Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:

   a) ЛНЗ система: ______________________________

   ____

   ____

   b) ЛЗ система: ______________________________

   ____

   ____

   c) базис: ______________________________

   ____

   ____

   ____

   d) система координат: ______________________________

   ____

   ____

2. Запишите условия компланарности и коллинеарности векторов $\vec{a} = (a_1\ a_2\ a_3)^T$ и $\vec{b} = (b_1\ b_2\ b_3)^T$ (с помощью детерминанта):

3. Является ли система векторов базисом в пространстве (a) / на плоскости (b, c)?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Известно, что система векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ состоит из трех попарно неколлинеарных компланарных векторов. Выберите верные утверждения:

   a) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\{$ линейно зависима;

   b) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ линейно независима;

   c) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образует базис в пространстве;

   d) система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образует базис на плоскости, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

   e) система $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ образует базис на плоскости, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Определите, являются ли компланарными векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Даны векторы:
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
   Найдите:

   a) $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{e} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

2. Докажите, что система векторов $(1\ 2\ 3)^T$, $(3\ 2\ 1)^T$, $(1\ 0\ 1)^T$ является базисом в пространстве, и найдите координаты векторов $(5\ 4\ 2)^T$, $(5\ 2\ 3)^T$ в этом базисе.

3. Известно, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Определите, компланарны ли векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

   a) $\vec{l} = \vec{a} + \vec{b}$
   $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
   $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

   b) $\vec{l} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
   $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
   $\vec{n} = 5\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$

4. Даны векторы
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   Найти α и β такие, что
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

5. Доказать, что $\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ векторы
$$\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \quad \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$$
   линейно зависимы.

6. Докажите:

   a) Система векторов, содержащая нулевой вектор $\vec{0}$, линейно зависима.

   b) Система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Пусть даны N точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Найти **все** точки O такие, что
$$O\vec{A}_1 + O\vec{A}_2 + \cdots + O\vec{A}_n = \vec{0}.$$

2. Даны три точки:
$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2) \quad \text{и} \quad C(x_3, y_3, z_3),$$
не лежащие на одной прямой. Найдите координаты точки пересечения медиан $\triangle ABC$.