[5강]

모집단의 분포(2) : 연속형 확률분포

정보통계학과 이긍희 교수

학습목표

1. 연속형 균등분포를 이해한다.
2. 지수분포를 이해한다.
3. 감마분포를 이해한다.
4. 정규분포를 이해한다.

[5강]

모집단의 분포(2)

1 연속형 확률분포

1.1 연속형 균등분포

- X : a분과 b분 사이 x분 기다리는 시간

$$P(X < x) = \frac{x - a}{b - a}$$

1.1 연속형 균등분포

- 확률변수가 구간 $[a, b]$ 각 값을 가질 가능성이 같을 때 분포

$$X \sim U(a, b)$$

1.1 연속형 균등분포

- 확률밀도함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & 0 \le x \le b \\ 0, & x < a \text{ 또는 } x > b \end{cases}$$

1.1 연속형 균등분포

예 3.9

$X \sim U(0,5)$일 때 $P(2 < X < 4)$을 구하라.

1.1 연속형 균등분포

- 기댓값과 분산
  - $E(X) = \frac{(a+b)}{2}$
  - $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

1.2 지수분포

- 사건이 첫 번째로 발생할 때까지 소요되는 대기 시간 T의 분포

$$T \sim Exp(\lambda)$$

1.2 지수분포

- 포아송분포와 지수분포
  - $X \sim Poisson(\lambda t)$
  - $P(T \leq t) = P(X \geq 1)$

1.2 지수분포

- 누적확률분포

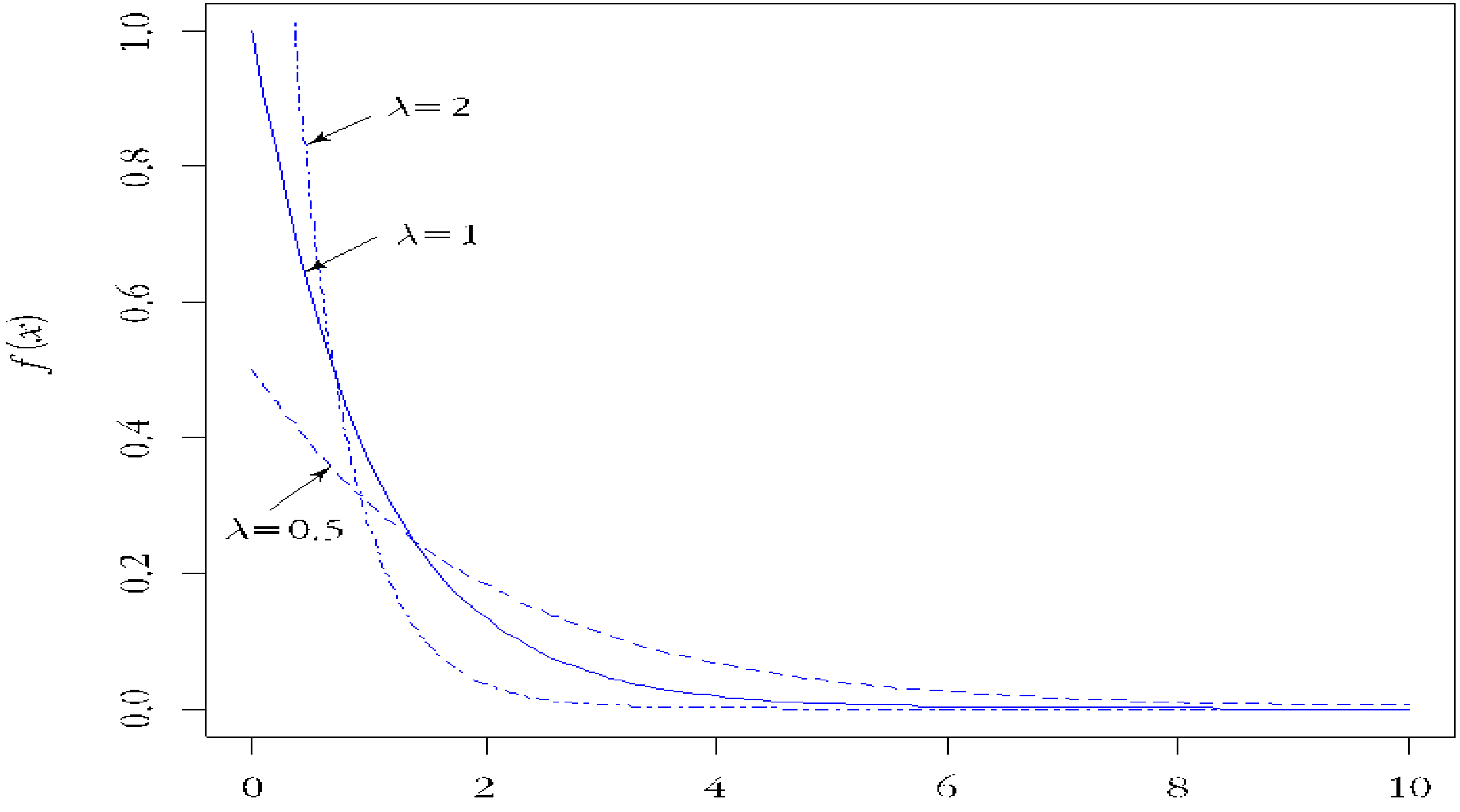
$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

1.2 지수분포

- 확률밀도함수

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0\ (\lambda > 0)$$

1.2 지수분포



1.2 지수분포

- 기댓값과 분산
  - $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
  - $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

1.2 지수분포

- 지수분포의 적률생성함수

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad t < \lambda$$

1.2 지수분포

예 3.10

$Exp(\lambda)$를 따르는 확률변수의 적률생성함수는?

1.2 지수분포

- 지수분포의 망각성

$$P(X \geq a + b | X \geq a) = P(X \geq b)$$

1.2 지수분포

예 3.13

자동차 수명 $X \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$, 5년 동안 사용해 온 자동차를 앞으로 5년 더 사용할 확률은?

1.3 감마분포

- 사건이 r번째 발생할 때까지 대기시간 T의 분포

$$T \sim Gamma(r, \lambda)$$

1.3 감마분포

- $X \sim Poisson(\lambda t)$

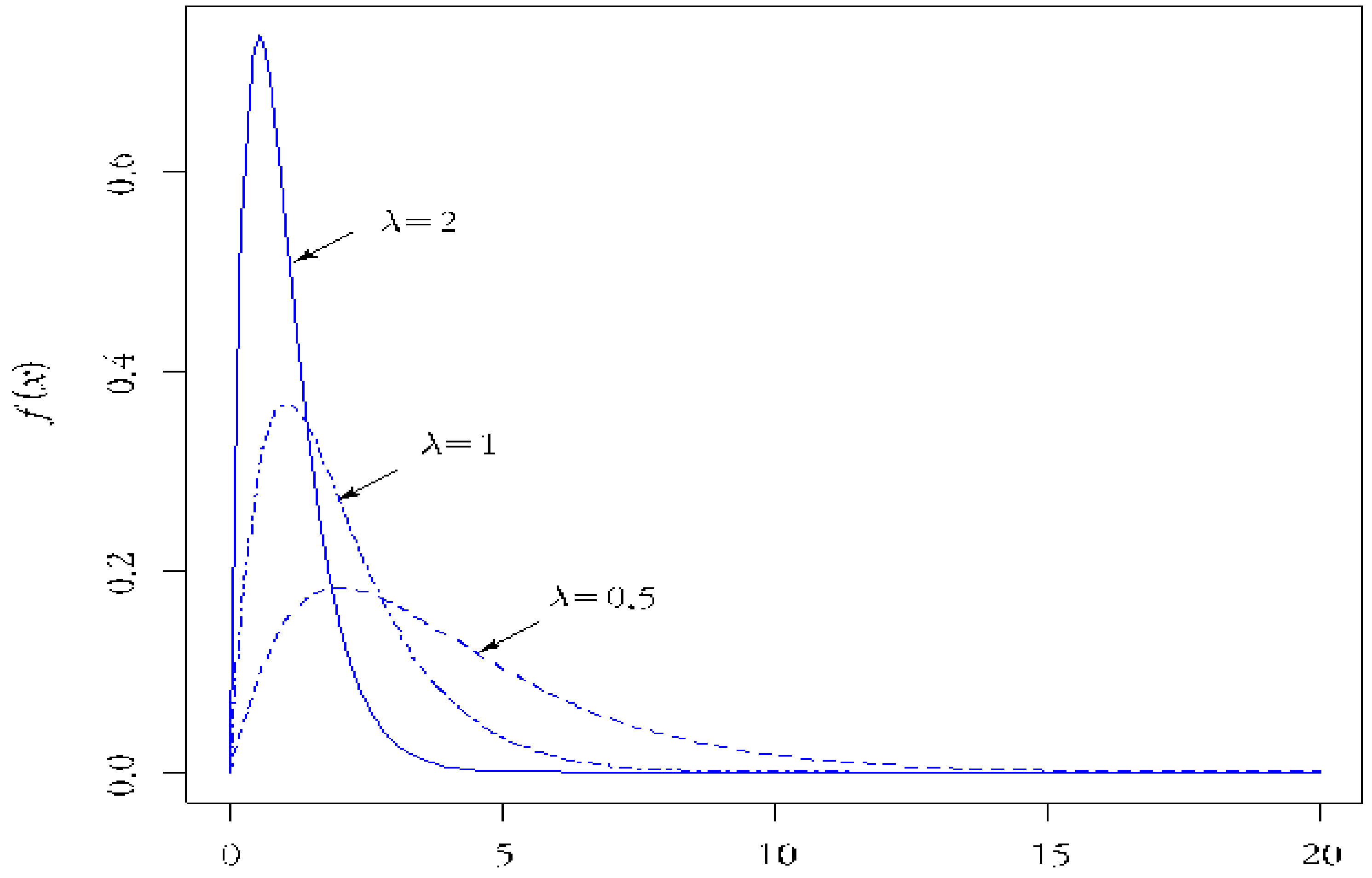
$$P(T \leq t) = P(X \geq r)$$

1.3 감마분포

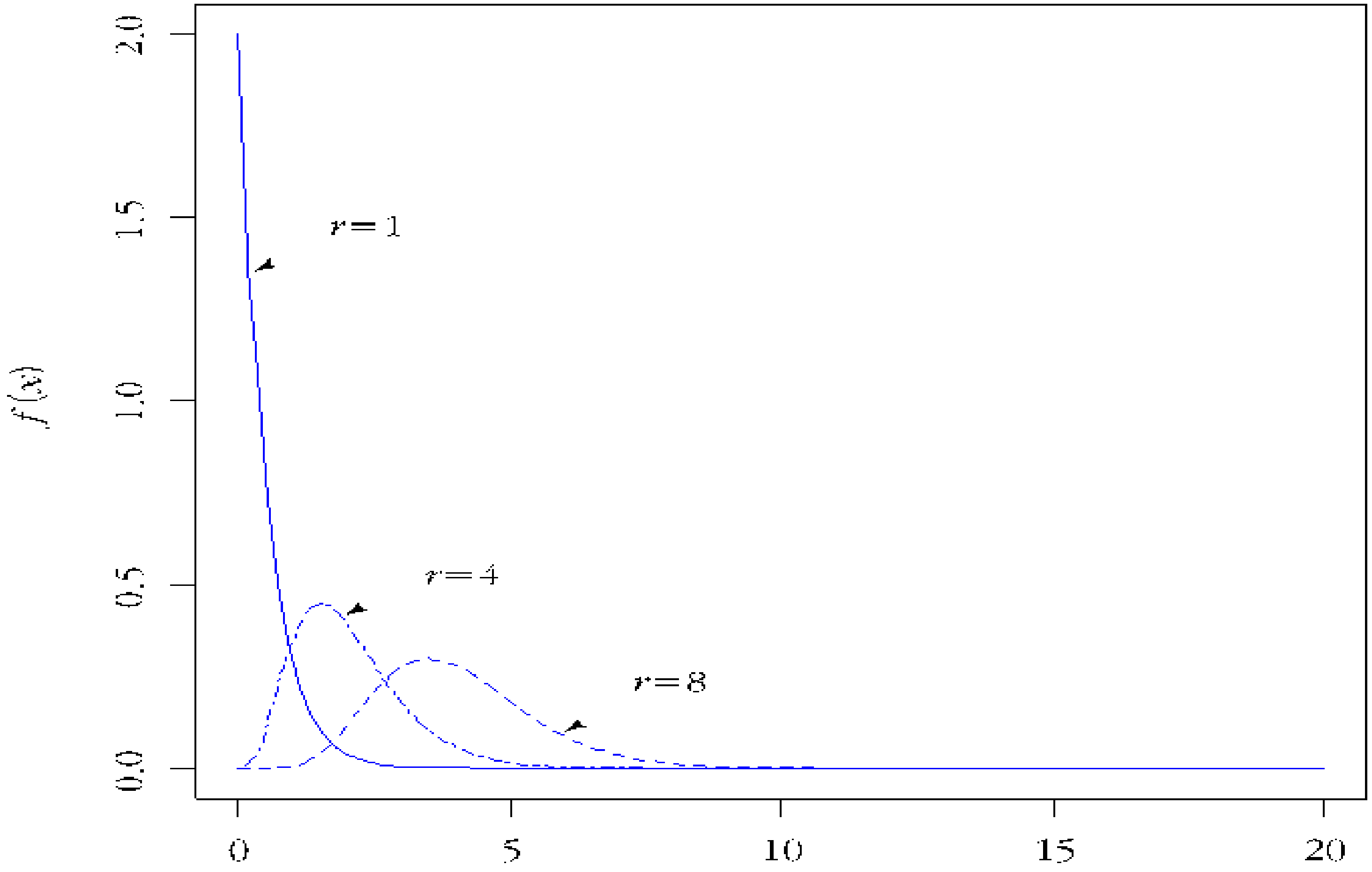
- 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0 \ (\lambda > 0)$$

1.3 감마분포



1.3 감마분포



1.3 감마분포

예 3.14

비행기 엔진이 두 번째 결함이 일어나는 기간은 감마분포 $Gamma(2,0.1)$. 비행기 엔진의 두 번째 결함이 5년 이후에 나타날 확률은?

1.3 감마분포

- 기댓값과 분산
  - $E(X) = \frac{r}{\lambda}$
  - $Var(X) = \frac{r}{\lambda^2}$

1.3 감마분포

- 적률생성함수

$$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r, \qquad t < \lambda$$

1.3 감마분포

- 다른 분포와의 관계
  - 지수분포 : $Gamma(1, \lambda)$
  - $Y = T_1 + \cdots + T_r \sim Gamma(r, \lambda)$,

    $T_i \sim Exp(\lambda)$
  - 카이제곱(χ^2)분포 : $Gamma\left(r, \frac{1}{2}\right)$

1.3 감마분포

- 다른 분포와의 관계
  - X_1, X_2 독립, $Gamma(\alpha, \lambda), Gamma(\beta, \lambda)$

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim Beta(\alpha, \beta)$$

1.4 정규분포

- **정규분포** : 종 모양의 좌우대칭인 곡선형태를 띠는 대표적인 확률분포
  - 정규분포는 평균 μ와 분산 σ^2으로 그 형태가 결정 : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

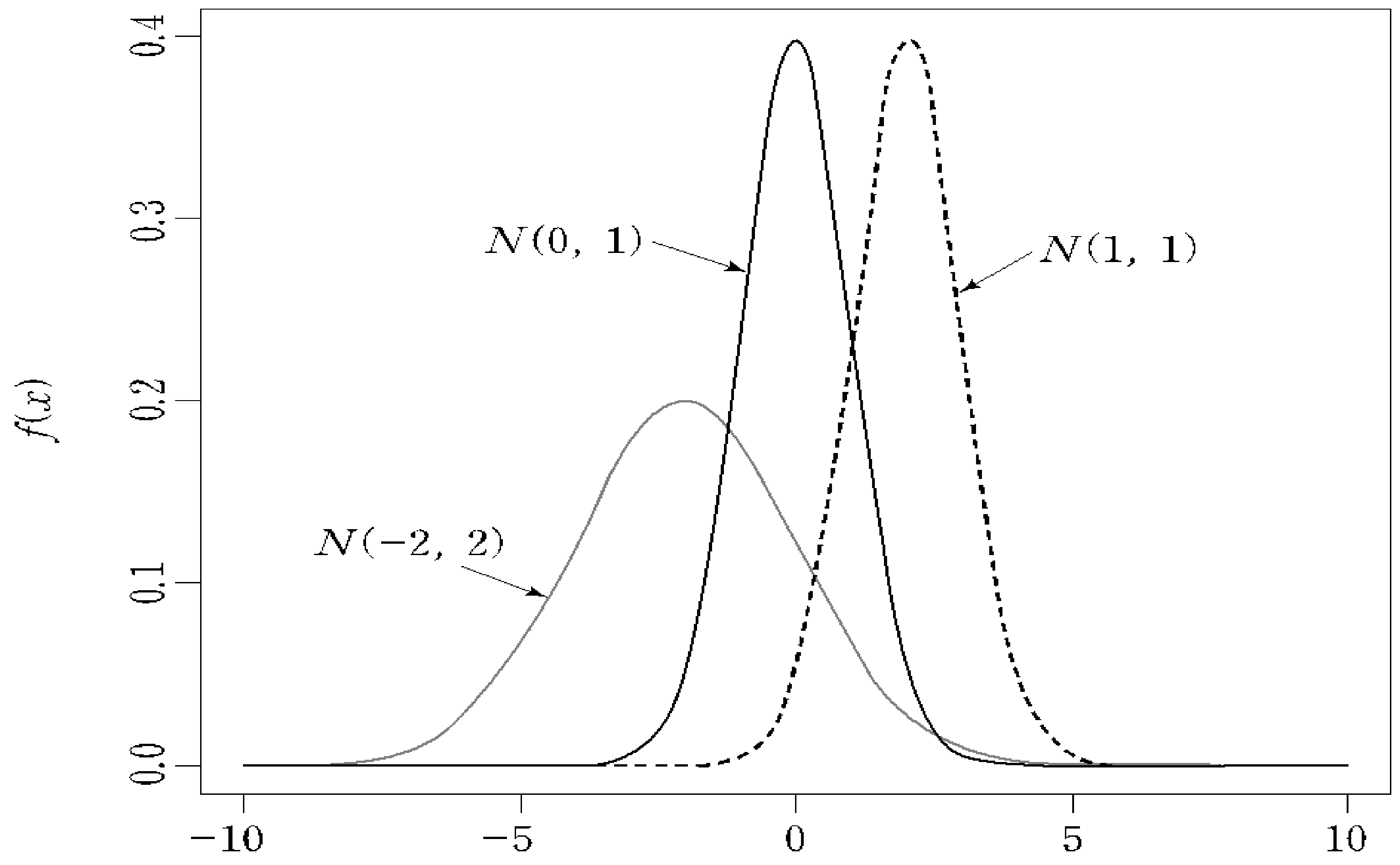
1.4 정규분포

- 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$-\infty < x < \infty$$

1.4 정규분포



1.4 정규분포

- 표준정규분포
  - $Z \sim N(0,1)$: $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

1.4 정규분포

- 표준정규분포
  - $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right], \quad -\infty < z < \infty$

1.4 정규분포

- 표준정규분포의 누적분포함수

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du$$

1.4 정규분포

- 표준정규분포의 누적분포함수
  - $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
  - $\Phi(-\infty) = 0,\ \Phi(\infty) = 1,\ \Phi(0) = 0.5$
  - $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

1.4 정규분포

- 표준정규분포의 누적분포함수

z	0	1	1.645	1.96	2	3
$P(Z \le z)$	0.5	0.8413	0.9500	0.9750	0.9772	0.9887

1.4 정규분포

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(c \leq X \leq d) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$$

1.4 정규분포

예 3.16

통계과목의 중간고사 점수 X가 평균 73, 분산 49인 정규분포, 어떤 학생의 중간고사 점수와 평균의 차이가 14 이하일 확률을 구하라.

1.4 정규분포

- 적률생성함수 : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

1.4 정규분포

예 3.15

표준정규분포의 적률생성함수를 도출하라.

1.4 정규분포

- 정규분포와 다른 분포의 관계
  - 로그정규분포 : $Y = e^X$
  - $Z^2 \sim \chi_1^2$
  - 중심극한정리 : 표본 수가 커지면 모집단 분포에 관계없이 표본평균은 정규분포로 수렴

[5강]

모집단의 분포(2)

2 정리하기

정리하기

1. 연속형 균등분포는 확률변수가 각 값을 가질 가능성이 같을 때의 분포이다.
2. 지수분포는 첫 번째 사건발생 때까지 소요되는 대기시간의 분포이다.
3. 감마분포는 r번째 사건이 발생할 때까지 소요되는 대기시간의 분포이다.

정리하기

4. 정규분포는 종모양의 좌우대칭인 곡선형태의 분포로 평균과 분산으로 그 형태가 결정된다.

다음 시간 안내 ▼

6강. 표본분포(1)

수고하셨습니다.