Powierzchnie Riemanna

W Jakimowicz J Rudzik K Szymański

Zima 2025/26

Spis treści

15.10.2025 Definicja powierzchni Riemanna

Zaczynamy od pytania ”jakie przestrzenie mogą być dziedzinami funkcji holomorficznej?” W pierwszej kolejności poznajemy

1. otwarty podzbiór płaszczyzny zespolonej, $U \subseteq \mathbb{C}$,
2. otwarty podzbiór sfery Riemanna, $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.

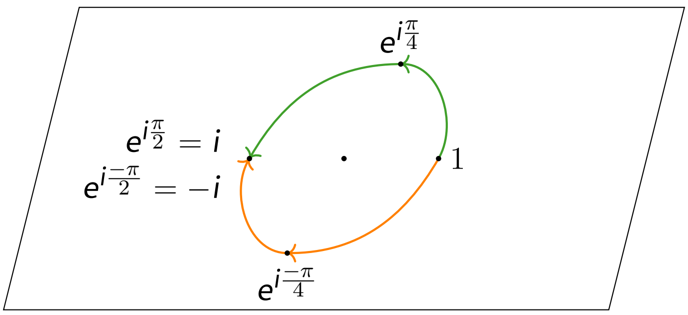
Nie jest to jednak satysfakcjonująca nas odpowiedź.

1. Dziedzina funkcji $\sqrt{z}$

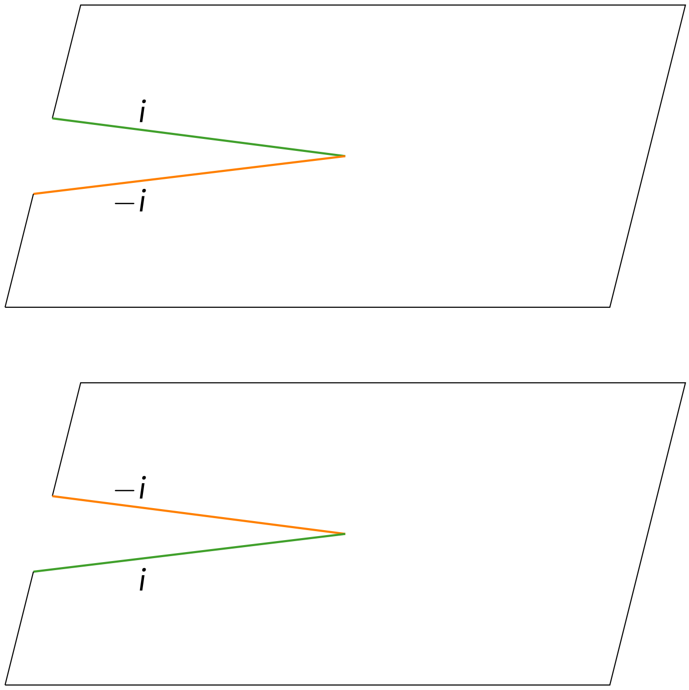
Rozważamy teraz konkretną funkcję,

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{R}e^{i\theta/2}.$$

Wydaje się, że na $\mathbb{C}$ potrafimy znaleźć pierwiastek dla dowolnej liczby z. Jest to złudna uciecha, gdyż prowadzi nas do problemu z jednoznacznością. Wydaje się, że jeśli zaczniemy od $z = 1$ i będziemy szli po okręgu jednostkowym zgodnie ze wskazówkami zegara i przeciwnie do wskazówek zegara to po połowie obrotu powinniśmy dojść do tej samej wartości pierwiastka. Tak jednak nie jest:



Rozwiązaniem tego problemu jest wzięcie dwóch kopii $\mathbb{C}^*$, rozcięcie ich wzdłuż prostej $\mathbb{R}_-$, zdefiniowanie $\sqrt{z}$ na dwa różne sposoby na każdej i sklejenie ich na krzyż tak, aby i było sklejone z i, a $-i$ z $-i$ (kolory).



Na tej powierzchni $\sqrt{z}$ jest określony jednoznacznie.

2. Definicja powierzchni Riemanna

05.11.2025 2-formy

E - przestrzeń liniowa,

$$\bigwedge^2 E^* = \{B : E \times E \to \mathbb{R} \ : \ \text{dwuliniowe}, B(e,f) = -B(f,e)\}$$

Kiedy $\dim(E) = 2$ to $\dim(\bigwedge^2 E^*) = 1$.

Dla $\alpha, \beta \in E^*$ definiujemy $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^2 E^*$

$$(\alpha \wedge \beta)(e,f) = \alpha(e)\beta(f) - \alpha(f)\beta(e)$$

Jeśli $E = T_p\Sigma$ to $E^* = T_p^*\Sigma$ i $\bigwedge^2 T_p^*\Sigma = \bigwedge^2 E^*$ dla współrzędnych (x, y) mamy $dx, dy \in T_p^*\Sigma$ i

$$dx \wedge dy \in \bigwedge^2 T_p^*\Sigma$$

jest bazą

gładka 2-forma ω na Σ to

$$\omega : \Sigma \to \bigwedge^2 T^*\Sigma = \bigcup_{p\in\Sigma} \bigwedge^2 T_p^*\Sigma$$

$$\omega(p) \in \bigwedge^2 T_p^*\Sigma$$

lokalnie we współrzędnych

$$\omega = f(x,y)dx \wedge dy = f(x,y)dxdy$$

$[\omega(p) = f(x(p), y(p))[dx]_p \wedge [dy]_p]$

Jak wygląda zmiana współrzędnych $(x, y) \to (x', y')$?

$$f(x(x',y'), y(x',y'))(\frac{\partial x}{\partial x'}dx' + \frac{\partial x}{\partial y'}dy') \wedge (\frac{\partial y}{\partial x'}dx + \frac{\partial y}{\partial y'}dy) = f(x(x',y'), y(x'y'))(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'})dx \wedge dy$$

1. Całka

Jeśli $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq U$, gdzie U jest zbiorem mapowym współrzędnych (x, y) to

$$\int_\Sigma \omega = \int_U \omega = \int_U f(x,y)dxdy$$

to nie zależy od wyboru współrzędnych na nośniku ω.

Ogólnie jeśli mamy ω o zwartym nośniku, $\omega \in \Omega_c^2(\Sigma)$, to możemy ten nośnik pokryć zbiorami mapowymi $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq \bigcup_{i\leq n} U_i$. Rozkład jedności: $\chi_i \in C_c^\infty(U_i)$ takie, że $\sum \chi_i = 1$.

$$\int_\Sigma \omega = \sum_i \int_{U_i} \chi_i \omega$$

Definicja 0.1: różniczka

$$d : \Omega^1(\Sigma) \to \Omega^2(\Sigma)$$

1. $\alpha_1 = \alpha_2 \implies d\alpha_1 = d\alpha_2$ na U
2. $ddf = 0$ dla $f \in C^\infty(\Sigma) = \Omega^0(\Sigma)$
3. $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha$

lokalnie dla $\Omega^1(\Sigma) \ni \alpha = fdx + gdy$:

$$d\alpha = d(fdx) + d(gdy) = df \wedge dx + fddx + dg \wedge dy + gddy = (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + ...$$

Twierdzenie 0.2: stokes

Σ - powierzchnia z brzegiem, $\alpha \in \Omega^1_c(\Sigma)$ wtedy

$$\int_{\partial\Sigma} \alpha = \int_\Sigma d\alpha$$

Dowód
rozkład jedności + rachunek w mapie

Zadanie: $f, g \in C^\infty \mathbb{R}^2$ czy istnieje $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ takie, że $F_x = f$, $F_y = g$?

jest na to konieczny warunek, bo $F_{xy} = f_y$, $F_{yx} = g_x$ a dla gładkich funkcji $F_{xy} = F_{yx}$.

innymi słowy pytamy czy istnieje F takie, że

$$dF = fdx + gdy = \alpha$$

TAK $\iff d\alpha = 0$.

$\implies d\alpha = ddF = 0$

$\impliedby$ krzywa γ idzie od $(0,0)$ do $(0,y)$ i potem do (x,y) (rysunek) $F(x,y) = \int_\gamma \alpha = \int_0^x g(0,t)dt + \int_0^x f(t,y)dt$ co jeśli jest $\overline{F}$ (całka po krzywej ξ $(0,0) - (x,0) - (x,y)$)?

$$F - \overline{F} = \int_\gamma \alpha - \int_\xi \alpha = \int_{\gamma \cup -\xi} \alpha = \int_\square d\alpha = 0$$

można się przyczepić, że kwadrat nie ma gładkiego brzegu, ale jak go ugładzimy to wyjdzie to samo i to nam nie przeszkadza

policzyliśmy właśnie, że $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$

2. Kohomologie de Rhama

$$\Omega^0(\Sigma) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(\Sigma) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(\Sigma)$$

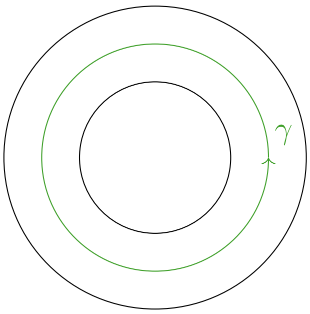
$H^0(\Sigma) = \ker d^0$ $H^1(\Sigma) = \ker d^1 / \operatorname{im} d^0$ $H^2(\Sigma) = \Omega^2(\Sigma)/\operatorname{im} d^1$ wpierw będziemy się skupiać na H^1

Fakt 0.3

1. $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$
2. $H^0(\Sigma) = \mathbb{R}^n$, gdzie n to liczba składowych spójnych Σ

Przykłady

1. annulus A



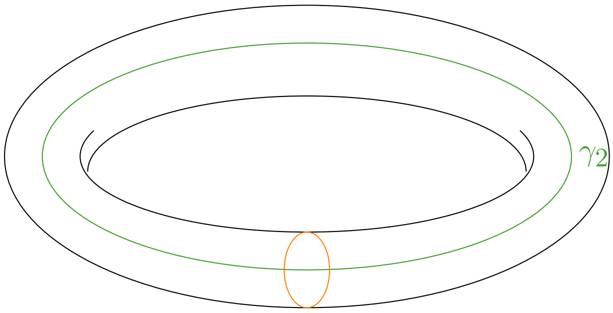
   $H^1(A) \neq 0$, $d\theta \in \Omega^1(A)$, $dd\theta = 0$ dla $d\theta \in \ker(d^1)$

$$\int_\gamma d\theta = \theta(\gamma(1)) - \theta(\gamma(0)) = 2\pi$$

   gdyby $d\theta = dF$ dla $F \in C^\infty$ to wówczas $\int_\gamma d\theta = \int_\gamma dF = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$
2. sfera S^2 (mapy: biegun płn U i płd V)
   Niech $\alpha \in \Omega^1(S^2)$, $d\alpha = 0$, $d|_U = df_U$, $\alpha|_V = df_V$
   patrzymy jak $f_U - f_V =$ się zachowuje na przekroju $U \cap V$

$$d(f_U - fV) = d\alpha - d\alpha = 0 \implies f_U - f_V = c$$

   dla $\Omega^0(S^2) \ni f = f_U \cup (f_V + c)$, $df = \alpha$
   czyli $H^1(S^2) = 0$
3. torus $T^2 = S^1 \times S^1$ myślimy o nim jak o dwóch współrzędnych kątowych θ i φ



$$\begin{array}{ccc} \iota : H^1(T) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longrightarrow & (\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha) \end{array}$$

ι jest dobrze określona, bo

$$\iota(df) = (\int_{\gamma_1} df, \int_{\gamma_2} df) = (0, 0)$$

ι jest epimorfizmem, bo $\iota(d\theta) = (1, 0)$ i $\iota(d\varphi) = (0, 1)$ ι jest monomorfizmem, bo jeśli $d\alpha = 0$ to $\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha = 0$. Niech $\alpha = Pd\theta + Qd\theta$

$$0 = \int_{\gamma_1} \alpha = \int_0^{2\pi} P(\theta, \varphi) d\theta$$

dla $\varphi \in \mathbb{R}$

$$f(\theta, \varphi) = \int_0^{\theta} P(\xi, \varphi) d\xi$$

$f_\theta = P$ popatrzymy na zmodyfikowane α,

$$\overline{\alpha} = \alpha - df = \overline{Q} d\varphi$$

$$0 \int_{\gamma_2} \overline{\alpha} = \int_0^{2\pi} \overline{Q}(\theta, \xi) d\xi$$

czyli $g(\theta, \varphi) = \int_0^{\varphi} \overline{Q}(\theta, \xi) d\xi$ czyli $g_\varphi = \overline{Q}$
ZDJECIE

ćwiczenia: policzyć H^1 dla

- $S^1 \times \mathbb{R}$
- powierzchni genusu 2
- powierzchni genusu g

3. kohomologie de Rhama o zwartym nośniku

Σ bez brzegu (zorientowana bo Riemanna)

$H_c^*(\Sigma$ kohomologie de Rhama o zwartym nośniku zamiast Ω^* używamy Ω_c^*

$$\int_\Sigma : H_c^2(\Sigma) \to \mathbb{R}$$

Fakt 0.4

odwzorowanie wyżej jest izomorfizmem
(Σ spójna, zorientowana, bez brzegu)

Dowód
$\int_\Sigma$ jest na

różnowartościowość:

$$\Sigma = \mathbb{R}^2$$

niech $\omega \in \Omega_c^2(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$

$\omega = R(x, y)dxdy$, $R_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y)dy$ ψ to pomocnicza bump funkcja ($\int_\mathbb{R} \psi(t)dt = 1$)

$\overline{R}(x, y) = R(x, y) = r(x)\psi(y)$

$$\int_\mathbb{R} \overline{R}(x, y)dy = 0$$

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^{y} (R(x, t)dt$$

$P_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $P_y = \overline{R}$

$$Q(x, y) = \psi(y) \int_{-\infty}^{x} r(t)dt$$

$Q \in \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $Q_x(x, y) = \psi(y)r(x)$

$$R(x, y) = \overline{R}(x, y) + r(x)\psi(y) = P_y + Q_x$$

$$\omega = d(-Pdx + Qdy)$$

Niech Σ dowolna, supp $\omega \subseteq K$ zwarty $\subseteq U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$ mapowe

zrobimy indukcję względem n

$U = U_1$, $V = U_2 \cup ... \cup U_n$

dobieramy f, g tak, że $f \in C_c^\infty(U)$, $g \in C_c^\infty(V)$, $f + g = 1$ na K

$I = \int_\Sigma f\omega = -\int_\Sigma g\omega$

weźmy $\tau \in \Omega_c^2(U \cap V)$, $\int_\Sigma \tau = 1$

$f\omega - I\tau = d\alpha$ w U

$g\omega + I\tau = d\beta$ w V

$\omega = f\omega + g\omega = d\alpha + d\beta$

Niech γ będzie pętlą w Σ, wtedy $I_\gamma : H^1(\Sigma) \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \int_\gamma \alpha$

$\theta \in \Omega_c^1(\Sigma)$, $d\theta = 0$ to $J_\theta : H^1(\Sigma) \to \mathbb{R}$, Σ bez brzegu,

$$\alpha \mapsto \int_\Sigma \theta \wedge \alpha = \int -d(f\theta) = \int_{\partial\Sigma} f\theta = 0$$

Twierdzenie 0.5

$\forall\, \gamma\, \exists\, \theta\; I_\gamma = J_\theta$

Dowód
rozcinam krzywą zbiorami mapowymi na każdym przecięciu dwóch zbiorów mapowych (poza pierwszym) wybieram dyszczek D_i

dobieram $\omega_i \in \Omega_c^2(D_i)$, $\int_{D_i} \omega_i = 1$

$$\omega_{i+1} - \omega_i \in \Omega_c^2(U_i)$$

całka po tym jest zero, więc $\omega_{i+1} - \omega_i = d\theta_i$, $\theta_i \in \Omega_c^1(U_i)$

$$\theta = \sum \theta_i$$

$d\theta = \sum d\theta_i = \sum(\omega_{i+1} - \omega_i) = 0$

pozostaje $J_\theta = I_\gamma$ ORBAZEK

Pokażemy, że $I_\gamma = I_\theta$: weźmy $\alpha \in \Omega^1(\Sigma)$, $d\alpha = 0$ BZO: $\alpha|_{D_i} = 0$ $\alpha|_{D_i} \in \Omega^1(D_i)$, $d\alpha = 0 \implies \exists g_i \in \Omega^0(D_i)$ i $dg_i = \alpha$ wybieram $\chi_i \in \Omega_c^0(D_i)$, $\chi_i \equiv 1$ na $\gamma(t_i) \in D_i' \subseteq D_i$

$\alpha \to \alpha - d(\chi_i g_i) \equiv 0$ na D_i

$[\alpha] = [\alpha - d(\chi_i g_i) \in H^1(\Sigma)$

$\alpha|_{U_i} = df_i$, $f_i \in \Omega^0(U_i)$ bo $H^1(U_i) = 0$

$\int_\Sigma \theta_i \wedge \alpha = \int_\Sigma \theta_i \wedge df_i = \int_\Sigma -d(\theta_i \cdot f_i) + \int_\Sigma d\theta_i f_i$ pierwsze ważne przejście to reguła Leibniza

ze Stokes mamy że pierwszy składnik jest 0

$\int_\Sigma d\theta_i \cdot f_i = \int_\Sigma f_i d\theta_i = \int_\Sigma f_i \omega_{i+1} - f_i \omega_i = \int_{D_{i+1}} f_i \omega_{i+1} - \int_{D_i} f_i \omega_i$

$\alpha|_{d_i} = 0 \implies f_i|_{D_i} = const$

$\int_{D_{i+1}} f_i \omega_{i+1} - \int_{d_i} f_i \omega_i = f_i(\gamma(t_{i+1})) - f_i(\gamma(t_i)) = \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} df_i = \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} \alpha$

12.11.2025 Zespolone formy rózniczkowe

Zadanie z listy: $H^1(\Sigma) \ni [\alpha] \neq 0 \implies \exists$ pętla γ taka, że $I_\gamma([\alpha]) = \int_\gamma \alpha \neq 0$

Twierdzenie 0.6

Σ - zwarta powierzchnia bez brzegu

$$H^1(\Sigma) \times H^1(\Sigma) \ni ([\theta], [\alpha]) \mapsto \int_\Sigma \theta \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

jest formą 2-liniową, antysymetryczną, niezdegenerowaną ($\implies 2| \dim(H^1(\Sigma))$)

Pytanie: czy $S^1 \cong T^2$? gdyby tak to byłby dyfeomorfizm, to H^1 byłoby takie same, ale tak nie jest ($H^1(S^1) = 0$, $H^1(T^2) = \mathbb{Z}^2$)

Zespolone formy różniczkowe

Σ - powierzchnia Riemanna

potrzebyjemy zespolonej powierzchni kostycznej/zespolone 1-formy

$T_p^*\Sigma = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(T_p\Sigma, \mathbb{R})$

$T_p^*\Sigma^\mathbb{C} = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(T_p\Sigma, \mathbb{R})$

$f^\infty(\Sigma, \mathbb{C}) \to (df)_p{}_p^*\Sigma$

np. lokalnie $z = x + iy$ $d(x + iy) = dx_i dy := dz$

$\Omega^1_\mathbb{C}(\Sigma)$=gładkie cięcia $T^*\Sigma^\mathbb{C} = \bigcup_{p\in\Sigma} T_p^*\Sigma$

sprzężenie $\omega \in \Omega^1_\mathbb{C}$ to $\overline{\omega} \in \Omega^1_\mathbb{C}$ t,że $\overline{\omega}(p) = \overline{\omega(p)}$

Przykład

$\omega = a + bi$, $a, b \in \Omega^1_\mathbb{R}(\Sigma, \overline{\omega} = a - ib$

Definicja 0.7

zespolona struktura na rzeczywistej p.liniowej V to $\mathbb{R}$-liniowe $J : V \to V$ takie, że $J^2 = -Id$

(V, J) to struktura zespolona na p.lin. V: $(a + bi)v = av + bJv$

Fakt 0.8

na $T_p\Sigma$ istnieje jedyna struktura zespolona J taka, że $f : \Sigma \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w p $\iff$ $df_p : (T_p\Sigma, J) \to \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe
w mapie $J[\alpha]_p = [p + i(\gamma - p)]_p$

Dowód
ćwiczenie

Fakt 0.9

Niech (V, J) będzie jak wyżej, $A : V \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-liniowe
A zapisuje się jednoznacznie jako suma $\mathbb{C}$-liniowego A' i $\mathbb{C}$-antyliniowego A''
$A'(Jv) = iA'(v)$
$A''(Jv) = -iA''(v)$

Dowód
$A'(v) = \frac{1}{2}(A(v) - iA(Jv))$

$A''(v) = \frac{1}{2}(A(v) + iA(Jv))$

rozkłąd z faktu daje rozkłady

- $T_p^*\Sigma^{\mathbb{C}} = T_p^{*\prime} \oplus T_p^*\Sigma''$
- analogicznie $\Omega^1_{\mathbb{C}}$
- rozkład d:

$$\begin{tikzcd} \Omega^{0,1} \arrow[r, "\partial"] & \Omega^2_{\mathbb{C}} \\ \Omega^0_{\mathbb{C}} \arrow[u, "\bar\partial"] \arrow[r, "\partial"] & \Omega^{1,0} \arrow[u, "\bar\partial"'] \end{tikzcd}$$

- we współrzędnych $z = x + iy$

  $dz = dx + idy$ jest $\mathbb{C}$-liniowe

$d\bar{z} = dx - idy$ jest $\mathbb{C}$-anytliniowe

$\alpha dz \in \Omega^{1,0}$, $\beta d\bar{z} \in \Omega^{0,1}$, gdzie $\alpha, \beta : \Sigma \to \mathbb{C}$ są gładkie, niekoniecznie 0

dla $f : \Sigma \to \mathbb{C}$ (C^∞, niekoniecznie O)

$df = f_x dx + dy dy = f_x \frac{dz + d\bar{z}}{2} + f_y \frac{dz - d\bar{z}}{2} = \underline{\frac{1}{2}(fx - ify)dz} + \underline{\frac{1}{2}(\ldots)}_{\overline{\partial}}$

Równania Cauchy'ego-Riemanna $\overline{\partial} f = 0$ - wtedy $df = \partial f = f'(z)dz$

$d : \Omega^1 \to \Omega^2$ są dwie możliwości

- $d(Ad\bar{z}) = \frac{\partial A}{\partial z} dz d\bar{z} = \partial(Adz)$

  $d(\alpha dz) = \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz d\bar{z} = \overline{\partial}(\alpha dz)$ i analogicznie dla $\beta d\bar{z}$

Definicja 0.10

Forma typu $(1, 0)$ jest holomorficzna jeśli jej $\overline{\partial} = 0$ (jeśli jej $d = 0$) (lokalnie αdz z holomorficzną α)

Jeśli $S \subseteq \Sigma$ jest podpowierzchnią zwartą z brzegiem, α jest holo 1-formą to $\int_{\partial S} \alpha = 0$ (Stokes/Cauchy) (dla holo α $d\alpha = 0$)

Laplasjan

$\Delta = 2i\overline{\partial}\partial : \Omega^0 \to \Omega^2$ $\Delta f = 2i\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\frac{1}{2})\partial_x - i\partial_y) f d\bar{z} dz = -(\partial_x^2 + \partial_y^2) f dx dy$

Definicja 0.11

f jest harmoniczna $\iff \Delta f = 0$

jeśli f jest holomoficzna to Ref, Imf są harmoniczne

tutaj rachunek

lokalnie: harmoniczna $\varphi = Ref$ dla pewnej holomorficznej f

Dowód
$A : i\overline{\partial}\varphi + \overline{i\overline{\partial}\varphi} \in \Omega^1_{\mathbb{R}}$

$0 = \overline{\partial}\partial\varphi \implies dA = 0$

o jezunku sie jasiu rozpisal

zasada maksimum - harmoniczna nie osiaga max w żadnym punkcie dziedziny czy cos

kohomologie dolbeault obrazki

w jaki sposób się kohomologie przydają żeby konstruować holomorficzne funkcje

Fakt 0.12

Na zwartej powierzchni Riemanna istnieje niestała funkcja meromorficzna

strategia:

zaczynamy na dyszczku i próbujemy robić kontynuacje, obrazek

dobieramy $\beta \in \Omega^0_c(U)$ która jest równa 1 w pobliżu zera

jak mi sie nie chce