쿼터니언(Quaternion, 사원수)

1. 소개

1) 정의

- 쿼터니언은 복소수 체계의 확장인 4차원 실수 벡터이다.
  3차원 공간을 4차원 복소수(사원수) 공간에서 표현하는 도구이다.
- 쿼터니언은 다음과 같이 정의된다.
  $q = w + u = w + (x, y, z) = w + xi + yj + zk$
- 가장 큰 수 체계인 복소수는 보통 실수부+허수부, $a + ib$ 형태로 정의된다.
  쿼터니언에선 허수부 단위인 i를 독립적인 3단위 허수로 확장하여
  $u = (x, y, z) = xi + yj + zk$, 노름은 $|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 로 본다.

2) 허수부

- 각각의 허수 단위 i, j, k는 다음과 같은 성질이 있다.
  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
  $ij = -ji = k$
  $jk = -kj = i$
  $ki = -ik = j$
- 각각은 곱셈의 교환 법칙이 성립하지 않는다.
- 서로 독립(Orthogonal, 직교)이며 각 단위들 간의 외적은 직교하는 다른 단위를 향한다.

3) 켤레(Conjugation)

- 쿼터니언의 켤레(Conjugation)은 다음과 같이 정의된다.
  $q^* = Re\{q\}$ - $Im\{q\} = w - (xi + yj + zk)$

4) 쿼터니언 곱 (해밀턴 곱)

- 두 쿼터니언 $q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $q_2 = w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$의 곱은

$$\begin{aligned} q = q_1 \times q_2 = &(w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2)i \\ &+ (w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2)j + (w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2)k \end{aligned}$$

  으로 정의된다.
- q의 실수부는 두 스칼라 곱과 벡터 부분의 내적을 뺀 값이다.
- q의 허수부는 스칼라-벡터 곱과 두 벡터의 외적의 합으로 이루어진다.

2. 회전 쿼터니언

1) 3차원 복소 회전

- 2차원에서 대상 복소수에 곱해지는 회전 복소수를 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 으로 표기한다.
  복소수 $P = x + iy$ 에 대해 θ만큼 회전한 벡터를 P'이라 하면
  $P' = P \times e^{i\theta} = (x + iy)(\cos\theta + i\sin\theta)$ 으로 정의되는 것.
- 위 회전을 3차원으로 확장한 것이 회전 쿼터니언 q이다.
  $q = e^{\frac{u}{|u|}\frac{\theta}{2}} = \cos(\frac{\theta}{2}) + \frac{u}{|u|}\sin(\frac{\theta}{2}) = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})(u_x i + u_y j + u_z k)$
- $\frac{u}{|u|}$는 쿼터니언 허수부의 단위 벡터 $\hat{u}$이다. 이는 회전 쿼터니언에서 회전축을 의미한다.
- $|\hat{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$ 이다. (항상 정규화된 축을 이용한다.)
- 당연히 회전 쿼터니언의 노름은 1이다.
- 각이 $\frac{\theta}{2}$인 이유는 회전 연산에서 회전 쿼터니언을 두 번 곱하기 때문이다.

2) 회전 연산

- 임의의 3차원 벡터 $v = (v_x, v_y, v_z)$를 축 $\hat{u} = \frac{u}{|u|}$에 대해 θ만큼 회전하면
  회전 후의 벡터 v'과 v의 관계는 $v' = q \times v \times q^*$ 로 정의된다.
- 회전 쿼터니언 q는 벡터 v를 회전축 $\hat{u}$에 대해 θ만큼 회전시킨다.
  (회전축은 위도와 경도, 두 각에 의해 정의된다.)

- 이때 3차원 벡터 v를 $v = (0, v_x, v_y, v_z)$으로 쿼터니언으로 변환한다.
- 첫 번째 곱 $q \times v$는 4차원 쿼터니언 공간에서의 회전 연산이다.
- 두 번째 곱 $(q \times v) \times q^*$은 다시 켤레를 곱해서 회전된 벡터 $q \times v$가
  다시 3차원 공간으로 투영되도록 한다. (실수부를 0으로)
- 즉, 계산된 쿼터니언 v'의 허수부가 회전된 벡터의 x, y, z값이다.
- q와 q^*모두 회전 연산에 관여한다. 각각 $\frac{\theta}{2}$만큼 회전시켜 총 θ만큼 회전시키는 것.
- 3차원 상에서 회전축을 정의 후, θ만큼 회전하기 때문에 오일러 각처럼 3번에 걸쳐
  회전하지 않으니 짐벌 락과 같은 문제는 발생할 수가 없다.

3) 쿼터니언과 각속도의 관계 (a)

- 회전 쿼터니언 $q=(w,x,y,z)$와 각속도 쿼터니언 $\omega=(0,p,q,r)$에 대해
  쿼터니언 q가 시간에 따라 변화하는 것은 3차원 회전이 변하는 것으로 해석된다.
- 따라서 쿼터니언 변화율 $\dot{q}$는 q와 각속도 쿼터니언 ω의 곱으로 표현할 수 있다.
  $\dot{q}=\frac{1}{2}q\times\omega$, $\dot{q}=\frac{1}{2}\omega\times q$
- 첫 번째 식은 바디 프레임 기준 회전을 의미한다.
  바디 프레임에서 각속도가 주어졌을 때, 쿼터니언을 따라 회전 변화량을 구하는 표현이다.
- 두 번째 식은 관성 프레임 기준 회전이다.
  관성 좌표계에서 회전율을 바탕으로 회전 상태가 변하는 식으로 해석된다.
- 1/2를 곱하는 이유는 쿼터니안 각도 표현 $\frac{\theta}{2}$와 각속도 표현 $\omega=\dot{\theta}$가 일치하기 위해
  절반의 계수가 필요하기 때문이다. 각속도의 정의식으로 $w(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}$임에 반해,
  쿼터니언 하나가 $\frac{\theta}{2}$를 맡기 때문에 1/2의 계수가 앞으로 나온다.

4) 쿼터니언과 각속도의 관계 (b)

- 각속도 쿼터니언과 쿼터니언의 곱은 다음과 같이 전개된다.
  $\omega\times q=(0,p,q,r)\times(q_1,q_2,q_3,q_4)$
  $=(-pq_2-qq_3-rq_4, pq_1+rq_3-qq_{4,}qq_1-rq_2+pq_4, rq_1+qq_2-pq_3)$
- $\dot{q}=\frac{1}{2}\omega\times q$에서,
  $\dot{q_1}=\frac{1}{2}(-pq_2-qq_3-rq_4)$, $\dot{q_2}=\frac{1}{2}(pq_1+rq_3-qq_4)$,
  $\dot{q_3}=\frac{1}{2}(qq_1-rq_2+pq_4)$, $\dot{q_4}=\frac{1}{2}(rq_1+qq_2-pq_3)$ 이므로
- 쿼터니언 변화율과 각속도 관계식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{q}=\begin{bmatrix}\dot{q_1}\\ \dot{q_2}\\ \dot{q_3}\\ \dot{q_4}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -p & -q & -r\\ p & 0 & r & -q\\ q & -r & 0 & p\\ r & q & -p & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}$$

5) step당 계산 방식

- 3차원 회전은 시스템 상에서 정의된 dt에 따라 step별로 진행된다.
- 시점 t에 대해 $\dot{q_t}=\frac{1}{2}\omega\times q_t$로 정의되고, $q_{t+dt}=q_t+dt\times\dot{q_t}$로 갱신하는 형태이다.
- 매 스텝당, 회전 쿼터니언의과 회전축 $\hat{u}$를 정규화하는 과정으로 노름을 1로 만든다.
  이는 누적 오차를 최소화하는 방식이다. (오일러 각의 문제 해결)

전파 BW와 레이더 측의 상관 ... 중요하다.

→ 음파에선 어떤가???