[13강]

구간추정

정보통계학과 이긍희 교수

학습목표

1. 모수에 대한 구간추정의 기본 개념을 이해한다.
2. 모평균, 모분산에 대한 구간추정을 이해한다.
3. 두 모평균의 차, 모비율에 대한 구간추정을 이해한다.
4. 구간추정과 가설검정 사이의 관계를 이해한다.

[13강]

구간추정

1 구간추정의 개념

1.1 점 추정량

- 모집단 정규분포, μ의 최대가능도추정량 : $\hat{\mu} = \bar{X}$
- 주어진 자료를 이용하여 모수의 추정값을 얻음
  - 추정값이 모수 참값 근처에 있을 가능성이 높다고 기대

1.1 점 추정량

예 8.1

다음 자료 5개의 모평균의 추정량값을 구하라.

12, 15, 10, 14, 9

1.2 구간추정

- 모수를 포함할 것으로 기대되는 구간을 제시하여 모수를 추정
- $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2)$, 표준편차 σ는 알려져 있음
  - $\hat{\theta}$이 $\left[\theta - z_{\alpha/2}\sigma,\ \theta + z_{\alpha/2}\sigma\right]$ 속할 확률 : $100(1-\alpha)\%$

1.3 신뢰구간

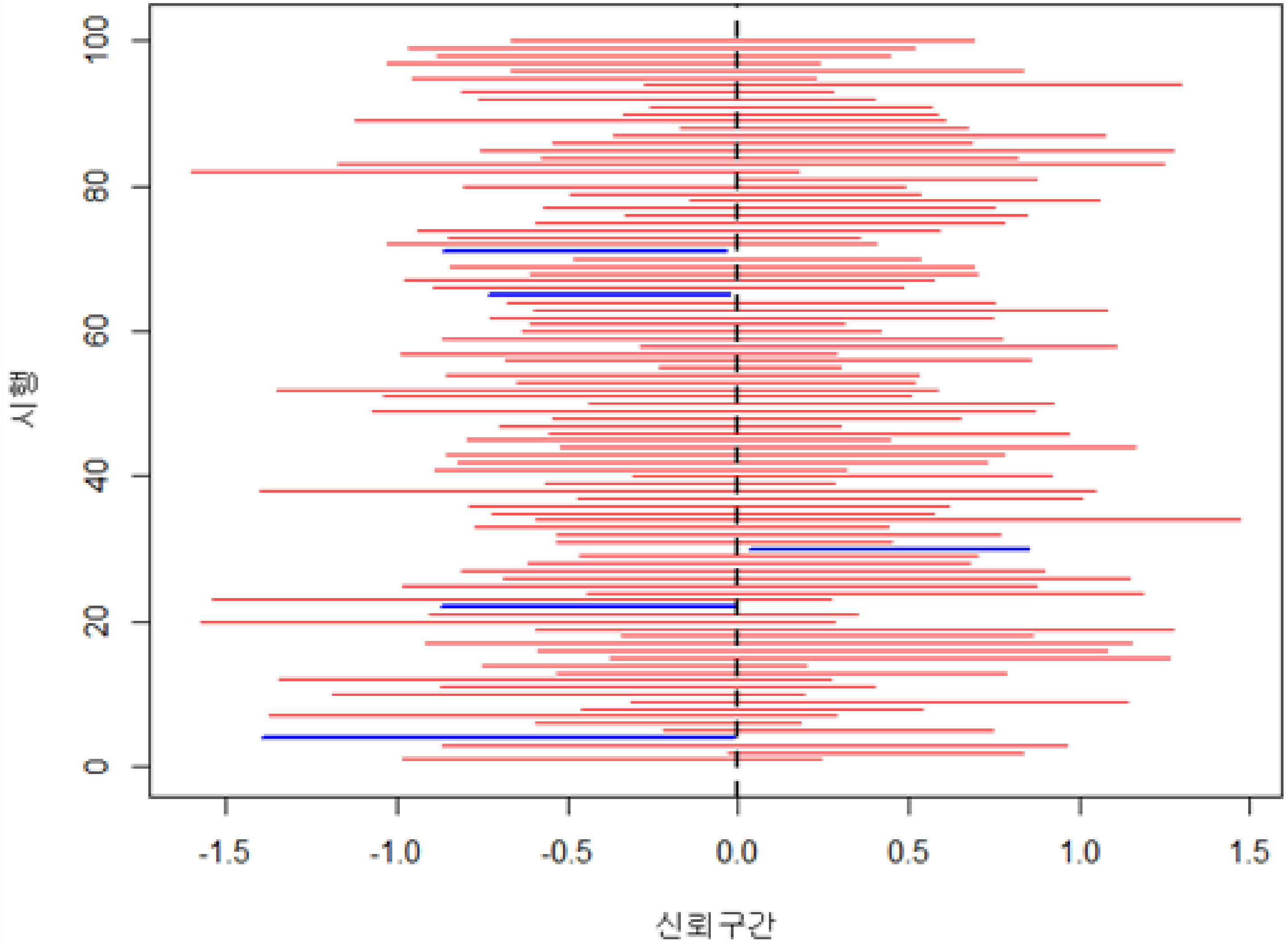
- $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2)$, 표준편차 σ는 알려져 있음

$$\left[\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma, \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma\right]$$

1.3 신뢰구간

- 95% 신뢰구간 : θ에 대한 95% 신뢰구간을 구하는 과정을 100번 반복하였을 때, 100개의 신뢰구간 중 95개가 모수를 포함

1.3 신뢰구간



1.3 신뢰구간

- 신뢰수준 : 신뢰구간을 구하는 과정을 반복할 때 그 중에서 모수를 포함하는 신뢰구간의 비율의 극한
  - θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 $\left[c\left(\hat{\theta}\right), d\left(\hat{\theta}\right)\right]$:

    $P\left[c\left(\hat{\theta}\right) \leq \theta \leq d\left(\hat{\theta}\right)\right] = 1 - \alpha$

2 모평균에 대한 구간추정

2.1 정규모집단의 모평균에 대한 구간추정

- $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본, σ^2기지 :

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

2.1 정규모집단의 모평균에 대한 구간추정

- μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- $P\left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$

2.1 정규모집단의 모평균에 대한 구간추정

- $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$의 확률표본, σ^2미지
- μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

2.1 정규모집단의 모평균에 대한 구간추정

예 8.2

$X_1, \cdots, X_{16} \sim$ 정규분포 확률표본

$$\sum_{i=1}^{16} X_i = 400, \sum_{i=1}^{16} X_i^2 = 12{,}000$$

1) 모표준편차 10, 모평균에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

2.1 정규모집단의 모평균에 대한 구간추정

예 8.2

2) 모표준편차가 알려져 있지 않을 때 모평균에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

2.2 일반 모집단 모평균에 대한 구간추정

- $X_1, \cdots, X_n \sim (\mu, \sigma^2)$의 확률표본, σ^2 미지
  - $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$는 근사적으로 표준정규분포

2.2 일반 모집단 모평균에 대한 구간추정

- μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

2.2 일반 모집단 모평균에 대한 구간추정

예 8.3

어느 모집단에서 구한 확률표본 $X_1, \cdots, X_{100}$

$\bar{X} = 12.5, S^2 = 10.64$, 모평균에 대한 95%신뢰구간은?

3 모분산에 대한 구간추정

3.1 표본분산의 신뢰구간

- $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본 : $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- σ^2에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

3.1 표본분산의 신뢰구간

예 8.4

정규분포 모집단, 표본크기 10인 확률표본의 $S^2 = 9.8$일 때,

모분산 σ^2에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

[13강]

구간추정

4 두 모평균 차에 대한 구간추정

4.1 정규 모집단에서 두 모평균의 차에 대한 구간추정

- $X_1, \cdots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y_1, \cdots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

  확률표본, 두 표본은 서로 독립

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

$$S_p^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \bar{Y}\right)^2\right]$$

4.1 정규 모집단에서 두 모평균의 차에 대한 구간추정

- σ를 모를 때, $\mu_1 - \mu_2$의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\alpha/2}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right]$$

4.1 정규 모집단에서 두 모평균의 차에 대한 구간추정

예 8.5

모표준편차가 같고 정규분포 두 모집단의 독립인 두 확률표본

- 첫 번째 확률표본 : $n = 10, \bar{X} = 24.5, S_1^2 = 18.2$
- 두 번째 확률표본 : $n = 15, \bar{Y} = 16.4, S_2^2 = 15.8$

두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

4.1 정규 모집단에서 두 모평균의 차에 대한 구간추정

예 8.5

두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

4.2 일반 모집단에서 두 모평균의 차에 대한 구간추정

- $X_1, \cdots, X_m \sim (\mu_1, \sigma_1^2), Y_1, \cdots, Y_n \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$, 독립
- $\mu_1 - \mu_2$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}},\ (\bar{X}-\bar{Y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}\right]$$

4.2 일반 모집단에서 두 모평균의 차에 대한 구간추정

예 8.6

두 모집단에서 얻은 서로 독립인 두 확률표본

- 첫 번째 확률표본 : $n = 100, \bar{X} = 97.5\ S_1^2 = 124.8,$
- 두 번째 확률표본 : $n = 400, \bar{Y} = 78.2, S_2^2 = 241.2$

두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

4.3 짝비교에서 두 모평균의 차에 대한 구간추정

- $D_i = X_i - Y_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$, 짝비교 모평균의 차에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left[\bar{D} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$$

[13강]

구간추정

5 두 모집단 비에 대한 구간추정

5.1 두 모분산의 비에 대한 구간추정

- $X_1, \cdots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y_1, \cdots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 독립
- 두 표본분산의 비 : F분포

$$\frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} = F(n-1, m-1)$$

5.1 두 모분산의 비에 대한 구간추정

- $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[\frac{S_2^2/S_1^2}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)}, S_2^2/S_1^2 \cdot F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\right]$$

5.1 두 모분산의 비에 대한 구간추정

예 8.7

정규분포 두 모집단에서 얻은 서로 독립인 두 확률표본

- 첫 번째 확률표본 : $n = 9, S_1^2 = 36.8,$
- 두 번째 확률표본 : $n = 12, S_2^2 = 78.4$

두 모분산의 비 σ_2^2/σ_1^2에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

5.1 두 모분산의 비에 대한 구간추정

예 8.7

두 모분산의 비 σ_2^2/σ_1^2에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

[13강]

구간추정

6 모비율의 구간추정

6.1 한 모집단에서 모비율의 구간추정

- p에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

6.1 한 모집단에서 모비율의 구간추정

예 8.8

베르누이분포 모집단 확률표본 $X_1, \cdots, X_{400}$, $\sum_{i=1}^{400} X_i = 280$, 모비율 p에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

6.2 두 모비율의 차에 대한 구간추정

- 서로 독립인 두 표본크기가 충분히 클 때 두 모비율의 차 $p_1 - p_2$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}\right]$$

6.2 두 모비율의 차에 대한 구간추정

예 8.9

베르누이분포를 따르는 두 모집단 서로 독립

- 첫 번째 확률표본 : $n = 500, \hat{p}_1 = 0.52$
- 두 번째 확률표본 : $n = 1000, \hat{p}_2 = 0.36$

두 모비율의 차 $p_1 - p_2$에 대한 95% 신뢰구간을 구하라.

7 구간추정과 가설검정 사이의 관계

7.1 구간추정과 가설검정의 관계

- $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본
  - $H_0: \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1: \mu \neq \mu_0$
  - 기각역 : $|\bar{X} - \mu_0| > z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - 채택역 : $|\bar{X} - \mu_0| \leq z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

7.1 구간추정과 가설검정의 관계

- 유의수준 α에서 가설 $H_0: \mu = \mu_0$ 기각 못하는 범위

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

→ 모평균에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간과 일치

- μ의 신뢰구간 $= \{\mu |\ H_0 : \mu = \mu_0$ 기각하지 못함$\}$

7.2 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

- 유의수준 α에서 $H_0: \theta = \theta_0$에 대한 채택역 $A(\theta_0)$
- θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$C(\boldsymbol{X}) = \{\theta \mid X \in A(\theta)\}$$

7.3 채택역

- $C(\boldsymbol{X})$: 모수 θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간
- $H_0: \theta = \theta_0$에 대한 채택역 :

$$A(\theta_0) = \{\boldsymbol{X} \mid \theta_0 \in C(\boldsymbol{X})\}$$

[13강]

구간추정

8 정리하기

정리하기

1. 구간추정은 모수를 포함할 것으로 기대되는 구간을 제시하여 모수를 추정하는 방법을 말한다.
2. 신뢰구간을 구하는 과정을 여러 번 반복할 때 그 중에서 모수를 포함하는 신뢰구간의 비율의 극한을 신뢰수준이라고 한다.

정리하기

3. $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본, σ를 모를 때, 모평균 μ에 대한 100(1 − α)% 신뢰구간 : $\left[\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

4. $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본, σ^2에 대한 100(1 − α)% 신뢰구간 : $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$

정리하기

5. $X_1, \cdots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, \cdots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 독립인 확률표본 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\alpha/2}(m+n-2) S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right]$$

$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[\frac{S_2^2/S_1^2}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)}, S_2^2/S_1^2 \cdot F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\right]$$

정리하기

6. 표본크기가 충분히 클 때 p의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left[\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

7. 유의수준 α에서 $H_0: \theta = \theta_0$를 기각하지 못하는 채택역과 θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 집합은 서로 같다.

다음 시간 안내 ▼

14강. 베이즈 추론의 기초

수고하셨습니다.