# Erste Fundamentalgruppe

Klaus Mattis

25. Juni 2020

## 1 Punktierte topologische Räume

Wir betrachten im Folgenden immer die Kategorie $\mathbf{Top}_*$ von punktierten Topologischen Räumen, d.h. die Objekte sind Paare $(X, x_0)$, sodass $X$ ein topologischer Raum ist, und $x_0 \in X$ liegt. Man nennt $x_0$ den ausgezeichneten Punkt (oder Basispunkt) von $X$.

Abbildungen zwischen zwei punktierten topologischen Räumen $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ sind stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$, sodass $f(x_0) = y_0$ gilt.

Die Kategorie hat einen offensichtlichen Vergissfunktor $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}, (X, x_0) \mapsto X$.

## 2 Erste Fundamentalgruppe

Es ist sehr schwierig, zu zeigen, dass zwei Objekte von $\mathbf{Top}_*$ nicht isomorph sind. Man müsste für alle Abbildungen $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zeigen, dass keine Umkehrabbildung existiert. Was wir aber wissen: Falls $\mathscr{C}$ eine beliebige Kategorie ist, und $F\colon \mathbf{Top}_* \to C$ ein Funktor, dann gilt für alle $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, dass falls $f$ ein Isomorphismus ist, so ist auch $F(f)$ ein Isomorphismus.

Zum Beispiel ist es nicht ersichtlich, ob $S^2$, die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und der Torus $T \coloneqq S^1 \times S^1$ (bildlich: der Donut) isomorph sind. Intuitiv ist klar, dass die beiden Räume verschieden sind (Der Torus hat eine Art Loch, die Sphäre nicht). Dies zu beweisen ist auf direkten Weg aber so gut wie nicht möglich.

D.h. falls wir zeigen wollen, dass zwei Objekte $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathbf{Top}_*$ nicht isomorph sind, reicht es zu zeigen, dass $F(f)$ kein Isomorphismus ist, für alle $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$. Dies ist insbesondere dann der Fall, falls $F(X,x_0)\ncong F(Y,y_0)$.

Unsere Idee ist nun also: Wir suchen uns eine einfach zu verstehende Kategorie $\mathscr{C}$ und einen Funktor $\mathbf{Top}_*\to\mathscr{C}$, der möglichst nicht-isomorphe Objekte auf nicht-isomorphe Objekte schickt.

Eine mögliche Wahl für $\mathscr{C}$ ist die Kategorie der Gruppen **Grp**, da es recht einfach ist, zu verstehen, ob zwei Gruppen isomorph sind oder nicht.

Unser Funktor $F$ wird der Funktor $\pi_1$, der einem punktierten Topologischen Raum seine *erste Fundamentalgruppe* zuordnet, die wir im folgenden Konstruieren wollen.

Sei $(X,x_0)\in\mathbf{Top}_*$ ein punktierter Topologischer Raum.

Wir ordnen $(X,x_0)$ zunächst die Menge

$$\pi_1^{\text{pre}}(X,x_0)\coloneqq\{\gamma\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}([0,1],X)|\gamma(0)=x_0=\gamma(1)\}$$

zu.

In Worten: $\pi_1^{\text{pre}}$ ist die Menge der Wege auf $X$, sodass die Start- und Endpunkte beide gleich $x_0$ sind. Solche Wege nennt man auch Schleifen auf $X$ mit Basispunkt $x_0$.

Auf dieser Menge wollen wir nun eine Verknüpfung $\star$ definieren. Falls $f,g\in\pi_1^{\text{pre}}$, dann definieren wir $f\star g\colon[0,1]\to X$ via

$$(f\star g)(t)=\begin{cases}g(2t) & \text{, falls } t<\frac{1}{2}\\ f(2t-1) & \text{, falls } t\geq\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Wir vergewissern uns, dass dies tatsächlich eine stetige Abbildung ist: $f(2t)\colon[0,\frac{1}{2}]\to X$ ist sicherlich stetig, genauso wie $g(2t-1)\colon[\frac{1}{2},1]\to X$, da $f,g$ stetig sind.

Wir müssen also überprüfen, ob $f(2\frac{1}{2})=g(2\frac{1}{2}-1)$. Aber es gilt $f(2\frac{1}{2})=f(1)=x_0=g(0)=g(1-1)=g(2\frac{1}{2}-1)$.

Das Problem an dieser Verknüpfung: Sie ist nicht assoziativ, es gibt kein neutrales Element und keine Inversen. In anderen Worten: $\pi_1^{\text{pre}}(X,x_0)$ ist keine Gruppe (nichtmal ein Monoid).

Man kann sich zum Beispiel leicht überlegen, dass $((f\star g)\star h)(1/4)=(f\star g)(1/2)=f(1)$, aber $(f\star(g\star h))(1/4)=f(1/2)$, und es gibt keine Grund, warum $f(1/2)=f(1)$ gelten sollte. Allerdings durchlaufen beide Schleifen den gleichen Weg, nur in unterschiedlicher Geschwindigkeit. Dieses Konzept wollen wir nun formalisieren.

**Definition 1.** *Sei $(X, x_0)$ ein punktierter topologischer Raum. Seien $f, g \in \pi_1^{\text{pre}}(X, x_0)$.*

*Dann heißt $f$* weghomotop *zu $g$ (in Zeichen: $f \sim g$), falls es eine stetige Abbildung $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ gibt, sodass $H(0,t) = f(t)$, $H(1,t) = g(t)$ und $H(s,0) = H(s,1) = x_0$ für alle $t, s \in [0,1]$.*

*Wir sagen, $H$ ist eine Weghomotopie von $f$ nach $g$.*

Die Definition bedeutet anschaulich: die beiden Wege $f$ und $g$ lassen sich stetig ineinander überführen, wobei wir allerdings die Endpunkte festhalten.

Weghomotopie gibt uns einer Relation auf $\pi_1^{\text{pre}}(X, x_0)$. Wir werden nun zeigen, dass die Relation tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist:

**Lemma 2.** *Weghomotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $\pi_1^{\text{pre}}(X, x_0)$.*

*Beweis.* Im Folgenden seien $f, g, h$ Wege auf $(X, x_0)$.

$\sim$ ist reflexiv: Wir müssen zeigen $f \sim f$. Definiere die stetige Abbildung $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X, (s,t) \mapsto f(t)$. Diese Abbildung ist eine Weghomotopie von $f$ nach $f$, also $f \sim f$.

$\sim$ ist symmetrisch: Sei $f \sim g$, und $H$ eine Weghomotopie von $f$ nach $g$. Definiere die stetige Abbildung $H'\colon [0,1] \times [0,1] \to X, (s,t) \mapsto H(1-s, t)$. Diese Abbildung ist eine Weghomotopie von $g$ nach $f$, also $g \sim f$.

$\sim$ ist transitiv: Sei $f \sim g, g \sim h$, $H$ eine Weghomotopie von $f$ nach $g$, $H'$ eine Weghomotopie von $g$ nach $h$. Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} H''\colon [0,1] \times [0,1] &\to X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} H(2s, t), & \text{falls } s < 1/2 \\ H'(2s-1, t), & \text{falls } s \geq 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Beachte, dass $H(1,t) = g(t) = H'(0,t)$ für jedes $t$, daher ist $H''$ stetig. Diese Abbildung ist eine Weghomotopie von $f$ nach $h$, also ist $f \sim h$.

$\sim$ ist also eine Äquivalenzrelation. $\square$

Da wir nun wissen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, können wir die Äquivalenzklassen betrachten:

**Definition 3.** *Die Menge $\pi_1(X, x_0) \coloneqq \pi_1^{\text{pre}}(X, x_0)/\sim$ heißt* erste Fundamentalgruppe *von $(X, x_0)$.*

Natürlich wissen wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht, ob $\pi^1(X, x_0)$ wirklich eine Gruppe ist (mit welcher Verknüpfung überhaupt? $\star$ ist ja nur auf $\pi_1^{\text{pre}}(X, x_0)$ definiert). Dies wollen wir nun zeigen.

Davor brauchen wir noch ein kurzes Lemma, das reparameterisierungen von Wegen weghomotop sind (d.h. dass es weghomotopie egal ist, wie schnell wir einen Weg durchlaufen).

**Lemma 4** (Reparameterisierungslemme)**.** *Sei $g$ ein Weg auf $(X, x_0)$ und $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Abbildung, sodass $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$ gilt. So ein $\phi$ nennen wir Reparameterisierung.*

*Dann ist $g \circ \phi$ ein Weg und es gilt $g \sim g \circ \phi$.*

*Beweis.* $g \circ \phi$ ist sicher ein Weg, da $(g \circ \phi)(0) = g(\phi(0)) = g(0) = x_0$ und ähnlich $(g \circ \phi)(1) = x_0$.

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} H\colon [0,1] \times [0,1] &\to X \\ (s,t) &\mapsto g(s\phi(t) + (1-s)t). \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert: für jedes Paar $(s,t)$ ist $s\phi(t) + (1-s)t \in [0,1]$.

$H$ ist als Verknüpfung stetige Abbildungen sicherlich stetig.

Es gilt: $H(0,t) = g(t)$ und $H(1,t) = g(\phi(t))$.

Zudem gilt: $H(s,0) = g(s\phi(0) + (1-s)0) = g(s0 + (1-s)0) = g(0) = x_0$, und $H(s,1) = g(s\phi(1) + (1-s)1) = g(s + (1-s)) = g(1) = x_0$.

$H$ ist also eine Weghomotopie von $g$ nach $g \circ \phi$. □

**Theorem 5.**

$$\begin{aligned} \star\colon \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_0) \\ ([f],[g]) &\mapsto [f \star g] \end{aligned}$$

*ist eine wohldefinierte, innere Verknüpfung, die $\pi^1(X, x_0)$ zu einer Gruppe macht.*

*Beweis.* Zur Wohldefiniertheit: Wir zeigen nur wohldefinierheit in der ersten Variable, die zweite folgt analog. Sei also $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ eine Klasse von Wegen, $f, f'$ zwei Repräsentanten. Sei $[g] \in \pi_1(X, x_0)$. Wir müssen zeigen, dass $f \star g$ und $f' \star g$ weghomotp sind. Wir wissen aber, dass $f \sim f'$. Daher gibt es eine Weghomotopie $H$ von $f$ nach $g$. Wir definieren die Abbildung

$$G\colon [0,1]\times[0,1]\to X$$
$$(s,t)\mapsto \begin{cases} H(s,2t), & \text{falls } t<1/2\\ g(2t-1), & \text{falls } t\geq 1/2.\end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig, da für alle $s\in[0,1]$ gilt: $H(s,1)=x_0=g(0)$. Man sieht leicht ein, dass $G$ eine Weghomotopie von $f\star g$ nach $f'\star g$ definiert. Also gilt $f\star g\sim f'\star g$, und die Verknüpfung ist damit wohldefiniert.

Zur Assoziativität: Seien $[f],[g],[h]\in\pi_1(X,x_0)$. Wir müssen zeigen $[f\star(g\star h)]=[f]\star([g]\star[h])=([f]\star[g])\star[h]=[(f\star g)\star h]$. In anderen Worten: Wir müssen eine Weghomotopie von $f\star(g\star h)$ nach $(f\star g)\star h$ angeben. Dies folgt nun aber direkt aus dem Reparameterisierungslemma, indem wir einsehen, dass $f\star(g\star h)=((f\star g)\star h)\circ\phi$ gilt, mit der Reparameterisierung

$$\phi\colon [0,1]\to[0,1]$$
$$t\mapsto\begin{cases} t/2, & \text{falls } t\leq 1/2\\ t-1/4, & \text{falls } 1/2\leq t\leq 3/4\\ 2(t-3/4)+1/2, & \text{falls } 3/4\leq t.\end{cases}$$

Zum neutralen Element: Betrachte den konstanten Weg $e\colon[0,1]\to(X,x_0), t\mapsto x_0$. Dann ist $[e]$ neutrales Element: (Wir zeigen nur rechtsneutral, linksneutral folgt analog) Sei $[f]\in\pi_1(X,x_0)$. Wir müssen zeigen: $[f\star e]=[f]\star[e]=[f]$. Mit anderen Worten: $f\star e$ ist weghomotop zu $f$. Dies folgt nun direkt aus dem Reparameterisierungslemma, indem wir sehen, dass $f\star e=f\circ\phi$ gilt, mit der Reparameterisierung

$$\phi\colon [0,1]\to[0,1]$$
$$t\mapsto\begin{cases} 2t, & \text{falls } t\leq 1/2\\ 1, & \text{falls } t\geq 1/2.\end{cases}$$

Zu den Inversen: Sei $[f]\in\pi_1(X,x_0)$. Dann definiere den Weg $\bar f\colon[0,1]\to X$ via $\bar f(t)=f(1-t)$. (Wir durchlaufen den Weg $f$ also rüchwärts.) Dann gilt $e\sim f\star\bar f$, indem wir folgende Weghomotopie betrachten:

$$H\colon [0,1]\times[0,1]\to X$$
$$(s,t)\mapsto\begin{cases} f(2ts), & \text{falls } t\leq 1/2,\\ f(1-2ts), & \text{falls } t\leq 1/2.\end{cases}$$

Es gilt $H(0,t) = x_0 = e(t)$ für alle $t$, und $H(1,t) = (f \star \bar{f})(t)$. $H$ ist also eine Weghomotopie von $e$ nach $f \star \bar{f}$. In anderen Worten: $[f] \star [\bar{f}] = [e]$.

Wir haben also gezeigt, dass $(\pi_1(X, x_0), \star)$ ein Gruppe ist. $\square$

Wir haben nun also jedem punktieren topologischen Raum $(X, x_0)$ eine Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ zugeordnet. Um einen Funktor $\pi_1 \colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ zu erhalten, müssen wir noch angeben, wie $\pi_1$ auf Morphismen wirkt.

Falls $\psi \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein Morphismus von punktierten topologischen Räumen ist, und $g$ ein Weg auf $(X, x_0)$, so ist $\psi \circ g$ ein Weg auf $(Y, y_0)$: Es gilt $(\psi \circ g)(0) = \psi(g(0)) = \psi(x_0) = y_0$, und ähnlich $(\psi \circ g)(1) = x_0$.

Weiterhin gilt: sind $f \sim g$ weghomotpope Wege auf $(X, x_0)$, so ist sind $\psi \circ f$ und $\psi \circ g$ weghomotop: Ist $H$ eine Weghomotopie von $f$ nach $g$, so ist $\psi \circ H$ eine Weghomotopie von $\psi \circ f$ nach $\psi \circ g$.

Wir bekommen also eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(\psi) \colon \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\mapsto [\psi \circ f]. \end{aligned}$$

Diese Vorschrift macht $\pi_1$ zu einem Funktor: Es gilt $\pi_1(\mathrm{id}_{(\mathrm{X}, \mathrm{x_0})}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$, da $[\mathrm{id}_{(\mathrm{X}, \mathrm{x_0})} \circ f] = [f]$ für jeden Weg $f$.

Zudem gilt für $\psi \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $\phi \colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$. Dann ist $\pi_1(\phi \circ \psi) = \pi_1(\phi) \circ \pi_1(\psi)$, da $[(\phi \circ \psi) \circ f] = [\phi \circ (\psi \circ f)]$ für alle Wege $f$ auf $(X, x_0)$ gilt.

Wir wollen nun zwei Beispiele von Fundamentalgruppen betrachten

**Beispiel 6.** *Sei $X = \{x_0\}$ der einpunkt-Raum. Dann ist $(X, x_0)$ ein punktierter topologischer Raum, und es gilt $\pi_1(X, x_0) = 0$ ist die triviale Gruppe.*

*Dies ist klar, da es nur einen Weg auf $(X, x_0)$ gibt, den konstanten Weg.*

**Beispiel 7.** *Sei $S^1$ die 1-dimensionale Sphäre (d.h. der Kreis). Dann gilt $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

*Der Beweis ist etwas komplizierter und braucht noch etwas mehr Arbeit, deswegen werden wir ihn an dieser Stelle nicht machen. Die Idee ist aber, dass ein Weg auf dem Kreis mitzählt, wie oft er den Kreis umrundet (wobei eine Runde im Uhrzeigersinn +1, eine Runde gegen den Uhrzeigersinn -1 bedeutet). Die Abbildung ist dann $[f] \mapsto$ Anzahl der Runden, die $f$ dreht.*

Wir sehen sofort, dass $S^1 \ncong \{x_0\}$, das also der Kreis nicht homöomorph zum Ein-Punkt-Raum ist. Das ist jetzt kein spannendes Resultat, das wussten wir schon vorher, da $S^1$ unendlich viele Punkte, und der ein-punkt-Raum nur einen Punkt enthält, es kann also schon keine Bijektion von Mengen geben.

Eine interessante Fragestellung ist: Gilt $S^1 \cong \mathbb{R}$? Auch hier lässt sich die Frage leicht mit nein beantworten, immerhin ist der Kreis kompakt, und die reelle Gerade nicht, auch hierfür kommen wir ohne Homotopie aus.

Eine Schwierigere Frage ist: gilt $S^1 \cong [0,1]$? Beide Räume sind kompakt, dass gerade erwähnte Argument funktioniert nicht.

Wir könnten nun also die Homotopiegruppe von $[0,1]$ ausrechnen. Das ist aber, falls wir dies naiv machen wollen, ähnlich kompliziert, wie der Fall von $S^1$.

In diesem Fall hilt uns ein Tool, was wir im folgenden Entwickeln wollen: Homotopie von stetigen Abbildungen.

# 3 Homotopieäquivalenz von punktierten topologischen Räumen

Wir haben bereits gesehen, was es bedeutet, dass zwei Wege weghomotop sind. Im Folgenden wollen wir definieren, wann zwei Abbildungn $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotop sind. Die Anschauung ist wieder: Die beiden Abbildungen lassen sich stetig ineinander überführen.

Homotopie gibt uns dann eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Morphismen zwischen zwei punktierten Topologischen Räumen. Wir werden sehen, dass diese Äquivalenzrelation kompatibel mit der Verknüpfung von Morphismen ist. Dies erlaubt die Kosntruktion der Homotopiekategorie $\mathbf{Top}_*^H$, mit einem Vergiss-Funktor $U\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*^H$.

Wir werden sehen, dass der Funktor $\pi_1$ durch diese Kategorie faktorisiert, es gibt also einen Funktor $F\colon \mathbf{Top}_*^H \to \mathbf{Grp}$, sodass $F \circ U = \pi_1$.

Wir sehen sofort: Wenn zwei Räume in $\mathbf{Top}_*^H$ isomorph sind, so haben sie isomorphe Fundamentalgruppen. Wir werden dann sehen: $[0,1] \cong \{0\}$ in $\mathbf{Top}_*^H$, und damit folgt $\pi_1([0,1], 0) = \pi_1(\{0\}, 0) = 0$. Also gilt: $[0,1] \ncong S^1$.

Wir beginnen also mit der Definition der Homotopie von zwei Abbildungen:

**Definition 8.** *Seien $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwei stetige Abbildungen. Dann heißen $f$ und $g$* homotop*, in Zeichen: $f \sim g$, falls es eine stetige Abbildung $H\colon [0,1] \times X \to Y$ gibt, sodass $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt, sowie $H(s, x_0) = y_0$ für alle $s \in [0,1]$ gilt.*

*Wir nennen $H$ eine Homotopie von $f$ nach $g$.*

**Lemma 9.** *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Top}_*}((X,x_0),(Y,y_0))$ *für alle punktierten topologischen Räume $(X,x_0)$ und $(Y,y_0)$.*

*Beweis.* Der Beweis ist analog zu dem Beweis, dass Weghomotopie eine Äquivalenzrelation auf $\pi_1^{\mathrm{pre}}$ ist. □

**Lemma 10.** *Diese Äquivalenzrelation ist verträglich mit der Verknüpfung von Abbildungen, d.h. falls $g \sim g'$, dann gilt $f \circ g \circ h \sim f \circ g' \circ h$ für alle $f, g, g', h$, sodass die jeweiligen Verknüpfungen definiert sind.*

*Beweis.* Wir zeigen nur $f \circ g \sim f \circ g'$, der Beweis mit Verknüpfungen von rechts funktioniert analog.

Sei $g \sim g'$, und $H$ eine Homotopie von $g$ nach $g'$.

Dann ist $f \circ H$ eine Homotopie von $f \circ g$ nach $f \circ g'$. □

**Definition 11.** *Diese Verträglichkeit erlaubt uns die Definition der Homotopieketegorie: Als Objekte nehmen wir wieder die punktierten topologischen Räume, also*

$$\mathrm{Ob}(\boldsymbol{Top}_*^H) \coloneqq \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Top}_*).$$

*Als Morphismen zwischen zwei Räumen $(X,x_0)$ und $(Y,y_0)$ setzen wir:*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Top}_*^H}((X,x_0),(Y,y_0)) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Top}_*}((X,x_0),(Y,y_0))/\sim,$$

*das heißt Abbildungen in der Homotopiekategorie sind Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen modulo Homotopie.*

*Wir haben gerade eben gesehen, dass Homotopie mit der Verknüpfung von Abbildungen verträglich ist, wir bekommen also eine wohldefinierte Verknüpfungsstruktur auf $\boldsymbol{Top}_*^H$, wir erhalten somit eine Kategorie.*

Wir haben einen Vergissfunktor $U\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*^H$, der die Identität auf Objekten ist, und eine Abbildung $f$ auf $U(f) \coloneqq [f]$ (Äquivalenzklasse modulo Homotopie) schickt.

Beachte: Zwei punktierte topologische Räume $(X,x_0)$ und $(Y,y_0)$ sind isomorph in $\mathbf{Top}_*^H$, falls es stetige Abbildungen $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ und $g\colon (Y,y_0) \to (X,x_0)$ gibt, sodass $[g \circ f] = [\mathrm{id}_X]$ und $[f \circ g] = [\mathrm{id}_Y]$ gilt. In anderen Worten: $g \circ f$ ist homotop zur Identitätsabbildung auf $X$, und $f \circ g$ ist homotop zur Identitäsabbildung auf $Y$.

**Definition 12.** *Seien* $(X, x_0)$ *und* $(Y, y_0)$ *punktierte topologische Räume.*

*Sind* $(X, x_0)$ *und* $(Y, y_0)$ *isomorph in* $\boldsymbol{Top}_*^H$*, so sagen wir:* $(X, x_0)$ *und* $(Y, y_0)$ *sind* homotopieäquivalent*.*

**Beispiel 13.** *Sei* $X \coloneqq ([0,1], 0)$ *das abgeschlossene Interval, und* $Y \coloneqq (\{0\}, 0)$ *der Ein-Punkt-Raum.*

*Dann sind* $X$ *und* $Y$ *homotopieäquivalent:*

*Betrachte die Abbildung* $f\colon X \to Y, x \mapsto 0$, $g\colon Y \to X, 0 \mapsto 0$*. Dann ist* $f \circ g = \mathrm{id}_Y$*, inspesondere also* $[f] \circ [g] = [\mathrm{id}_Y]$*.*

*Andererseits ist* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ *für alle* $x \in [0,1]$*. Betrachte die stetige Abbildung*

$$\begin{aligned} H\colon [0,1] \times X &\to X \\ (s, x) &\mapsto sx. \end{aligned}$$

*Dann ist* $H(0,x) = 0x = 0 = (g \circ f)(x)$ *und* $H(1,x) = 1x = x = \mathrm{id}_X(x)$*.* $H$ *ist also eine Homotopie von* $g \circ f$ *nach* $\mathrm{id}_X(x)$*.*

*Somit folgt:* $X$ *und* $Y$ *sind homotopieäquivalent.*

Die einzige Zutat, die uns also noch fehlt, ist zu beweisen, dass $\pi_1$ über die Homotopiekategorie faktorisiert. Auf Objekten ist dies klar, da beide Kategorien von topologischen Räumen die selben Objekte haben.

Wir müssen also noch zeigen:

**Lemma 14.** *Falls* $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *zwei stetige Abbildungen punktierter topologischer Räume sind, so gilt*

$$f \sim g \implies \pi_1(f) = \pi_1(g).$$

*Beweis.* Sei $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.

Wir müssen zeigen: $[f \circ \gamma] = [g \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$. Wir wissen: $[f] = [g]$, also existiert eine Homotopie $H$ von $f$ nach $g$.

Wir müssen eine Weghomotopie von $f \circ \gamma$ nach $g \circ \gamma$ konstuieren.

Betrachte dazu die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} G\colon [0,1] \times [0,1] &\to Y \\ (s, t) &\mapsto H(s, \gamma(t)). \end{aligned}$$

Es gilt: $G(0,t) = H(0, \gamma(t)) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$, sowie $G(1,t) = H(1, \gamma(t)) = g(\gamma(t)) = (g \circ \gamma)(t)$ für alle $t$.

Andereseits ist $G(s,0) = H(s,\gamma(0)) = H(s,x_0) = y_0$, und analog $G(s,1) = y_0$.

$G$ ist also eine Weghomotopie von $f \circ \gamma$ nach $g \circ \gamma$. □

Wenn wir nun alle unsere Resultate zusammenpacken, erhalten wir: $S^1 \ncong [0,1]$.

Um noch zum Beispiel des Anfangs zurückzukommen (Torus vs Sphäre):

Wir definieren den Torus als $T := S^1 \times S^1$ mit der Produkttopologie. Man kann zeigen: Falls $X, Y$ topologische Räume sind, so gilt: $\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0) \cong \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$. (Der Beweis hiervon nutzt die Universelle Eigenschaft von Produkten, universelle Eigenschaften sind ein kategorien-theoretisches Konstrukt! Mehr Informationen dazu gibt es im Kapitel über Limiten im Buch.) Also erhalten wir: $\pi_1(T,x_0) = \mathbb{Z}^2$.

Andererseits gilt $\pi_1(S^2,x_0) = 0$ (für jeden Basispunkt $x_0$). Das ist intuitiv klar: Eine Sphäre hat kein Loch, wir können also jeden Weg zu einem Punkt zusammenziehen. Ein Beweis für diese Aussage ist aber nicht trivial, wir werden ihn an dieser Stelle also nicht machen können.

Da $0 \ncong \mathbb{Z}^2$ folgt $T \ncong S^2$.

# 4 Literaturhinweis

Für die Leute, die das Thema interessant fanden, wollen wir im Folgenden noch einige Literaturhinweise geben.

Einen guten Überblick über allgemeine Topologie bietet [4].

Die erste Fundamentalgruppe, beziehungsweise Homotopieäquivalenzen von Räumen ist ein Teilgebiet der algebraischen Topologie. Das Standardwerk auf diesem Gebiet (welches auch sehr lesbar geschrieben ist), ist [3]. Ein anderes Einführungswerk ist [2].

Eine gute Einführung in die (stabile) Homotopie-Theorie ist [1].

# Literatur

[1] J. F. Adams. *Stable Homotopy Theory.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1969.

[2] W. Fulton. *Algebraic Topology: A First Course.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[4] Klaus Jänich. *Topology.* Springer Verlag New York, 1984.