

Лабораторная работа №5

Модель эпидемии (SIR)

Кадирова Мехрубон Рахматжонова

Содержание

Цель работы.....	1
Задание.....	2
Выполнение лабораторной работы.....	2
Реализация модели в xcoss.....	2
Реализация модели с помощью блока Modelica в xcoss.....	5
Упражнение.....	7
Задание для самостоятельного выполнения.....	9
Выводы.....	15

Цель работы

Построить модель SIR в *xcos* и OpenModelica.

Задание

1. Реализовать модель SIR в в *xcos*;
2. Реализовать модель SIR с помощью блока Modelica в в *xcos*;
3. Реализовать модель SIR в OpenModelica;
4. Реализовать модель SIR с учётом процесса рождения / гибели особей в *xcos* (в том числе и с использованием блока Modelica), а также в OpenModelica;
5. Построить графики эпидемического порога при различных значениях параметров модели (в частности изменяя параметр μ);
6. Сделать анализ полученных графиков в зависимости от выбранных значений параметров модели.

Выполнение лабораторной работы

Задача о распространении эпидемии описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta s(t)i(t); \\ \dot{i} = \beta s(t)i(t) - \nu i(t); \\ \dot{r} = \nu i(t), \end{cases}$$

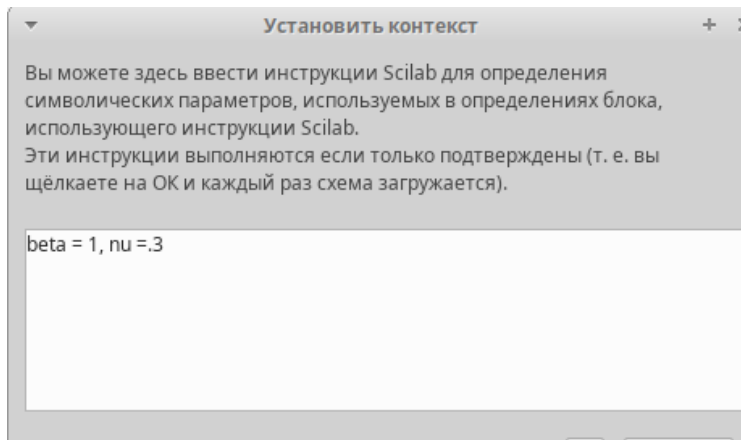
где β – скорость заражения, ν – скорость выздоровления.

Реализация модели в xcos

Зафиксируем начальные данные:

$$\beta = 1, \nu = 0,3, s(0) = 0,999, i(0) = 0,001, r(0) = 0.$$

В меню Моделирование, Установить контекст зададим значения переменных β и ν (рис. [-@fig:001]).

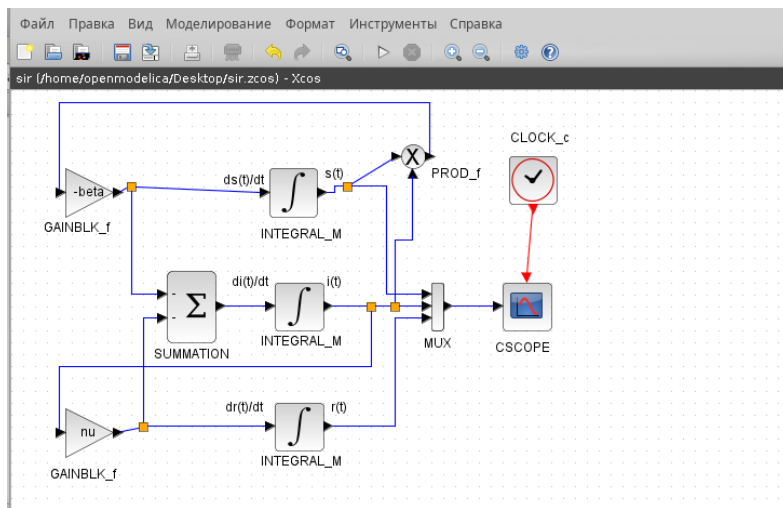


Задание переменных окружения в xcos

Для реализации модели (рис. [-@fig:002]) потребуются следующие блоки xcos:

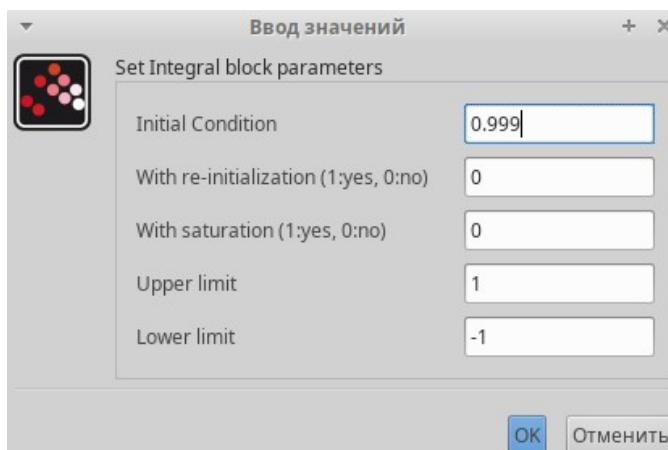
- CLOCK_c – запуск часов модельного времени;
- CScope – регистрирующее устройство для построения графика;
- TEXT_f – задаёт текст примечаний;
- MUX – мультиплексер, позволяющий в данном случае вывести на графике сразу несколько кривых;
- INTEGRAL_m – блок интегрирования;
- GAINBLK_f – в данном случае позволяет задать значения коэффициентов β и ν ;

- SUMMATION – блок суммирования;
- PROD_f – поэлементное произведение двух векторов на входе блока.

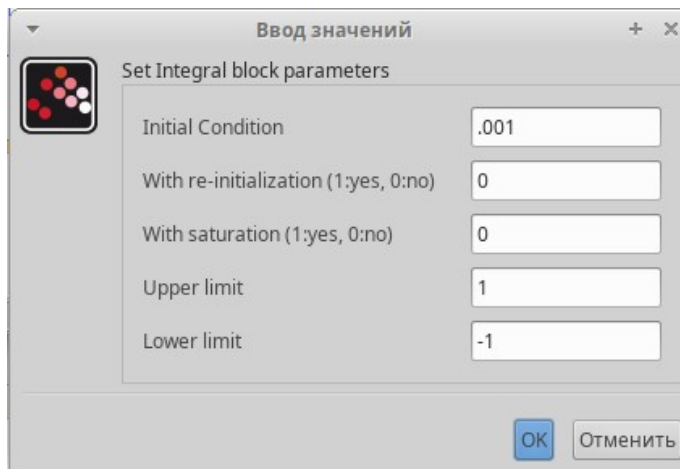


Модель SIR в xcos

В параметрах верхнего и среднего блока интегрирования необходимо задать начальные значения $s(0)=0,999$ и $i(0)=0,001$ (рис. [-@fig:003],[-@fig:004]).

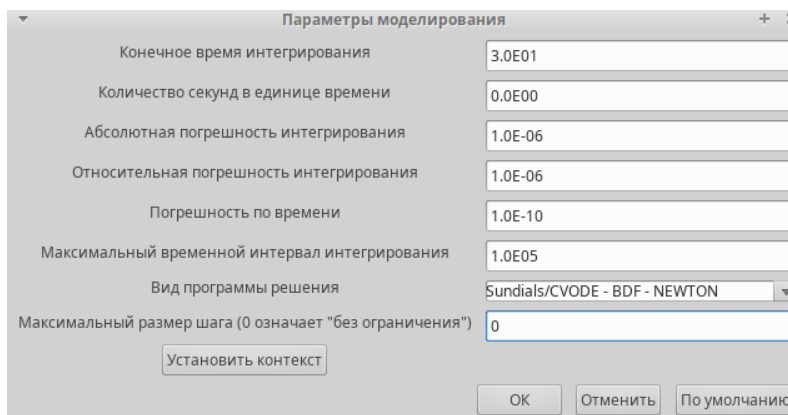


Задание начальных значений в блоках интегрирования



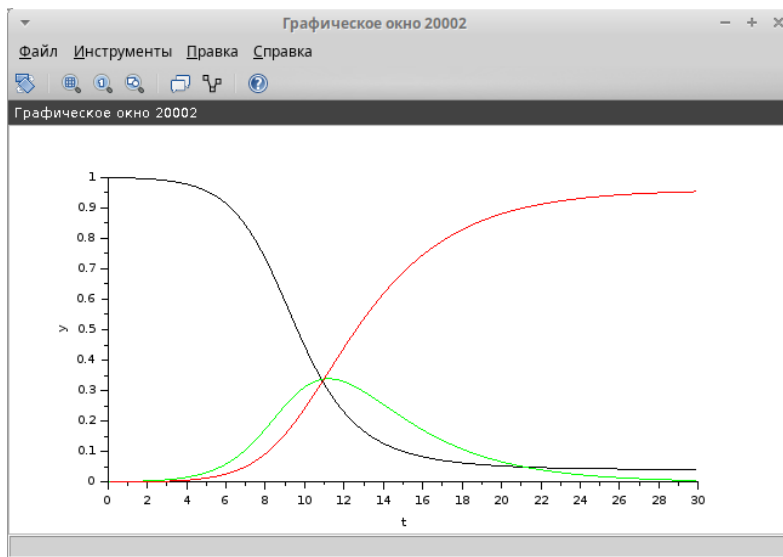
Задание начальных значений в блоках интегрирования

В меню Моделирование, Установка зададим конечное время интегрирования, равным времени моделирования, в данном случае 30 (рис. [-@fig:005]).



Задание конечного времени интегрирования в xcos

Результат моделирования представлен на рис. [-@fig:006], где черной линией обозначен график $s(t)$ (динамика численности уязвимых к болезни особей), красная линия определяет $r(t)$ — динамику численности выздоровевших особей, наконец, зеленая линия определяет $i(t)$ — динамику численности заражённых особей. Пересечение трёх линий определяет порог эпидемии.

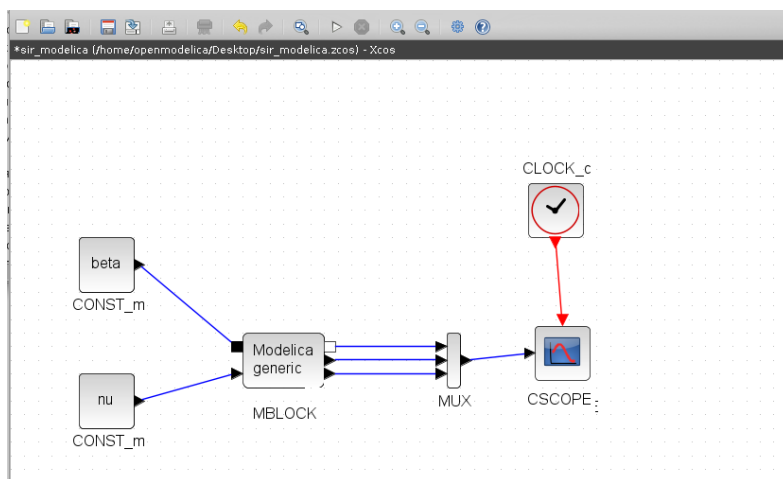


Эпидемический порог модели SIR при $\beta=1, \nu=0.3$

Реализация модели с помощью блока Modelica в xcOS

Готовая модель SIR представлена на рис. [-@fig:007].

Для реализации модели SIR с помощью языка Modelica помимо блоков CLOCK_c, CSCOPE, TEXT_f и MUX требуются блоки CONST_m — задаёт константу; MBLOCK (Modelica generic) — блок реализации кода на языке Modelica. Задаём значения переменных β и ν (рис. [-@fig:001]).



Модель SIR в xcOS с применением блока Modelica

Параметры блока Modelica представлены на рис. [-@fig:008], [-@fig:009]. Переменные на входе ("beta", "nu") и выходе ("s", "i", "r") блока заданы как внешние ("E").

Ввод значений

Set Modelica generic block parameters

Input variables: ["beta";"nu"]

Input variables types: ["E";"E"]

Output variables: ["s";"i";"r"]

Output variables types: ["E";"E";"E"]

Parameters in Modelica:

Parameters properties:

Function name: generic

OK Отменить

Параметры блока Modelica для модели SIR

Ввод значения

Function definition in Modelica

Here is a skeleton of the functions which you should edit

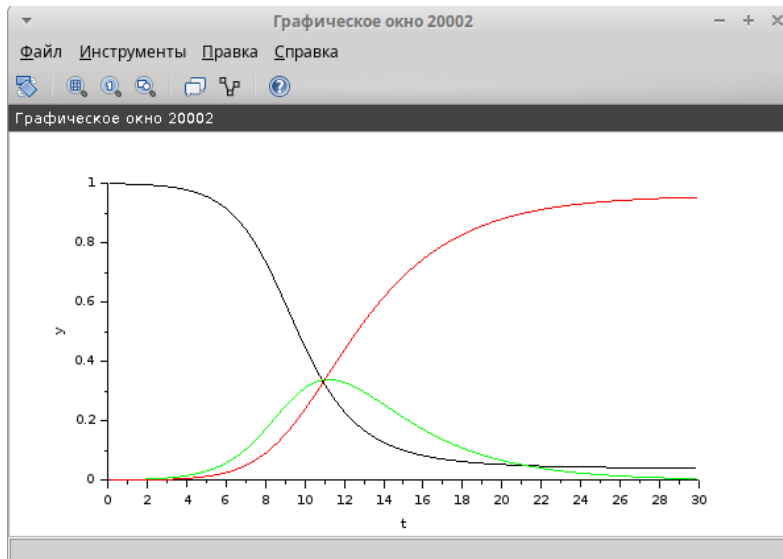
```
class generic
  ///automatically generated ///
  //input variables
  Real beta,nu;
  //output variables
  Real s,i,r;
  ////do not modify above this line ///

  // Начальные значения:
  Real s(start=.999), i(start=.001), r(start=.0);
  // модель SIR:
  equation
    der(s)=-beta*s*i;
    der(i)=beta*s*i-nu*i;
    der(r)=nu*i;
  end generic;
```

OK Отменить

Параметры блока Modelica для модели SIR

В результате получаем график (рис. [-@fig:010]), построенный с помощью блока Modelica идентичный графику (рис. [-@fig:006]), построенному без них.



Эпидемический порог модели SIR при $\beta=1, \nu=0.3$

Упражнение

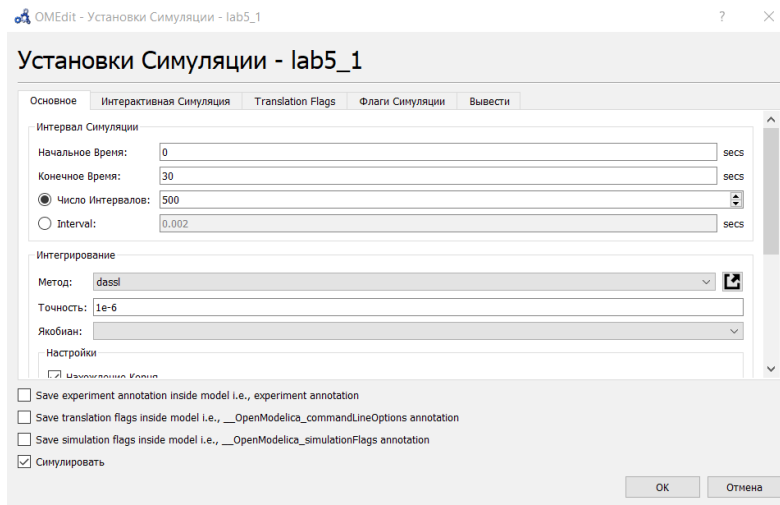
В качестве упражнения нам надо построить модель SIR на OpenModelica. Синтаксис почти такой же как и на Modelica. Нужно задать параметры, начальные значения и систему дифференциальных уравнений.

```
parameter Real I_0 = 0.001;
parameter Real R_0 = 0;
parameter Real S_0 = 0.999;
parameter Real beta = 1;
parameter Real nu = 0.3;
parameter Real mu = 0.5;
```

```
Real s(start=S_0);
Real i(start=I_0);
Real r(start=R_0);
```

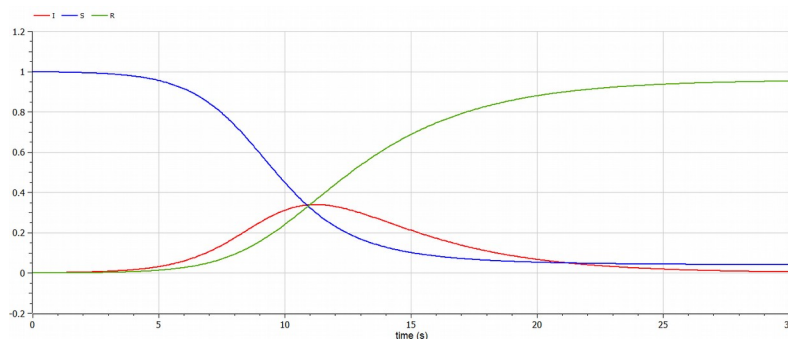
```
equation
  der(s)=-beta*s*i;
  der(i)=beta*s*i-nu*i;
  der(r)=nu*i;
```

Теперь выполним симуляции, задав конечное время 30 с (рис. [-@fig:011]).



Установка симуляции в OpenModelica

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:012]). Он идентичен предыдущим графикам выполненным в xcos.



Эпидемический порог модели SIR при $\beta=1, \nu=0.3$

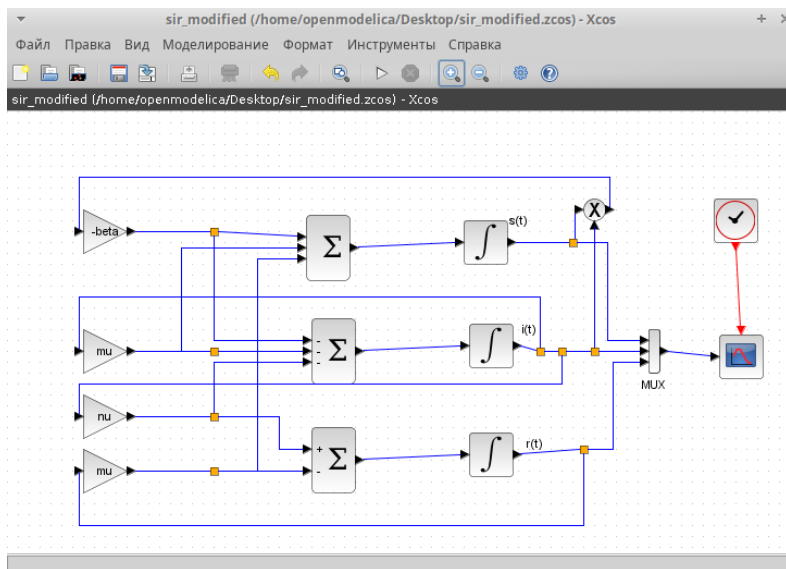
Задание для самостоятельного выполнения

Предположим, что в модели SIR учитываются демографические процессы, в частности, что смертность в популяции полностью уравнивается рождаемостью, а все рожденные индивидуумы появляются на свет абсолютно здоровыми. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta s(t)i(t) + \mu(N - s(t)); \\ \dot{i} = \beta s(t)i(t) - \nu i(t) - \mu i(t); \\ \dot{r} = \nu i(t) - \mu r(t), \end{cases}$$

где μ — константа, которая равна коэффициенту смертности и рождаемости.

Реализуем эту модель в xcos. Тут нам понадобятся три блока суммирования и 4 блока констант (добавляется константа ν).



Модель SIR с учетом демографических процессов в xcos

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:014]).

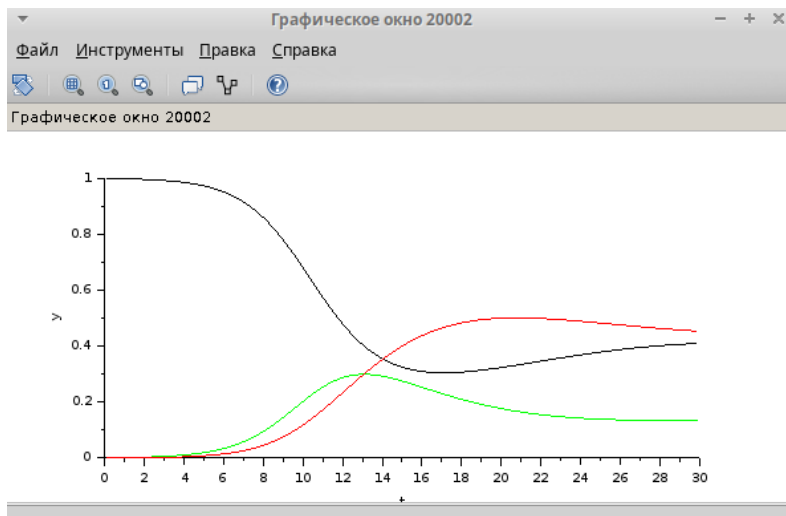
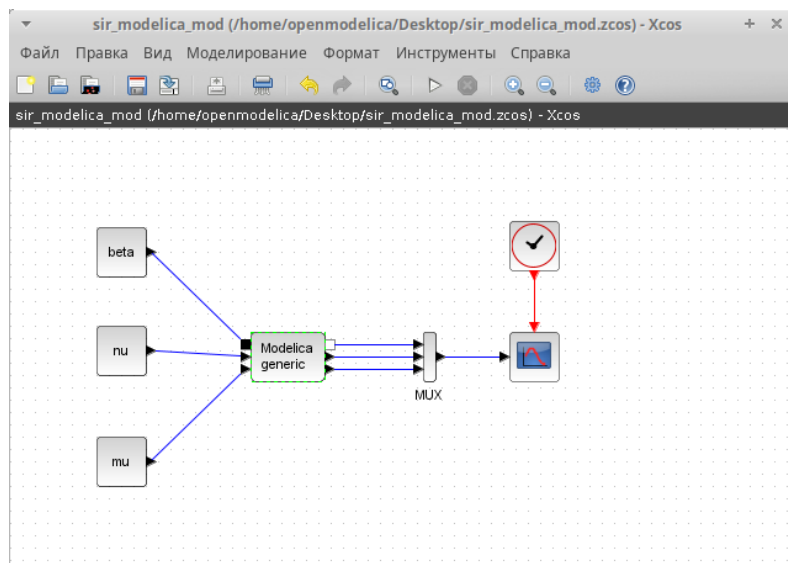


График модели SIR с учетом демографических процессов

Теперь реализуем модель SIR с учетом демографических процессов в xcos с помощью блоков Modelica (рис. [-@fig:015]).

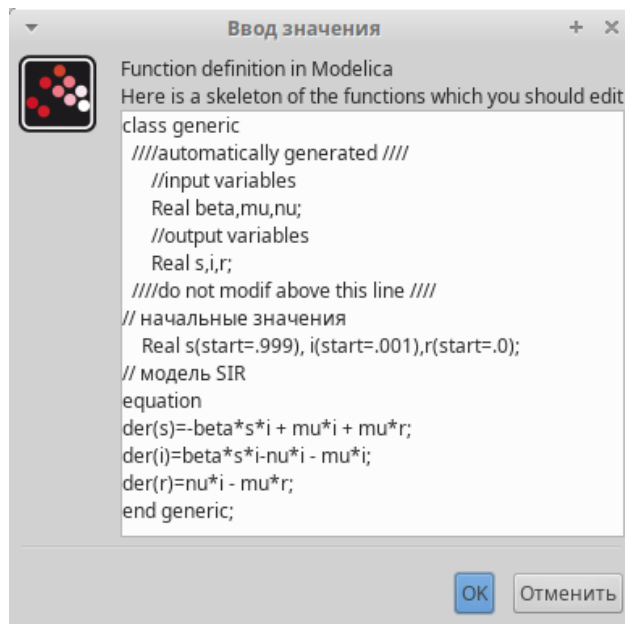


Модель SIR с учетом демографических процессов в xcos с применением блока Modelica

Параметры блока Modelica представлены на рис. [-@fig:016],[-@fig:017]. Переменные на входе ("beta", "nu", "mu") и выходе ("s", "i", "r") блока заданы как внешние ("E").

Ввод значений	
Set Modelica generic block parameters	
Input variables:	["beta","mu","nu"]
Input variables types:	["E","E","E"]
Output variables:	["s","i","r"]
Output variables types:	["E","E","E"]
Parameters in Modelica:	
Parameters properties:	
Function name:	generic
<div> <div>OK</div> <div>Отменить</div> </div>	

Параметры блока Modelica для модели SIR с учетом демографических процессов



Параметры блока *Modelica* для модели *SIR* с учетом демографических процессов

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:018]).

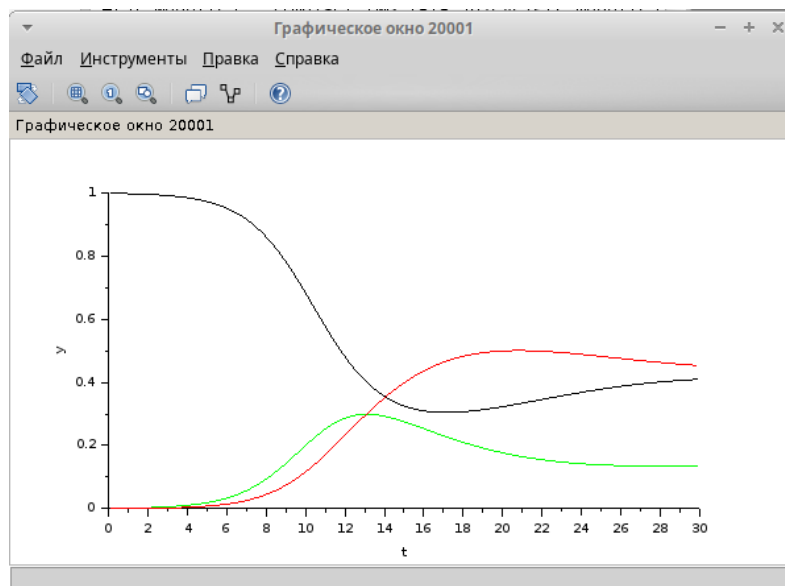


График модели *SIR* с учетом демографических процессов

Реализуем модель *SIR* с учетом демографических процессов на OpenModelica.

```

parameter Real I_0 = 0.001;
parameter Real R_0 = 0;
parameter Real S_0 = 0.999;
parameter Real N = 1;
  
```

```

parameter Real beta = 1;
parameter Real nu = 0.3;
parameter Real mu = 0.5;

```

```

Real s(start=S_0);
Real i(start=I_0);
Real r(start=R_0);

```

equation

```

der(s)=-beta*s*i + mu*i + mu*r;
der(i)=beta*s*i-nu*i - mu*i;
der(r)=nu*i - mu*r;

```

Выполнив симуляцию, получим следующий график (рис. [-@fig:019]).

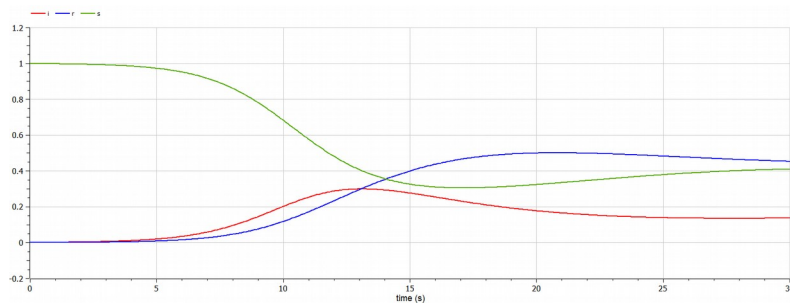


График модели SIR с учетом демографических процессов

Теперь построим графики при разных значениях параметров.

1) $\beta=1$, $\nu=0.3$

- $\mu=0.1$

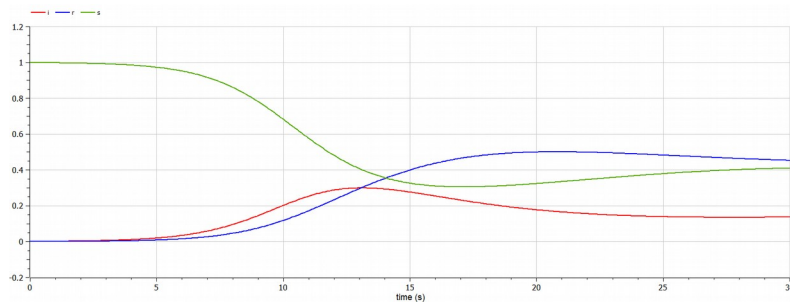


График модели SIR с учетом демографических процессов

- $\mu=0.3$

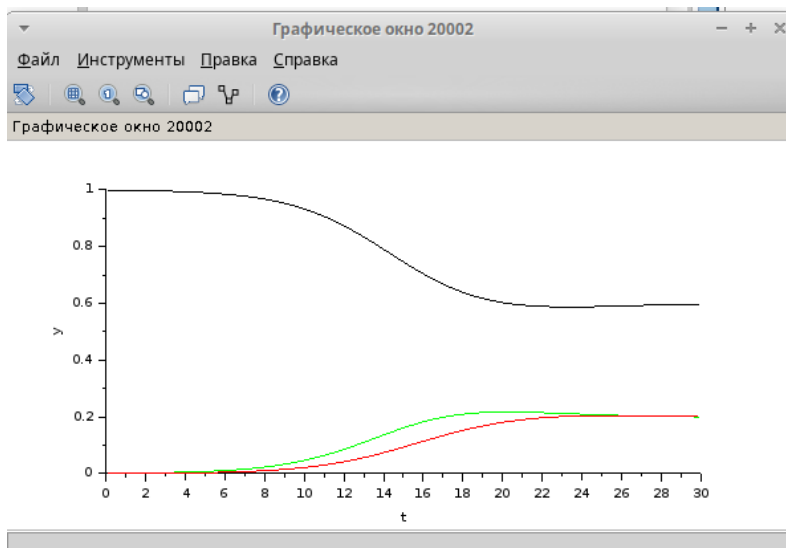


График модели SIR с учетом демографических процессов

- $\mu=0.9$

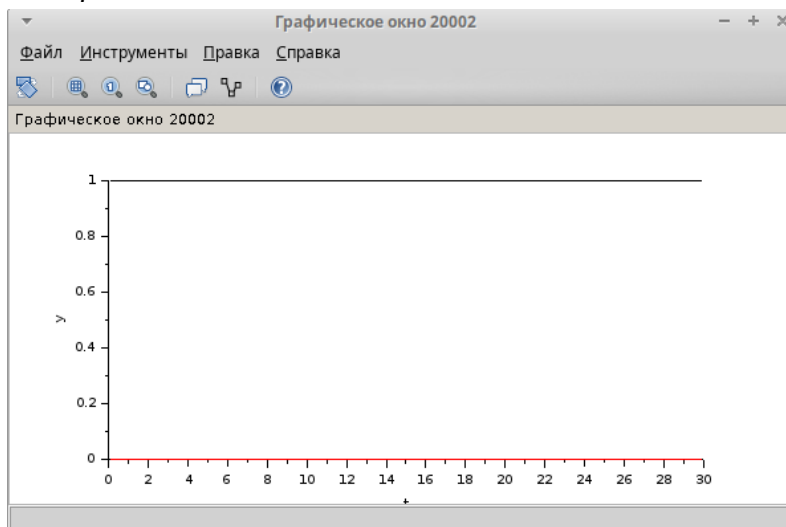


График модели SIR с учетом демографических процессов

- 2) $\beta=1, \nu=0.1$

- $\mu=0.1$

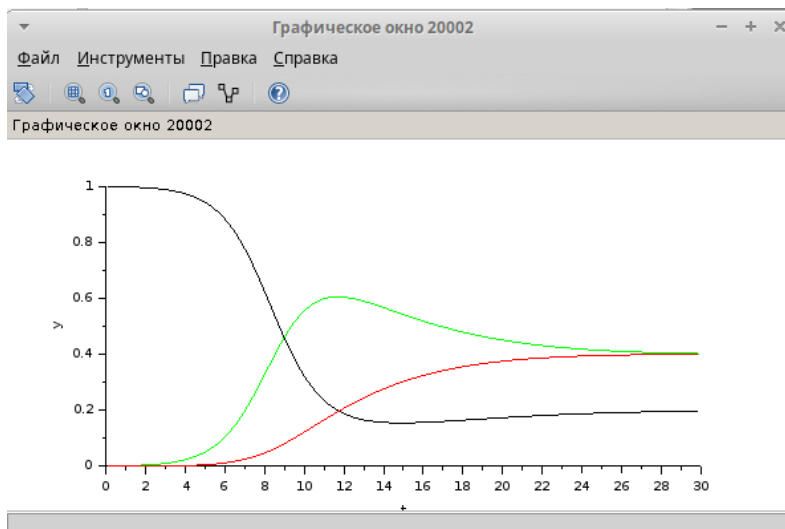


График модели *SIR* с учетом демографических процессов

- $\mu=0.9$

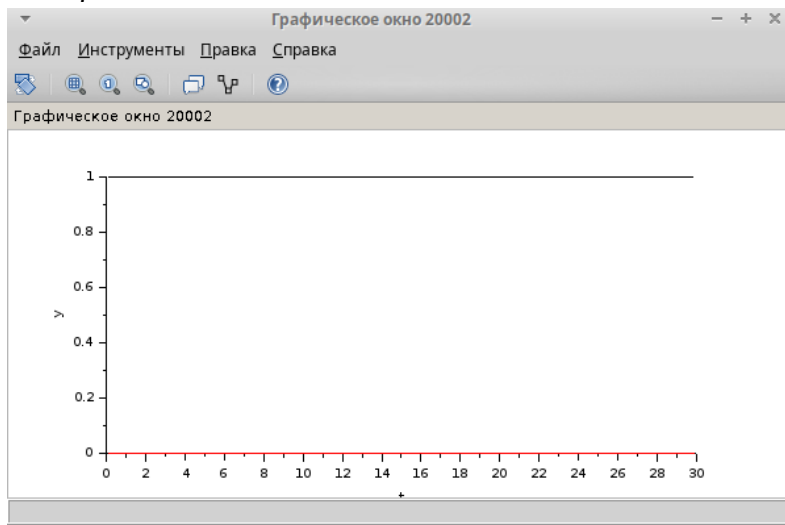


График модели *SIR* с учетом демографических процессов

- 3) $\beta=4, \nu=0.3, \mu=0.2$

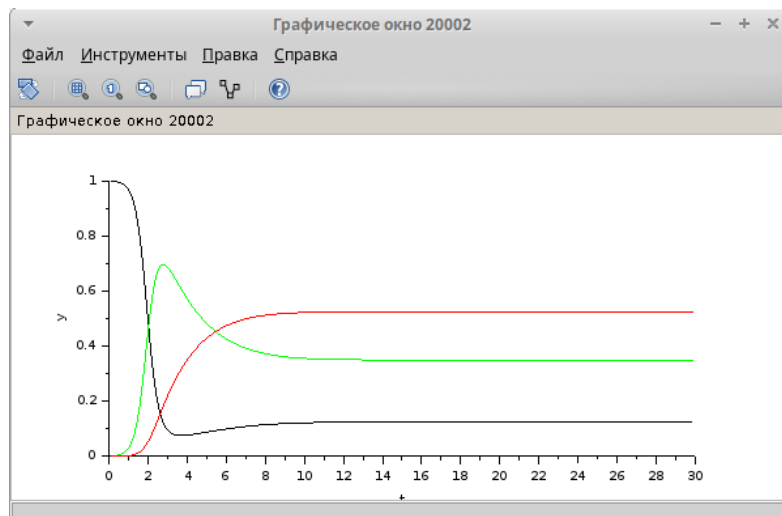


График модели SIR с учетом демографических процессов

Исходя из анализа графиков, можно сделать вывод, что чем выше значение любого из параметров, тем быстрее система достигает стационарного состояния. При высоком коэффициенте заражения β система быстро проходит через пик развития эпидемии и достигает стационарного состояния.

Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы была построена модель SIR в xcos и OpenModelica.