

# Powierzchnie Riemanna

W Jakimowicz

J Rudzik

K Szymański

Zima 2025/26

# Spis treści

15.10.2025	Definicja powierzchni Riemanna . . . . .	1
1.	Dziedzina funkcji $\sqrt{z}$ . . . . .	1
2.	Definicja powierzchni Riemanna . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Wprowadzenie do kohomologii de Rhama</b>	<b>3</b>
12.11.2025	1-formy . . . . .	3
05.11.2025	2-formy . . . . .	4
1.	Całka . . . . .	4
2.	Kohomologie de Rhama . . . . .	6
3.	kohomologie de Rhama o zwartym nośniku . . . . .	8
12.11.2025	Zespolone formy różniczkowe . . . . .	11

## 15.10.2025 Definicja powierzchni Riemanna

Zaczynamy od pytania "jakie przestrzenie mogą być dziedzinami funkcji holomorficznej?" W pierwszej kolejności poznajemy

1. otwarty podzbiór płaszczyzny zespolonej,  $U \subseteq \mathbb{C}$ ,
2. otwarty podzbiór sfery Riemanna,  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ .

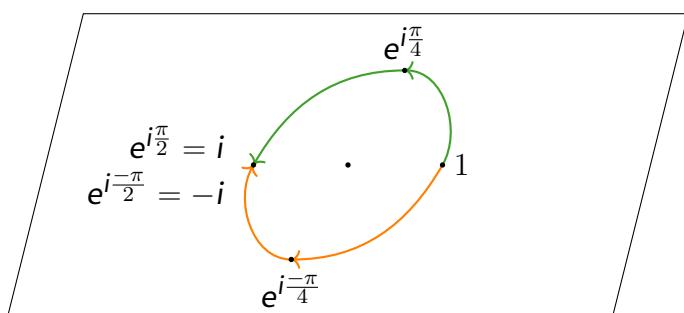
Nie jest to jednak satysfakcjonująca nas odpowiedź.

### 1. Dziedzina funkcji $\sqrt{z}$

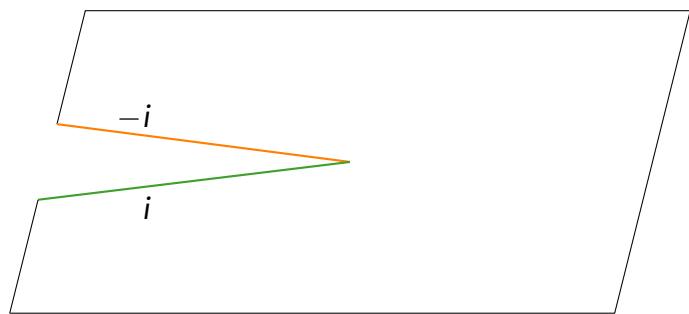
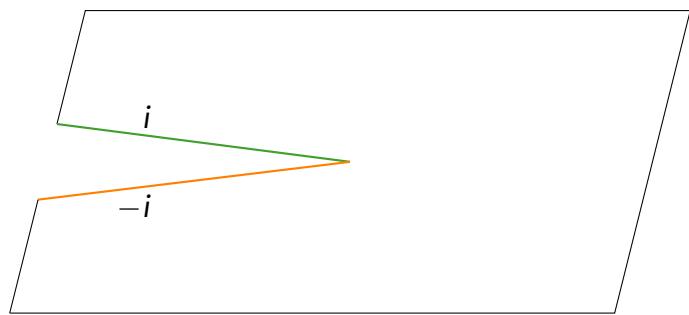
Rozważamy teraz konkretną funkcję,

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{R}e^{i\theta/2}.$$

Wydaje się, że na  $\mathbb{C}$  potrafimy znaleźć pierwiastek dla dowolnej liczby  $z$ . Jest to złudna uciecha, gdyż prowadzi nas do problemu z jednoznacznością. Wydaje się, że jeśli zacznijemy od  $z = 1$  i będziemy szli po okręgu jednostkowym zgodnie ze wskazówkami zegara i przeciwnie do wskazówek zegara to po połowie obrotu powinniśmy dojść do tej samej wartości pierwiastka. Tak jednak nie jest:



Rozwiązaniem tego problemu jest wzięcie dwóch kopii  $\mathbb{C}^*$ , rozcięcie ich wzduż prostej  $\mathbb{R}_-$ , zdefiniowanie  $\sqrt{z}$  na dwa różne sposoby na każdej i sklejenie ich na krzyż tak, aby  $i$  było sklejone z  $i$ , a  $-i$  z  $-i$  (kolory).



Na tej powierzchni  $\sqrt{z}$  jest określony jednoznacznie.

## 2. Definicja powierzchni Riemanna

# 1. Wprowadzenie do kohomologii de Rhama

**12.11.2025 1-formy**

## 05.11.2025 2-formy

$E$  - przestrzeń liniowa,

$$\bigwedge^2 E^* = \{B : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : \text{dwuliniowe, } B(e, f) = -B(f, e)\}$$

Kiedy  $\dim(E) = 2$  to  $\dim(\bigwedge^2 E^*) = 1$ .

Dla  $\alpha, \beta \in E^*$  definiujemy  $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^2 E^*$

$$(\alpha \wedge \beta)(e, f) = \alpha(e)\beta(f) - \alpha(f)\beta(e)$$

Jeśli  $E = T_p\Sigma$  to  $E^* = T_p^*\Sigma$  i  $\bigwedge^2 T_p^*\Sigma = \bigwedge^2 E^*$  dla współrzędnych  $(x, y)$  mamy  $dx, dy \in T_p^*\Sigma$  i

$$dx \wedge dy \in \bigwedge^2 T_p^*\Sigma$$

jest bazą

gładka 2-forma  $\omega$  na  $\Sigma$  to

$$\begin{aligned} \omega : \Sigma &\rightarrow \bigwedge^2 T^*\Sigma = \bigcup_{p \in \Sigma} \bigwedge^2 T_p^*\Sigma \\ \omega(p) &\in \bigwedge^2 T_p^*\Sigma \end{aligned}$$

lokalnie we współrzędnych

$$\omega = f(x, y) dx \wedge dy = f(x, y) dxdy$$

$$[\omega](p) = f(x(p), y(p)) [dx]_p \wedge [dy]_p$$

Jak wygląda zmiana współrzędnych  $(x, y) \rightarrow (x', y')$ ?

$$f(x(x', y'), y(x', y')) \left( \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' \right) \wedge \left( \frac{\partial y}{\partial x'} dx + \frac{\partial y}{\partial y'} dy \right) = f(x(x', y'), y(x', y')) \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) dx \wedge dy$$

### 1. Całka

Jeśli  $\text{supp}(\omega) \subseteq U$ , gdzie  $U$  jest zbiorem mapowym współrzędnych  $(x, y)$  to

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_U \omega = \int_U f(x, y) dxdy$$

to nie zależy od wyboru współrzędnych na nośniku  $\omega$ .

Ogólnie jeśli mamy  $\omega$  o zwartym nośniku,  $\omega \in \Omega_c^2(\Sigma)$ , to możemy ten nośnik pokryć zbiorami mapowymi  $\text{supp}(\omega) \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i$ . Rozkład jedności:  $\chi_i \in C_c^\infty(U_i)$  takie, że  $\sum \chi_i = 1$ .

$$\int_{\Sigma} \omega = \sum_i \int_{U_i} \chi_i \omega$$

**Definicja 1.1: różniczka**

$$d : \Omega^1(\Sigma) \rightarrow \Omega^2(\Sigma)$$

1.  $\alpha_1 = \alpha_2 \implies d\alpha_1 = d\alpha_2$  na  $U$
2.  $ddf = 0$  dla  $f \in C^\infty(\Sigma) = \Omega^0(\Sigma)$
3.  $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$

lokalnie dla  $\Omega^1(\Sigma) \ni \alpha = f dx + g dy$ :

$$d\alpha = d(fdx) + d(gdy) = df \wedge dx + fddx + dg \wedge dy + gddy = (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + ...$$

**Twierdzenie 1.2: stokes**

$\Sigma$  - powierzchnia z brzegiem,  $\alpha \in \Omega_C^1(\Sigma)$  wtedy

$$\int_{\partial\Sigma} \alpha = \int_{\Sigma} d\alpha$$

**Dowód**

rozkład jedności + rachunek w mapie



Zadanie:  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  czy istnieje  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  takie, że  $F_x = f, F_y = g$ ?

jest na to konieczny warunek, bo  $F_{xy} = f_y, F_{yx} = g_x$  a dla gładkich funkcji  $F_{xy} = F_{yx}$ .

innymi słowy pytamy czy istnieje  $F$  takie, że

$$dF = f dx + g dy = \alpha$$

TAK  $\iff d\alpha = 0$ .

$$\implies d\alpha = ddF = 0$$

$\iff$  krzywa  $\gamma$  idzie od  $(0, 0)$  do  $(0, y)$  i potem do  $(x, y)$  (**rysunek**)  $F(x, y) = \int_\gamma \alpha = \int_0^x g(0, t) dt + \int_0^x f(t, y) dt$  co jeśli jest  $\bar{F}$  (całka po krzywej  $\xi$   $(0, 0) - (x, 0) - (x, y)$ )?

$$F - \bar{F} = \int_\gamma \alpha - \int_\xi \alpha = \int_{\gamma \cup -\xi} \alpha = \int_{\square} d\alpha = 0$$

można się przyczepić, że kwadrat nie ma gładkiego brzegu, ale jak go ugładzimy to wyjdzie to samo i to nam nie przeszkadza

policzyliśmy właśnie, że  $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$

## 2. Kohomologie de Rhama

$$\Omega^0(\Sigma) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(\Sigma) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(\Sigma)$$

$H^0(\Sigma) = \ker d^0 / \text{im } d^0$   $H^1(\Sigma) = \ker d^1 / \text{im } d^0$   $H^2(\Sigma) = \Omega^2(\Sigma) / \text{im } d^1$  wpierw będziemy się skupiać na  $H^1$

### Fakt 1.3

1.  $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$
2.  $H^0(\Sigma) = \mathbb{R}^n$ , gdzie  $n$  to liczba składowych spójnych  $\Sigma$

### Przykłady

1. Annulus (znany też jako pierścień kołowy) to obszar płaszczyzny zespolonej pomiędzy dwoma okręgami:  $A = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ . Punkty na annulusie możemy parametryzować przy pomocy promienia oraz kąta  $(\rho, \theta)$ .  
Pokażemy, że

$$H^1(A) = \ker d^1 / \text{im } d^0 \neq 0,$$

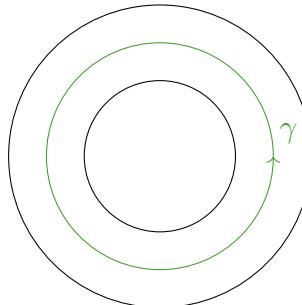
czyli wykażemy, że nie istnieje  $F \in C^\infty(A)$  takie, że 1-forma  $d\theta$  jest równa  $dF$ .

Rozważmy krzywą

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow A$$

$$\gamma(t) = (r, 2\pi t)$$

zaznaczoną na obrazku.



Gdyby istniało  $F \in C^\infty(A)$  takie że  $d\theta = dF$  to wówczas

$$\int_{\gamma} d\theta = \int_{\gamma} dF = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0,$$

ale całka z  $d\theta$  nie jest zerowa:

$$\int_{\gamma} d\theta = \theta(\gamma(1)) - \theta(\gamma(0)) = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

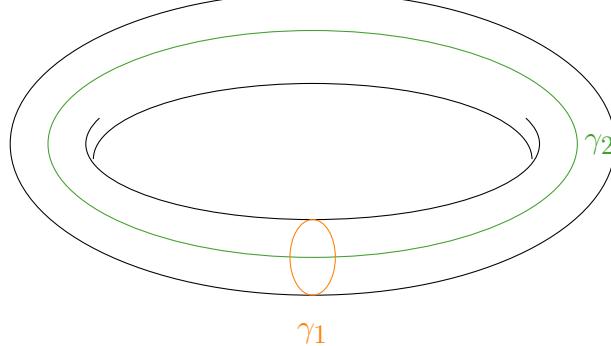
2. sfera  $S^2$  (mapy: biegun półn  $U$  i półd  $V$ )

Niech  $\alpha \in \Omega^1(S^2)$ ,  $d\alpha = 0$ ,  $d|_U = df_U$ ,  $\alpha|_V = df_V$   
 patrzmy jak  $f_U - f_V$  się zachowuje na przekroju  $U \cap V$

$$d(f_U - f_V) = d\alpha - d\alpha = 0 \implies f_U - f_V = c$$

dla  $\Omega^0(S^2) \ni f = f_U \cup (f_V + c)$ ,  $df = \alpha$   
 czyli  $H^1(S^2) = 0$

3. torus  $T^2 = S^1 \times S^1$  myślimy o nim jak o dwóch współrzędnych kątowych  $\theta$  i  $\varphi$



$$\begin{aligned} \iota : H^1(T) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \Psi & \qquad \qquad \qquad \Psi \\ \alpha &\longrightarrow (\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha) \end{aligned}$$

$\iota$  jest dobrze określona, bo

$$\iota(df) = (\int_{\gamma_1} df, \int_{\gamma_2} df) = (0, 0)$$

$\iota$  jest epimorfizmem, bo  $\iota(d\theta) = (1, 0)$  i  $\iota(d\varphi) = (0, 1)$   $\iota$  jest monomorfizmem, bo jeśli  $d\alpha = 0$  to  $\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha = 0$ . Niech  $\alpha = Pd\theta + Qd\varphi$

$$0 = \int_{\gamma_1} \alpha = \int_0^{2\pi} P(\theta, \varphi) d\theta$$

dla  $\varphi \in \mathbb{R}$

$$f(\theta, \varphi) = \int_0^\theta P(\xi, \varphi) d\xi$$

$f_\theta = P$  popatrzymy na zmodyfikowane  $\alpha$ ,

$$\bar{\alpha} = \alpha - df = \bar{Q}d\varphi$$

$$0 \int_{\gamma_2} \bar{\alpha} = \int_0^{2\pi} \bar{Q}(\theta, \xi) d\xi$$

czyli  $g(\theta, \varphi) = \int_0^\varphi \bar{Q}(\theta, \xi) d\xi$  czyli  $g_\varphi = \bar{Q}$

ZDJECIE

ćwiczenia: policzyć  $H^1$  dla

- $S^1 \times \mathbb{R}$
- powierzchni genusu 2
- powierzchni genusu  $g$

### 3. Kohomologie de Rama o zwartym nośniku

$\Sigma$  bez brzegu (zorientowana bo Riemannna)

$H_c^*(\Sigma)$  kohomologie de Rama o zwartym nośniku zamiast  $\Omega^*$  używamy  $\Omega_c^*$

$$\int_{\Sigma} : H_c^2(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$$

#### Fakt 1.4

odwzorowanie wyżej jest izomorfizmem  
( $\Sigma$  spójna, zorientowana, bez brzegu)

#### Dowód

$\int_{\Sigma}$  jest na

różnowartościowość:

$$\Sigma = \mathbb{R}^2$$

niech  $\omega \in \Omega_c^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$

$\omega = R(x, y) dx dy$ ,  $R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) dy$   $\psi$  to pomocnicza bump funkcja ( $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$ )

$\bar{R}(x, y) = R(x, y) = r(x)\psi(y)$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{R}(x, y) dy = 0$$

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^y (R(x, t) dt$$

$P_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $P_y = \bar{R}$

$$Q(x, y) = \psi(y) \int_{-\infty}^x r(t) dt$$

$Q \in \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $Q_x(x, y) = \psi(y)r(x)$

$$R(x, y) = \bar{R}(x, y) + r(x)\psi(y) = P_y + Q_x$$

$$\omega = d(-Pdx + Qdy)$$

Niech  $\Sigma$  dowolna,  $\text{supp } \omega \subseteq K$  zwarty  $\subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$  mapowe

zrobimy indukcję względem  $n$

$$U = U_1, V = U_2 \cup \dots \cup U_n$$

dobieramy  $f, g$  tak, że  $f \in C_c^\infty(U)$ ,  $g \in C_c^\infty(V)$ ,  $f + g = 1$  na  $K$

$$I = \int_{\Sigma} f\omega = - \int_{\Sigma} g\omega$$

weźmy  $\tau \in \Omega_c^2(U \cap V)$ ,  $\int_{\Sigma} \tau = 1$

$$f\omega - I\tau = d\alpha \text{ w } U$$

$$g\omega + I\tau = d\beta \text{ w } V$$

$$\omega = f\omega + g\omega = d\alpha + d\beta$$



Niech  $\gamma$  będzie pętlą w  $\Sigma$ , wtedy  $I_\gamma : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \mapsto \int_{\gamma} \alpha$

$\theta \in \Omega_c^1(\Sigma)$ ,  $d\theta = 0$  to  $J_\theta : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Sigma$  bez brzegu,

$$\alpha \mapsto \int_{\Sigma} \theta \wedge \alpha = \int -d(f\theta) = \int_{\partial\Sigma} f\theta = 0$$

### Twierdzenie 1.5

$$\forall \gamma \exists \theta I_\gamma = J_\theta$$

#### Dowód

rozcinam krzywą zbiorami mapowymi na każdym przecięciu dwóch zbiorów mapowych (poza pierwszym) wybieram dyszczek  $D_i$

dobieram  $\omega_i \in \Omega_c^2(D_i)$ ,  $\int_{D_i} \omega_i = 1$

$$\omega_{i+1} - \omega_i \in \Omega_c^2(U_i)$$

całka po tym jest zero, więc  $\omega_{i+1} - \omega_i = d\theta_i$ ,  $\theta_i \in \Omega_c^1(U_i)$

$$\theta = \sum \theta_i$$

$$d\theta = \sum d\theta_i = \sum (\omega_{i+1} - \omega_i) = 0$$

pozostaje  $J_\theta = I_\gamma$  ORBAZEK

Pokażemy, że  $I_\gamma = I_\theta$ : weźmy  $\alpha \in \Omega^1(\Sigma)$ ,  $d\alpha = 0$  BZO:  $\alpha|_{D_i} = 0$   $\alpha|_{D_i} \in \Omega^1(D_i)$ ,  $d\alpha = 0 \implies \exists g_i \in \Omega^0(D_i)$  i  $dg_i = \alpha$  wybieram  $\chi_i \in \Omega_c^0(D_i)$ ,  $\chi_i \equiv 1$  na  $\gamma(t_i) \in D'_i \subseteq D_i$

$$\alpha \rightarrow \alpha - d(\chi_i g_i) \equiv 0 \text{ na } D_i$$

$$[\alpha] = [\alpha - d(\chi_i g_i)] \in H^1(\Sigma)$$

$$\alpha|_{U_i} = df_i, f_i \in \Omega^0(U_i) \text{ bo } H^1(U_i) = 0$$

$$\int_{\Sigma} \theta_i \wedge \alpha = \int_{\Sigma} \theta_i \wedge df_i = \int_{\Sigma} -d(\theta_i \cdot f_i) + \int_{\Sigma} d\theta_i f_i \text{ pierwsze ważne przejście to reguła Leibniza}$$

ze Stokes mamy że pierwszy składnik jest 0

$$\int_{\Sigma} d\theta_i \cdot f_i = \int_{\Sigma} f_i d\theta_i = \int_{\Sigma} f_i \omega_{i+1} - f_i \omega_i = \int_{D_{i+1}} f_i \omega_{i+1} - \int_{D_i} f_i \omega_i$$

$$\alpha|_{D_i} = 0 \implies f_i|_{D_i} = \text{const}$$

$$\int_{D_{i+1}} f_i \omega_{i+1} - \int_{D_i} f_i \omega_i = f_i(\gamma(t_{i+1})) - f_i(\gamma(t_i)) = \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} df_i = \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} \alpha$$



## 12.11.2025 Zespolone formy różniczkowe

Zadanie z listy:  $H^1(\Sigma) \ni [\alpha] \neq 0 \implies \exists$  pętla  $\gamma$  taka, że  $I_\gamma([\alpha]) = \int_\gamma \alpha \neq 0$

### Twierdzenie 1.6

$\Sigma$  - zwarta powierzchnia bez brzegu

$$H^1(\Sigma) \times H^1(\Sigma) \ni ([\theta], [\alpha]) \mapsto \int_\Sigma \theta \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

jest formą 2-liniową, antysymetryczną, niezdegenerowaną ( $\implies 2|\dim(H^1(\Sigma))|$ )

Pytanie: czy  $S^1 \cong T^2$ ? gdyby tak to byłby dyfeomorfizm, to  $H^1$  byłoby takie same, ale tak nie jest ( $H^1(S^1) = 0, H^1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ )

Zespolone formy różniczkowe

$\Sigma$  - powierzchnia Riemanna

potrzebujemy zespolonej powierzchni kostycznej/zespolone 1-formy

$$T_p^*\Sigma = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p\Sigma, \mathbb{R})$$

$$T_p^*\Sigma^{\mathbb{C}} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p\Sigma, \mathbb{R})$$

$$f^\infty(\Sigma, \mathbb{C}) \rightarrow (df)_{pp}^* \Sigma$$

np. lokalnie  $z = x + iy$   $d(x + iy) = dx + idy := dz$

$$\Omega_{\mathbb{C}}^1(\Sigma) = \text{gładkie cięcia } T^*\Sigma^{\mathbb{C}} = \bigcup_{p \in \Sigma} T_p^*\Sigma$$

sprzężenie  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^1$  to  $\bar{\omega} \in \Omega_{\mathbb{C}}^1$  t, że  $\bar{\omega}(p) = \overline{\omega(p)}$

### Przykład

$$\omega = a + bi, a, b \in \Omega_{\mathbb{R}}^1(\Sigma), \bar{\omega} = a - ib$$

### Definicja 1.7

zespolona struktura na rzeczywistej p.liniowej  $V$  to  $\mathbb{R}$ -liniowe  $J : V \rightarrow V$  takie, że  $J^2 = -Id$

$(V, J)$  to struktura zespolona na p.lin.  $V$ :  $(a + bi)v = av + bJv$

**Fakt 1.8**

na  $T_p\Sigma$  istnieje jedyna struktura zespolona  $J$  taka, że  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  jest holomorficzna w  $p$   
 $\iff df_p : (T_p\Sigma, J) \rightarrow \mathbb{C}$  jest  $\mathbb{C}$ -liniowe  
w mapie  $J[\alpha]_p = [p + i(\gamma - p)]_p$

**Dowód**

ćwiczenie

**Fakt 1.9**

Niech  $(V, J)$  będzie jak wyżej,  $A : V \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{R}$ -liniowe  
A zapisuje się jednoznacznie jako suma  $\mathbb{C}$ -liniowego  $A'$  i  $\mathbb{C}$ -antyliniowego  $A''$   
 $A'(Jv) = iA'(v)$   
 $A''(Jv) = -iA''(v)$

**Dowód**

$$A'(v) = \frac{1}{2}(A(v) - iA(Jv))$$

$$A''(v) = \frac{1}{2}(A(v) + iA(Jv))$$



rozkład z faktu daje rozkłady

- $T_p^*\Sigma^{\mathbb{C}} = T_p^{*\prime} \oplus T_p^*\Sigma''$

- analogicznie  $\Omega_{\mathbb{C}}^1$

- rozkład  $d$ :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{\mathbb{C}}^2 \\ \bar{\partial} \uparrow & & \bar{\partial} \uparrow \\ \Omega_{\mathbb{C}}^0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,0} \end{array}$$

- we współrzędnych  $z = x + iy$

$dz = dx + idy$  jest  $\mathbb{C}$ -liniowe

$d\bar{z} = dx - idy$  jest  $\mathbb{C}$ -analityczne

$\alpha dz \in \Omega^{1,0}, \beta d\bar{z} \in \Omega^{0,1}$ , gdzie  $\alpha, \beta : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  są gładkie, niekoniecznie 0

dla  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  ( $C^\infty$ , niekoniecznie O)

$$df = f_x dx + dy = f_x \frac{dz + d\bar{z}}{2} + f_y \frac{dz - d\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}(fx - ify)dz + \frac{1}{2}(\dots)\bar{d}$$

Równania Cauchy'ego-Riemanna  $\bar{\partial}f = 0$  - wtedy  $df = \partial f = f'(z)dz$

$d : \Omega^1 \rightarrow \Omega^2$  są dwie możliwości

- $d(Ad\bar{z}) = \frac{\partial A}{\partial z} dz d\bar{z} = \partial(Adz)$

- $d(\alpha dz) = \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz d\bar{z} = \bar{\partial}(\alpha dz)$  i analogicznie dla  $\beta d\bar{z}$

### Definicja 1.10

Forma typu  $(1,0)$  jest holomorficzna jeśli jej  $\bar{\partial} = 0$  (jeśli jej  $d = 0$ ) (lokalnie  $\alpha dz$  z holomorficzną  $\alpha$ )

Jeśli  $S \subseteq \Sigma$  jest podpowierzchnią zwaną z brzegiem,  $\alpha$  jest holo 1-formą to  $\int_{\partial S} \alpha = 0$  (Stokes/Cauchy) (dla holo  $\alpha$   $d\alpha = 0$ )

Laplasjan

$$\Delta = 2i\bar{\partial}\partial : \Omega^0 \rightarrow \Omega^2 \quad \Delta f = 2i\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\frac{1}{2}\partial_x - i\partial_y)fd\bar{z}dz = -(\partial_x^2 + \partial_y^2)f dx dy$$

### Definicja 1.11

$f$  jest harmoniczna  $\iff \Delta f = 0$

jeśli  $f$  jest holomorficzna to  $Re f, Im f$  są harmoniczne

tutaj rachunek

lokalnie: harmoniczna  $\varphi = Re f$  dla pewnej holomorficznej  $f$

**Dowód**

$$A : i\bar{\partial}\varphi + \overline{i\bar{\partial}\varphi} \in \Omega_{\mathbb{R}}^1$$

$$0 = \bar{\partial}\partial\varphi \implies dA = 0$$

o juzunku sie jasno rozpisal



zasada maksimum - harmoniczna nie osiąga max w żadnym punkcie dziedziny czy cos  
kohomologie dolbeault obrazki

w jaki sposób się kohomologie przydają żeby konstruować holomorficzne funkcje

**Fakt 1.12**

Na zwartej powierzchni Riemanna istnieje niestała funkcja meromorficzna

strategia:

zaczynamy na dyszczku i próbujemy robić kontynuacje, obrazek

dobieramy  $\beta \in \Omega^0_c(U)$  która jest równa 1 w pobliżu zera

jak mi się nie chce