

# Introducción a la Geometría Computacional

## Problemas y aplicaciones

Eduardo Adam NAVAS LÓPEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Escuela de Matemática  
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática  
Universidad de El Salvador

Congreso de Matemática Aplicada, 2016

# Índice

- 1 Introducción
  - ¿Qué es la Geometría Computacional?
  - Ejemplo Sencillo
- 2 Algunos Problemas
  - La envolvente convexa
  - Triangulación de Delaunay
  - Diagrama de Voronoi
- 3 Conclusión

# Índice

## 1 Introducción

- ¿Qué es la Geometría Computacional?
- Ejemplo Sencillo

## 2 Algunos Problemas

- La envolvente convexa
- Triangulación de Delaunay
- Diagrama de Voronoi

## 3 Conclusión

¿Qué es la Geometría Computacional?

# Geometría Computacional

## Definición

La geometría computacional es una rama de las *ciencias de la computación* dedicada al estudio de algoritmos que pueden ser expresados en términos de la geometría.[6]

Aparece formalmente en 1975 como área de estudio independiente[1]

Es una **disciplina constructiva**, de carácter abstracto, que utiliza técnicas de la geometría clásica, la topología, la teoría de grafos, la teoría de conjuntos y el álgebra lineal.

La geometría computacional es independiente de la tecnología de las máquinas de computación.

¿Qué es la Geometría Computacional?

# Geometría Computacional

## Definición

La geometría computacional es una rama de las *ciencias de la computación* dedicada al estudio de algoritmos que pueden ser expresados en términos de la geometría.[6]

Aparece formalmente en 1975 como área de estudio independiente[1]

Es una **disciplina constructiva**, de carácter abstracto, que utiliza técnicas de la geometría clásica, la topología, la teoría de grafos, la teoría de conjuntos y el álgebra lineal.

La geometría computacional es independiente de la tecnología de las máquinas de computación.

¿Qué es la Geometría Computacional?

# Geometría Computacional

## Definición

La geometría computacional es una rama de las *ciencias de la computación* dedicada al estudio de algoritmos que pueden ser expresados en términos de la geometría.[6]

Aparece formalmente en 1975 como área de estudio independiente[1]

Es una **disciplina constructiva**, de carácter abstracto, que utiliza técnicas de la geometría clásica, la topología, la teoría de grafos, la teoría de conjuntos y el álgebra lineal.

La geometría computacional es independiente de la tecnología de las máquinas de computación.

¿Qué es la Geometría Computacional?

# Geometría Computacional

## Definición

La geometría computacional es una rama de las *ciencias de la computación* dedicada al estudio de algoritmos que pueden ser expresados en términos de la geometría.[6]

Aparece formalmente en 1975 como área de estudio independiente[1]

Es una **disciplina constructiva**, de carácter abstracto, que utiliza técnicas de la geometría clásica, la topología, la teoría de grafos, la teoría de conjuntos y el álgebra lineal.

La geometría computacional es independiente de la tecnología de las máquinas de computación.

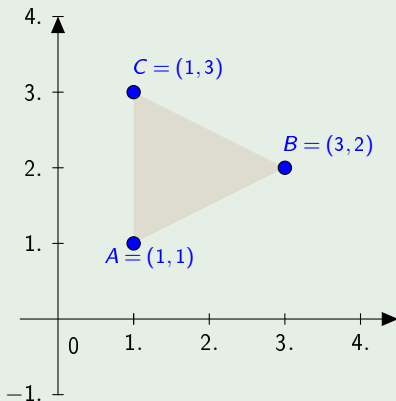
# Índice

- 1 **Introducción**
  - ¿Qué es la Geometría Computacional?
  - **Ejemplo Sencillo**
- 2 **Algunos Problemas**
  - La envolvente convexa
  - Triangulación de Delaunay
  - Diagrama de Voronoi
- 3 **Conclusión**



## Ejemplo

Dados tres puntos en el plano,  
¿forman un triángulo o son  
colineales?



Hay muchas formas de  
resolverlo.

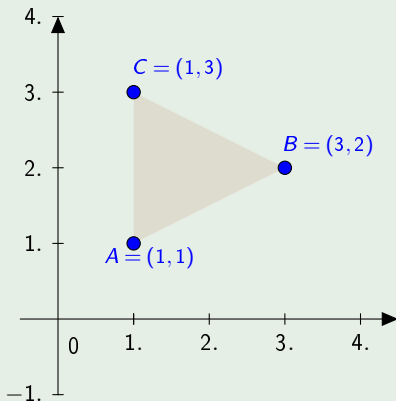
Una forma es usar la definición  
de producto punto vectorial:

$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \cos \theta$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

# Ejemplo

Dados tres puntos en el plano,  
¿forman un triángulo o son  
colineales?



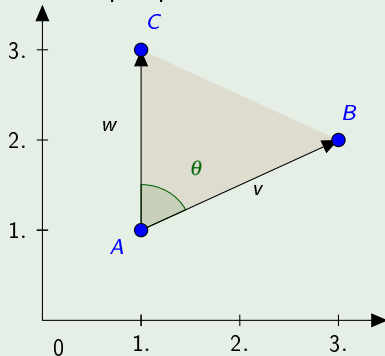
Hay muchas formas de  
resolverlo.

Una forma es usar la definición  
de producto punto vectorial:

$$\begin{aligned}
 |v \times w| &= |v| \cdot |w| \cdot \cos \theta \\
 &= \left| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \right|
 \end{aligned}$$

## Ejemplo

## Solución por producto cruz



## Una solución genérica:

$$1: \vec{v} = B - A$$

$$2: \vec{w} = C - A$$

$$3: m = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

4: if  $m = 0$  then

5:     A, B y C son colineales

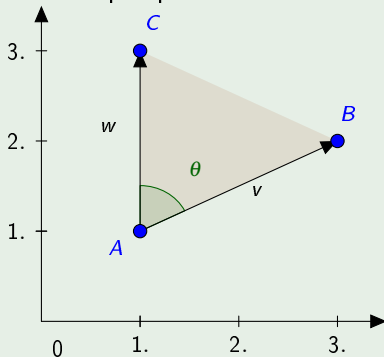
6: else

7:     A, B y C forman un triángulo

8: end if

## Ejemplo

Solución por producto cruz



Una solución genérica:

1:  $\vec{v} = B - A$

2:  $\vec{w} = C - A$

3:  $m = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$

4: **if**  $m = 0$  **then**

5:     A, B y C son colineales

6: **else**

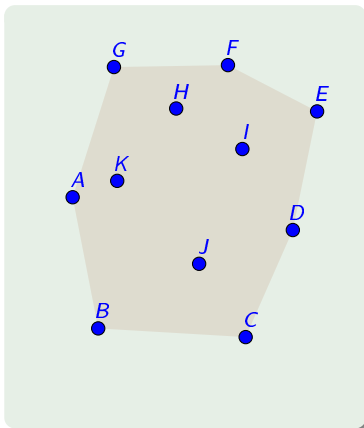
7:     A, B y C forman un triángulo

8: **end if**

# Índice

- 1 Introducción
  - ¿Qué es la Geometría Computacional?
  - Ejemplo Sencillo
- 2 Algunos Problemas
  - La envolvente convexa
  - Triangulación de Delaunay
  - Diagrama de Voronoi
- 3 Conclusión

# La envolvente convexa



## Definición

Dado un conjunto de puntos  $\{A, B, C, \dots\}$ , es la secuencia de puntos ordenados  $\{P_i\}_{i=0}^n$  tal que esta secuencia define los vértices del polígono convexo que contiene a todos los puntos del conjunto. [4, 3]

# Aplicaciones

Si los puntos representan puntos de control (estaciones de monitoreo o vigilancia).

Se usa para aproximar el área contenida o monitorizada.

En la visión por computadora sirve para calcular rutas de navegación posibles.

También se usa como punto de partida para otros problemas de la Geometría Computacional, como las triangulaciones de Dalaunay.

# Aplicaciones

Si los puntos representan puntos de control (estaciones de monitoreo o vigilancia).

Se usa para aproximar el área contenida o monitorizada.

En la visión por computadora sirve para calcular rutas de navegación posibles.

También se usa como punto de partida para otros problemas de la Geometría Computacional, como las triangulaciones de Dalaunay.



# Aplicaciones

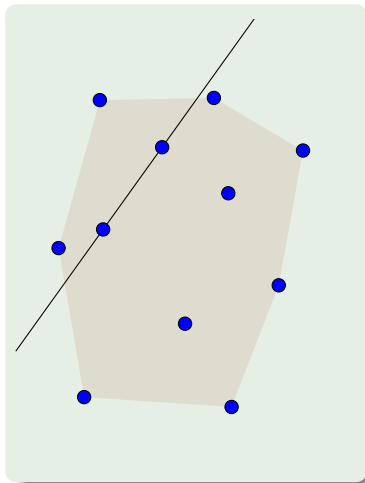
Si los puntos representan puntos de control (estaciones de monitoreo o vigilancia).

Se usa para aproximar el área contenida o monitorizada.

En la visión por computadora sirve para calcular rutas de navegación posibles.

También se usa como punto de partida para otros problemas de la Geometría Computacional, como las triangulaciones de Dalaunay.

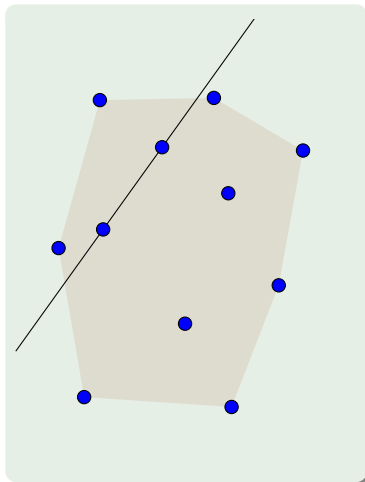
# Estrategias simples



Dado un par de puntos del conjunto trazamos la recta que los une, verificamos si todos los demás puntos están del mismo lado de la recta. Si es así, entonces el segmento de recta que une a esos dos puntos, forma parte de la envolvente convexa, y si no, no.

Queda claro que este algoritmo es muy lento, ya que requiere verificar cada pareja de puntos.

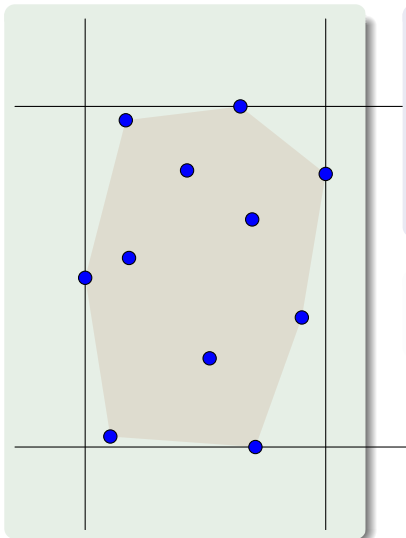
# Estrategias simples



Dado un par de puntos del conjunto trazamos la recta que los une, verificamos si todos los demás puntos están del mismo lado de la recta. Si es así, entonces el segmento de recta que une a esos dos puntos, forma parte de la envolvente convexa, y si no, no.

Queda claro que este algoritmo es muy lento, ya que requiere verificar cada pareja de puntos.

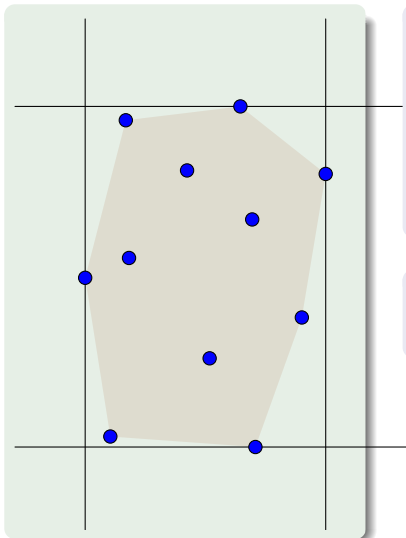
# Estrategias simples



Intuitivamente puede verse que los puntos en los extremos horizontales y verticales formarán parte de la envolvente buscada, por lo que son puntos ideales para comenzar la búsqueda.[4]

Existen otros algoritmos más rápidos... [3, 2, 4, 1]

# Estrategias simples



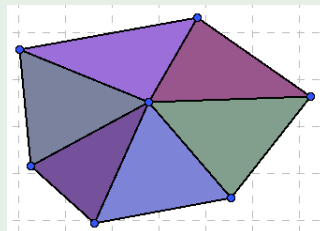
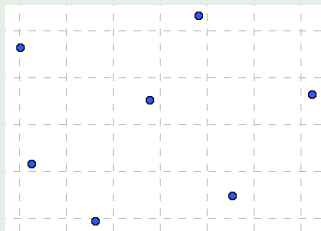
Intuitivamente puede verse que los puntos en los extremos horizontales y verticales formarán parte de la envolvente buscada, por lo que son puntos ideales para comenzar la búsqueda.[4]

Existen otros algoritmos más rápidos... [3, 2, 4, 1]

# Índice

- 1 Introducción
  - ¿Qué es la Geometría Computacional?
  - Ejemplo Sencillo
- 2 Algunos Problemas
  - La envolvente convexa
  - Triangulación de Delaunay
  - Diagrama de Voronoi
- 3 Conclusión

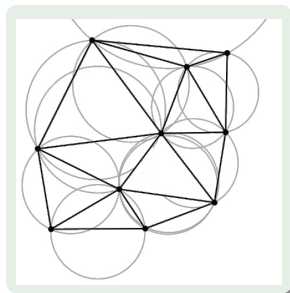
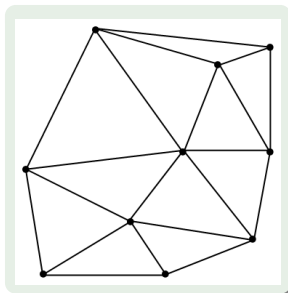
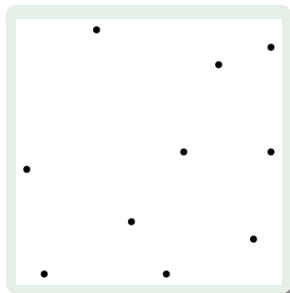
# ¿Qué es una triangulación?



## Definición

Una triangulación de un polígono o área poligonal es una partición de dicha área en un conjunto de triángulos que no se cruzan entre sí.[3]

# La triangulación de Delaunay



## Definición

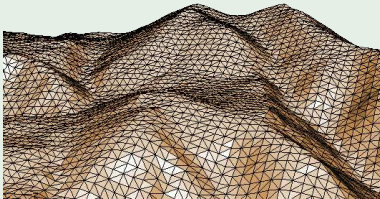
Es una triangulación que cumple con la condición que la circunferencia circunscrita de cada triángulo no debe contener ningún vértice de otro triángulo.[3]



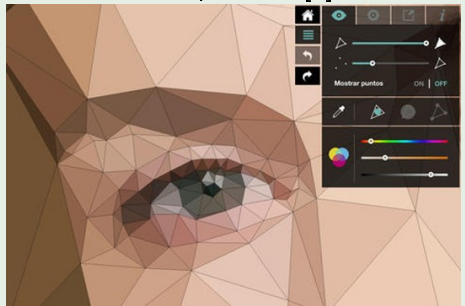
# Aplicaciones

Generación de una triangulación con los ángulos mínimos de cada triángulo maximizados. Es decir, se minimiza la ocurrencia de ángulos «muy» agudos.[1] Es la triangulación más fuerte posible.

## Modelado de terrenos

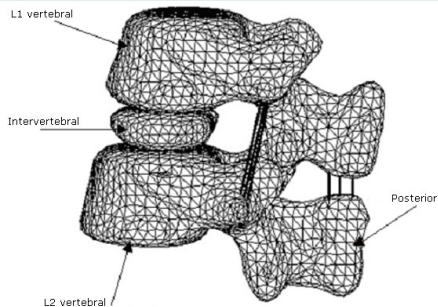


## Modelado de superficies.[5]



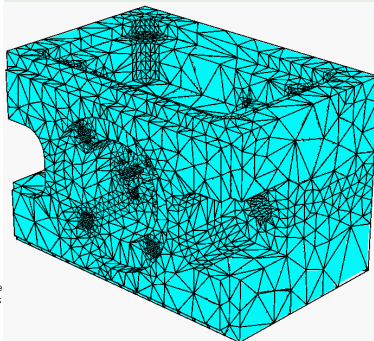
# Aplicaciones

## para simulaciones de Elemento Finito



Fuente: Li H, Wang Z. Intervertebral disc biomechanical analysis using the finite element modeling based on medical images. Computerized medical imaging and graphics 2006;30(6):363-70.

**Fig. 3.** Modelo de elementos finitos obtenido de las vértebras L1-L2.

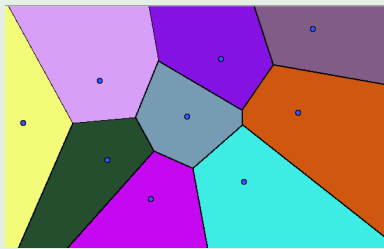


# Índice

- 1 Introducción
  - ¿Qué es la Geometría Computacional?
  - Ejemplo Sencillo
- 2 Algunos Problemas
  - La envolvente convexa
  - Triangulación de Delaunay
  - Diagrama de Voronoi
- 3 Conclusión

# El diagrama de Voronoi

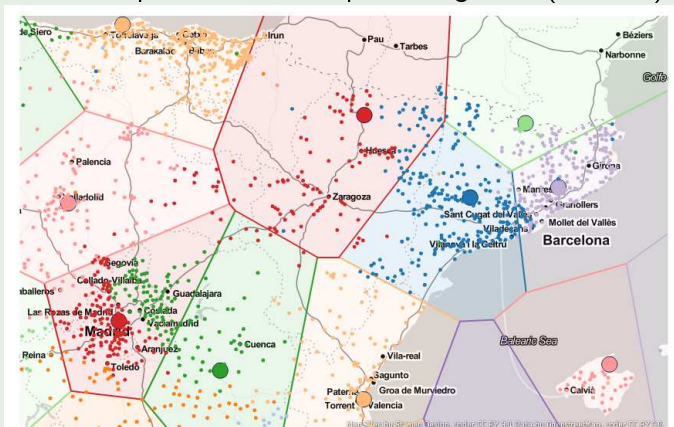
## Ejemplo



## Definición

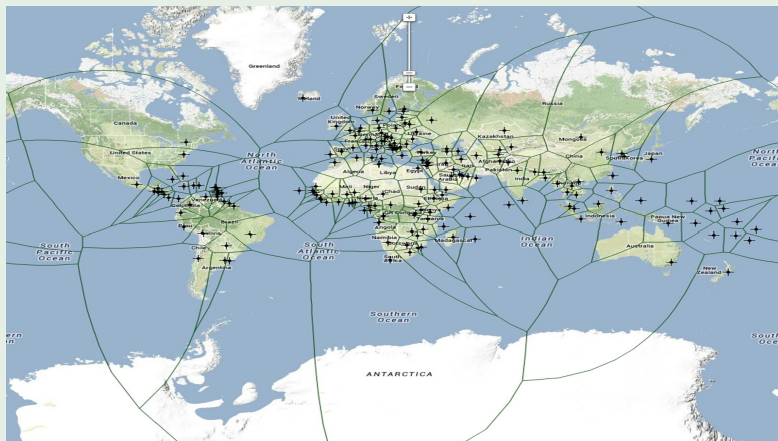
El Diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos (sitios) es una partición del plano en un conjunto de polígonos convexas (algunos abiertos) asociados biunívocamente a estos. Estos polígonos son tales que contienen a todos los puntos más cercanos a sus puntos asociados que a otros puntos.[2, 1, 3]

centros hospitalarios, estaciones de bomberos, paradas de autobús, centros comerciales, control del tráfico aéreo, telefonía móvil, análisis de poblaciones de especies vegetales (etcétera)



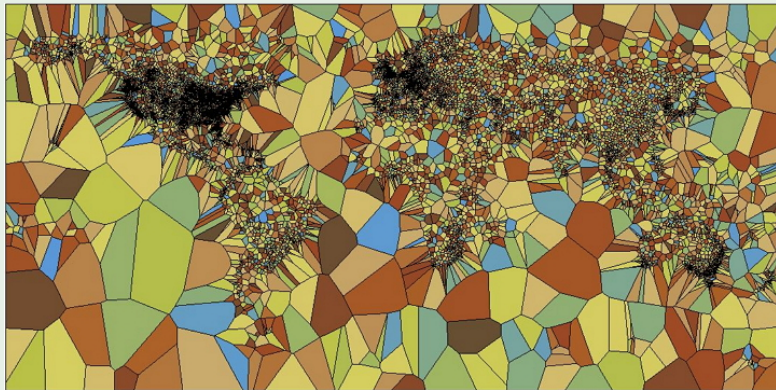
# Aplicaciones

## Diagrama de Voronoi de las Capitales del Mundo en geometría esférica



# Aplicaciones

## Diagrama de Voronoi de estaciones meteorológicas en el mundo



# Aplicaciones

## Diagrama de Voronoi en diferentes métricas



**Euclidean**



**Manhattan**



# Conclusiones

- La Geometría Computacional es una ciencia interesante y con abundantes aplicaciones
- El estudio de la Geometría Computacional está fuertemente ligada a la Graficación por Computadora, ya que es esta la que permite observar los resultados de la primera
- Desde el punto de vista de las aplicaciones resulta muy interesante el estudio de los Diagramas de Voronoi con diferentes métricas.

# Licencia

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons  
Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional.



# Referencias I



Preparata F.P., Shamos M.I. (1988).

*Computational Geometry - An Introduction.*

Springer-Verlag. Segunda edición: ISBN 3-540-96131-3.



Mendoza F.R (s.f.)

*Geometría Computacional*

Universidad de Los Andes, Venezuela

[http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/geome\\_comp/geometria\\_computacional.pdf](http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/geome_comp/geometria_computacional.pdf)



de Berg M., Cheong O., van Kreveld M, Overmars M.

*Computational Geometry* (3 edición, 1998).

Springer. ISBN 978-3-540-77973-5.



Márquez A. (s.f.)

*Fundamentos de Geometría Computacional,*

consultado el 1 de septiembre de 2016.

<http://asignatura.us.es/fgcitig/contenidos/gctem1ma.htm>

# Referencias II



Sainz M. (2013) *Una realidad triangular*

El Mundo (periódico), consultado el 4 de septiembre de 2016.

<http://www.elmundo.es/blogs/elmundo/applicate/2013/10/15/una-realidad-triangular.html>



Wikipedia, *Geometría Computacional*,

consultado el 26 de agosto de 2016.

[es.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometr%C3%ADa\\_computacional&oldid=85791519](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometr%C3%ADa_computacional&oldid=85791519)