[10강]

점추정량의 비교(2)

정보통계학과 이긍희 교수

학습목표

1. 충분통계량을 이해한다.
2. 균일최소분산불편추정량을 이해한다.
3. 정보량부등식을 이해하고 계산한다.

[10강]

점추정량의 비교(2)

1 충분성

1.1 충분통계량

- **충분성(sufficiency)** : 모수에 대해 그 이상의 정보를 제공하는 다른 통계량이 없을 경우 그 추정량은 충분성을 가짐.
- 충분통계량은 확률분포의 모수 정보를 잃지 않고 효율적으로 모수 추정 가능

1.1 충분통계량

- θ의 추정량 T가 주어졌을 때 확률표본 $(X_1, \cdots, X_n)$의 조건부분포가 θ에 의존하지 않을 때 T는 충분통계량(sufficient statistics)

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n | T = t) = k(x_1, \cdots, x_n)$$

$\rightarrow$ T는 충분통계량

1.1 충분통계량

예 6.9

앞면 나올 확률 p인 동전 던지기 4번 결과 $\{1,1,0,0\}$.

동전 앞면이면 1, 뒷면이면 0. p의 충분통계량은?

1.1 충분통계량

예 6.9

앞면 나올 확률 p인 동전 던지기 4번 결과 $\{1,1,0,0\}$.

동전 앞면이면 1, 뒷면이면 0. p의 충분통계량은?

1.1 충분통계량

예 6.10

$X_1, X_2 \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본. $X_1 + X_2$가 λ의 충분통계량임을 보여라.

1.1 충분통계량

예 6.10

$X_1, X_2 \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본. $X_1 + X_2$가 λ의 충분통계량임을 보여라.

1.2 피셔-네이만 인수분해 정리

- 결합확률밀도함수가 아래와 같이 분해될 때

  $T = s(X_1, \cdots, X_n)$는 θ의 충분통계량

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n|\theta)$$
$$= g(s(x_1, \cdots, x_n)|\theta)h(x_1, \cdots, x_n)$$

1.2 피셔-네이만 인수분해 정리

예 6.11

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, 1)$ 확률표본.
μ에 대한 충분통계량은?

1.2 피셔-네이만 인수분해 정리

예 6.11

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, 1)$ 확률표본.
μ에 대한 충분통계량은?

1.2 피셔-네이만 인수분해 정리

예 6.12

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본. $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$에 대한 충분통계량은?

1.2 피셔-네이만 인수분해 정리

예 6.12

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본. $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$에 대한 충분통계량은?

1.3 충분통계량의 특성

- 충분통계량은 유일하지 않고 다양하게 존재
- 충분통계량의 1-1 함수도 충분통계량 :

$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ 충분통계량

$\rightarrow \left(\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)$ 충분통계량

1.4 최소충분통계량

- **최소충분통계량** : 충분통계량 중 표본에 있는 모수와 관련 없는 정보를 제거하고 모수의 모든 정보를 포함하면서 최대한 자료를 축약할 수 있는 통계량

1.4 최소충분통계량

- $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 최소충분통계량 : $f(\boldsymbol{x}|\theta)/f(\boldsymbol{y}|\theta)$ 가 θ에 대해 상수 $\Leftrightarrow T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$

1.4 최소충분통계량

예 6.14

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본. λ 에 대한 최소 충분통계량은?

1.5 보조통계량

- **보조통계량(ancillary statistic)** : 확률분포 모수의 정보를 하나도 포함하지 않는 통계량

1.5 보조통계량

예 6.15

$X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$확률표본. μ에 대한 보조통계량은?

[10강]

점추정량의 비교(2)

2 완비성

2.1 완비통계량

- 모든 θ와 함수 g에 대해 다음 성립

→ $T(\boldsymbol{X})$: 완비통계량(complete statistics)

$E\left(g\left(T(\boldsymbol{X})\right)|\theta\right) = 0$ 일때 $P\left(g\left(T(\boldsymbol{X})\right) = 0|\theta\right)=1$

2.1 완비통계량

- 완비충분통계량은 최소충분통계량,
  완비충분통계량의 1-1 함수도 완비충분통계량

2.1 완비통계량

예 6.16

$X_1, \cdots, X_n \sim Ber(p)$ 확률표본. $\sum_{i=1}^{n} X_i$가 p에 대한 완비통계량은?

2.1 완비통계량

예 6.16

$X_1, \cdots, X_n \sim Ber(p)$ 확률표본. $\sum_{i=1}^{n} X_i$가 p에 대한 완비통계량은?

2.2 지수족

- **지수족(exponential family)** : 확률밀도(질량)함수가 아래와 같은 형태

$$f(x|\theta) = \exp\{\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta)T_i(x) + d(\theta) + S(x)\}I_A(x)$$

  - $I_A(x)$: $x \in A$이면 1이고 $x \notin A$이면 0인 함수

2.2 지수족

- 지수족에 포함되는 분포 : 정규분포, 지수분포, 감마분포, 베타분포, 포아송분포, 이항분포 등

2.2 지수족

- $X_1, \cdots, X_n \sim$ 지수족 $\{f(x|\theta)\,;\theta \in \Omega\}$ 확률 표본

  $\rightarrow \{\sum_{i=1}^{n} T_1(x), \cdots, \sum_{i=1}^{n} T_k(x)\}$:

  θ에 대한 완비충분통계량

2.2 지수족

예 6.18

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본. λ 에 대한 완비충분통계량은?

2.2 지수족

예 6.18

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본. λ 에 대한 완비충분통계량은?

2.2 지수족

예 6.19

$X_1, \cdots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$ 확률표본. σ^2에 대한 완비충분통계량은?

2.2 지수족

예 6.19

$X_1, \cdots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$ 확률표본. σ^2에 대한 완비충분통계량은?

2.2 지수족

- **Basu의 정리** : $T(\boldsymbol{X})$가 완비충분통계량이면 $T(\boldsymbol{X})$는 모든 보조통계량에 독립적

2.2 지수족

예 6.20

$X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$ 확률표본. $X_1 + X_2$와 $X_1 - X_2$가 독립임을 보여라.

[10강]

점추정량의 비교(2)

3 균일최소분산불편추정량

3.1 좋은 추정량

- 모수 θ의 불편추정량 중 최소 분산을 갖는 추정량
- 불편추정량과 편의추정량 등의 추정량 중 평균제곱오차를 최소로 하는 추정량

3.2 균일최소분산불편추정량

- 균일최소분산불편추정량 T^*

$X_1, \cdots, X_n$: $f(x|\theta)$의 확률표본,

$\tau(\theta)$의 추정량 $T^* = t^*(X_1, \cdots, X_n)$

① 불편성 : $E(T^*) = \tau(\theta)$

② 최소분산성 : $\tau(\theta)$에 대한 어떤 추정량

T에 대해 $Var_\theta(T^*) \le Var_\theta(T)$

3.3 라오-블랙웰 정리

- $X_1, \cdots, X_n$: $f(x|\theta)$의 확률표본,

  S : θ의 충분통계량, T : θ의 불편추정량

- $T^* = E[T|S]$에 대해 다음이 성립

  ① T^* : 충분통계량 S의 함수

  ② T^* : 불편추정량

  ③ 모든 θ에 대해 $Var(T^*) \leq Var(T)$

3.3 라오-블랙웰 정리

예 6.21

$X_1, X_2 \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본.

λ의 균일최소분산불편추정량은?

3.4 레만-쉐페 정리

- $\boldsymbol{X} = \{X_1, \cdots, X_n\}$: $f(x|\theta)$의 확률표본, $S(\boldsymbol{X})$: θ의 불편추정량, $T(\boldsymbol{X})$: θ의 완비충분통계량

  $\rightarrow T^*(\boldsymbol{X}) = E[S(\boldsymbol{X})|T(\boldsymbol{X})]$: θ의 균일최소분산 불편추정량

  - 불편추정량이 되는 완비충분통계량의 1-1 함수가 균일최소분산불편추정량

3.4 레만-쉐페 정리

예 6.22

$X_1, \cdots, X_n \sim Ber(p)$ 확률표본. p의 균일최소분산불편추정량은?

3.4 레만-쉐페 정리

예 6.22

$X_1, \cdots, X_n \sim Ber(p)$ 확률표본. p의 균일최소분산불편추정량은?

3.4 레만-쉐페 정리

예 6.23

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본. μ, σ^2에 대한 균일최소분산불편추정량은?

3.4 레만-쉐페 정리

예 6.23

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 확률표본. μ, σ^2에 대한 균일최소분산불편추정량은?

[10강]

점추정량의 비교(2)

4 정보량부등식

4.1 크래머-라오 하한

- $X_1, \cdots, X_n \sim f(x|\theta)$ 확률표본, $\hat{\theta}$은 θ의 불편추정량

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nVar\left(\frac{\partial}{\partial\theta} logf(X_1|\theta)\right)}$$

- 어떤 불편추정량의 분산 = 크래머-라오 하한

  → 균일최소분산불편추정량

4.2 피셔의 정보량

- **피셔의 정보량** : $I(\theta) = Var\left[\frac{\partial}{\partial\theta} logf(X_1;\theta)\right]$
  - 로그가능도함수 2차 미분 가능할 때 피셔의 정보량

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} logf(X_1;\theta)\right]^2 = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} logf(X_1;\theta)\right]$$

4.2 피셔의 정보량

- $X_1, \cdots, X_n \sim f(x|\theta)$의 확률표본

  $\rightarrow n$ 개 표본에 대한 피셔의 정보량 : $nI(\theta)$

4.2 피셔의 정보량

- $T(X_1, \cdots, X_n)$이 θ의 불편추정량일 경우

$$Var[T(X_1, \cdots, X_n)] \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

4.2 피셔의 정보량

- $T(X_1, \cdots, X_n)$이 $\tau(\theta)$의 불편추정량일 경우

$$Var[T(X_1, \cdots, X_n)] \geq \frac{\tau'(\theta)^2}{nI(\theta)}$$

4.2 피셔의 정보량

- 불편추정량 분산 하한 = 정보량부등식의 하한

  → 균일최소분산불편추정량

  - 불편추정량 $\hat{\theta}$의 분산이 아래와 같다면 $\hat{\theta}$은 θ의 균일최소분산불편추정량

$$Var(\hat{\theta}) = \left\{ nVar\left[\frac{\partial}{\partial\theta} logf(X_1;\theta) \right] \right\}^{-1}$$

4.2 피셔의 정보량

예 6.24

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, 1)$ 확률표본. μ에 대한 최대가능도 추정량 $\hat{\mu} = \bar{X}$의 정보량부등식의 하한값을 구하고, $\hat{\mu}$가 균일최소분산불편추정량인지 점검하라.

4.2 피셔의 정보량

예 6.24

$\hat{\mu} = \bar{X}$가 균일최소분산불편추정량인지 점검하라.

4.2 피셔의 정보량

예 6.25

$X_1, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 확률표본. λ에 대한 최대가능도추정량 $\hat{\lambda} = \bar{X}$의 정보량부등식의 하한값을 구하고, $\hat{\lambda}$가 균일최소분산불편추정량인지 점검하라.

[10강]

점추정량의 비교(2)

5 최대가능도추정량의 특징

5.1 최대가능도추정량의 점근적 성질

- $X_1, \cdots, X_n \sim f(x|\theta)$ 확률표본
- θ의 최대가능도추정량 $\hat{\theta}$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$$

5.1 최대가능도추정량의 점근적 성질

- $\hat{\theta}$은 θ의 일치추정량, 분산이 점근적으로 크래머-라오 하한과 일치

→ 최대가능도추정량은 표본수가 커지면서 불편성, 일치성, 효율성을 가진 추정량

5.1 최대가능도추정량의 점근적 성질

예 6.28

$X_1, \cdots, X_n \sim Ber(p)$ 확률표본. p의 최대가능도 추정량의 점근적 분포를 구하라.

5.1 최대가능도추정량의 점근적 성질

예 6.28

$X_1, \cdots, X_n \sim Ber(p)$ 확률표본. p의 최대가능도 추정량의 점근적 분포를 구하라.

[10강]

점추정량의 비교(2)

6 정리하기

정리하기

1. 충분성은 통계량 T가 주어졌을 때 $(X_1, \cdots, X_n)$의 조건부 분포가 모수 θ에 의존하지 않을 때 성립하는 성질이다.
2. 모든 θ와 통계량 $T(\boldsymbol{X})$의 함수 g에 대해서 다음이 성립할 때 통계량 $T(\boldsymbol{X})$를 완비통계량이라 한다.

$$E\left(g\left(T(\boldsymbol{X})\right)|\theta\right) = 0 \text{ 일때 } P\left(g\left(T(\boldsymbol{X})\right) = 0|\theta\right)=1$$

정리하기

3. 확률밀도(질량)함수가 집합 $\{f(x|\theta)\,;\theta\in\Omega\}$에 대해 다음 형태일 경우 지수족이라 부른다.

$$f(x|\theta)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}c_i(\theta)T_i(x)+d(\theta)+S(x)\right\}I_A(x)$$

4. $X_1,\cdots,X_n$이 지수족인 $\{f(x|\theta)\,;\theta\in\Omega\}$를 따르는 확률표본일 때 $\{\sum_{i=1}^{n}T_1(x),\cdots,\sum_{i=1}^{n}T_k(x)\}$는 θ에 대한 완비충분통계량이다.

정리하기

5. 불편추정량으로 한정하여 분산을 최소로 하는 추정량을 균일최소분산불편추정량이라 하는데 이 추정량은 불편추정량이 되는 완비충분통계량의 1-1 함수로 구한다.
6. 정보량부등식은 불편추정량이 취할 수 있는 분산 하한과 관련된 부등식이다.

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nVar\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log f(X_1;\theta)\right)}$$

정리하기

7. 최대가능도추정량은 표본수가 커지면서 불편성, 일치성, 효율성을 모두 가지며 점근적으로 정규분포를 따른다.

다음 시간 안내 ▼

11강. 가설검정(1)

수고하셨습니다.