[6강]

표본분포(1)

정보통계학과 이긍희 교수

학습목표

1. 합의 분포를 구한다.
2. 변수변환법을 이해한다.
3. 표본평균과 표본분산의 분포를 이해한다.
4. χ^2분포와 t분포를 이해한다.

[6강]

표본분포 (1)

1 표본분포의 정의

1.1 표본조사

- 모집단의 일부인 표본을 추출하고 이를 이용하여 모집단 분포의 모수를 추정

1.2 통계추론

- 모집단의 확률변수 $X \sim f(x|\theta)$
- 모수 θ를 추정하기 위해 표본 $X_1, \cdots, X_n$을 추출
  - 확률표본 : 표본은 서로 독립이고 동일 분포

1.2 통계추론

- 통계량 : 모수 추정에 적합한 확률표본의 함수
- 표본분포(sampling distribution) : 통계량의 확률분포

1.2 통계추론

- 통계량의 예
  - 표본평균 : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - 표본분산 : $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
  - 표본표준편차 : $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$

[6강]

표본분포 (1)

2 변수변환

2.1 이산형 확률변수 함수의 분포

- $Y = u(X)$: $u(X)$ 일대일 함수
- Y의 확률질량함수

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P[X = u^{-1}(y)]$$
$$= f_X[u^{-1}(y)]$$

2.1 이산형 확률변수 함수의 분포

예 4.1

$X \sim f_X(x)$, $Y = X^2 - 1$의 확률분포는?

$$f_X(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}, x = 1,2,3, \dots$$

2.2 연속형 확률변수 함수의 분포

- $Y = u(X)$: $u(X)$ 일대일 함수
- Y의 확률밀도함수 : $f_Y(y) = f_X[u^{-1}(y)]\left|\frac{dx}{dy}\right|$

2.2 연속형 확률변수 함수의 분포

예 4.2

$X \sim f_X(x)$, $Y = 2X - 3$의 확률밀도함수는?

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{12}, & 1 < x < 5 \\ 0, & \text{그 밖에} \end{cases}$$

2.3 함수의 결합확률밀도함수

- $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$, $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ 결합확률밀도함수

$$f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)|J| = f(x_1, x_2)\begin{vmatrix} dx_1/dy_1 & dx_1/dy_2 \\ dx_2/dy_1 & dx_2/dy_2 \end{vmatrix}$$

3 합과 평균의 확률분포

3.1 적률생성함수의 성질

① $M_X(t) = M_y(t) \Leftrightarrow f_X(x) = f_Y(y)$

② $X_1, \cdots, X_n$ 서로 독립, 적률생성함수$M_{X_i}(t)$

- $M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$

3.1 적률생성함수의 성질

③ $X_1, \cdots, X_n$ 서로 독립, 적률생성함수 $M_X(t)$

- $M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = [M_X(t)]^n$

- $M_{\bar{X}}(t) = \left[M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$

3.1 적률생성함수의 성질

예 4.5

$X_i \sim B(n_i, p),\ i = 1,2,$ 독립. $X_1 + X_2$ 확률분포는?

3.1 적률생성함수의 성질

예 4.7

$X_i \sim Gamma(\gamma_i, \lambda), i = 1,2,3,4,$ 독립. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$의 분포를 구하라.

3.2 이산형 확률변수 합의 확률분포

- $X_1, \cdots, X_n$이 서로 독립

① $X_i \sim B(n_i, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(\sum_{i=1}^{n} n_i, p)$

② $X_i \sim Poission(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poission(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$

③ $X_i \sim Gamma(r_i, \lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\sum_{i=1}^{n} r_i, \lambda)$

3.2 이산형 확률변수 합의 확률분포

예 4.8

X_1, X_2 서로 독립, $N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2.$

(1) $X_1 + X_2$의 분포를 구하라.

3.2 이산형 확률변수 합의 확률분포

예 4.8

X_1, X_2 서로 독립, $N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2.$

(2) $X_1 - X_2$의 분포를 구하라.

3.3 정규분포 확률변수 합의 확률분포

- $X_1, \ldots, X_n$이 서로 독립, $N(\mu_i, \sigma_i^2)$
  - $X_1 + \cdots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \,, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

3.3 정규분포 확률변수 합의 확률분포

예 4.7

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 독립. $X_1 + \cdots + X_n$의 확률분포는?

3.4 정규분포 확률변수 평균의 확률분포

- $X_1, \cdots, X_n$이 서로 독립, $N(\mu, \sigma^2)$

  - $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ - $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

[6강]

표본분포 (1)

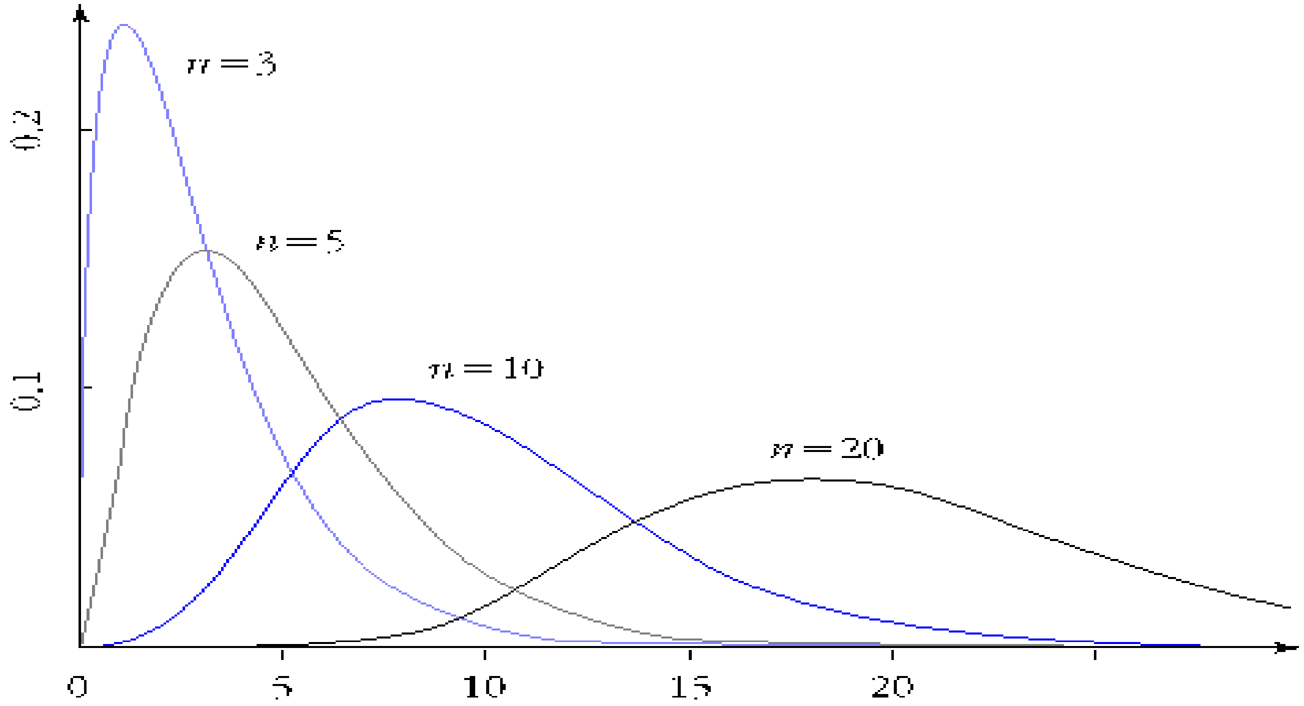
4 표본분산의 확률분포

4.1 카이제곱(χ^2)분포

- 자유도 n인 카이제곱 분포 : $X \sim \chi^2(n)$
  - $r = n/2,\ \lambda = 1/2$ 인 감마분포
  - $f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x},\ x > 0$

4.1 카이제곱(χ^2)분포

- 자유도 n인 카이제곱 분포 $X \sim \chi^2(n)$



4.1 카이제곱(χ^2)분포

- 기댓값 : $E(X) = n$
- 분산 : $Var(X) = 2n$

4.1 카이제곱(χ^2)분포

- $X_1, \cdots, X_n$이 서로 독립, $N(\mu, \sigma^2)$

① $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$, $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

4.1 카이제곱(χ^2)분포

- $X_1, \cdots, X_n$이 서로 독립, $N(\mu, \sigma^2)$

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

5 표본평균의 확률분포

5.1 표본평균의 분포

- X_i 서로 독립, $N(\mu\,,\sigma^2)$: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- 모분산 σ^2을 모를 경우 : $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

5.2 t 분포

- $X_1, \dots, X_n$ 서로 독립, $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 미지

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{(n-1)S^2/\left(\sigma^2(n-1)\right)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}}$$

5.2 t 분포

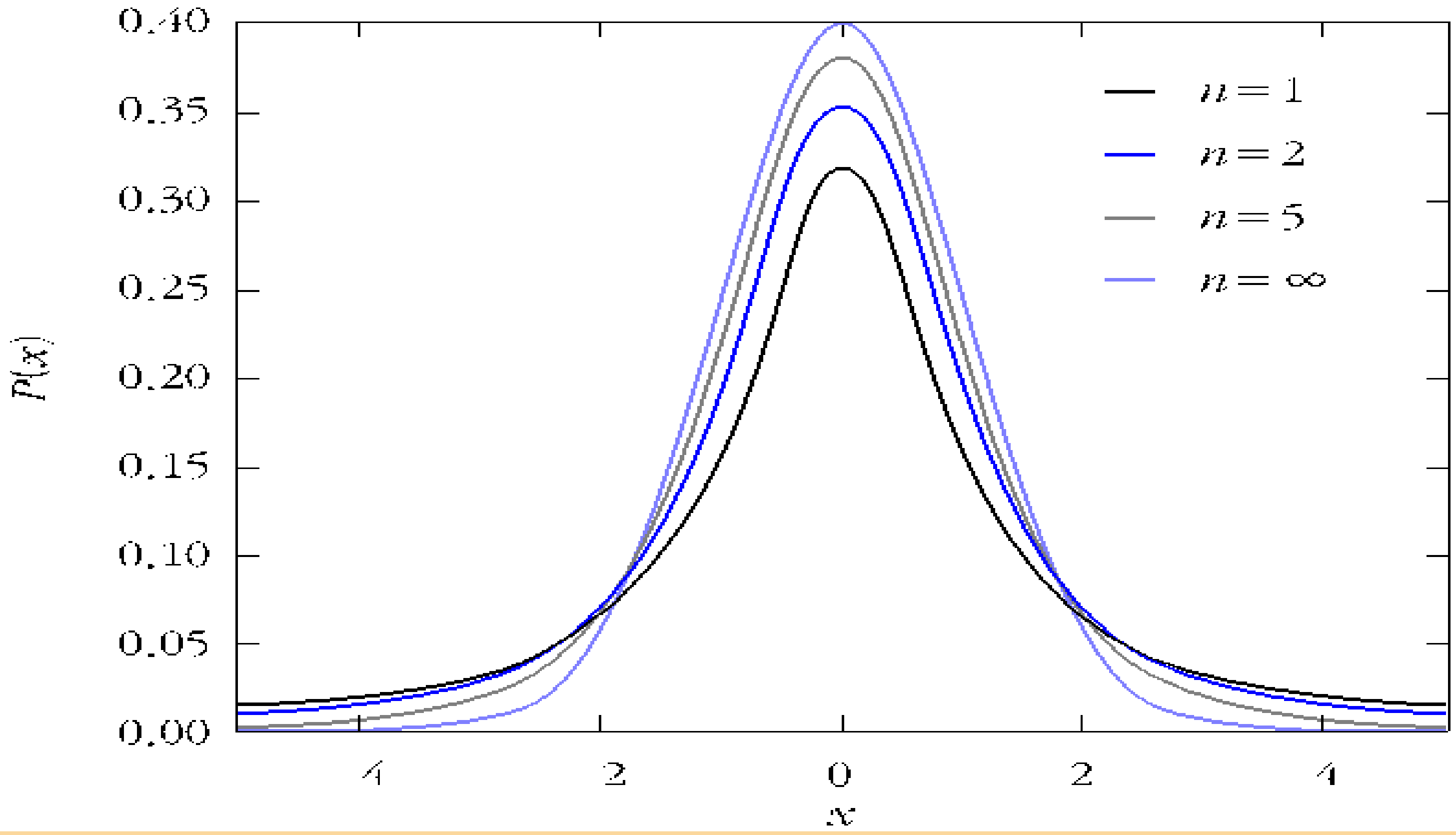
- 자유도 $n-1$인 t분포의 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{n-1}},$$

$$-\infty < x < \infty$$

5.2 t 분포

- 자유도 n인 t분포의 확률밀도함수



5.2 t 분포

예 4.11

$X_1, \ldots, X_{20}$, 서로 독립, $N(\mu, \sigma^2)$,

$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{20}} > 1.729\right)$, $P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{20}}\right| > 2.539\right)$?

6 정리하기

정리하기

1. 표본분포는 확률표본의 함수인 통계량의 분포이다.
2. n개의 확률변수 $X_1, \dots, X_n$이 서로 독립, 각각 $N(\mu, \sigma^2)$을 따를 경우

- $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- σ^2을 알 수 없을 때 $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

다음 시간 안내 ▼

7강. 표본분포 (2)

수고하셨습니다.