[9강]

점추정량의 비교(1)

정보통계학과 이긍희 교수

학습목표

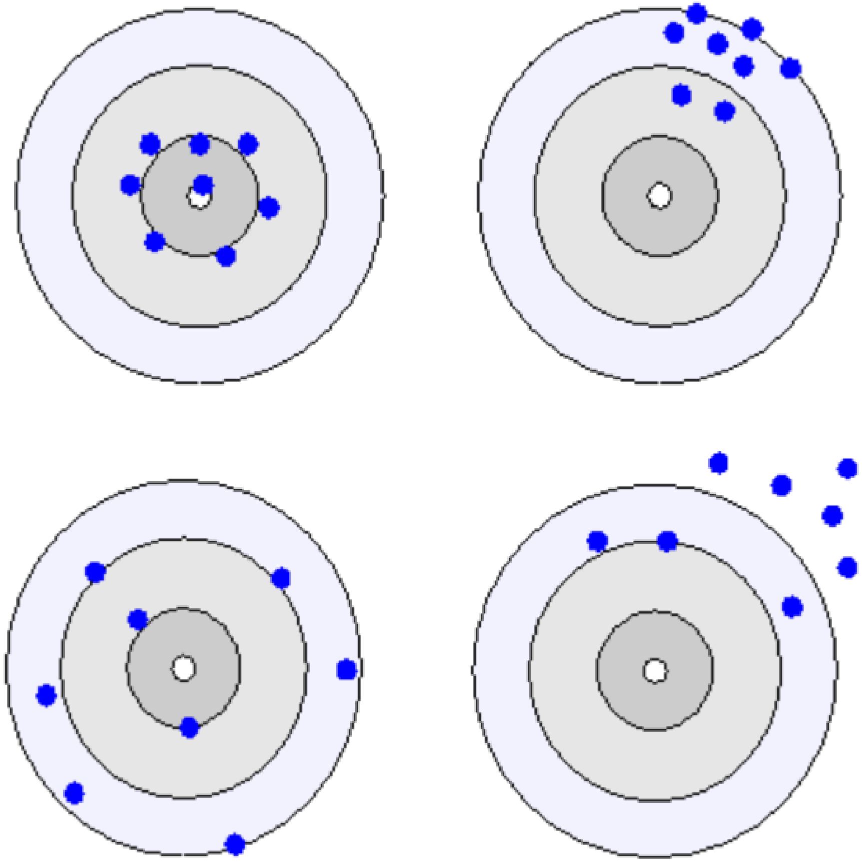
1. 불편추정량을 이해한다.
2. 추정량의 효율성을 이해한다.
3. 일치추정량을 이해한다.
4. 평균제곱오차를 이해한다.

1 점추정량 비교의 필요성

1.1 추정량

- **추정량** : 모수를 추정하는 데 사용되는 통계량
- **좋은 추정량** : 추정량 값이 모수와 항상 일치
- **추정량 선택 기준** : 불편성, 효율성, 일치성

1.2 양궁과 추정량의 성질



[9강]

점추정량의 비교(1)

2 불편성

2.1 불편추정량

- 불편추정량 : $E(T) = \theta$
- 편의 : $bias(T) = E(T) - \theta$

2.1 불편추정량

예 6.1

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본.

(1) $T_1 = \bar{X}$가 불편추정량임을 보여라.

2.1 불편추정량

예 6.1

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본.

(2) $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$가 불편추정량임을 보여라.

2.1 불편추정량

예 6.1

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본.

(2) $T_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$가 불편추정량임을 보여라.

2.1 불편추정량

예 6.1

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본.

(3) $T_3 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$가 불편추정량임을 보여라.

2.1 불편추정량

예 6.2

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본.
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$와 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$의 편의를 구하라.

2.1 불편추정량

예 6.2

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본.
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$와 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$의 편의를 구하라.

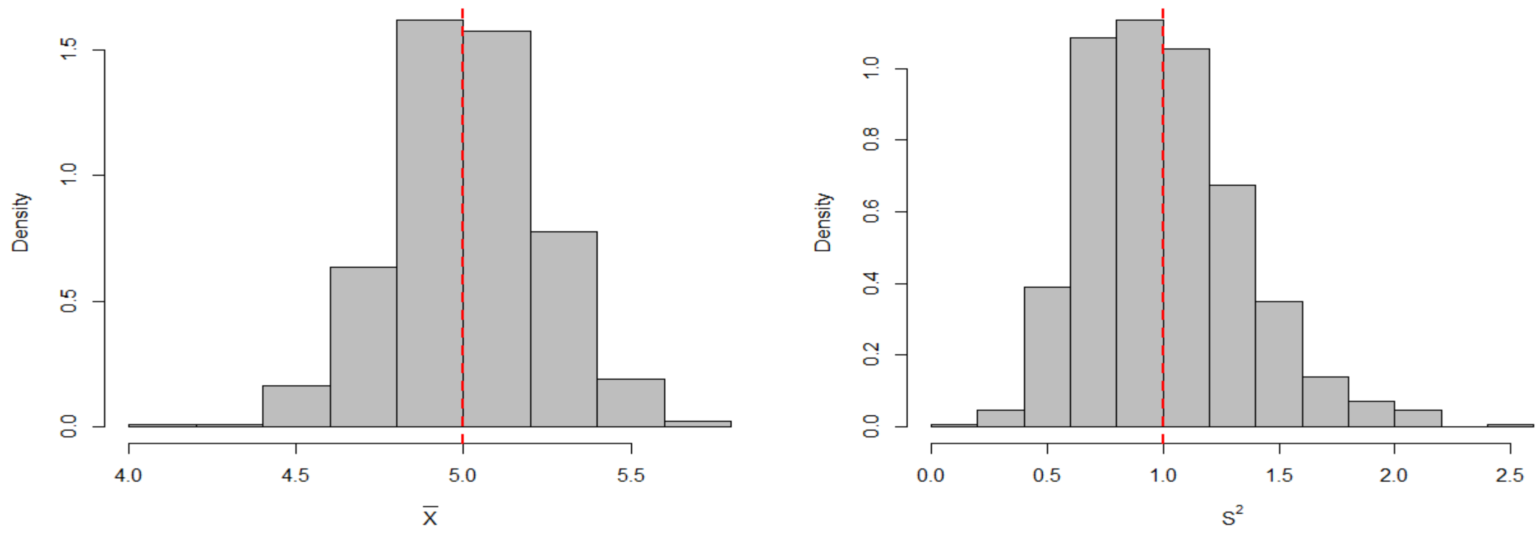
2.1 불편추정량

- $\hat{\sigma}^2$과 S^2을 비교
  - S^2은 표본분산, $\hat{\sigma}^2$은 최대가능도추정량
  - $\hat{\sigma}^2$은 편의추정량, S^2은 불편추정량

2.1 불편추정량

예 6.3

$X_1, \cdots, X_{20} \sim N(5,1)$ 확률표본. $\bar{X}$와 S^2의 난수 1,000개 생성, 히스토그램을 그리고 편의를 구하라.



3 효율성과 상대효율성

3.1 효율성

- 불편추정량 $\hat{\theta}$의 효율성 : $eff(\hat{\theta}) = \frac{1}{Var(\hat{\theta})}$

3.1 효율성

예 6.4

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본.

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

의 효율성을 구하라.

3.1 효율성

예 6.4

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본.

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

의 효율성을 구하라.

3.2 상대효율성

- T_1에 대한 T_2의 상대효율성 :
  - $Var(T_1) > Var(T_2)$ $\rightarrow$ T_2가 T_1보다 효율적

$$eff(T_2, T_1) = \frac{Var(T_1)}{Var(T_2)}$$

3.2 상대효율성

- 두 추정량의 상대효율성

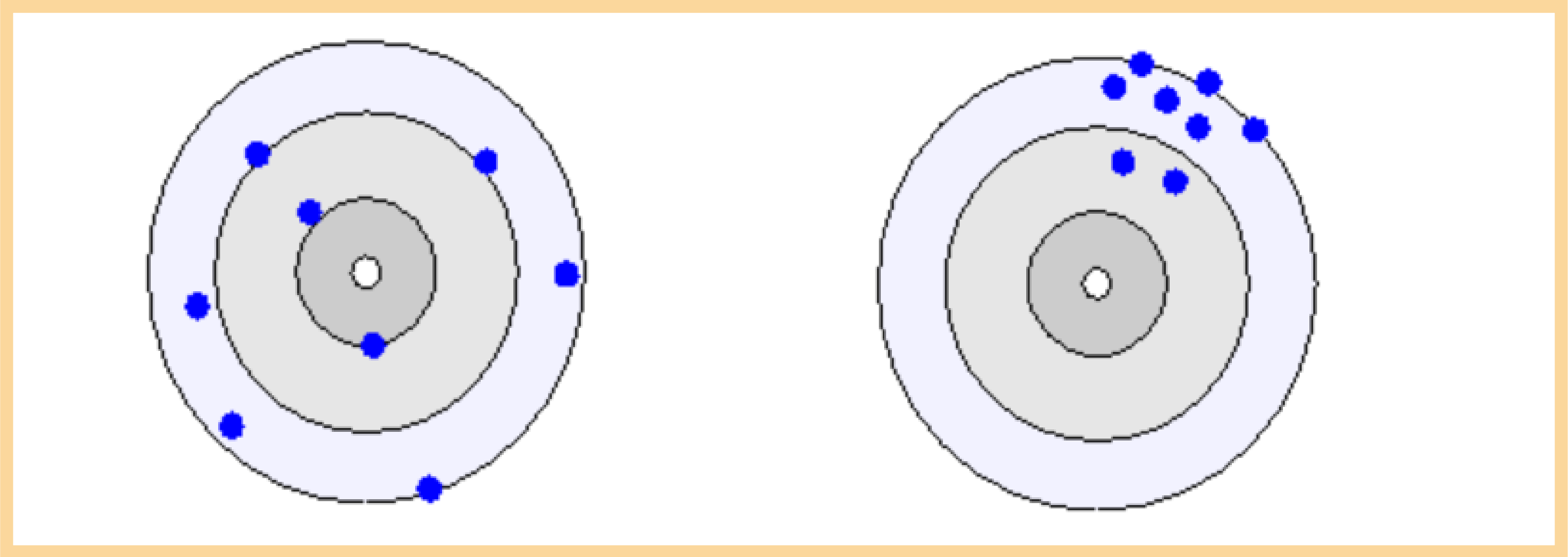
$$eff(T_2, T_1) = \frac{E\left[(T_1-\theta)^2\right]}{E\left[(T_2-\theta)^2\right]}$$

[9강]

점추정량의 비교(1)

4 평균제곱오차

4.1 추정량의 비교



4.1 추정량의 비교

- 평균제곱오차(mean-square error, MSE) : 편의와 효율성을 동시에 고려

$$MSE(T) = E[(T-\theta)^2] = Var(T) + bias(T)^2$$

4.1 추정량의 비교

예 6.5

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본. 다음 추정량의 효율성과 평균제곱오차를 비교하라.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

4.1 추정량의 비교

예 6.5

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본. 다음 추정량의 효율성과 평균제곱오차를 비교하라.

4.2 베이즈 추정량

- 평균손실을 최소로 하는 추정량 :

$$\int_{\theta \in \Omega} MSE(T,\theta)\pi(\theta)d\theta$$

5 일치성

5.1 일치성

- 일치추정량

  - $T_n \xrightarrow{p} \theta$: $\lim_{n\to\infty} P[|T(X_1, \cdots, X_n) - \theta| < \varepsilon] = 1$

5.1 일치성

예 6.6

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본.

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$가 μ의 일치추정량임을 보여라.

5.1 일치성

예 6.6

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본.

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$가 μ의 일치추정량임을 보여라.

5.1 일치성

예 6.7

$X_1, \cdots, X_n \sim (\mu,\ \sigma^2)$ 확률표본.

S가 σ의 일치추정량임을 보여라.

5.1 일치성

예 6.8

$X_1, \cdots, X_n \sim (\mu, \sigma^2)$ 확률표본. μ에 대한 추정량 $D_1 = \frac{X_1+X_2}{2}$가 불편성과 일치성을 만족하는가?

[9강]

점추정량의 비교(1)

6 정리하기

정리하기

1. 불편성은 추정량 T의 기댓값이 모수 θ가 되어 치우침이 없는 성질을 의미한다.

$$E(T) = \theta, \qquad \theta \in \Omega$$

2. 추정량 T의 효율성은 분산의 역수 $eff(\hat{\theta}) = \frac{1}{Var(\hat{\theta})}$로 정의된다.

정리하기

3. 통계량 T가 θ의 추정량일 때 추정량의 편의와 분산을 모두 고려한 T에 대한 평균제곱오차(MSE)는 $MSE(T) = E[(T-\theta)^2]$이다.
4. 일치성은 추정량이 모수에 확률적으로 수렴하는 것을 의미한다.

$$\lim_{n\to\infty} P[|T(X_1,\cdots,X_n)-\theta| < \varepsilon] = 1$$

다음 시간 안내 ▼

10강. 점추정량의 비교(2)

수고하셨습니다.