 달라짐에 따라 결과 자세나, 최종 회전 행렬이 달라진다. 이를 고려해 순서를 미리 정의하고 각각의 회전에 대해 물체의 바디 프레임과 기준 축이 어긋난 정도를 고려해 각속도를 계산한다.

2. 유도 (x - y - z 축 순서로 회전)

- 1) 각 축의 회전 행렬 정의(오른손 좌표계)

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 각속도 정의

- 각속도 벡터는 $\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \overrightarrow{pa_x} + \overrightarrow{qa_y} + \overrightarrow{ra_z}$ 로 정의된다.
- p, q, r은 X, Y, Z에 대한 각속력(스칼라) 성분이다.

3) 바디프레임 축 변화

- 공간 기준 축은 X, Y, Z / 초기 바디프레임 축은 x, y, z
 - x축 회전 시 $R_x(\phi)$ 는 바디프레임 축 y, z를 회전 (y->y', z->z')
 - 각속도의 X 방향 벡터는 $\omega_1 = \overrightarrow{pa_x} = \dot{\phi} \overrightarrow{a_x}$
 - y'축 회전 시 $R_y(\theta)$ 는 바디프레임 축 x, z'를 회전 (x->x', z'->z'')
 - 각속도의 Y 방향 벡터는 $\omega_2 = \overrightarrow{qa_y} = \dot{\theta} \overrightarrow{a_{y'}} = \dot{\theta} R_x(\phi) \overrightarrow{a_y}$
 - z''축 회전 시 $R_z(\psi)$ 는 바디프레임 축 x', y'를 회전 (x'->x'', y'->y'')
 - 각속도의 Z 방향 벡터는 $\omega_3 = \overrightarrow{ra_z} = \dot{\psi} \overrightarrow{a_{z''}} = \dot{\psi} R_x(\phi) R_y(\theta) \overrightarrow{a_z}$
- 이때 회전은 해당 시점의 바디프레임 축을 기준으로 진행된다.

4) 각속도 유도

각속도 벡터 $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 이고,

3)에서 유도한 식 그대로 $\omega = \dot{\phi}\vec{a}_x + \dot{\theta}R_x(\phi)\vec{a}_y + \dot{\psi}R_x(\phi)R_y(\theta)\vec{a}_z$ 로 정의된다.

각 축별 회전 벡터를 표현하면,

$$\vec{a}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, R_x(\phi)\vec{a}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}, R_x(\phi)R_y(\theta)\vec{a}_z = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

따라서 각속도를 각 변화율에 대해 표현하면,

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

5) 각 변화율을 각속도에 대해 표현