

## Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:

а) ЛНЗ система: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

б) ЛЗ система: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

с) базис: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

д) система координат: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2. Запишите условия компланарности и коллинеарности векторов  $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$  и  $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$  (с помощью детерминанта):

3. Является ли система векторов базисом в пространстве (а) / на плоскости (б, с)?

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Известно, что система векторов  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  состоит из трех попарно неколлинеарных компланарных векторов. Выберите верные утверждения:
- а) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  линейно зависима;
  - б) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  линейно независима;
  - в) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  образует базис в пространстве;
  - г) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  образует базис на плоскости, образованной векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
  - д) система  $\{\vec{a}, \vec{c}\}$  образует базис на плоскости, образованной векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
5. Определите, являются ли компланарными векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Задания к воркшопу по аналитической геометрии

### Базовые обязательные задания

1. Даны векторы:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

$$\text{а) } \vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} \qquad \text{б) } \vec{e} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

2. Докажите, что система векторов  $(1 \ 2 \ 3)^T$ ,  $(3 \ 2 \ 1)^T$ ,  $(1 \ 0 \ 1)^T$  является базисом в пространстве, и найдите координаты векторов  $(5 \ 4 \ 2)^T$ ,  $(5 \ 2 \ 3)^T$  в этом базисе.
3. Известно, что  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — некопланарные векторы. Определите, компланарны ли векторы  $\vec{l}$ ,  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \vec{l} = \vec{a} + \vec{b} & \text{б) } \vec{l} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \\ \vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} & \vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} & \vec{n} = 5\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} \end{array}$$

4. Даны векторы

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найти  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

5. Доказать, что  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  векторы

$$\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \quad \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$$

линейно зависимы.

6. Докажите:

- а) Система векторов, содержащая нулевой вектор  $\vec{0}$ , линейно зависима.  
 б) Система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

**Дополнительные индивидуальные задания**

1. Пусть даны  $N$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Найти **все** точки  $O$  такие, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

2. В  $\triangle ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Найти координаты вектора  $AD$  в базисе, образованном векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .

3. Три точки

$$A(x, y), \quad B(x_2, y_2) \quad \text{и} \quad C(x_3, y_3),$$

не лежащие на одной прямой, являются последовательными вершинами параллелограмма. Найти координаты четвертой вершины.

4. Даны две точки  $A(3, -2)$  и  $B(1, 4)$ . Точка  $M$  лежит на прямой  $AB$ , причем  $|AM| = 3|AB|$ . Найдите координаты точки  $M$ , если

- (а) точка  $M$  лежит по одну сторону от  $A$  вместе с  $B$ ;  
(б) точки  $M$  и  $B$  лежат по разные стороны от  $A$ .

5. Пусть даны  $N$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Найти **все** точки  $O$  такие, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

6. В  $\triangle ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Найти координаты вектора  $AD$  в базисе, образованном векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .

7. Даны три точки:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2) \quad \text{и} \quad C(x_3, y_3, z_3),$$

не лежащие на одной прямой. Найдите координаты точки пересечения медиан  $\triangle ABC$ .

8. Доказать, что если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

## Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:

а) ЛНЗ система: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

б) ЛЗ система: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

с) базис: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

д) система координат: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2. Запишите условия компланарности и коллинеарности векторов  $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$  и  $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$  (с помощью детерминанта):

3. Является ли система векторов базисом в пространстве (а) / на плоскости (б, с)?

(а)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(б)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(с)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Известно, что система векторов  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  состоит из трех попарно неколлинеарных компланарных векторов. Выберите верные утверждения:
- а) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  линейно зависима;
  - б) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  линейно независима;
  - в) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  образует базис в пространстве;
  - г) система  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  образует базис на плоскости, образованной векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
  - д) система  $\{\vec{a}, \vec{c}\}$  образует базис на плоскости, образованной векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
5. Определите, являются ли компланарными векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Задания к воркшопу по аналитической геометрии

### Базовые обязательные задания

1. Даны векторы:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

$$\text{а) } \vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} \qquad \text{б) } \vec{e} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

2. Докажите, что система векторов  $(1 \ 2 \ 3)^T$ ,  $(3 \ 2 \ 1)^T$ ,  $(1 \ 0 \ 1)^T$  является базисом в пространстве, и найдите координаты векторов  $(5 \ 4 \ 2)^T$ ,  $(5 \ 2 \ 3)^T$  в этом базисе.
3. Известно, что  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — некопланарные векторы. Определите, компланарны ли векторы  $\vec{l}$ ,  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \vec{l} = \vec{a} + \vec{b} & \text{б) } \vec{l} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \\ \vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} & \vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} & \vec{n} = 5\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} \end{array}$$

4. Даны векторы

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найти  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

5. Доказать, что  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  векторы

$$\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \quad \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$$

линейно зависимы.

6. Докажите:

- а) Система векторов, содержащая нулевой вектор  $\vec{0}$ , линейно зависима.  
 б) Система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

**Дополнительные индивидуальные задания**

1. Пусть даны  $N$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Найти **все** точки  $O$  такие, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

2. В  $\triangle ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Найти координаты вектора  $AD$  в базисе, образованном векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .

3. Даны три точки:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2) \quad \text{и} \quad C(x_3, y_3, z_3),$$

не лежащие на одной прямой. Найдите координаты точки пересечения медиан  $\triangle ABC$ .

4. Доказать, что если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.