

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:

а) ЛНЗ система: _____

б) ЛЗ система: _____

с) базис: _____

д) система координат: _____

2. Запишите условия компланарности и коллинеарности векторов $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$ и $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$ (с помощью детерминанта):

3. Является ли система векторов базисом в пространстве (а) / на плоскости (б, с)?

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Известно, что система векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ состоит из трех попарно неколлинеарных компланарных векторов. Выберите верные утверждения:
- а) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ линейно зависима;
 - б) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ линейно независима;
 - в) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образует базис в пространстве;
 - г) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образует базис на плоскости, образованной векторами \vec{a} и \vec{b} ;
 - д) система $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ образует базис на плоскости, образованной векторами \vec{a} и \vec{b} .
5. Определите, являются ли компланарными векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Даны векторы:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

а) $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ б) $\vec{e} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

2. Докажите, что система векторов $(1 \ 2 \ 3)^T$, $(3 \ 2 \ 1)^T$, $(1 \ 0 \ 1)^T$ является базисом в пространстве, и найдите координаты векторов $(5 \ 4 \ 2)^T$, $(5 \ 2 \ 3)^T$ в этом базисе.
3. Известно, что \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} — некопланарные векторы. Определите, компланарны ли векторы \vec{l} , \vec{m} и \vec{n} , если:

а) $\vec{l} = \vec{a} + \vec{b}$ б) $\vec{l} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
 $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ $\vec{n} = 5\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$

4. Даны векторы

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найти α и β такие, что

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

5. Доказать, что $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ векторы

$$\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \quad \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$$

линейно зависимы.

6. Докажите:

- а) Система векторов, содержащая нулевой вектор $\vec{0}$, линейно зависима.
 б) Система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Пусть даны N точек A_1, A_2, \dots, A_n . Найти **все** точки O такие, что

$$O\vec{A}_1 + O\vec{A}_2 + \dots + O\vec{A}_n = \vec{0}.$$

2. Даны три точки:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2) \quad \text{и} \quad C(x_3, y_3, z_3),$$

не лежащие на одной прямой. Найдите координаты точки пересечения медиан $\triangle ABC$.

3. Три точки

$$A(x, y), \quad B(x_2, y_2) \quad \text{и} \quad C(x_3, y_3),$$

не лежащие на одной прямой, являются последовательными вершинами параллелограмма.