[11강]

가설검정(1)

정보통계학과 이긍희 교수

학습목표

1. 통계적 가설검정의 기본 개념을 이해한다.
2. 검정오류와 검정력을 이해한다.
3. 최강력검정을 이해한다.

[11강]

가설검정(1)

1 통계적 가설검정의 개념

1.1 가설검정의 개요

- 피셔의 실험 : 우유와 홍차

-가설 1 : 차와 우유중 어떤 것을 먼저 넣었는지 알 수 있다.

-가설 2 : 차와 우유중 어떤 것을 먼저 넣었는지 알 수 없다.

1.1 가설검정의 개요

- **통계적 가설검정** : 확률표본을 이용하여 모집단의 두 가설 중에서 어느 것이 타당한지 판단
- **대립가설(H_1)** : 입증하려는 가설
- **귀무가설(H_0)** : 대립가설에 반대되는 가설

1.1 가설검정의 개요

- 통계적 가설검정 → 대립가설을 입증하는 방법
  - 귀무가설 참이라는 가정 하에 주어진 관측값보다 더 벗어난 값을 얻을 확률이 매우 작다면 귀무가설이 참이라는 가정은 적절하지 않다고 판단

1.1 가설검정의 개요

- **p-값** : 귀무가설 하에서 주어진 관측값보다 더 극단적인 값을 얻을 확률
  - p-값이 작다는 것 : 귀무가설이 참이 아니거나, 귀무가설이참이라면 매우 희귀한 사건이 발생하였음을 의미

1.1 가설검정의 개요

- 기각역($\boldsymbol{R}$) : 귀무가설을 기각하는 관측값의 영역
  - 관측값이 기각역 R에 속하면 귀무가설을 기각
  - 관측값이 기각역에 속하지 않으면 귀무가설을 기각할 수 없음

1.2 검정 오류

		검정의 결과	
		H_0기각하지 않음	H_0기각
실제	H_0참	올바른 판단	제1종 오류
	H_1참	제2종 오류	올바른 판단

- 제1종 오류를 범할 확률 : $\alpha = P(\boldsymbol{X} \in R | H_0)$
- 제2종 오류를 범할 확률 : $\beta = P(\boldsymbol{X} \notin R | H_1)$

1.2 검정 오류

- **검정력** : $P(\boldsymbol{X} \in R | H_1) = 1 - \beta$

  - 대립가설이 참일 때 귀무가설을 기각할 확률

1.2 검정 오류

예 7.1

$X \sim N(\theta, 1)$, $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta = 3$, 기각역 $R = \{x | x \geq 2\}$ 인 검정의 제1종 오류를 범할 확률, 제2종 오류를 범할 확률, 검정력을 구하라.

1.2 검정 오류

예 7.1

$X \sim N(\theta, 1),\ H_0: \theta = 0\ \ vs\ \ H_1: \theta = 3,$ 기각역

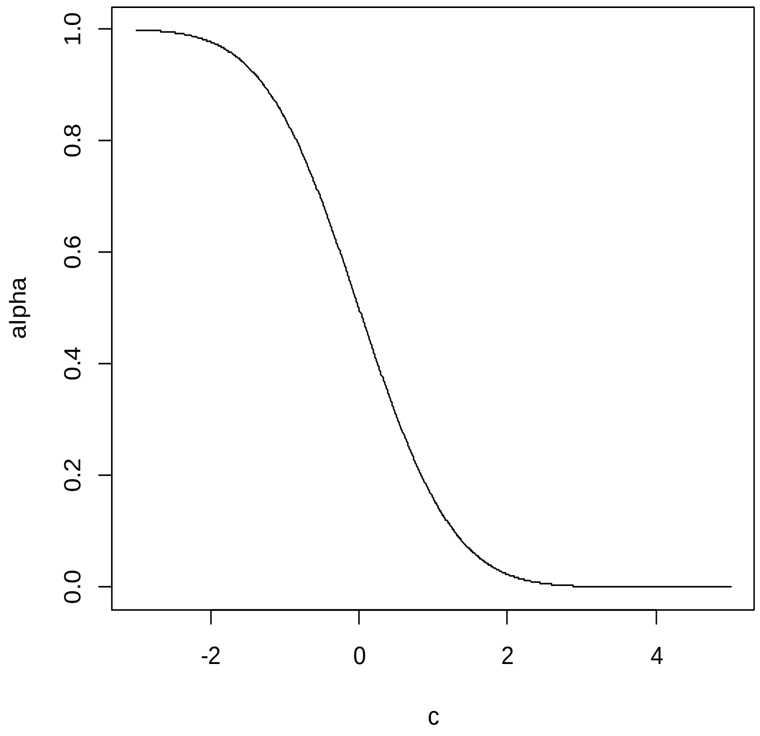
1.2 검정 오류

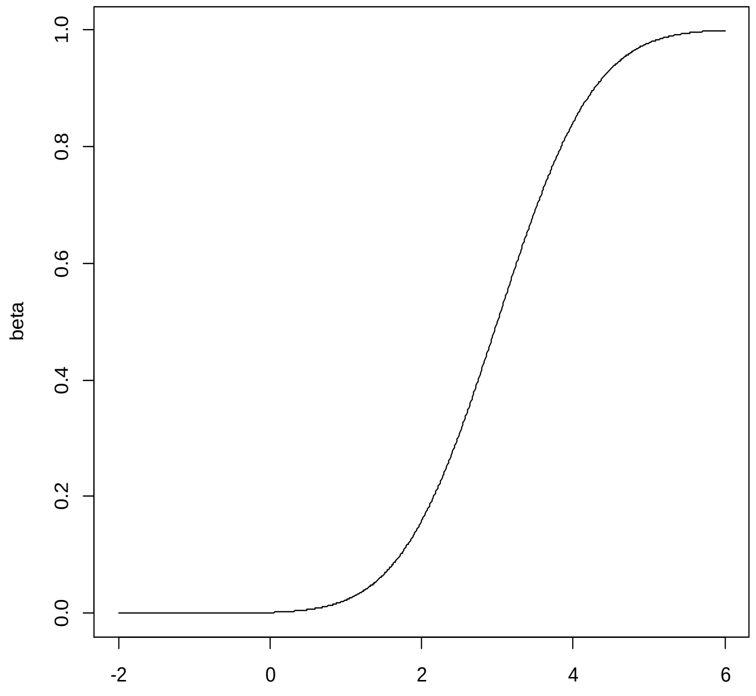
예 7.1

$X \sim N(\theta, 1),\ \ H_0: \theta = 0\ \ vs\ \ H_1: \theta = 3,$ 기각역

1.2 검정 오류

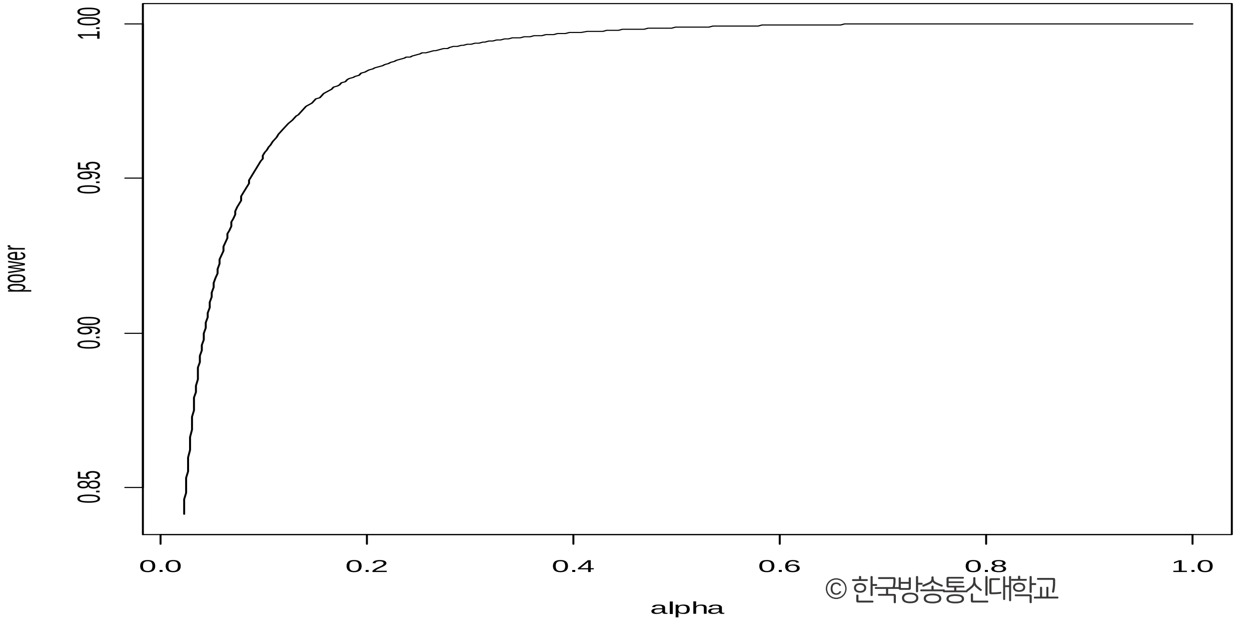
- $R = \{x|x \geq c\}$, 제1종 오류와 제2종 오류





1.2 검정 오류

- **검사특성곡선 :** 제1종 오류를 작게 하면 검정력이 작아짐(제2종 오류가 커짐)



1.3 검정의 선택

- 오류의 상충 : 제1종 오류를 범할 확률을 작게 하는 검정은 일반적으로 제2종 오류를 범할 확률을 크게함

1.3 검정의 선택

- 제1종 오류 범할 확률이 일정한 수준 이하인 검정 중 제2종 오류를 범할 확률을 가장 작게 하는 검정 선택
  - 유의수준 : 제1종 오류를 범할 확률의 최대 한계
  - 수준 α 검정 : 제1종 오류를 범할 확률이 α 이하인 검정

1.4 검정함수

- 검정함수 : $\delta(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{X} \in R \\ 0, & \boldsymbol{X} \notin R \end{cases}$
- $\alpha = P(\boldsymbol{X} \in R | H_0) = E[\delta(\boldsymbol{X}) | H_0]$

  검정력 $= P(\boldsymbol{X} \in R | H_1) = E[\delta(\boldsymbol{X}) | H_1]$

1.4 검정함수

- 검정함수의 일반화

$\delta(x) = 1$: 귀무가설 기각

$\delta(x) = 0$: 귀무가설 기각하지 못함

$\delta(x) = 0.5$: 귀무가설 기각할 확률 0.5

2 최강력 검정

2.1 단순가설과 복합가설

- **단순가설** : 귀무가설이나 대립가설 하에서 $\boldsymbol{X}$의 확률분포가 하나로 결정. (예) $H_0: \theta = 1$
- **복합가설** : 확률분포가 하나로 결정되지 않을 때 가설 (예) $H_1: \theta > 1$, $H_1: \theta \neq 1$

2.2 최강력검정의 정의

- $H_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1: \theta = \theta_1$
- 검정 δ : 유의수준 α에서의 최강력검정

(1) $E[\delta(\boldsymbol{X})|H_0] \leq \alpha$ → 수준 α 검정

(2) $E[\delta^*(\boldsymbol{X})|\mathrm{H}_0] \leq \alpha$인 모든 검정 δ^*에 대하여

$$E[\delta(\boldsymbol{X})|H_1] \geq E[\delta^*(\boldsymbol{X})|H_1]$$

→ 수준 α 검정 중에서 검정력이 가장 큼

2.3 네이만-피어슨 보조정리

- $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$: $f(\boldsymbol{x}|\theta)$ 확률표본
- 가설 : $H_0 : \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1 : \theta = \theta_1$
- 검정 δ는 유의수준 α 에서의 최강력검정
  - $$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{f(\boldsymbol{x}|\theta_1)}{f(\boldsymbol{x}|\theta_0)} > k \\ 0, & \dfrac{f(\boldsymbol{x}|\theta_1)}{f(\boldsymbol{x}|\theta_0)} < k \end{cases}$$
  - $E[\delta(\boldsymbol{X})|H_0] = \alpha$

2.4 가능도비

- **가능도비** : 통계량의 함수
  - 통계량과 기각역의 관계로 다시 표현

$$\frac{f(\boldsymbol{x}|\theta_1)}{f(\boldsymbol{x}|\theta_0)} > k \Leftrightarrow T(x) > k' \text{ 또는 } |T(x)| > k'$$

2.5 최강력 검정

예 7.3

$X_1, \cdots, X_{10} \sim Poisson(\theta)$ 확률표본.

$H_0: \theta = 0.3 \; vs \; H_1: \theta = 0.1$에 대한 유의수준

$\alpha = 4e^{-3}$에서 최강력검정을 구하라.

2.5 최강력 검정

예 7.3

$H_0: \theta = 0.3 \ vs \ H_1: \theta = 0.1$에 대한 유의수준 $\alpha = 4e^{-3}$에서 최강력검정을 구하라.

2.5 최강력 검정

예 7.4

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\theta, 1)$ 확률표본.

$H_0: \theta = \theta_0 \; vs \; H_1: \theta = \theta_1$(단, $\theta_1 > \theta_0$),

유의수준 α에서 최강력검정을 구하라.

2.5 최강력 검정

예 7.4

$H_0: \theta = \theta_0 \ vs \ H_1: \theta = \theta_1$(단, $\theta_1 > \theta_0$),

유의수준 α에서 최강력검정을 구하라.

2.5 최강력 검정

예 7.5

$X_1, \cdots, X_5 \sim N(0, \sigma^2)$ 확률표본.

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2 \quad (\sigma_1^2 > \sigma_0^2)$,

유의수준 α에서 최강력검정을 구하라.

2.5 최강력 검정

예 7.5

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \ vs \ H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2 \quad (\sigma_1^2 > \sigma_0^2),$

유의수준 α에서 최강력검정을 구하라.

2.6 균일최강력검정

- **균일최강력검정** : 단순가설의 최강력검정을 복합가설로 확장
  - 귀무가설의 모든 θ에서 제 1종의 오류를 범할 확률이 α이하
  - 대립가설의 모든 θ에서 검정력이 더 큰 검정법

[11강]

가설검정(1)

3 정리하기

정리하기

1. 가설검정에서 입증하려는 가설을 대립가설로 세운다. 귀무가설은 대립가설의 반대되는 가설을 말한다.
2. 기각역은 귀무가설을 기각하는 관측값의 영역이다.
3. 제1종 오류는 귀무가설이 참일 때 귀무가설을 기각하는 오류이고, 제2종 오류는 대립가설이 참일 때 귀무가설을 기각하지 못하는 오류이다. 검정력은 대립가설이 참일 때 귀무가설을 기각할 확률이다.

정리하기

4. 제1종 오류를 범할 확률이 α이하인 검정을 수준 α검정 이라고 한다.
5. 유의수준 α에서의 최강력검정은 제1종 오류를 범할 확률이 α 이하인 검정 중에서 제2종 오류를 범할 확률을 최소로 하는 검정이다.

정리하기

6. 귀무가설과 대립가설이 단순가설 $H_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1: \theta = \theta_1$네이만-피어슨 보조정리에 의하여 최강력검정의 기각역 $R = \left\{ \boldsymbol{x}: \dfrac{f(\boldsymbol{x}|\theta_1)}{f(\boldsymbol{x}|\theta_0)} > c \right\}$ c는 주어진 유의수준에 따라 변동

다음 시간 안내 ▼

12강. 가설검정(2)

수고하셨습니다.