

Powierzchnie Riemanna

W Jakimowicz

J Rudzik

K Szymański

Zima 2025/26

Spis treści

15.10.2025	Definicja powierzchni Riemanna	1
1.	Dziedzina funkcji \sqrt{z}	1
2.	Definicja powierzchni Riemanna	2
05.11.2025	2-formy	3
1.	Całka	3
2.	Kohomologie de Rhama	5
3.	kohomologie de Rhama o zwartym nośniku	7

15.10.2025 Definicja powierzchni Riemanna

Zaczynamy od pytania "jakie przestrzenie mogą być dziedzinami funkcji holomorficznej?" W pierwszej kolejności poznajemy

1. otwarty podzbiór płaszczyzny zespolonej, $U \subseteq \mathbb{C}$,
2. otwarty podzbiór sfery Riemanna, $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.

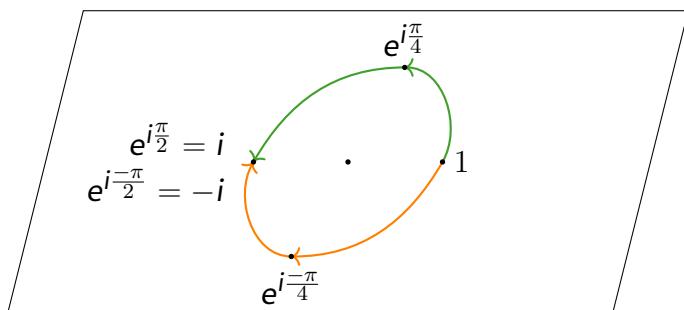
Nie jest to jednak satysfakcjonująca nas odpowiedź.

1. Dziedzina funkcji \sqrt{z}

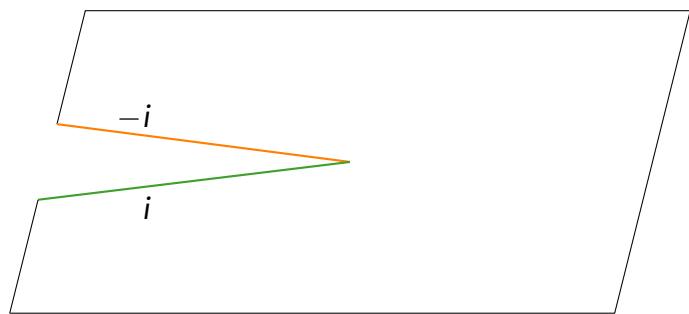
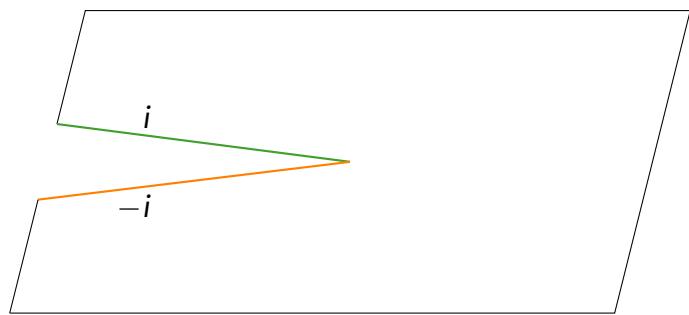
Rozważamy teraz konkretną funkcję,

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{R}e^{i\theta/2}.$$

Wydaje się, że na \mathbb{C} potrafimy znaleźć pierwiastek dla dowolnej liczby z . Jest to złudna uciecha, gdyż prowadzi nas do problemu z jednoznacznością. Wydaje się, że jeśli zacznijemy od $z = 1$ i będziemy szli po okręgu jednostkowym zgodnie ze wskazówkami zegara i przeciwnie do wskazówek zegara to po połowie obrotu powinniśmy dojść do tej samej wartości pierwiastka. Tak jednak nie jest:



Rozwiązaniem tego problemu jest wzięcie dwóch kopii \mathbb{C}^* , rozcięcie ich wzduż prostej \mathbb{R}_- , zdefiniowanie \sqrt{z} na dwa różne sposoby na każdej i sklejenie ich na krzyż tak, aby i było sklejone z i , a $-i$ z $-i$ (kolory).



Na tej powierzchni \sqrt{z} jest określony jednoznacznie.

2. Definicja powierzchni Riemanna

05.11.2025 2-formy

E - przestrzeń liniowa,

$$\bigwedge^2 E^* = \{B : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : \text{dwuliniowe, } B(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = -B(\mathbf{f}, \mathbf{e})\}$$

Kiedy $\dim(E) = 2$ to $\dim(\bigwedge^2 E^*) = 1$.

Dla $\alpha, \beta \in E^*$ definiujemy $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^2 E^*$

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \alpha(\mathbf{e})\beta(\mathbf{f}) - \alpha(\mathbf{f})\beta(\mathbf{e})$$

Jeśli $E = T_p\Sigma$ to $E^* = T_p^*\Sigma$ i $\bigwedge^2 T_p^*\Sigma = \bigwedge^2 E^*$ dla współrzędnych (x, y) mamy $dx, dy \in T_p^*\Sigma$ i

$$dx \wedge dy \in \bigwedge^2 T_p^*\Sigma$$

jest bazą

gładka 2-forma ω na Σ to

$$\begin{aligned} \omega : \Sigma &\rightarrow \bigwedge^2 T^*\Sigma = \bigcup_{p \in \Sigma} \bigwedge^2 T_p^*\Sigma \\ \omega(p) &\in \bigwedge^2 T_p^*\Sigma \end{aligned}$$

lokalnie we współrzędnych

$$\omega = f(x, y) dx \wedge dy = f(x, y) dxdy$$

$$[\omega](p) = f(x(p), y(p)) [dx]_p \wedge [dy]_p$$

Jak wygląda zmiana współrzędnych $(x, y) \rightarrow (x', y')$?

$$f(x(x', y'), y(x', y')) \left(\frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial x'} dx + \frac{\partial y}{\partial y'} dy \right) = f(x(x', y'), y(x', y')) \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) dx \wedge dy$$

1. Całka

Jeśli $\text{supp}(\omega) \subseteq U$, gdzie U jest zbiorem mapowym współrzędnych (x, y) to

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_U \omega = \int_U f(x, y) dxdy$$

to nie zależy od wyboru współrzędnych na nośniku ω .

Ogólnie jeśli mamy ω o zwartym nośniku, $\omega \in \Omega_c^2(\Sigma)$, to możemy ten nośnik pokryć zbiorami mapowymi $\text{supp}(\omega) \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i$. Rozkład jedności: $\chi_i \in C_c^\infty(U_i)$ takie, że $\sum \chi_i = 1$.

$$\int_{\Sigma} \omega = \sum_i \int_{U_i} \chi_i \omega$$

Definicja 0.1: różniczka

$$d : \Omega^1(\Sigma) \rightarrow \Omega^2(\Sigma)$$

1. $\alpha_1 = \alpha_2 \implies d\alpha_1 = d\alpha_2$ na U
2. $ddf = 0$ dla $f \in C^\infty(\Sigma) = \Omega^0(\Sigma)$
3. $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$

lokalnie dla $\Omega^1(\Sigma) \ni \alpha = f dx + g dy$:

$$d\alpha = d(fdx) + d(gdy) = df \wedge dx + fddx + dg \wedge dy + gddy = (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + ...$$

Twierdzenie 0.2: stokes

Σ - powierzchnia z brzegiem, $\alpha \in \Omega_C^1(\Sigma)$ wtedy

$$\int_{\partial\Sigma} \alpha = \int_{\Sigma} d\alpha$$

Dowód

rozkład jedności + rachunek w mapie



Zadanie: $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ czy istnieje $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ takie, że $F_x = f, F_y = g$?

jest na to konieczny warunek, bo $F_{xy} = f_y, F_{yx} = g_x$ a dla gładkich funkcji $F_{xy} = F_{yx}$.

innymi słowy pytamy czy istnieje F takie, że

$$dF = f dx + g dy = \alpha$$

TAK $\iff d\alpha = 0$.

$$\implies d\alpha = ddF = 0$$

\iff krzywa γ idzie od $(0,0)$ do $(0,y)$ i potem do (x,y) (**rysunek**) $F(x,y) = \int_\gamma \alpha = \int_0^x g(0,t)dt + \int_0^x f(t,y)dt$ co jeśli jest \bar{F} (całka po krzywej ξ $(0,0) - (x,0) - (x,y)$)?

$$F - \bar{F} = \int_\gamma \alpha - \int_\xi \alpha = \int_{\gamma \cup -\xi} \alpha = \int_{\square} d\alpha = 0$$

można się przyczepić, że kwadrat nie ma gładkiego brzegu, ale jak go ugładzimy to wyjdzie to samo i to nam nie przeszkadza

policzyliśmy właśnie, że $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$

2. Kohomologie de Rhama

$$\Omega^0(\Sigma) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(\Sigma) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(\Sigma)$$

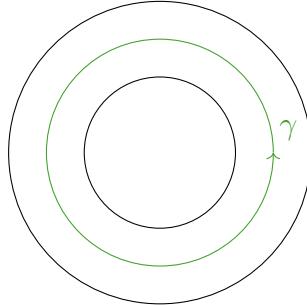
$H^0(\Sigma) = \ker d^0$ $H^1(\Sigma) = \ker d^1 / \text{im } d^0$ $H^2(\Sigma) = \Omega^2(\Sigma) / \text{im } d^1$ wpierw będziemy się skupiać na H^1

Fakt 0.3

1. $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$
2. $H^0(\Sigma) = \mathbb{R}^n$, gdzie n to liczba składowych spójnych Σ

Przykłady

1. annulus A



$H^1(A) \neq 0$, $d\theta \in \Omega^1(A)$, $dd\theta = 0$ dla $d\theta \in \ker(d^1)$

$$\int_{\gamma} d\theta = \theta(\gamma(1)) - \theta(\gamma(0)) = 2\pi$$

gdyby $d\theta = dF$ dla $F \in C^\infty$ to wówczas $\int_{\gamma} d\theta = \int_{\gamma} dF = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$

2. sfera S^2 (mapy: biegun półn U i półd V)

Niech $\alpha \in \Omega^1(S^2)$, $d\alpha = 0$, $d|_U = df_U$, $\alpha|_V = df_V$

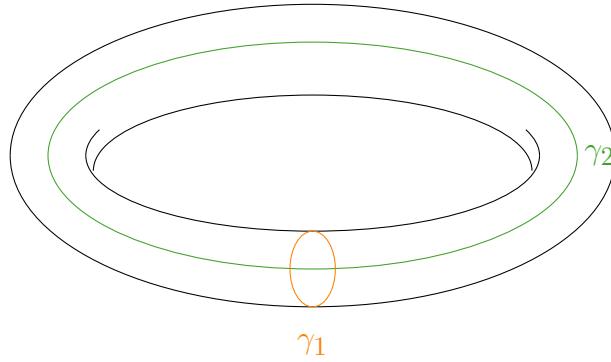
patrzymy jak $f_U - f_V$ = się zachowuje na przekroju $U \cap V$

$$d(f_U - f_V) = d\alpha - d\alpha = 0 \implies f_U - f_V = c$$

dla $\Omega^0(S^2) \ni f = f_U \cup (f_V + c)$, $df = \alpha$

czyli $H^1(S^2) = 0$

3. torus $T^2 = S^1 \times S^1$ myślimy o nim jak o dwóch współrzędnych kątowych θ i φ



$$\begin{array}{ccc} \iota : H^1(T) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \alpha & \longrightarrow & (\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha) \end{array}$$

ι jest dobrze określona, bo

$$\iota(df) = \left(\int_{\gamma_1} df, \int_{\gamma_2} df \right) = (0, 0)$$

ι jest epimorfizmem, bo $\iota(d\theta) = (1, 0)$ i $\iota(d\varphi) = (0, 1)$ ι jest monomorfizmem, bo jeśli $d\alpha = 0$ to $\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha = 0$. Niech $\alpha = Pd\theta + Qd\varphi$

$$0 = \int_{\gamma_1} \alpha = \int_0^{2\pi} P(\theta, \varphi) d\theta$$

dla $\varphi \in \mathbb{R}$

$$f(\theta, \varphi) = \int_0^\theta P(\xi, \varphi) d\xi$$

$f_\theta = P$ popatrzymy na zmodyfikowane α ,

$$\bar{\alpha} = \alpha - df = \bar{Q}d\varphi$$

$$0 \int_{\gamma_2} \bar{\alpha} = \int_0^{2\pi} \bar{Q}(\theta, \xi) d\xi$$

czyli $g(\theta, \varphi) = \int_0^\varphi \bar{Q}(\theta, \xi) d\xi$ czyli $g_\varphi = \bar{Q}$

ZDJECIE

ćwiczenia: policzyć H^1 dla

- $S^1 \times \mathbb{R}$
- powierzchni genusu 2
- powierzchni genusu g

3. kohomologie de Rhama o zwartym nośniku

Σ bez brzegu (zorientowana bo Riemanna)

$H_c^*(\Sigma)$ kohomologie de Rhama o zwartym nośniku zamiast Ω^* używamy Ω_c^*

$$\int_{\Sigma} : H_c^2(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$$

Fakt 0.4

odwzorowanie wyżej jest izomorfizmem
(Σ spójna, zorientowana, bez brzegu)

Dowód

\int_{Σ} jest na

różnowartościowość:

$$\Sigma = \mathbb{R}^2$$

niech $\omega \in \Omega_c^2(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$

$\omega = R(x, y) dx dy$, $R_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) dy$ ψ to pomocnicza bump funkcja ($\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$)

$\bar{R}(x, y) = R(x, y) = r(x)\psi(y)$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{R}(x, y) dy = 0$$

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^y (R(x, t) dt$$

$P_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $P_y = \bar{R}$

$$Q(x, y) = \psi(y) \int_{-\infty}^x r(t) dt$$

$Q \in \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $Q_x(x, y) = \psi(y)r(x)$

$$R(x, y) = \bar{R}(x, y) + r(x)\psi(y) = P_y + Q_x$$

$$\omega = d(-Pdx + Qdy)$$

Niech Σ dowolna, $\text{supp } \omega \subseteq K$ zwarty $\subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ mapowe

zrobimy indukcję względem n

$U = U_1, V = U_2 \cup \dots \cup U_n$

dobieramy f, g tak, że $f \in C_c^\infty(U), g \in C_c^\infty(V), f + g = 1$ na K

$$I = \int_{\Sigma} f\omega = - \int_{\Sigma} g\omega$$

weźmy $\tau \in \Omega_c^2(U \cap V), \int_{\Sigma} \tau = 1$

$$f\omega - I\tau = d\alpha \text{ w } U$$

$$g\omega + I\tau = d\beta \text{ w } V$$

$$\omega = f\omega + g\omega = d\alpha + d\beta$$



Niech γ będzie pętlą w Σ , wtedy $I_\gamma : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto \int_{\gamma} \alpha$

$\theta \in \Omega_c^1(\Sigma), d\theta = 0$ to $J_\theta : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, Σ bez brzegu,

$$\alpha \mapsto \int_{\Sigma} \theta \wedge \alpha = \int -d(f\theta) = \int_{\partial\Sigma} f\theta = 0$$

Twierdzenie 0.5

$$\forall \gamma \exists \theta I_\gamma = J_\theta$$

Dowód

rozcinam krzywą zbiorami mapowymi na każdym przecięciu dwóch zbiorów mapowych (poza pierwszym) wybieram dyszczek D_i

dobieram $\omega_i \in \Omega_c^2(D_i), \int_{D_i} \omega_i = 1$

$$\omega_{i+1} - \omega_i \in \Omega_c^2(U_i)$$

całka po tym jest zero, więc $\omega_{i+1} - \omega_i = d\theta_i, \theta_i \in \Omega_c^1(U_i)$

$$\theta = \sum \theta_i$$

$$d\theta = \sum d\theta_i = \sum (\omega_{i+1} - \omega_i) = 0$$

pozostaje $J_\theta = I_\gamma$ ORBAZEK

