

中图分类号: 017, TP391, TB23  
学科分类号: 070104

论文编号: 1028708 06-0018  
密 级:

# 硕士学位论文

## Voronoi 图及其应用研究

研究生姓名	宗大伟
学科、专业	应用数学
研究 方 向	计算几何及其应用
指 导 教 师	唐月红 副教授

南京航空航天大学  
研究生院 理学院  
二〇〇六年三月

**Nanjing University of Aeronautics and Astronautics**

**The Graduate School**

**College of Science**

# **Voronoi Diagrams and its Applications**

**A Thesis in**

**Mathematics**

**By**

**Zong Dawei**

**Advised by**

**Associate Professor Tang Yuehong**

**Submitted in Partial Fulfillment**

**of the Requirements**

**for the Degree of**

**Master of Science**

**March, 2006**

# 承诺书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本人授权南京航空航天大学可以有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

作者签名：\_\_\_\_\_

日 期：\_\_\_\_\_

## 摘 要

Voronoi 图是计算几何中常用而又重要的几何结构,它有很强的实用价值. 本文首先介绍了平面点集上的 Voronoi 图和 Voronoi 图的一些生成方法,着重介绍了平面扫描生成算法的主要步骤. 之后,提出与 Voronoi 图相对偶的三角剖分问题. 利用 Voronoi 图良好的特性,结合实际应用背景,本文根据空域中航路点的自然分布,利用计算几何的思想建立其 Voronoi 图,以此为依托,在文[10]的研究基础上,对于空域扇区优化划分问题进行了研究,将文[10]中投影平面上的空域划分,拓展到三维空域中,并以工作负荷均衡为优化原则,对空域中的有限元进行优化组合,该项研究对于提高空域容量和保障飞行安全具有重要作用. 进一步,本文将 Voronoi 图的概念拓展到了一般的参数曲面,即曲面上的 Voronoi 图的生成,曲面上两点之间的距离由两点之间的测地距离所定义,由此得到了在曲面上用分治法构造 Voronoi 图的一般方法,且该方法与曲面如何参数化无关. 本文用该方法,在球面上进行了 Voronoi 图的划分. 许多限制在曲面上的曲面构造方法,基本上是基于对曲面的三角化的插值方法,三角化过程相当复杂,计算代价非常大,对所用插值方法影响非常大,而由在一般参数曲面上所得的 Voronoi 图很方便即可求得其对应的三角网格,本文对于球面 Voronoi 图求得上相应的对偶三角网格,在此基础上,对球面上的曲面插值问题进行了研究.

关键词: 三角剖分, Voronoi 图, 扇区划分, 曲面, 三角插值

## Abstract

Voronoi diagram is a very important and practical geometric construction, and has great value. In this paper, we first make a minute discussion as to the Voronoi diagram on plane, and some method of constructing the diagram, especially the method of sweeping-line. Then the parts of triangular interpolates on the plane is also introduced. The airspace's sector partition is an importance of research at the domain of the airspace management. It has very important effects on increasing airspace's capability and ensuring security. With the aid of Voronoi diagram, we extend the method of sector optimum partition based on metamorphic Voronoi polygon to three-dimensional airspace, and optimization of combination of those finite elements is achieved based on the rule about balance of controller's workload. Then we extend the concept of Voronoi diagrams to parameterized surfaces, say the Voronoi diagrams on convex surfaces, the distance between two points on the surface is defined by the geodesic connecting them. We get a general divide-conquer method, especially to sphere; we compute the Voronoi diagram on the sphere. The method for constructing interpolates to data arbitrarily located on convex surfaces are based on the interpolation method of triangulation on surface, because of the complicity of triangulation, the price of compute is very high. So based on the Voronoi diagram on surface, especially, we presented an algorithm for constructing a smooth computable function  $f$  defined over the surface of a sphere and interpolating a set of  $n$  data values  $\zeta_i$  associated with  $n$  locations  $p_i$  on the surface of the sphere.

**Key word:** Triangulation, Voronoi diagram, sector partition, surfaces, triangular interpolation

# 目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 Voronoi 图的生成方法概述.....	1
1.2 Voronoi 图的广泛应用性.....	1
1.3 课题研究背景.....	2
1.4 主要研究内容及结构.....	3
第二章 Voronoi 图和平面点集的三角剖分.....	5
2.1 基本定义.....	5
2.2 Voronoi 图生成方法.....	6
2.3 平面点集的三角剖分.....	8
第三章 Voronoi 图在三维管制空域扇区优化划分中的应用.....	13
3.1 扇区数量的决定和优化目标的模型建立.....	13
3.2 确定三维空域的有限元划分方法.....	14
3.3 扇区划分的有限单元优化组合方案.....	15
3.4 ××机场管制区扇区优化划分的实现.....	17
第四章 Voronoi 图在球面上的推广及其应用.....	23
4.1 基本概念.....	23
4.2 球面上 Voronoi 图的生成方法.....	25
4.3 球面上的插值方法.....	30
第五章 总结与展望.....	37
参考文献.....	38
致谢.....	41
攻读硕士学位期间发表的主要论文.....	41

## 图表清单

图 2.1: Delaunay 三角剖分与对应的 Voronoi 图.....	10
图 2.2: 外接圆准则.....	11
图 2.3(a): 局部优化前.....	11
图 2.3(b): 局部优化后.....	11
图 3.1: 飞行高度层配备标准示意图.....	15
图 3.2: ××机场管制区空域结构.....	17
图 3.3: 管制空域结构图.....	19
图 3.4(a): 低层空域 .....	19
图 3.4(b): 低层有限单元优化结果.....	19
图 3.5 (a): 高层空域.....	20
图 3.5(b): 高层有限单元优化结果.....	20
图 3.6(a): 空域结构中扇区 1.....	20
图 3.6(b): 空域结构中扇区 2.....	20
图 3.6(c): 空域结构中扇区 3.....	20
图 3.7: 低层的优化结果.....	21
图 3.8: 高层的优化结果.....	21
图 3.9(a): 空域结构中扇区 1.....	22
图 3.9(b): 空域结构中扇区 2.....	22
图 3.9(c): 空域结构中扇区 3.....	22
图 4.1 (a): 分割链示意 1.....	27
图 4.1 (b): 分割链示意 2.....	27
图 4.2: 合并相邻子点集的 Voronoi 图.....	28
图 4.3: 球面上的 Voronoi 图.....	29
图 4.4: 球面上的 Voronoi 图与其对应的三角网格.....	30
图 4.5: 三角域.....	32
图 4.6: 球面三角网格 a.....	34
图 4.7: 球面三角网格 b.....	34
图 4.8: 球面上插值的点.....	35
图 4.9: 球面上点插值所得值.....	35
表 3.1: 低层空域各单元负荷表.....	18
表 3.2: 高层空域各单元负荷表.....	18
表 3.3: 低层空域各单元负荷表.....	21
表 3.4: 高层空域各单元负荷表.....	21
表 4.1: 球面上的点的地理坐标.....	33

# 第一章 绪 论

## 1.1 Voronoi 图的生成方法概述

1975 年, Shamos 和 Hoey 在 IEEE Symposium on Foundation of Computer Science 上联合发表的论文“Closest-point problems”是 Voronoi 图研究的里程碑, 从此计算几何诞生. 可见 Voronoi 图在计算几何中占有非常重要的地位. 在不同领域, Voronoi 图有时也被称为 Thiessen 多边形、Dirichlet 网格、或 Wigner-Seitz 区域等, 它是关于空间邻近关系的一种基础数据结构<sup>[1][2]</sup>.

Voronoi 图的计算机自动生成方法研究源于 20 世纪 70 年代, 主要分为两类: 一类是直接法, 即直接生成 Voronoi 图, 比如半平面法, 增量法, 分治法, 扫描线法等; 一类是间接法, 这类方法有换边法, 升维法等.

早期平面 Voronoi 图的构造, 通常采用增量构造算法的一种迭代构造法, 而 Shamos 和 Hoey<sup>[3]</sup>提出的采用分治构造法构造平面点集 Voronoi 图算法, 其核心是 Shamos-Hoey 扫描缝合两子区域算法, 对于 Euclidean 空间, 其复杂性为  $O(n \log n)$ .

平面 Voronoi 图的定义可以推广到三维或高维, 也可以推广到二阶或高阶 (以两个生成点或多个生成点为一组划分邻近区域), 也可以推广到  $L_1$  或  $L_\infty$  等其它度量<sup>[4]</sup>, 也可以进一步推广到生成点包括线段或多边形的广义 Voronoi 图<sup>[5]</sup>. 另外, 移动点的 Voronoi 图<sup>[6][7]</sup>, 带权的 Voronoi 图<sup>[8]</sup>, 以及曲面上的 Voronoi 图<sup>[9][10]</sup>等, 因有着具体的应用背景, 相应的生成方法也受到了人们广泛的研究.

## 1.2 Voronoi 图的广泛应用性

Voronoi 图在计算几何学科中的重要地位, 是由于 Voronoi 图在求解点集或其它几何对象与距离有关的问题时起的重要作用<sup>[11]</sup>而决定的. 这种根据 Voronoi 图的性质对区域的合理划分, 广泛应用在地理学, 气象学, 结晶学, 航天, 核物理学, 机器人等领域. 例如, 它可以应用于运动规划问题, 即在充满障碍物的环境中为机器人寻找一条无碰撞的路径. 解决的方法, 可以利用障碍物的 Voronoi 图, 因为它描述出了距离障碍物最远, 也就是最安全的路径.

随着 Voronoi 图的定义和算法被广泛传播, Voronoi 图的应用领域也在不断扩展. 这些应用实例尽管从专业角度千差万别, 但从 Voronoi 图所发挥的作用角度, 可以归结为如下 3 个方面<sup>[12]</sup>:

- (1) 把 Voronoi 图作为表示各种元素之间关系的一个结构, 通过这个结构可以提取出重要信息. 这样的实例多见于用 Voronoi 图研究自然界物



质结构的性质<sup>[13][14]</sup>.

- (2) 把 Voronoi 图作为一个辅助数据结构, 通过这个数据结构可以完成许多物体形态或邻近关系的计算任务<sup>[15][16]</sup>.
- (3) 把 Voronoi 图作为提高某些几何算法运算速度的重要手段. 一般来说, 二维的 Voronoi 图可以在  $O(n \log n)$  时间内获得, 三维的 Voronoi 图可以在  $O(n^2)$  时间内获得. Voronoi 图的性质决定了它与许多其它几何结构具有内在关系, 通过 Voronoi 图, 许多几何算法可以得到快速运算<sup>[17][18][19]</sup>.

### 1.3 课题研究背景

在空中交通管理中, 空域规划设计是一项十分重要的工作, 它包括确保空中交通安全的安全分析工作, 以及在保证安全前提下的空域结构设计工作. 空中管理部门通常将空域划分成若干个扇区, 每个扇区设立一个管制席位, 进行空中交通的指挥和协调工作. 目前在世界范围内的空域管理规划工作都是参照国际民航组织的文件 Doc8169—OPS/611<sup>[20]</sup>, Doc444-RAC/501<sup>[21]</sup>和 Doc9426-AN/924<sup>[22]</sup>等进行的. 在空域规划设计方面, 国际上先后有多位学者进行了定量研究的讨论: Obrad Babic<sup>[23]</sup>等曾尝试使用模糊数学方法来确定空域的扇区数量; Couluris 和 K. Schmidt 曾分析过空域设计规则的局限性, 建立了一种扇区设计的简单方法; Pawlak<sup>[24]</sup>等人研究了扇区随空中交通流量变化的动态划分问题. 这些空域划分方法和原则多是定性分析, 缺乏相对的科学定量研究. 在这种相对粗糙的方法指导下, 致使各扇区的管制工作负荷很不均衡, 这种不合理的状况限制了空域的整体容量, 也降低了空域的利用率和安全性. 因此, 研究科学合理的空域扇区规划方法成为我国民用航空管理部门提高空中交通安全, 合理分配和使用管制设备设施、管制单位的人力资源和国家空域资源的关键性技术问题.

Daniel Delahaye<sup>[25][26]</sup>将空域看成平面, 在空域平面中随机确定节点, 形成划分平面空域的有限元, 并使用遗传算法进行了扇区优化方法的研究. 该方法的缺陷是节点的随机选定将导致各有限元中的管制员工作负荷难以统计, 因而, 无法在实际中直接使用. 韩松臣<sup>[27]</sup>等人曾经提出使用空域结构的网络拓扑关系进行固定航路, 航线空域的扇区优化尝试, 但该项研究对空域便于管制移交的约束没有进行处理, 使得其研究结果的应用受到了限制. 进一步, 韩松臣<sup>[28]</sup>提出了以导航台, 航线交叉点和空域边界上的航路点为节点, 同样的, 将空域看成平面, 使用 Voronoi 多边形将管制空域划分为安全管制工作负荷的规划基本单位, 为适应

空中交通管制移交等规则的要求,适当合并部分有限单元形成蜕变的 Voronoi 图,在扇区连续性约束下组合有限单元,获得优化的扇区边界线。

显然 Daninel Delahaye<sup>[25][26]</sup>和韩<sup>[27]</sup>将空域看成平面,或在空域平面中随机确定节点,或以固定节点形成划分平面空域的有限元的方法,不仅节点的随机选定将导致各有限元中的管制员工作负荷难以统计,而且由于将实际中的三维空域看成平面,必然会引起之后对于扇区优化选择上的种种问题,导致空域划分的模糊性和难以管理。

飞机机翼上压力分布的估计,分析地球上的降雨量以及大气层中的“温室效应”(包括臭氧层的估计),人体表面的温度分布等,这些问题虽背景不同,但抽去它们的实际意义,都能归之为限制在表面上的曲面构造或二维流形上的曲面构造问题。

一个二维流形上的曲面构造问题,即限制在表面上的曲面构造问题。这类问题的求解不能直接套用在  $R^2$  上的二维构造方法。因此时,平面变为曲面,度量的距离概念发生了变化,不同的曲面(包括平面)有不同的测地距离,除了平面、球等曲面外,大部分曲面的测地距离不易求出。它也不能直接套用 4D 数据超曲面拟合方法,因此时,插值节点并不是独立地分布在  $R^3$  中,而被限制在  $R^3$  中的二维流形上,所以要寻求新的解决方法。由于不同流形有不同的测地距离,把它们都当作欧氏距离处理自然有问题。因此,用传统计算方法不可能得到准确的结果。

关于二维流形上的曲面重构,自 R.E.Barnhill 在文<sup>[29]</sup>中指出其必要性后,开始出现了一些文章,其中大部分方法寻求全局解,且假定二维流形为球面,少数方法寻求局部解。所谓局部解,即函数  $f$  分片地定义且每一片由局部的数据独立确定。在[30-32]中,定义域曲面被推广到凸曲面或亏格为零的曲面。在[32]中,H.Pattmann 提出一个没有类似限制的方法,但要求定义域曲面  $C^2$  光滑。文[33]中去掉了这一限制,但曲面上插值函数需用超限插值法构造。总之,现有的方法或在定义域曲面附加条件,或表面上的函数具有某种限制,定义域曲面通常为球面、凸曲面或亏格为零,表面上的函数可能不是多项式<sup>[33-34]</sup>或高次数多项式或有相对多得多的函数片<sup>[35]</sup>。且这些方法基本上是基于对曲面的三角化的插值方法,三角化过程相当复杂,计算代价非常大,对所用的插值方法有很大的影响。

## 1.4 主要研究内容及结构

本文在文[28]的基础上,对于其使用 Voronoi 多边形将三维管制空域划分为安全管制工作负荷规划基本单位的方法推广到了三维空间中,为更加适应空中交

通管制移交等规则的要求，按照《民航规则》的规定，先将空域划分为不同的高度层，按照一定的概率统计分布，统计其中的工作量负荷，在其上进行优化扇区的工作，由此的扇区划分更趋于合理，更易于管理，并借助于××机场的实例，对于本方法进行了验证。

对于表面上的 Voronoi 图，本文介绍了在其上进行划分的一些区别于平面划分的基本概念，对于基本算法进行了阐述，并特别的，对于球面上的 Voronoi 图进行了划分。在此基础上，借助球面 Voronoi 图的对偶三角网格，进行了对于球面上的曲面的插值构造。

## 第二章 Voronoi 图和平面点集的三角剖分

### 2.1 基本定义

用  $E^d(R^d)$  表示  $d$  维欧几里得空间.

#### 定义2.1 点

用  $p$  表示一个点,  $E^d$  中的点  $p$  定义为一个  $d$  元组  $(x_1, \dots, x_d)$ . 点  $p$  也可以解释为有  $d$  个分量的向量, 此向量的起点为坐标原点, 终点为点  $p$ .

#### 定义2.2 线, 线性簇

$E^d$  中两个点  $p_1, p_2$ , 则线性组合  $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2, (\alpha \in R)$  是  $E^d$  的一条线. 如果给定  $E^d$  中的  $k$  个线性独立点  $p_1, \dots, p_k (k \leq d)$ , 则线性组合

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{k-1} p_{k-1} + (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{k-1})p_k (\alpha_i \in R)$  是  $E^d$  中的  $(k-1)$  维线性簇.

#### 定义2.3 线段

$E^d$  中两个点  $p_1, p_2$ ,  $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2, (0 \leq \alpha \leq 1)$  是  $E^d$  的一条线段.

#### 定义2.4 凸集

设  $D$  是  $E^d$  中的域, 且  $p_1$  和  $p_2$  是  $D$  中任意两点, 如果线段  $\overline{p_1 p_2}$  完全包含在  $D$  中, 则域  $D$  是凸的.

#### 定义2.5 凸壳

$E^d$  中点的集合  $S$  的凸壳  $CH(S)$  是  $E^d$  中包含  $S$  的最小凸域的边界.

#### 定义2.6 Voronoi 图

设  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset R^m, (2 \leq n < \infty), p_i \neq p_j, i \neq j, i, j \in I_n = \{1, \dots, n\}$ ,  $p_i p_j$  连线的垂直平分面(超平面)将空间(超空间)分为两半,  $H_i(p_i p_j)$  表示  $p_i$  一侧的半空间, 则:

$$\begin{aligned} V(p_i) &= \{x \mid \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, j \neq i, j \in I_n\} \\ &= \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j) \end{aligned}$$

被称为  $R^m$  空间中关于  $p_i$  点的  $m$  维Voronoi多面体, 而集合

$\gamma(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$  被称为由点集  $P$  生成的  $m$  维 Voronoi 图.

在上面的定义 2.6 中, 我们称 Voronoi 多边形  $V(p_i)$  的点  $p_i$ , 为第  $i$  个 Voronoi 多面体  $V(p_i)$  的生长点(generator point or generator), 也称为核; 而点集  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  为 Voronoi 图  $\gamma(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$  的生长点集(generator set).

特别的, 在三维空间中, 点集中若无五点共球, 则该点集的 Voronoi 图的每个面是两个 Voronoi 多面体的公共面, 每个边是三个 Voronoi 多面体的公共边. 并且每个顶点是四个 Voronoi 多面体的公共点. 将共一个 Voronoi 顶点的四个 Voronoi 多面体所对应的点集中的点连成的四面体称为和这个 Voronoi 顶点对应的 Delaunay 四面体.

如果一个二维/三维点集中有四点共圆/五点共球的情况, 这时, 这些点对应的 Voronoi 多边形/多面体共一个 Voronoi 顶点, 这个公共的 Voronoi 顶点对应多于三个 Voronoi 多边形/四个 Voronoi 多面体, 也就是对应于多于三个/四个的点集中的点. 这些点可以连成多于一种连接方式的三角形/四面体. 这些三角形/四面体也称为和这个 Voronoi 顶点对应的 Delaunay 三角形/四面体.

## 2.2 平面点集的 Voronoi 图生成方法

Voronoi 图的应用与其生成算法密切相关, 源于 20 世纪 70 年代的计算机自动生成复杂空间的 Voronoi 图方法对 Voronoi 图的应用有很大影响.

以下生成方法指的应用于普通 Voronoi 图(区别于加权 Voronoi 图、限定 Voronoi 图等概念).

现在已有代表性的算法主要分为两类: 一种是直接法, 即直接生成 Voronoi 图, 比如半平面法, 增量法, 分治法, 扫描线法等; 一类是间接法, 利用 Voronoi 图的对偶性, 先生成 Delaunay 三角形, 然后构造 Voronoi 图, 这类方法有换边法, 升维法等.

直接法中的半平面法, 是根据 Voronoi 图的定义, 直接计算半平面的交集以求得, 计算效率为  $O(n^3)$ , 一般只有理论意义, 实际过程并不采用; 增量法先对 2 或 3 个生长点构建简单的 Voronoi 图, 随后每次加入一个生长点, 修改 Voronoi 图, 直至生长集中的点已经全部加入完毕, 其时间复杂度最坏情况  $O(n^2)$ , 平均  $O(n)$ , 在实际应用中是较有效的生成方法; 分治法类似于凸壳计算的分治法, 首先将点集分成若干部分, 对每个部分生成其局部 Voronoi 图, 然后将所有子图合并, 从而构成整个点集的 Voronoi 图, 其时间复杂度为  $O(n \log n)$ .

间接法中的换边法类似于 Delaunay 三角剖分中的换边法, 先对点集  $P$  的凸包

CH( $P$ )进行初始的三角剖分, 随后使用换边法将三角剖分变成Delaunay三角剖分, 进而得到Voronoi多边形, 最终得到Voronoi图, 时间复杂度为 $O(n^2)$ ; 升维法充分利用了凸壳的性质, 该方法将二维平面上的点抬升到三维的抛物面上, 处理后再投射回二维平面, 该方法可以扩展到任意维空间, 时间复杂度为 $O(n \log n)$ .

下面主要介绍直接法中的平面扫描法<sup>[36][46]</sup>.

平面扫描法是应用于二维平面点集的一种Voronoi生成方法, 也是一种经典的计算几何方法. 算法设置了一根垂直的扫描线, 从平面的左边扫描到右边, 沿着这根扫描线就生成了Voronoi图. 因其生成概念比较清晰, 实现比较简便, 在实际中得到广泛的应用.

该算法可以达到的最坏情况下优化复杂度为 $O(n \log n)$ .

基于平面点集的Voronoi平面扫描线法可用下面算法简要描述:

#### 数据结构:

所需要的扫描线状态表可表示为上壳表(UHL)和下壳表(LHL), 记录扫描已通过点集的上壳和下壳, 即凸壳的上半部分和下半部分. 表中每项是一个结点, 除去编号0的头个结点外, 每个结点对应壳上一条边. 每个结点安排三个字段: 字段 $e$ 记边的终点的编号,  $k$ 记边的斜率,  $y$ 记该边延长后与当前竖直扫描线交点的 $y$ 坐标. 每条边的起点是它前面边的终点, 因此起点编号在前面终点中. 该表可用数组实现.

用一个点表记录生成Voronoi图的各项点坐标, 一个边表记录生成的边, 这里边表每项也是一个结点, 对应一条边. 边表中还记录该边左右侧相应区域编号, 每个输入点对应一个Voronoi区域, 该点的编号也可以作为相应区域的编号. 同样的, 点表和边表也可用数组实现.

#### 算法:

步1: 将 $n$ 个输入点按 $x, y$ 坐标字典式排序, 之后编号为 $0, 1, 2, \dots, n-1$ ;

步2: 竖直扫描线在点 $p_0$ 处, 则上壳表和下壳表都仅有一个结点, 点表和边表为空;

步3: 输入点 $p_1, p_2, \dots, p_{i-1}$ 已扫描通过, 扫描线到达点 $p_i$ , 若 $i=n$ , 结束算法, 否则

- a. 如果上壳表仅有头个结点, 令左右支撑点 $k_1$ 和 $k_2$ 都为 $p_0$ , 转c
- 否则对上壳表中除头结点外各结点对应的UHL中各壳边, 计算其延长后与当前扫描线交点的 $y$ 坐标, 其将扫描线划分为若干部分, 确定当前的 $p_i$ 坐标落在哪个部分, 由此确定 $p_i$ 相对前面点集凸壳左支撑线上支撑点 $k_1$ . 去掉上壳表中 $k_1$ 后面原有壳边, 加入边

$\overline{p_i k_1}$  对应新壳边, 更新UHL.

- b. 对下壳表同样处理, 得  $p_i$  相对当前点集凸壳右支撑点  $k_2$ , 更新LHL.
- c. 做  $\overline{p_i k_1}$  垂直平分线, 计算它与  $V(k_1)$  各边交点  
如果没交点, 在图中加入该边, 结束对  $i$  的扫描,  $i+1$ , 返回**步3**  
否则交边  $e_1$  于点  $v_1$ , 则  $v_1$  为新生成点, 以  $v_1$  为终点的垂直平分线为新边, 更新边表和点表, 置  $k_1$  为  $e_1$  另一侧区域编号
- d. 当  $(k_1 \neq k_2)$  {  
    计算  $\overline{p_i k_1}$  垂直平分线与  $V(k_1)$  各边除  $e_1$  以外边的交点, 设于  $e_2$  交于  $v_2$ , 则  $v_2$  为新点,  $\overline{v_1 v_2}$  为新边, 更新点表、边表, 置  $k_1$  为  $e_2$  另一侧区域编号, 令  $e_1 = e_2, v_1 = v_2$   
}
- e. 到此  $k_1 = k_2$ , 自  $v_1$  开始做  $\overline{p_i k_1}$  的垂直平分线是新生成边, 更新边表点表, 去除多余点边, 结束对  $p_i$  扫描,  $i+1$ , 返回**步3**

平面扫描算法清晰易读, 能比较简便地处理有多点共线或共圆的情况, 很适合于在实际问题中的应用.

## 2.3 平面点集上的三角剖分

### 定义2.7 三角剖分网格

给定  $n$  维空间中的  $M$  个不同结点组成的点集  $P$ , 其三角剖分  $T^n$  是具有下列

性质的  $N$  个  $n$  维单纯形  $T_i^n$  的集合, 即:  $T^n = \{T_1^n, T_2^n, \dots, T_N^n\}$

满足:

1.  $T^n$  的顶点集为  $P$ ;
2.  $P$  的凸包  $\Psi = \bigcup T_i^n$ ;
3. 若  $i \neq j$ , 则  $T_i^n$  的内部  $\cap T_j^n$  的内部  $= \Phi$ ;
4.  $T_i^n$  的  $n-1$  维面, 或在  $\Psi$  的边界上, 或为两个单纯形共享.

其中,  $n$  维单纯形是指  $n$  维空间中的  $n+1$  个点  $V_0, V_1, \dots, V_n$ , 满足:

$$\begin{vmatrix} V_0^1 & V_0^2 & \cdots & V_0^n & 1 \\ V_1^1 & V_1^2 & \cdots & V_1^n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_n^1 & V_n^2 & \cdots & V_n^n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

构成的凸包.

在实际应用中,最常用的是二维平面的三角剖分(其结果是三角形的集合)和三维空间上的三角剖分(其结果是四面体的集合).在本文中,我们主要介绍的是二维平面的三角剖分(对于曲面,可看成是2.5维空间,在其上的剖分与二维区域上的剖分有许多相似之处),以下给出二维平面三角剖分的定义.

### 定义2.8 平面三角剖分网格

称三角形集合  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  为平面上  $M$  个非共线有限点集  $P$  的三角剖

分,当且仅当  $T$  满足以下三个条件:

1.  $T$  的顶点集为  $P$
2.  $P$  的凸包  $\Psi = \bigcup T_i$
3.  $T$  中任两个三角形的交集或者为空集,或者是  $P$  中的点,或者是以  $T$  中两点为端点的直线段.

从定义2.7和定义2.8中不难看出,对于一个给定的点集  $P$ ,满足定义的三角剖分不是唯一的,需要对  $T$  附加确定的优化条件才能得到唯一结果.理想情况下的三角网格的各个单元应是等边三角形,但这一目标通常是难以企及的,因此通常只能使三角形的内角尽可能的大.这样,网格的各个三角形单元的最小内角便成为衡量网格质量的一个重要标准:最小内角越大,网格质量就越好.而Delaunay三角剖分恰好是满足最小内角最大的最优三角剖分.

1934年, B. Delaunay证明:必定存在且仅存在一种剖分算法,使得所有三角形的最小内角最大,这种剖分被命名为Delaunay三角剖分. 50年代, G. F. Voronoi 及G. L. Dirichlet建立Voronoi网格. 1970年, Miles在此基础上建立了较完善的Voronoi基础理论体系,证明其直线对偶图即是Delaunay三角剖分,具体来说,其定义形式是这样的:

**平面Delaunay三角剖分网格** 给定二维平面上的结点集合

$P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\} (n > 3)$ , 假设这些结点不全共线. 若  $d(p_i, p_j)$  表示  $p_i$  与  $p_j$  的距离

$$V(i) = \{x \mid d(x, p_i) < d(x, p_j), x \in R^2, j = 1, 2, \dots, n\}$$

中包含的点, 到  $p_i$  的距离比到其他任意点  $p_j \in P$  的距离都近, 称  $V(i)$  为  $V_i$  的



Voronoi图， $p_i$ 为 $V(i)$ 的内核．将点集 $P$ 的所有相邻Voronoi多边形的内核相连，形成点集 $P$ 的三角剖分DT，称这样的剖分结果为点集 $P$ 的Delaunay剖分．称DT中的三角形为Delaunay三角形．如下图所示

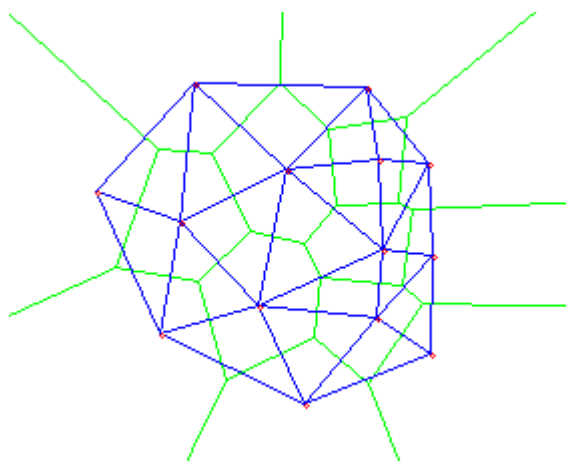


图 2.1: Delaunay 三角剖分与对应的 Voronoi 图

求解Delaunay三角剖分的算法有很多，比较成熟的方法有局部优化准则，外接圆准则，最大形态准则等，所幸的是各准则已被证明是结果等价的<sup>[37]</sup>．下面简单介绍一下这些准则．

#### 1. 外接圆优化准则

外接圆优化准则是一种最常用的求解Delaunay三角剖分的准则．下面的定理，给出了利用外接圆准则求解Delaunay剖分的具体方法及其正确性．

**定理2.1** 一个结点集合  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\} (n > 3)$ ， $DT(P)$  是对  $P$  的Delaunay三角剖分， $\Delta p_i p_j p_k$  是 $DT(P)$ 的一个Delaunay三角形，当且仅当  $\Delta p_i p_j p_k$  的外接圆不包含  $P$  的其他点．

这一结论被称为外接圆准则，Shamos和Hoey早在1975年就给予了证明．下图给出了外接圆准则的大致思想：下图中的两个三角形均为Delaunay剖分的最优三角形，其外接圆内不再包含其他点．

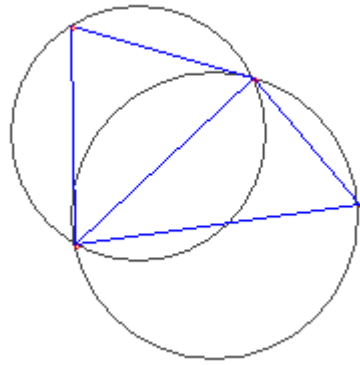


图 2.2: 外接圆准则

## 2. 局部优化准则

在一个三角形网格  $T$  中, 称一条内边  $e$  是局部优化的, 是指共享该边的两个三角形是对它们所形成的四边形的一个较好的剖分, 即  $e$  边是不可对角置换的.

换言之, 若  $e$  边是局部优化的, 那么如果共享该边的两个三角形  $\triangle ABC$  与  $\triangle ACD$  形成的四边形  $ABCD$  不是凹多边形, 则有  $\triangle ABC$  与  $\triangle ACD$  的最小内角大于  $\triangle ABD$  与  $\triangle BCD$  的最小内角. 如下图, 右边的图为的划分优化后的结果.

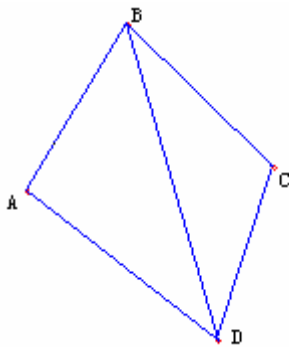


图 2.3(a): 局部优化前

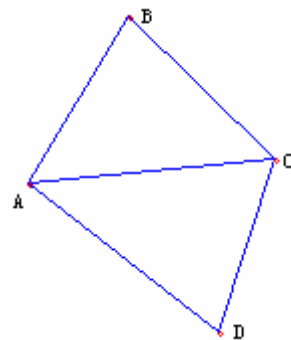


图 2.3(b): 局部优化后

称三角形网格是全局优化的, 如果它的所有内边都是局部优化的, 或者说它的所有内边都是不可对角置换的.

可以证明, 在给定结点集合的所有三角剖分网格中, 全局优化的三角形网格是最优的, 与Delaunay三角剖分是等价的.

这样, 通过局部优化准则, 在三角形网格中考查所有的内边, 比较共享该边的两个三角形组成的四边形的两种剖分结果, 选择最小内角最大的一种作为局部优化选择. 不断重复上述过程, 直至所有的内边都是不可置换的, 最终得到最优剖分结果.

在局部优化方法中, Lawson局部优化法是一种常见的高效算法. 它是一种与

外接圆准则相结合的局部优化准则，其大体步骤是这样的：从任意初始三角形网格  $T$  出发，设  $e$  是  $T$  的一条内边， $Q$  是共享  $e$  边的两个三角形形成的四边形，如果其中的一个三角形的外接圆包含四边形  $Q$  的全部4个顶点，那么将  $e$  用  $Q$  的另一条对角线替换；否则  $e$  是局部优化的，此时保持  $e$  不变。这一交换过程一直进行到所有三角形均满足“外接圆准则”为止。

上述的外接圆优化等准则推广到三维中，就变为外接球优化准则，三维中是对每个四面体做外接球判别，从而得到三维的Delaunay三角剖分。

### 第三章 三维管制空域的扇区优化划分的模型及实现方法

#### 3.1 扇区数量的决定和优化目标的模型建立

在空中交通管制中,对于特定的扇区,为作长期计划需对未来容量的不够作充分预告,像交通预测中所表明的那样,及为了需要实行流量控制,了解容量是多少,以便限制交通达到何种水平不致使该系统超过负荷或使经营人受到过多的损失,我们需要了解空中交通管制扇区或ATC工作席位的容量.近年来,对于容量估计方法已投入了相当的工作量.特别令人感兴趣的是由英国运筹与分析理事会所提出的著作(评估ATC途中扇区容量的DORATASK<sup>[38]</sup>方法)和德国梅塞施密特、特尔科和布卢姆(MBB)的著作,导致研究制定了一项程序以量化ATC工作席位的管制容量,名之为“MBB方法”.“DORATASK”提出的著作,着重对雷达管制员所承担的工作负荷的评估,一方面是把用在(看得见的)日常的和解决冲突的工作时间加在一起,另一方面是(看不见的)思考计划的工作时间.管制员的工作,除了这两个互有关系的组成部分外,还有一第三部分——恢复时间.由此方法,他们得出如下的结论:管制席位的平均工作负荷必须小于统计时间的80%.

按照DORATASK方法的观点,确定空域扇区的数量必须首先统计出该空域中管制工作的总工作负荷 $L$ ,则可划分的扇区数目 $N_T$ 应满足以下关系:

$$N_T = \begin{cases} \left[ \frac{L}{0.8 \times T} \right] + 1, & \frac{L}{0.8 \times T} \neq \left[ \frac{L}{0.8 \times T} \right] \\ \left[ \frac{L}{0.8 \times T} \right], & \frac{L}{0.8 \times T} = \left[ \frac{L}{0.8 \times T} \right] \end{cases} \quad (3.1)$$

其中, $T$ 为总的统计时间, $[\cdot]$ 为取整符号.

在扇区数最少的前提下,我们还应当尽量使扇区之间的工作负荷较为均衡.建立如下扇区优化的数学模型:

目标函数

$$\min \left( \sum_{i=1}^{N_T} \sum_{j=1}^{N_T} |S_i - S_j| \right) \quad (3.2)$$

s. t. 扇区 $N_i$ 具有连续性

优化划分的扇区管制之间方便协调移交

其中, $S_i$ 表示第 $i$ 个扇区的工作负荷,优化目标使各扇区工作负荷差的总和为最小.

基于为了使优化目标函数达到最小,即让扇区间的工作负荷更加均衡,需要首先将空域划分为适量的有限单元,每个有限单元内要完成确定的管制工作负荷,然后通过有限单元的最优组合(形成扇区)达到均衡负荷的目的,文[10]采用以空域中航路点(导航台和空域边界上的报告点)和航路交叉点为节点的Voronoi多边形作为有限单元,得出空域的Voronoi划分图,并将空域看成平面,利用已划分平面空域的有限单元,并使用模拟退火算法进行了扇区优化方法的研究.该方法的缺陷是由于将空域看成平面,笼统的将不同的高度层划分到用一个有限单元里面,未考虑飞行负荷由于高度层的不用而导致的变换,从而使得最终的扇区划分结果过于粗糙.飞机在飞行过程中,为了保证飞行的安全,只能在特定的高度层中飞行,从而,在一定的高度层中,其飞行负荷也相对的保持不变,由此对于在三维空域中考虑扇区的划分提供了便利.

### 3.2 确定三维空域的有限元划分方法

飞机从一个扇区飞向另一扇区时,前一扇区的管制员要将该飞机的管制指挥工作移交给后一个扇区的管制员,该过程称为管制移交或协调.

管制移交地点选取的原则:

- (1) 导航台、航路交叉点以及空域边界上的航路点不能作管制移交地点;
- (2) 两个航路点之间距离小于8.5公里,该航段上不能设管制移交点.

飞机在飞行过程中,为了保证飞行的安全,只能在特定的高度层中飞行,从而,在一定的高度层中,其飞行负荷也相对的保持不变,由此对于在三维空域中考虑扇区的划分提供了便利.我们采用按高度层分而治之的方法,把三维问题转化成二维,然后再进行合理的组合.

根据《民航规则》的规定,管制空域(目前中国所有空域均为管制空域)划分为:

A类为高空管制空域( $h > 6600m$ ).在我国境内6600米(不含)以上的空间,划分为若干个高空管制空域,在此空域内飞行的航空器必须按照仪表飞行规则飞行并接受空中交通管制服务.

B类空域为中低空管制空域(最低高度层 $< h \leq 6600m$ ).类空域为中低空管制空域.在我国境内6600(含)以下,最低高度层以上的空间,划分为若干个中低空管制空域.在此空域内飞行的航空器,可以按照仪表飞行规则飞行.如果符合目视飞行规则的条件,经航空器驾驶员申请,并经中低空管制室批准,也可以按照目视飞行规则飞行,并接受空中交通管制服务.

C类空域为进近管制空域,D类空域为塔台管制空域,通常包括起落航线、第一等待高度层(含)及其以下,地球表面以上的空间和机场机动区.

由经验，可以进近管制空域及塔台管制空域中的工作负荷整个划为同一个扇区，即在空域最底层同属于一个扇区，可以单独另外考虑，所以，在这里，我们只需要考虑将空间划为高层管制空域和中低层管制空域两层即可。根据新的飞行高度层配备，高、低空分层界面由原先的6000米改为8400米。（见下图）。

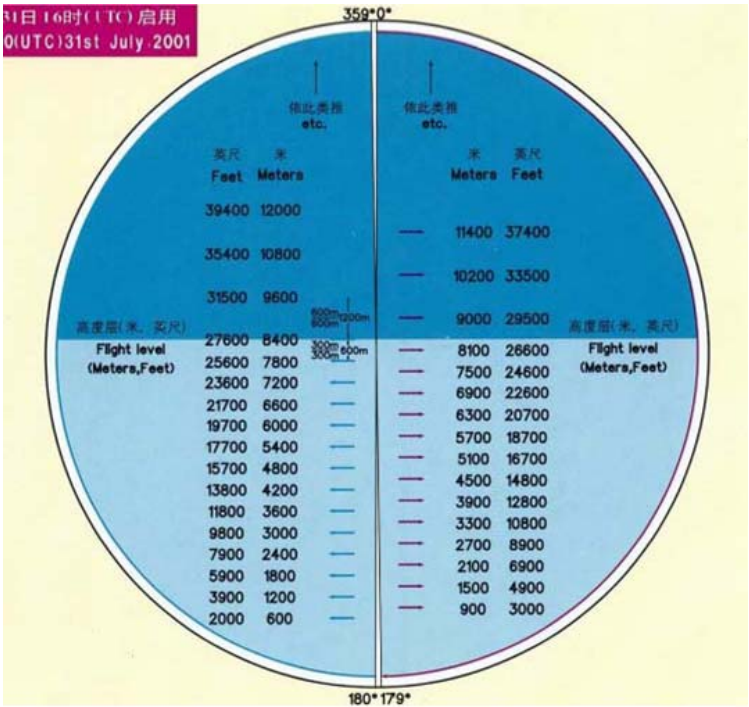


图 3.1: 飞行高度层配备标准示意图

根据扇区优化的数学模型（3.2），需要首先将空域划分为适量的有限单元，每个有限单元内要完成确定的管制工作负荷，然后通过有限单元的最优组合（形成扇区）达到均衡负荷的目的。受管制移交地点选择原则（1）的限制，有限单元的划分应当避免使航路点出现在有限单元的边界上，这里我们对每个高度层，采用以空域中航路点（导航台和空域边界上的报告点）和航路交叉口为节点，用平面扫描线法划分空域的Voronoi图，将其Voronoi域作为有限单元。如此，我们获得的三维空域中的有限元划分满足方便移交约束，将成为扇区优化的基本单元。

### 3.3 扇区划分的有限单元优化组合方案

目前使用的优化算法较多，如：随机试验法、随机方向法、复合形法等弱搜索方法，及拉格朗日乘子法、惩罚函数法等强搜索方法<sup>[39]</sup>。

对于文[28]中，应用模拟退火算法<sup>[40]</sup>在扇区连续性等原则的约束下组合这些规划基本单元，获得优化的平面扇区边界线。由于考虑到三维空域扇区的连续性

等约束的特殊性，本文采取一种强搜索方法。

强搜索方法是利用梯度等确定性信息引导搜索，其优点是搜索效率高，缺点是容易陷入局部解。在本文中，由于选择空域有限单元的连线性，可以避免这种问题。

根据有利于管制的扇区划分原则，同一扇区的管制工作处于相对集中空间范围之内，便于管制工作的顺利进行，否则会由于管制空间跳跃、分散，导致管制员注意力分散。人们在专注于解决某一处出现的问题时，经常会忽视对其它地方出现的问题，即所谓“一心不能二用”。因此，扇区优化划分的结果必需要使每个扇区都是连续的，保持扇区的连续性是一项重要的优化准则。为了保持优化划分的连续性，产生各扇区的新解必须是在各扇区旧解的基础上从相邻扇区夺取或被相邻扇区夺取一个相邻的有限单元，并确认新解是否连续（在解的可行域内）。只有新解中的各扇区都是连续的才被接受。

数学模型由解的可行域、目标函数和初始解三部分组成。解的可行域是指对所有可能解均为可行解的集合；目标函数是指对优化目标的量化描述，是解的可行域到某个数集的一个映射，通常表为若干优化目标的一个和式，应正确体现问题的整体优化要求且较易计算；初始解是算法迭代的起点，试验表明，在适当选取初始解可以避免优化结果产生扇区不连续。新解的产生和接受机制由四个步骤构成：

选取初始解，并要求该初始解中各有限单元组成的扇区不存在互相包含的情况，根据各有限单元的相邻矩阵结构确定初始各扇区的邻接单元，新解的产生和接受机制由四个步骤构成：

Step1，按某种随机机制由当前解产生一个新解，扇区夺得或者被夺取邻接单元，通常通过简单变换（如对部分元素的置换、互换或反演等）产生，产生的新解构成当前解的邻域。

Step2，计算新解伴随的目标函数差，一般可由变换的改变部分直接求得。

Step3，由接受准则，即新解更优，判断是否接受新解，并判断新解的可行性，即确认新解是否连续。

Step4，满足接受准则时进行当前解和目标函数的迭代，否则舍弃新解。

对于三维空域中的有限单元来说，不同的高度层划分对应不同的工作负荷分布，我们将不同高度层中的有限单元分别用上面的优化方法进行处理，得到各个层面优化结果，再将不同层的扇区优化结果整理至整个高度层中去。一般而言，为了保持三维扇区优化结果的最终连续性，而对应于不同层面的扇区优化结果，可采取将下层优化结果作为上层优化初始解的策略。

综上所述，本文的强搜索方法对比于文[28]模拟退火算法，它具有优化步骤相

对简单，概念清晰，优化速度快等有点，由于对初始解的选取，可以搜索到全局近似最优解，在下面的实际算例中可得到与文[28]相近的结果。该算法满足扇区优化问题的求解要求，可以获得接近于最优的空域划分方案。

### 3.4 ××机场管制区扇区优化划分的实现

这里我们根据中国境内××机场提供的管制区原始空域结构（见图3.2）及相应的立体结构图（见图3.3），并提供了通过对某日10：00—11：00之间工作负荷的统计得到的低层空域和高层空域对应的各单元负荷量，现在3600秒内该空域的总管制工作负荷为3458.49秒；当空中交通流量翻一番使得管制工作负荷达到6916.98秒时（分别见表3.1和表3.2，其中control position中，WF，FQG，LJG为进近管制空域或为塔台），根据前文给出的方法将进行空域扇区的最优划分。

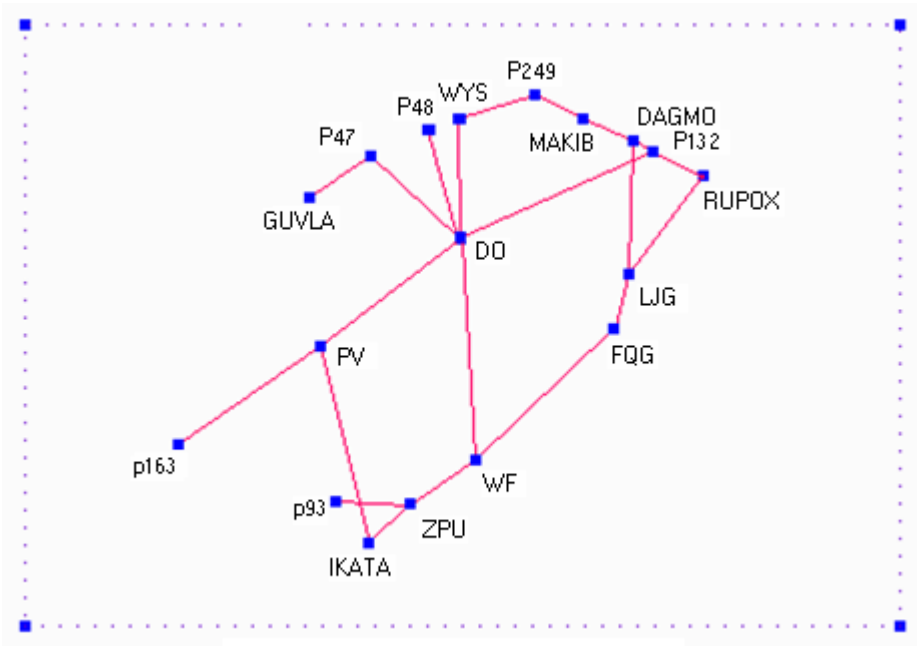


图 3.2: ××机场管制区空域结构



单元序号	负荷大小 (秒)	包含节点	相邻单元序号
0	378.486	IKATA, ZPU, P93	1,8,9
1	506.884	WF	1,2,8,10
2	382.27	FQG	1,3,10
3	215.516	LJG	2,4,10
4	172.086	RUPOX, P132, DAGMO, MAKIB	3,5,10
5	57.018	P249	4,6
6	155.316	WYS	5,7,10
7	60.114	P48	6,8,10
8	224.976	PV	0,1,7,9,10
9	48.504	P163	0,8
10	505.164	DO	1,2,3,4,6,7,8

表 3.1: 低层空域各单元负荷表

单元序号	负荷大小 (秒)	包含节点	相邻单元序号
0	883.134	IKATA, ZPU, P93	1,8,9
1	217.236	WF	1,2,8,10
2	163.83	FQG	1,3,10
3	92.364	LJG	2,4,10
4	401.534	RUPOX, P132, DAGMO, MAKIB	3,5,10
5	133.042	P249	4,6
6	362.404	WYS	5,7,10
7	140.266	P48	6,8,10
8	524.944	PV	0,1,7,9,10
9	113.176	P163	0,8
10	1178.716	DO	1,2,3,4,6,7,8

表 3.2: 高层空域各单元负荷表

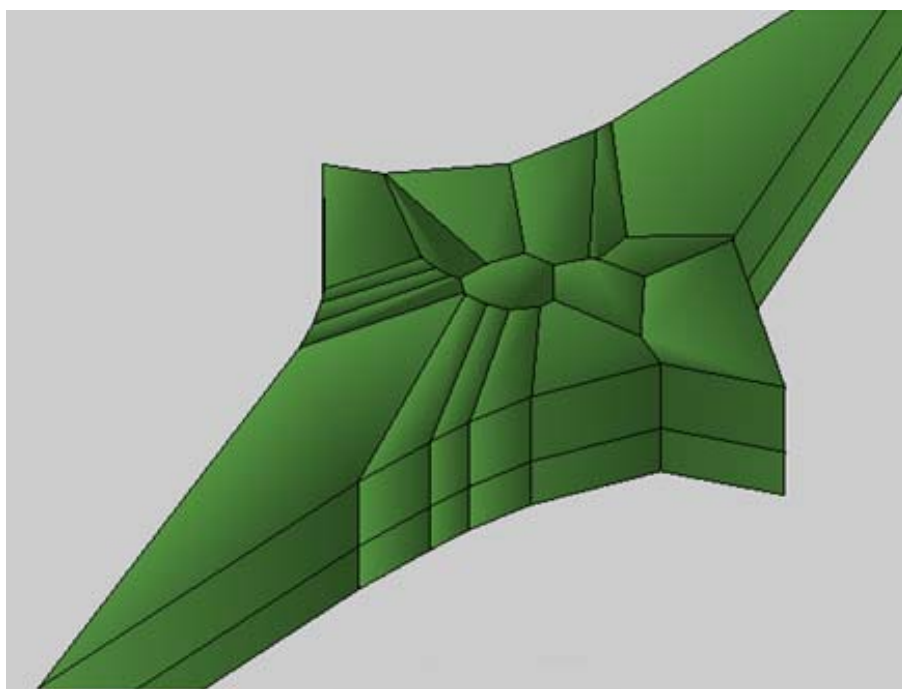


图 3.3: 管制空域结构图

以原始空域图中航路点为节点,用平面扫描线法分别建立的低层空域和高层空域的 Voronoi 图 (见图 3.4 (a),图 3.5(a)), 图中每个 Voronoi 域作为一个有限单元.

在低层中我们取单元0, 8, 9, 单元1, 2, 3分别作为两个扇区的初始解, 这层其余的所有有限元为第三个扇区的初始解, 利用前述优化算法在连续性约束下进行求解, 之后将低层的解作为高层的初始解, 得到高层优化结果. 低层空域和高层空域优化结果见图3.4 (b) 和图3.5 (b). 将低层空域和高层空域优化结果组合得整个空域的优化结果的三个扇区分别见图3.6(a)~(c).

其中, 扇区1工作负荷为2245.714秒, 扇区2工作负荷为2473.016秒, 扇区3工作负荷为2198.244秒. 各扇区均小于该层总统计时间的80%. 划分的新扇区满足方便管制移交和扇区空域相对集中的要求, 优化结果比较令人满意.

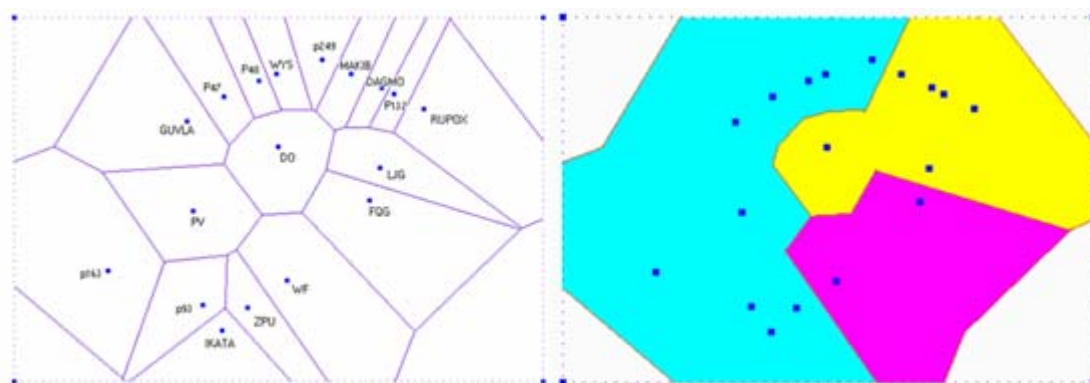


图 3.4(a): 低层空域

(b) 低层有限单元优化结果

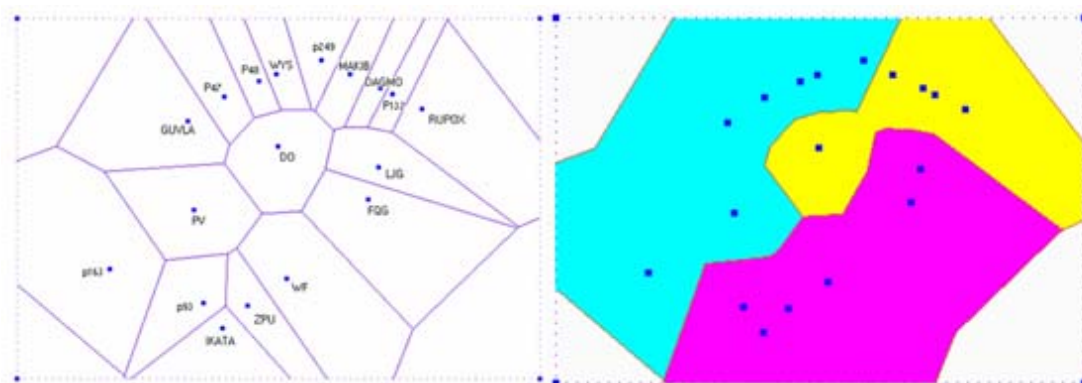


图 3.5 (a): 高层空域

(b):高层有限单元优化结果

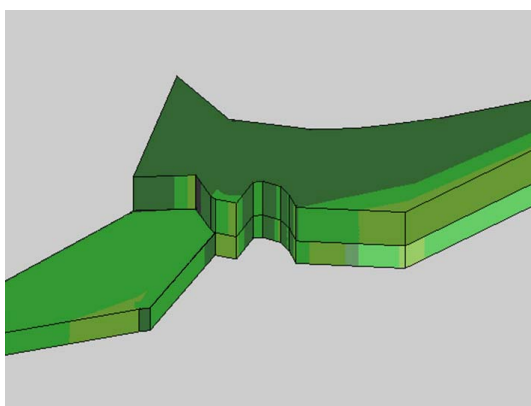


图 3.6(a): 空域结构中扇区 1

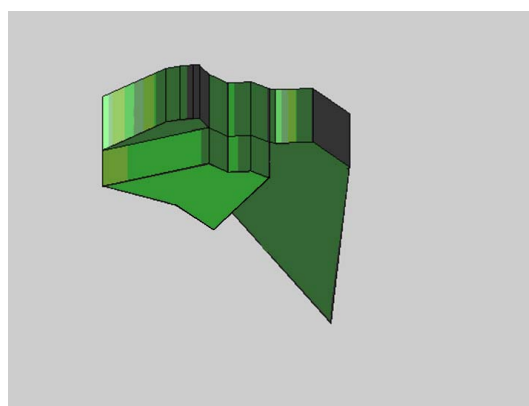


图 3.6(b): 空域结构中扇区 2

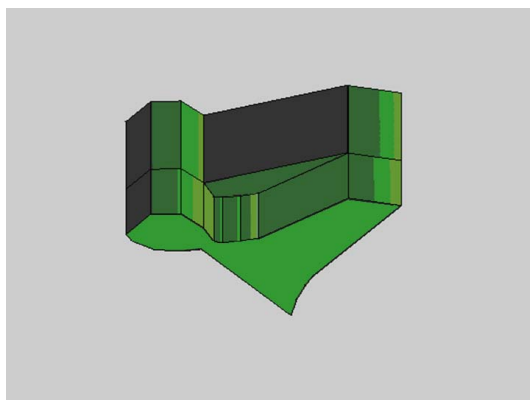


图 3.6(c): 空域结构中扇区 3

另，对于某阶段，负荷在空间分布的概率分布也会随着变化，在此给出另一个概率分布时段的空域划分结果.

单元序号	负荷大小 (秒)	包含节点	相邻单元序号
0	567.729	IKATA, ZPU, P93	1,8,9
1	521.3664	WF	1,2,8,10
2	376.809	FQG	1,3,10
3	224.7524	LJG	2,4,10
4	143.405	RUPOX, P132, DAGMO, MAKIB	3,5,10
5	49.4156	P249	4,6
6	144.9616	WYS	5,7,10
7	50.095	P48	6,8,10
8	262.472	PV	0,1,7,9,10
9	64.672	P163	0,8
10	528.8416	DO	1,2,3,4,6,7,8

表 3.3: 低层空域各单元负荷表

单元序号	负荷大小 (秒)	包含节点	相邻单元序号
0	693.891	IKATA, ZPU, P93	1,8,9
1	202.7536	WF	1,2,8,10
2	169.291	FQG	1,3,10
3	83.1276	LJG	2,4,10
4	430.215	RUPOX, P132, DAGMO, MAKIB	3,5,10
5	140.6444	P249	4,6
6	372.7584	WYS	5,7,10
7	150.285	P48	6,8,10
8	487.448	PV	0,1,7,9,10
9	97.008	P163	0,8
10	1145.0384	DO	1,2,3,4,6,7,8

表 3.4: 高层空域各单元负荷表

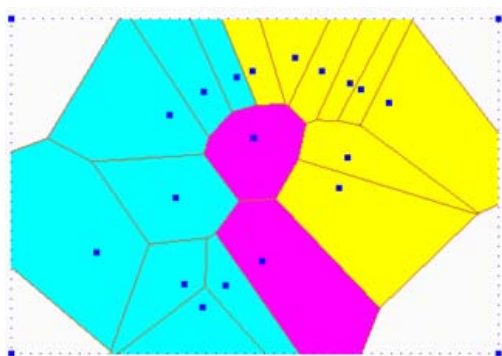


图 3.7: 低层的优化结果

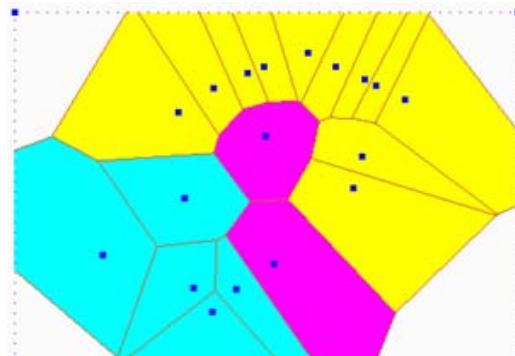


图 3.8: 高层的优化结果

最终优化扇区如下图

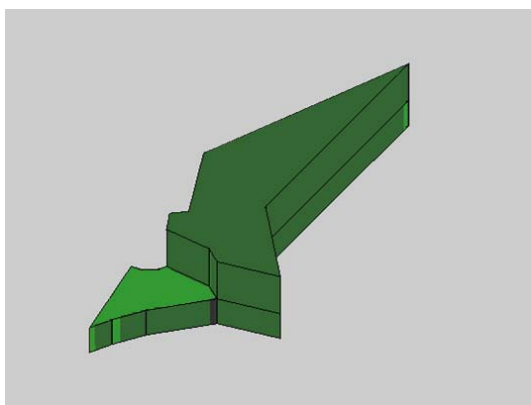


图 3.9(a): 空域结构中扇区 1

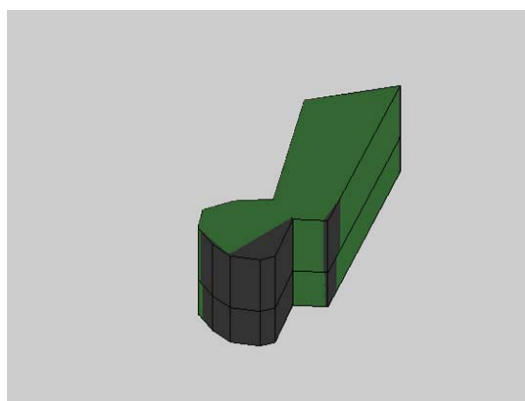


图 3.9(b): 空域结构中扇区 2

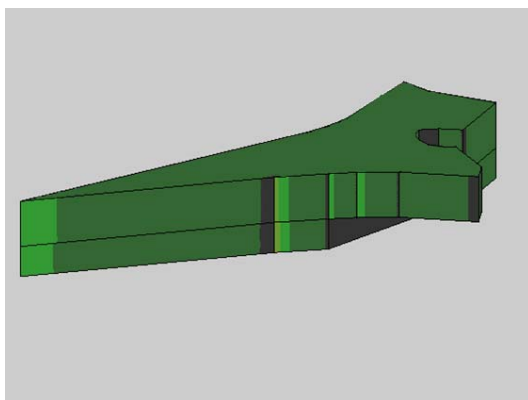


图 3.9(c): 空域结构中扇区 3

通过使用本文所提供的方法与文[28]给出的优化方法进行比较, 优化结果更符合管制工作实际要求. 如本文开始所述, 本文中将三维空域按飞行高度层划分, 较之原有将空域作为平面划分, 对于各有限单元的负荷划分结果更精细, 更附和实际需求, 对于保证飞行安全有较明显的作用, 并且算法计算量比较小, 优化速度也有所提高.

## 第四章 Voronoi 图在球面上的推广及其应用

前面介绍的关于Voronoi图的大多数工作都是围绕着在Euclidean空间或者 $L_1$ 空间中展开的. 对于Euclidean空间中的情况, 如果对应其上的两点存在Voronoi边(面)的话, 则此Voronoi边(面)即为这两点连线的垂直平分线(面), 其几何意义很直观易懂. 关于就此展开的研究如前所述, 已经比较深入和充分了. 对于广义上的Voronoi图, Klein<sup>[41]</sup>将点集拓展为任意的曲线集合, 以此定义相应的Voronoi区域及Voronoi边界.

在平面点集的Voronoi图研究基础上, 本章将考虑在曲面上, 特别的, 如何在球面上, 对事先给定的点集作相应的Voronoi划分, 在此使用分治法, 关键部分是如何计算球面上两点的Voronoi边线.

以此为应用, 可以产生与如何参数化无关的球面三角网格方法, 并进一步提供在球面上进行插值计算的方法.

### 4.1 基本概念

对于给定曲面 $S$ , 其上点的坐标 $(x, y, z)$ , 给定一正则的参数表示 $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$ ,  $u$ 和 $v$ 称为曲面 $S$ 的参数或曲纹坐标,  $I \subset \mathbb{R}^2$ 是其参数域. 对应于 $p, q \in S$ , 在曲面上对应的点即为 $r(p), r(q)$ .  $P_{p,q}$ 定义为, 在曲面上连接点 $r(p), r(q)$ 的所有路径. 曲面上 $p, q$ 的距离 $d(p, q)$ 定义为所有路径 $\alpha \in P_{p,q}$ 的长度的下确界.

如果 $I$ 为闭矩形区域, 且 $r: I \rightarrow S$ 是 $C^2$ 的, 显然存在一条最短路径 $\alpha_{\min} \in P_{p,q}$ , 其长度即为 $d(p, q)$ . 如果 $\alpha_{\min}$ 不是位于 $S$ 边界上, 则 $\alpha_{\min}$ 为一测地线, 此即为短程线定理<sup>[42]</sup>.

**定理 4.1** 若给出曲面上充分小邻域内的两点 $p, q$ , 则过 $p, q$ 两点在小邻域

内的测地线段是连结 $p, q$ 两点的曲面上的曲线中弧长最短的曲线.

曲面上的测地线可由测地线方程求得<sup>[43]</sup>:

对于每个在正则参数化曲面 $S$ 上的点 $p$ , 及每个向量 $w \in T_p(S)$ ,  $T_p(S)$ 为 $S$ 上点 $p$ 的切平面,  $w \neq 0$ , 则存在一个 $\varepsilon > 0$ 和一条唯一的测地曲线 $\gamma(s) \subset S$ ,

$s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\gamma(0) = p$ ,  $r'(0) = w$ . 在  $S$  的参数空间中曲线  $(u(s), v(s))$  满足如下方程:

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ u'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

(4.1) 中的系数  $\Gamma_{ij}^k$  称为 Christoffel 符号, 它们是关于参数  $u, v$  的可微方程, 可由解下面的线性方程组得到:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle r_{uu}, r_u \rangle \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 F = \langle r_{uu}, r_v \rangle \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle r_{uv}, r_u \rangle \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 F = \langle r_{uv}, r_v \rangle \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle r_{vv}, r_u \rangle \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 F = \langle r_{vv}, r_v \rangle \end{cases} \quad (4.2)$$

由此, 我们可以计算此测地线的长度来得到  $S$  上面的距离.

既然可以将所求的两点间在曲面上的距离用计算其测地线来代替, 我们可以用  $d(p, q)$  表示  $r(p)$  和  $r(q)$  之间的测地线距离.

由

$$d(p, p) = 0$$

$$d(p, q) = d(q, p)$$

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) \quad p, q, r \in I$$

可知  $d(p, q)$  定义了  $S$  上面的一个度量.

令  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ,  $p_i \in I$  是  $r$  的参数域上面的  $n$  个不同的点, 令

$$E(p, q) = \{z \in I \mid d(z, p) = d(q, z)\}$$

$$D(p, q) = \{z \in I \mid d(z, p) < d(q, z)\}$$

$E(p, q)$  是到点  $p, q$  距离相等的点的集合.  $E(p, q)$  将  $I$  分为两个子区

域.  $D(p, q)$  包含  $p$  点, 可表示为

$$D(p, P) = \bigcap_{\substack{q \in P \\ q \neq p}} D(p, q)$$

$D(p, q)$  中的所有点  $z \in I$ ,  $r(z)$  和  $r(p)$  之间的测地距离小于其到其他任意的  $r(q)$  的测地距离,  $p \neq q \in P$ , 将  $D(p, q)$  称为  $P$  中  $p$  的 Voronoi 开域.

集合  $V(P) = \bigcup_{p \in P} \partial D(p, P)$  称为  $P$  的 Voronoi 图.

同 Euclidean 空间中的情况一样, 两个 Voronoi 区域的共同边界称为 Voronoi 边. 两条 Voronoi 边的交点称为 Voronoi 的顶点. 对每个 Voronoi 顶点来说, 至少存在三个不同的点  $p, q, r \in P$ , 有  $d(z, r) = d(z, p) = d(z, q)$ .

## 4.2 球面 Voronoi 图的生成方法

在 Euclidean 中, 我们知道两点间连线的中垂线构成了这两点的中线, 显然在曲面上的情况要复杂的多, 然而, 在曲面上我们有如下定理.

**定理 4.2** 曲面上两点的中线, 其切线中分由连接中线上点的两条测地线的初始向量构成的角.

证明 见 [44], p171.

由此考虑球面上的情况, 众所周知, 因为球上大圆的主法线重合于球面的法线, 故大圆即为测地线.

此处要说明的是曲面上测地线的短程性定理, 如果不是限制在一个充分小的曲面片上, 这个定理的结论不一定正确.

特别的, 在球面上, 如果两点不是一条直径的两端, 连结它们的大圆弧 (即测地线) 有两条, 这两条大圆弧一长一短, 短的是最短线, 长的不是, 但是如果只取球面上不含任何同一条直径的两个端点的一部分, 则短程性定理是正确的.

故在此, 我们以球面的一部分加以考虑.

设  $p_1, p_2$  为球面  $S$  上的两点,  $o$  为球心, 考虑两点之间, 如果存在一条中线, 由前述可知, 此中线上的一点  $m$  到  $p_1, p_2$  的距离相等, 即  $d(m, p_2) = d(m, p_1)$ , 此处  $d(m, p_1)$  与  $d(m, p_2)$  均为测地线的长度. 由前述, 球上的测地线即为大圆, 故  $m, p_1$  之间的测地线的弧度应该等于  $m, p_2$  之间测地线的弧度. 又由于球面的对称性, 我们在球面上做连接  $p_1, p_2$  的大圆, 作  $op_1$  与  $op_2$  的角平分线交  $\overset{\frown}{p_1 p_2}$



弧于中点  $m$ ，并取其  $\widehat{p_1 p_2}$  的切向量  $w(m)$ ， $w(m)$  在  $m$  点的切平面  $T_m(S)$  上。在  $T_m(S)$  上做向量  $\beta$  正交  $w(m)$ 。在  $m$  点， $\beta$  方向，由测地线定理可知存在一条测地线，此处即为通过  $m$  的，在  $m$  点的切方向为  $\beta$  的大圆。由球面的对称性可知，此曲线即为所要求的中线，将球面分为  $D(p_1, p_2)$  和  $D(p_2, p_1)$  两部分。对于球面  $S$  上的点  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ，Voronoi 域可表示成  $D(p, P) = \bigcap_{\substack{q \in P \\ q \neq p}} D(p, q)$ 。

下面即可构造  $V(p)$ ：

我们利用分治法来构造  $V(p)$ 。将  $S$  上的点集  $P$  分割成数量基本相等的两个子集  $L$  和  $R$ ，递归的计算  $V(L)$  和  $V(R)$ ，然后不断合并相邻子点集的 Voronoi 图，下面是 C 伪码：

```
Voronoi diagram computer_diagram (
P: points set;
L, R: sub-points set;
V(L), V(R): Voronoidiagram;) {
if (|P| ≤ 1) {
Return 0;
}
else if (|P| == 2) {
Return  $p_1, p_2$  ' s middle line;
} else {
Split P into two sub-sets L, R that has almost equal number of
points;
V(L) = computer_diagram(L);
V(R) = computer_diagram(R);
Return merge_subdiagrams (V(L), V(R));
}
}
```

在  $S$  的参数域中用一条水平线或者一条垂线，可将点集  $P$  划分为子集  $L$  和  $R$ 。计算两点间的 Voronoi 边可以由前述的方法得到。下面具体介绍如何合并相邻子点集的 Voronoi 图，我们必须找到那些  $V(P)$  中即不属于  $V(L)$  又不属于  $V(R)$  的边。

**定义 4.1** 令  $P$  为一有限点集， $L, R \subset P$  是  $P$  的一个分割。区域  $D(p, P)$  如前定

义, 称为  $L$  区域或者  $R$  区域, 如果  $p \in L$ , 或者  $p \in R$ . 边  $e \in V(P)$  被称为  $L$  边, 如果它是两个  $L$  区域的共有边界, 同样的被称为  $R$  边, 如果它是两个  $R$  区域的共有边界, 如果它是  $L$  区域和  $R$  区域的共有边界, 则称之为分割边.

$L$  和  $R$  的分割线是所有分割边的  $e \in V(P)$  的集合.

下面讨论分割线的一些性质<sup>[45]</sup>.

**推论 4.1**  $L$  和  $R$  的分割线由有限的首尾相连的分割边链接而成, 我们称之为分割链. 每个分割链或始于, 并终于  $S$  的参数域边界, 或形成参数域中的闭曲线.

证明 由于分割线是由  $V(P)$  的边所构成, 故是有限的.

令  $e_1$  为一条分割边,  $x$  为  $e_1$  的一个端点. 因为  $e_1$  是一条 Voronoi 边,  $x$  必为  $S$  参数域边界上的点, 或是一个 Voronoi 点. 对于后者, 集合

$E := \{e_i \in V(P) \mid e_i \cap e_1 = x\}$  至少包含两个元素. 由假设,  $e_1$  为  $L$  区域和  $R$  区域的共有边界, 因此, 至少有一条分割边  $e_i \in E$  延续此分割链. 如下图左所示:

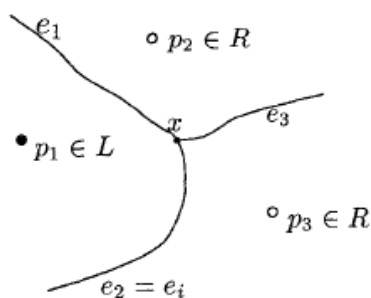


图 4.1(a) : 分割链示意 1

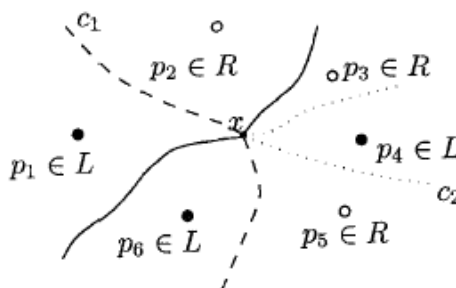


图 4.1(b) : 分割链示意 2

由此可知, 分割链或者终于参数域的边界, 或者是一条闭曲线.

注: 两条或者更多的分割链有可能交于一个 Voronoi 顶点. 如上图右所示.

**定义 4.2** 设  $\lambda$  为将  $S$  的参数域中点集  $P$  分成子集  $L$  和  $R$  的直线. 则 Voronoi 区域  $D(p, X), X \in \{L, R\}$  称为外区域, 如果  $\lambda \cap \overline{D(p, X)} \neq \emptyset$ . 其他的区域称为内区域.

**推论 4.2** 令  $p \in L, q \in R$ .  $D(p, L)$  和  $D(q, R)$  称为内区域, 如果不存在分割边

$$e_{p,q} \in V(P).$$

证 明 显 然 有  $\overline{D(p, L)} \supset \overline{D(p, P)}$ ,  $\overline{D(q, R)} \supset \overline{D(q, P)}$ . 由

$e_{p,q} \subset \overline{D(p, P)} \cap \overline{D(q, P)} \subset \overline{D(p, L)} \cap \overline{D(q, R)}$ , 故由  $\overline{D(p, L)} \cap \overline{D(q, R)} = \emptyset$ , 得

证.

由上述的推论, 我们可以在  $L$  和  $R$  的外区域中寻找分割边的起始点. 我们已知每条 Voronoi 边起始终止于 Voronoi 顶点, 故而, 只要搜索这些外区域的边界. 当然, 外区域的边界不全由 Voronoi 边组成, 其中也可能包含  $S$  的参数域边界, 当该区域延伸到其边界时.

由上述, 组成分割链的每条分割线是  $L$ ,  $R$  中某两点连线的中线. 我们仅考虑外区域即可. 在  $S$  的参数域中, 可以计算出  $CH(L)$  和  $CH(R)$  ( $CH$  即为凸壳), 由此可求得  $CH(L)$  和  $CH(R)$  的正切线, 譬如为  $\overline{p_1 p_2}$ ,  $p_1 \in L, p_2 \in R$ , 对应于曲面  $S$  上的点  $p_1, p_2$ . 作  $p_1, p_2$  的中线, 设想该中线延伸过程中遇到  $D(p, L)$  或者  $D(q, R)$  的一条 Voronoi 边. 如图所示, 图中点  $p_1$  和  $p_5$  分别属于  $L = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$  和  $R = \{p_5, \dots, p_8\}$ , 点  $p_1$  和  $p_5$  的中线  $M$  首先与  $D(q, R)$  的边相交, 即与  $p_5$  和  $p_6$  的中线相交, 交点为  $m_1$ , 留下中线  $M$  的第一段. 点  $m_1$  为分属于  $p_1, p_5, p_6$  的 Voronoi 区域的交点, 所以, 下一段分割线我们考虑  $p_1$  和  $p_6$  的中线, 此时寻找  $p_1$  和  $p_6$  的中线与和  $p_1$  相关联的 Voronoi 区域的哪条边相交, 图中所示其中线与  $p_1$  和  $p_3$  的中线相交, 交点为  $m_2$ .  $\widehat{m_2 m_3}$  是  $p_6$  和  $p_3$  的中线的一段弧, 即寻找  $p_6$  和  $p_3$  的中线与和  $p_3$  关联的 Voronoi 的哪条边相交. 同理,  $\widehat{m_3 m_4}$  是  $p_4$  和  $p_6$  的中线的一段弧 ( $p_4$  和  $p_6$  的中线与  $p_4$  和  $p_8$  的中线的交点), 截  $p_4$  和  $p_8$  的中线于  $m_4$ .

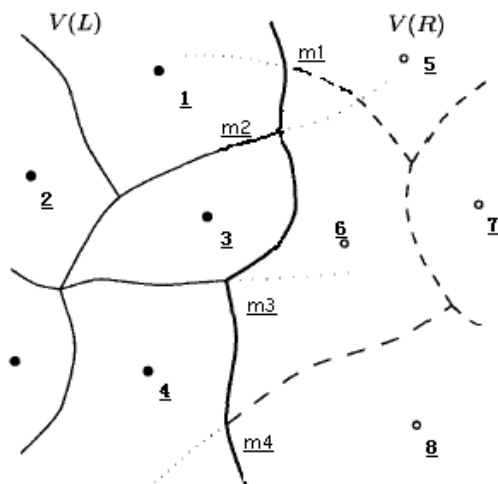


图 4.2: 合并相邻子点集的 Voronoi 图

类似于 Euclidean 中的情况, 该过程同样也可以看成是三角形序列的演变过程, 也就是  $p_5 p_1 p_6 \rightarrow p_1 p_6 p_3 \rightarrow p_6 p_3 p_4 \rightarrow p_3 p_4 p_8$ , 称之为三角形顶点转移法. 同样的, 构造分割链的算法如同 Euclidean 中构造折线, 如下:

设  $L = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  和  $R = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ , 并设已经在  $S$  的参数域中, 计算

出  $CH(L)$  和  $CH(R)$ .

步 1 计算出  $CH(L)$  和  $CH(R)$  的正切线  $\overline{t_{p_1} t_{q_1}}$  和  $\overline{t_{p_k} t_{q_k}}$ , 端点分别对应于曲线上的  $p_1, q_1$  和  $p_k, q_k$ , 且在参数域中  $p_1$  的  $v$  坐标大于  $p_k$  的  $v$  坐标,  $q_1$  的  $v$  坐标大于  $q_k$  的  $v$  坐标.

步 2 作  $p_1, q_1$  的中线与  $p_1$  (或  $q_1$ ) 相关联的 Voronoi 多边形相交, 交点为  $M$  的新顶点.

步 3 用三角形顶点转移法选择新的三角形, 并用 step2 的方法计算  $M$  的新顶点, 直至做出  $p_k, q_k$  的中线.

利用上述算法可求得整个球面上 Voronoi 图, 如下所示:

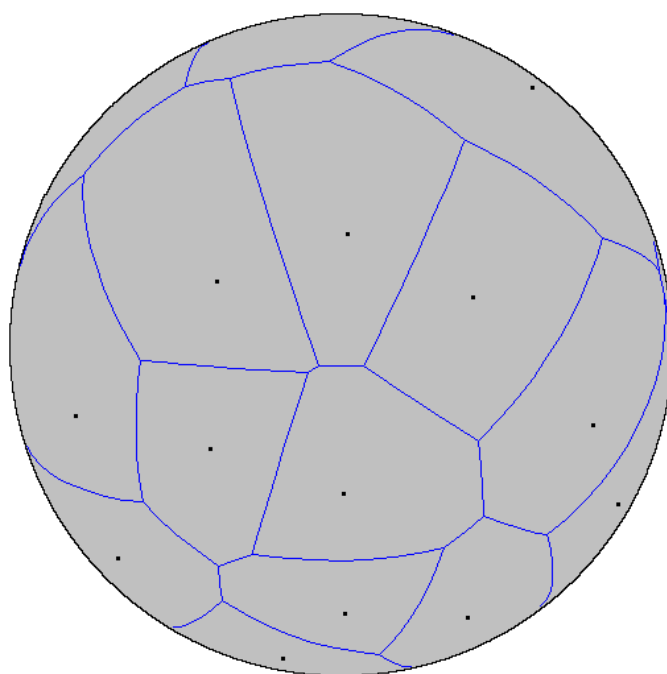


图 4.3: 球面上的 Voronoi 图

因为此处的算法跟球面是如何参数表示无关, 只是由球面的几何性质所决定. 球面上与 Voronoi 对偶的 Delaunay 三角网格也容易得到.

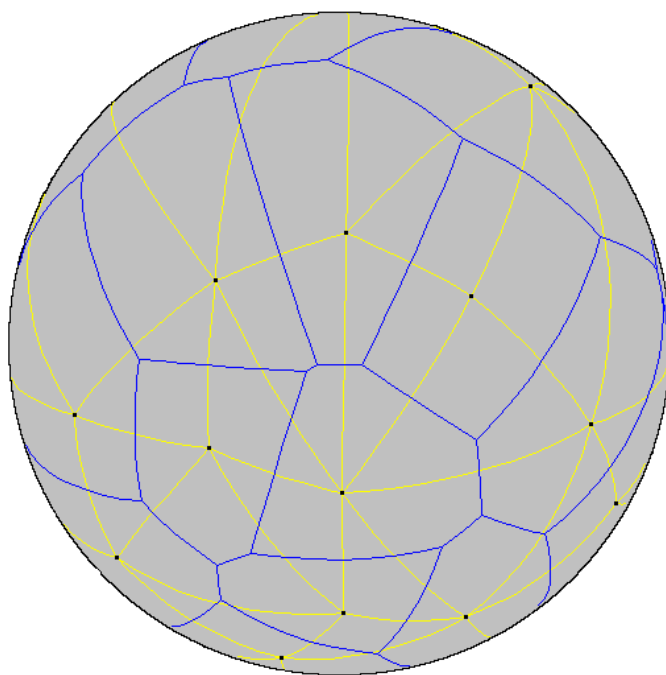


图 4.4: 球面上的 Voronoi 图与其对应的三角网格

上述算法只就球面曲面进行了讨论, 涉及到一般参数曲面, 类似的, 可以通过使用测地线长度作为距离的度量, 此处的测地线计算比较复杂, 得到中线后也可用分治法求其上的 Voronoi 图, 有一点必须指出, 测地线的短程性只能表现在曲面上适当小的范围内, 在这方面我们可以进一步研究.

### 4.3 球面上的插值方法

对于在平面上散乱点的对应值构造光滑的插值曲面问题已经有不少的研究成果, 在这里, 我们考虑的是对于散乱点分布在球面上的插值问题. 当散乱点仅仅分布在球面的一部分区域上时, 我们可以将其上的点一一映射到平面区域上, 再利用现成的插值方法对其插值. 然而上述方法对于要求对在整个球面上分布的散乱点进行插值的情况就行不通了, 我们找不到一个  $C^1$  的函数能将整个球面映射至有界平面区域上去.

**问题描述:** 令  $S$  为三维空间中单位球的球面, 给定其上的点  $p_i, i=1, \dots, n$ , 我们要构造一个定义在  $S$  上, 有  $C^1$  连续的函数  $f$ , 并满足插值条件

$$f(p_i) = \zeta_i, i=1, \dots, n.$$

与在平面上构造插值问题相类似, 在对于球面上, 我们采取如下步骤:

1. 在  $S$  上构造以  $p_i$  为顶点的三角网格将  $S$  划分;
2. 计算每个  $p_i$  对应的梯度向量, 记为  $g_i$ ;
3. 对应于  $S$  上任意点  $p$  的值, 先确定其在三角网格中所处的三角形区域, 然后

利用构成此三角形区域的三个顶点对应的  $\zeta_i$  和其梯度向量  $g_i$  进行插值求解, 就可求得插值函数  $f$  对应于点  $p$  的值.

在球面上的三角网格剖分过程, 我们可以通过前面球面上Voronoi图的形成, 参照Voronoi域的相邻关系, 很容易求出其对偶的三角网格剖分, 在此剖分基础上, 我们可以进行球面的插值.

#### 4.3.1 计算每个散乱点对应的梯度向量<sup>[48]</sup>

令  $f$  为定义在  $S$  上的函数, 则  $f$  在  $p_0 \in S$  可微, 当且仅当存在向量  $g_0$ , 满足:

$$\lim_{\substack{\|dp\| \rightarrow 0 \\ p_0 + dp \in S}} \frac{f(p_0 + dp) - (f(p_0) + g_0^T dp)}{\|dp\|} = 0 \quad (4.3)$$

从上式可以看出, 如果向量  $g_0$  满足上式, 则任意的  $g_\lambda = g_0 + \lambda N$ , 其中  $\lambda$  为任一实数,  $N$  是与  $p_0$  的切平面  $T$  正交的单位向量, 都满足上式. 我们将其中的位于切平面  $T$  内的向量  $g_0$  称为函数  $f$  在  $p_0$  的梯度向量.

考虑  $f$  为定义在点  $p_0$  三维邻域内的函数  $F$  的一个约束, 如果  $F$  在  $p_0$  处可微, 且有梯度  $\nabla F$ , 则  $g_0$  为  $\nabla F$  在切平面  $T$  的正交投影.

首先对目标点  $p_i$  和与其相邻的至少5个邻接点进行局部坐标变换  $p' = Mp$ ,  $p' = [u, v, w]^T$ ,  $p = [x, y, z]^T$ ,  $M$  为一旋转矩阵, 将  $p_i$  变换至  $p'_i = (0, 0, 1)$ . 对于变换后的点, 我们就对于其  $[u, v]$  进行拟合, 相当于对于  $p'_i$ , 将其邻接点正交投影到  $p'_i$  的切平面  $T'$  上, 然后对投影点所相关的值进行拟合.

在切平面  $T'$  上, 构造多项式  $q(u, v) = \zeta_i + a_1 u + a_2 v + a_3 u^2 + a_4 uv + a_5 v^2$ , 插值  $\zeta_i$  于点  $(0, 0)$ , 然后利用其余邻接投影点和与其相关联的函数值, 由最小二乘法进行拟合, 即可求得该多项式的5个系数.

则其中  $(a_1, a_2, 0)$  为该多项式在  $T'$  的梯度向量, 由前面提到的梯度向量的性质可知, 在原坐标系中, 可得  $g_i = (M^T)^{-1}(a_1, a_2, 0)^T$ .

#### 4.3.2 在三角域中插值

对于  $f$  在  $S$  上的点  $q$  对应的值, 首先要找到  $q$  点所属的三角域. 对于  $S$  上现

成的三角形网格，令  $p_1, p_2, p_3$  为其中某个三角域  $t$ ，该三角域将球面分为两个部分，取较小的部分称为该三角域的内部，顺着  $p_1, p_2, p_3$  次序的边，总在观察者的左手边，即有  $\det(p_1, p_2, p_3) > 0$ 。

我们有，点  $q \in S$  在  $t$  中，当且仅当

$$s_1 = \det(q, p_2, p_3)$$

$$s_2 = \det(p_1, q, p_3)$$

$$s_3 = \det(p_1, p_2, q)$$

都非负。

对于点  $q \in t$  上的插值，我们构造一个偏插值的凸组合<sup>[49]</sup>

$$f(q) = w_1 f_1(q) + w_2 f_2(q) + w_3 f_3(q)$$

其中

$$w_i = \begin{cases} b_{i+1}b_{i+2}/(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) & q \neq p_{i+1}, \text{ 或 } p_{i+2} \\ 0 & q = p_{i+1} \\ 1 & q = p_{i+2} \end{cases} \quad (4.4)$$

即

$$f(q) = \begin{cases} \frac{(b_2b_3f_1 + b_3b_1f_2 + b_1b_2f_3)}{(b_2b_3 + b_3b_1 + b_1b_2)} & q \neq p_1, p_2, p_3 \\ \zeta_i & q = p_i \end{cases}$$

其中  $b_i$  为球面点  $q$  中心投射在三角形  $p_1p_2p_3$  中的  $q'$  的重心坐标，可以由

$b_i = s_i / (s_1 + s_2 + s_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$  得到。

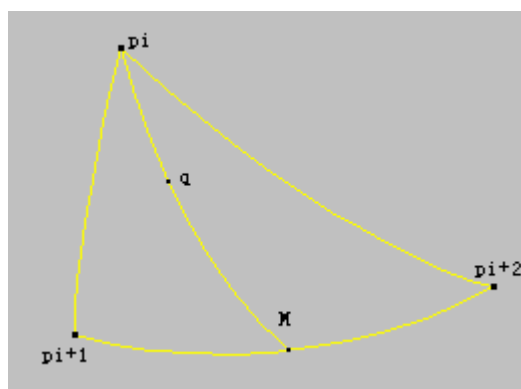


图 4.5: 三角域

$$f_i(q) = H_0(t)\zeta_i + H_1(t)f(M) + H_2(t)|p_i - M|\frac{\partial f}{\partial[p_i - M]}(p_i) \\ + H_3(t)|p_i - M|\frac{\partial f}{\partial[p_i - M]}(M) \quad (4.5)$$

$$f(M) = H_0(s)\zeta_{i+1} + H_1(s)\zeta_{i+2} + H_2(s)|p_{i+1} - p_{i+2}|\frac{\partial f}{\partial[p_{i+1} - p_{i+2}]}(p_{i+1}) \\ + H_3(s)|p_{i+1} - p_{i+2}|\frac{\partial f}{\partial[p_{i+1} - p_{i+2}]}(p_{i+2}) \quad (4.6)$$

其中  $M$  为圆弧  $p_{i+1}p_{i+2}$  和  $p_iq$  的交点, 其坐标可由三角形  $p_ip_{i+1}p_{i+2}$  中的  $p_iq'$  和

$p_{i+1}p_{i+2}$  的交点坐标  $\frac{(b_{i+1}p_{i+1} + b_{i+2}p_{i+2})}{b_{i+1} + b_{i+2}}$  单位化后得到.

$$t = \frac{|q - M|}{|p_i - M|}, \quad s = \frac{|M - p_{i+2}|}{|p_i - p_{i+2}|},$$

$|p_i - p_{i+1}|$  表示球面上  $p_ip_{i+1}$  之间的弧长,

$$H_0(x) = x^2(3 - 3x), \quad H_1(x) = (1 - x)^2(2x + 1), \quad H_2(x) = x^2(x - 1),$$

$$H_3(x) = x(1 - x)^2,$$

$\frac{\partial f}{\partial[p_i - p_{i+1}]}(p_{i+1})$  表示在点  $p_{i+1}$  沿着圆弧  $p_ip_{i+1}$  的方向导数.

方向导数可以借助前面已经算得的  $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, M$  的梯度向量求出. 而  $M$  的梯度向量由这些点的梯度向量经由线性插值产生.

### 4.3.3 算例

下面表中在球面上取10个点, 作为生成三角域网格的顶点, 生成16个球面上的三角域, 如图4.6, 图4.7, 图中的数字标示了对应三角域的序号.

结点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
经度(东)	0	40	5	-35	-25	20	240	180	155	180
纬度	0	10	35	20	-30	-25	10	40	-10	-20

表4.1

对应球面上的坐标可由

$$x = \cos \alpha \cos \beta \\ y = \sin \alpha \cos \beta \\ z = \sin \beta$$



得出.

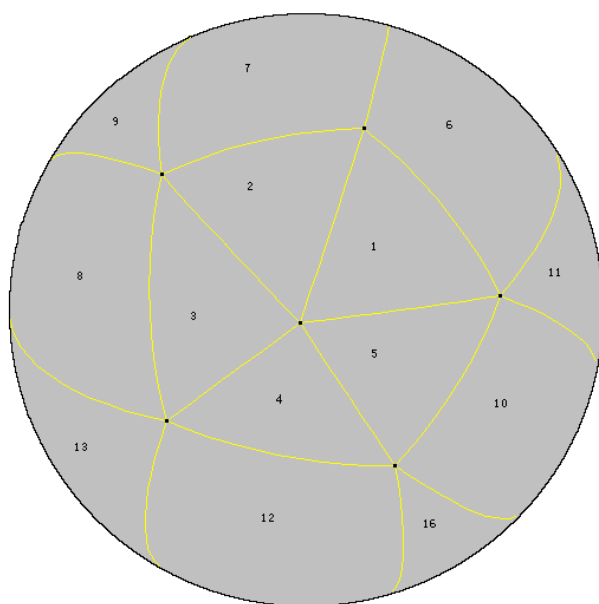


图 4.6: 球面三角网格 a

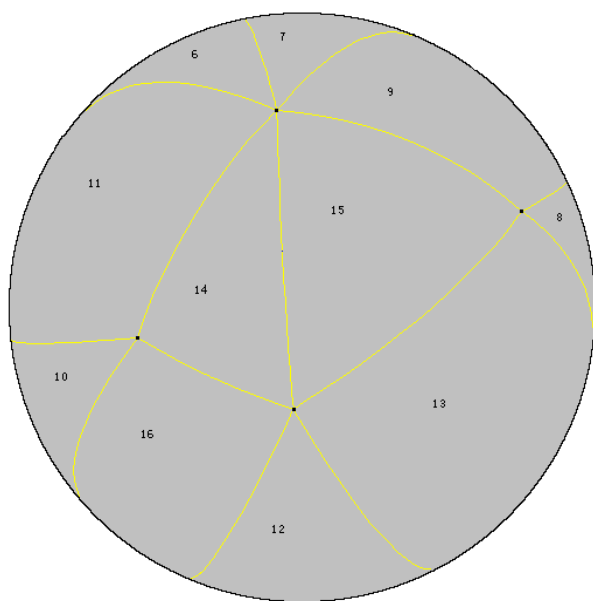


图 4.7: 球面三角网格 b

这里，我们插值计算如图4.8所示的15个点，这些对应于图4.6中中间区域的球面上点.

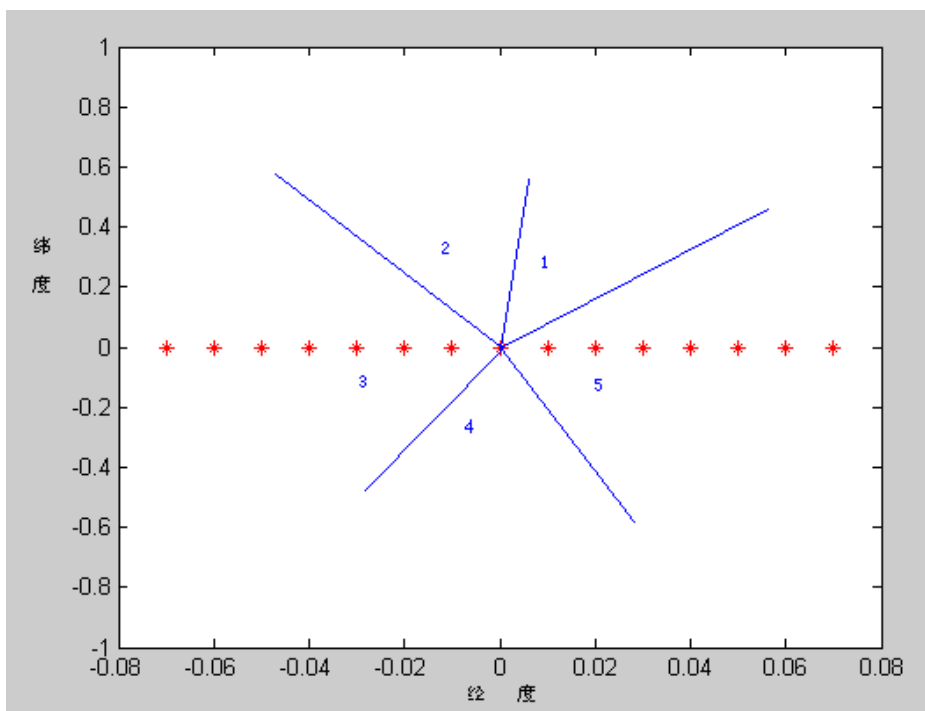


图 4.8: 球面上插值的点

相应的，作为目标函数，这里取

$$f(x, y, z) = (-1 + 2x - 3y + 4x - xy + 9y + 2z - yz) / 10$$

对应球面上点的  $\zeta_i$ ，求出相应的  $g_i$ ，由上述的插值方法，有如图4.9的计算结果.

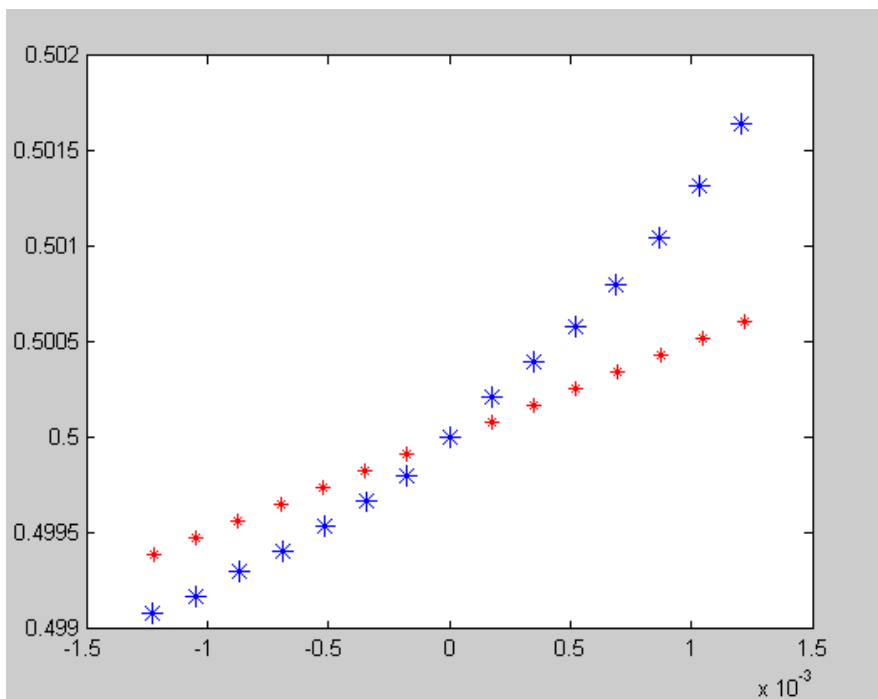


图 4.9: 球面上点插值所得值

上图中，红色小\*为目标函数对应图4.8中结点的实际值，蓝色大\*为插值所求得  
的值。

值得提出的是，在本节里面涉及的球面插值问题，所选球面曲面，只是作为一个特定的数学模型，该插值方法可以应用在任何  $C^1$  的星状曲面上，而关于更一般的凸曲面上的插值，也可以应用该方法在局部构造球面插值近似求解.

## 第五章 总结与展望

Voronoi图是一种很基本的几何数据结构，在解决与图形有关的实际问题中有许多应用，本文在文[28]的基础上，利用Voronoi图的性质，对扇区科学规划数学模型的建立进行了研究，将三维空域进行了一定程度合理的划分，并根据工作负荷均衡为优化原则，对扇区进行划分。另，对于球面上的插值计算也加以论述，在建立球面Voronoi图的基础上，利用其对偶的三角网格，方便了球面插值的进行。

在本文的扇区优化过程中，相对于将三维空域投影成平面的划分方法有一定的改进，但对于低空域中的接近进近管制区域，由于其飞机起降的固定航线复杂性，习惯中都将其整体算作一个扇区，而实际操作中的，对于这个区域，应该进一步做相对精细的划分，这在将来的研究中将继续考虑。

Voronoi图是一个内容丰富庞杂的研究课题，对于这个问题，有着广泛的应用背景，对于一般曲面上点集的Voronoi图划分，由于测地线的计算显得比较复杂，有待于进一步的简化，而对于三维空间中的Voronoi图划分，或者是更高维的划分，是一个有趣的课题。

而在曲面上应用Voronoi图建立的三角网格剖分，并进一步进行插值等方面的研究，更与实际应用结合紧密，有着广泛的实用价值。对于其它区别于平面和球面的二维流形，如柱面，可展曲面等，因为其上的三角网格特殊性，相应的插值方法还有待进一步的研究。

## 参考文献

- [1] Preparata F P, Shamos M I. Computational Geometry: An introduction. Belin: Springer, 1985: 226~329
- [2] O'Rourke J. Computational Geometry in C (2<sup>nd</sup> Edition). Cambridge : Cambridge University Press, 1998: 155~192
- [3] Shamos M I, Hoey D. Closest-point problems. In: Proceedings 16th IEEE Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, 1977: 151~162
- [4] Papadopoulo E, Lee D T. Critical area computation-a new approach. <http://web.eecs.nwu.edu/~dtlee/ISPD98.ps>
- [5] Anton F, et al. Line Voronoi diagram based interpolation and application to digital terrain modeling. <http://compgeo.math.uwaterloo.ca/~ccc01/proceedings/index.html>
- [6] Albers G, et al. Voronoi diagrams of moving points. International Journal of Computational Geometry & Applications, 1998, 8(3): 365~380
- [7] Defabritiis G, Coveney P V. Multiscale modeling of complex fluids. <http://www.chem.qmw.ac.uk/ccs/gdf/sgicray99.ps.gz>
- [8] Aurenhammer F. Power diagrams: properties, algorithms, and applications. SIAM Journal on Computing, 1987, 16(1): 78~96
- [9] Augenbaum J M, Peskin C S. On the construction of the Voronoi mesh on a sphere. Journal of Computational Physics, 1985, 59: 177~192
- [10] Aichholzer O, et al. Skew Voronoi diagrams. International Journal of Computational Geometry and Applications, 1999, 9(3): 235~246
- [11] 周培德. 计算几何. 北京: 清华大学出版社, 2000
- [12] Liu Jingyi, Liu Shuang. A Survey on applications of Voronoi diagrams. Journal of Engineering Graphics, 2004, 25 (2) : 125~132
- [13] Jullien R, et al. Numerical investigation of frustration in glassy systems. <http://www.ldv.univmontp2.fr:7082/~jund/articles/nem7~remi.ps>
- [14] Gerstein M, Rechards F M. Protein geometry: volumes, areas, and distances. <http://bioinfo.mbb.yale.edu/e-print/geom-inttab/geom-inttab.pdf>
- [15] Amenta N, Bern M. Surface reconstruction from Voronoi filtering. Discrete and Computational Geometry, 1999, 22: 481~504
- [16] Nullans S, Boissonnat J D. Reconstruction of 3D “colored” data. <http://www.sop.inria.fr/prisme/personnel/nullans/public/euro98.ps.gz>
- [17] Kim D-S. Polygon offsetting using a Voronoi diagram and two stacks. Computer Aided Design, 1998, 30 (14): 1076~1096

- [18] Lin M C. Efficient collision detection for animation and robotics. [Ph.D. thesis], Berkeley: University of California, 1993
- [19] Yahagi H, et al. The forest method as a new parallel tree method with the sectional Voronoi tessellation. <http://www.mpia-hd.mpg.de/theory/mori/preprints/ymy99.ps.gz>
- [20] Doc8168-OPS/611. Aircraft Operation. International civil aviation organization, 1981
- [21] Doc444-RAC/501. Rules of the Air and Air Traffic Services. International civil aviation organization, 2000.1
- [22] Doc9426-AN/924. Manual for air traffic service plan. International civil aviation organization, 1994
- [23] Babic O, Krstic T. Airspace daily operational sectorization by fuzzy logic. Published by Elsevier Science B.V. 2000,116(1): 49~64
- [24] Tofukuji N. An airspace design and evaluation of enroute sector by air traffic control simulation experiments. Electronics and Communications in Japan, Part 1(Communications), 1996,79(8): 103~113
- [25] Schmidt D K. A queuing analysis of the air traffic controller's work load. IEEE Transaction On Systems, Man, And Cybernetics, 1978, 8 (6): 492~498
- [26] Seven S. Workload measurement reconsidered. Human factor society bulletin, 1989, 32 (11): 5~7
- [27] 韩松臣, 张明, 黄卫芳. 管制扇区优化划分的方法及计算机实现技术. 交通运输工程学报, 2003, 3 (1): 101~104
- [28] 韩松臣, 张明. 依据管制工作负荷的扇区优化新方法. 南京航空航天大学学报, 2004, 36 (1): 91~96
- [29] Barnhill R E. and Piper B R. A Multidimensional Surface Problem: Pressure on a Wing. CAGD, 1985, 2 (2) : 185-187
- [30] Barnhill R E, Piper B R and Rescorla K L. Interpolation to arbitrary data on a surface. Geometric Modeling, SIAM, Philadelphia , 1987: 281-289.
- [31] Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide (Second Edition. Boston: Academic Press Inc., 1990.
- [32] Pottmann H. Interpolation on Surfaces using minimum norm networks. CAGD, 1992, 9(1): 51-67.
- [33] Barnhill R E, Optitz K, and Pottmann H. Fat Surfaces : a trivariate approach to triangle--based interpolation on surfaces. CAGD, 1992, 9(3): 365-378.
- [34] Bajaj C and Xu G. Modeling Scattered Surface DATA on Curved Surface. In: Proceedings of the 2nd Pacific Graphics Conference and The 4th Interpolational Conference on CAD,

BEIJING, China, 1994.

- [35] 徐国良.曲面上数据的  $C^1$ 有理插值. 计算数学, 1997,19(4): 431-437.
- [36] Fortune S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Algorithmica, 1987, 3(2):153-174
- [37] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术. 北京: 科学出版社, 2000
- [38] Richmond G C. An interim description of the DORATASK methodology the assessment of sector capacity. Civil Aviation Authority, London, Dec.1998
- [39] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法. 北京: 科学出版社, 1997
- [40] Xie Yun. Principle and Realization of The Simulated Annealing Algorithm. Computational mathematics Journal of Chinese University, 1999: 212~218
- [41] Klein R. Concrete and abstract voronoi diagrams. In: Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1<sup>st</sup> edition, 1989
- [42] 梅向明, 黄敬之. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 1981
- [43] Carmo M P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. New Jersey : Prentice Hall, Inc., 1976
- [44] Wolter F E. Cut Loci in Borderd and Unbordered Riemannian Manifolds. [PhD thesis], Berlin :Technical University of Berlin, 1989
- [45] Richard K, Franz-Erich W, Thomas Rausch. Geodesic Voronoi Diagrams on Parametric Surfaces. IEEE, 1997: 230~237
- [46] Wang Zhengxuan and Pang Yunjie. Generalization of Voronoi Diagram by Plane Sweep. Journal of Computer-Aided Design& Computer Graphics, 1996, 8 Supplement: 114~119
- [47] Lawson C L. Software for  $C^1$  Surface Interpolation.In: Rice J R. Mathematical Software III. New York :Academic Press, 1977: 161~194
- [48] Lawson Charles L.  $C^1$  Surface Interpolation for Scattered Data on A Sphere. Journal of Mathematics, 1984,14(1): 177~202
- [49] Barnhill R E, Ou H S. Surface defined on Surface. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7: 323~336

## 致 谢

本文是在我的导师唐月红老师的精心指导下完成的。在近三年的学习生活过程中，唐老师对我的学习和生活给予了最大程度的帮助和支持，培养了我独立思考、解决问题的能力。唐老师以她那渊博的知识、严谨的治学态度、高尚的人格魅力和强烈的敬业精神时刻鼓舞和激励着我，在此我再一次衷心的感谢唐老师在我的求学道路上所倾注的心血！

在本论文写作过程中，韩松臣老师在百忙之中，给与我许多帮助与指导，论文能够得以完成，跟韩老师的关心和支持是分不开的，同时张明老师，裴成功同学也在我急需帮助的时候给予热心的解答，在此一并深表感谢！

同时，也要感谢其它同学，朋友对我的关怀和支持！

最后，向参加论文评阅和论文答辩的各位老师表示真诚的谢意！

## 在学期间发表的学术论文

[1] 宗大伟，NURBS曲面最短距离分裂算法的改进，南京航空航天大学第七届研究生学术会议，2005