

Powierzchnie Riemanna

W Jakimowicz

J Rudzik

K Szymański

Zima 2025/26

Spis treści

15.10.2025 Definicja powierzchni Riemanna	1
1. Dziedzina funkcji \sqrt{z}	1
2. Definicja powierzchni Riemanna	2

15.10.2025 Definicja powierzchni Riemanna

Zaczynamy od pytania "jakie przestrzenie mogą być dziedzinami funkcji holomorficznej?" W pierwszej kolejności poznajemy

1. otwarty podzbiór płaszczyzny zespolonej, $U \subseteq \mathbb{C}$,
2. otwarty podzbiór sfery Riemanna, $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.

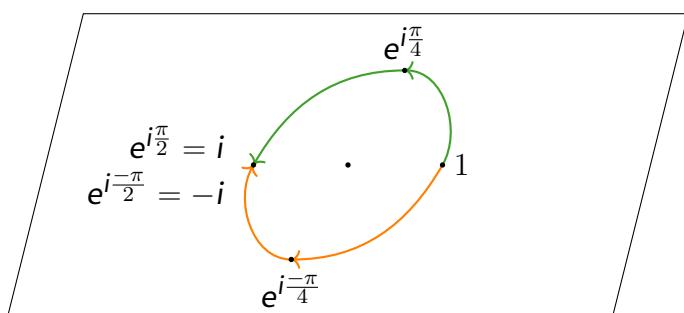
Nie jest to jednak satysfakcjonująca nas odpowiedź.

1. Dziedzina funkcji \sqrt{z}

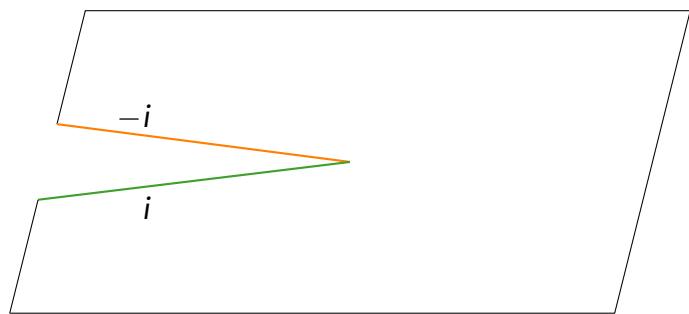
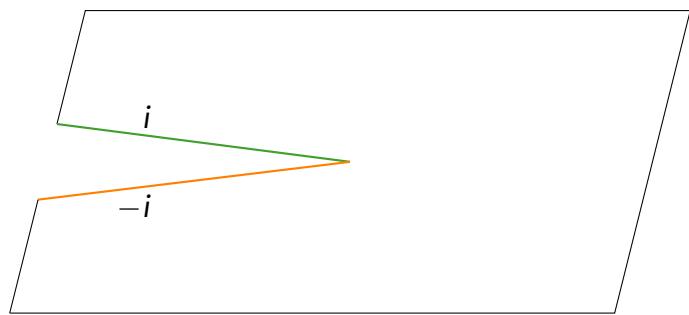
Rozważamy teraz konkretną funkcję,

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{R}e^{i\theta/2}.$$

Wydaje się, że na \mathbb{C} potrafimy znaleźć pierwiastek dla dowolnej liczby z . Jest to złudna uciecha, gdyż prowadzi nas do problemu z jednoznacznością. Wydaje się, że jeśli zacznijemy od $z = 1$ i będziemy szli po okręgu jednostkowym zgodnie ze wskazówkami zegara i przeciwnie do wskazówek zegara to po połowie obrotu powinniśmy dojść do tej samej wartości pierwiastka. Tak jednak nie jest:



Rozwiązaniem tego problemu jest wzięcie dwóch kopii \mathbb{C}^* , rozcięcie ich wzduż prostej \mathbb{R}_- , zdefiniowanie \sqrt{z} na dwa różne sposoby na każdej i sklejenie ich na krzyż tak, aby i było sklejone z i , a $-i$ z $-i$ (kolory).



Na tej powierzchni \sqrt{z} jest określony jednoznacznie.

2. Definicja powierzchni Riemanna