## گزارش پروژه اول درس طراحی الگوریتم‌ها

امیرعلی صادقی فرشی (۹۹۱۲۸۳۴)

**مسئله:** n نقطه‌ی دوبعدی داده شده است. هدف پیدا کردن min و max برای هر دو بُعد از نقاط است. بنابراین، در نهایت ۴ مقدار $\max(x_i)$، $\max(y_i)$، $\min(x_i)$ و $\min(y_i)$ باید پیدا شوند که در آن‌ها $x_i$ و $y_i$ به ترتیب بعد اول و دومِ نقطه‌ی i–ام هستند. پس از پیدا کردن این مقادیر، مستطیلی با این چهار مقدار در فضای دوبعدی باید کشیده شود که به آن کوچک‌ترین جعبه‌ی محدودکننده می‌گوییم.

**الگوریتم:** برای هر کدام از ابعاد x و y باید min و max پیدا شود. برای این کار، الگوریتم زیر پیشنهاد می‌شود که تقریباً با $\frac{3n}{2}$ مقایسه این دو مقدار را برای هر بعد پیدا می‌کند. برای آرایه با سایز یک، هر دوی min و max برابر تک‌مقدار موجود در آرایه خواهد بود. برای اندازه‌های بزرگ‌تر از یک، دو مقدار موقت tempMin و tempMax در نظر می‌گیریم و به‌ترتیب برابر مقدار کوچک‌تر و بزرگ‌ترِ دو عضوِ اول آرایه قرار می‌دهیم. در ادامه، با پنجره‌ای به اندازه‌ی ۲ در آرایه دو جلو می‌رویم. برای هر پنجره، ابتدا min و max را بین آن دو پیدا می‌کنیم، سپس مینیمم آن دو را با tempMin و ماکسیمم آن‌ها را با tempMax مقایسه می‌کنیم و در صورت نیاز، مقادیر temp را بروزرسانی می‌کنیم. اگر تعداد اعضای آرایه فرد باشد، عضو آخر را هم با tempMin و هم با tempMax (در بدترین حالت) مقایسه می‌کنیم و باز در صورت نیاز، یکی از مقادیر temp عوض خواهد شد. پس از انجام این مراحل، دو متغیر tempMin و tempMax حاوی مقدار مینیمم و ماکسیمم کل آرایه خواهند بود.

**تحلیل زمانی (بدترین حالت):** اگر تعداد اعضای آرایه زوج باشد، به تعداد $\frac{n}{2}$ مقایسه درون هر پنجره خواهیم داشت. همچنین به جز پنجره‌ی اول که مستقیما مقدار min و maxشان در مقادیر temp جایگذاری می‌شوند، برای باقی پنجره‌ها، دو مقایسه برای هر کدام از آن‌ها با مقادیر temp لازم است. بنابراین تعداد کل مقایسه‌ها برابر است با:

$$T(n) = \frac{n}{2} + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{3n}{2} - 2$$

همچنین اگر تعداد اعضای آرایه فرد باشد، به تعداد $\frac{n-1}{2}$ پنجره خواهیم داشت که هر کدام یک مقایسه درونشان انجام می‌شود. علاوه‌بر آن، مشابه قبل، به جز پنجره‌ی اولی برای بقیه‌ی پنجره‌ها به‌ازای هر کدام، دو مقایسه با مقادیر temp نیاز است و در نهایت، در بدترین حالت، دو مقایسه‌ی دیگر نیز برای عضو انتهایی آرایه نیاز است پس داریم:

$$T(n) = \frac{n-1}{2} + 2\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) + 2 = \frac{3}{2}(n-1)$$

بنابراین در هر دو حالت، کمتر از $\frac{3n}{2}$ مقایسه در بدترین حالت نیاز است.

**شبیه‌سازی:** برای شبیه‌سازی این الگوریتم، سه دسته نقاط مختلف تولید شدند و با هر کدام از آن‌ها این الگوریتم اجرا شد. این سه دسته عبارتند از:

۱- نقاطی با توزیع یکنواخت درون یک مستطیل

۲- نقاطی با توزیع گوسی برای هر دو بعد (میانگین صفر، انحراف معیار یک)

۳- نقاطی درون یک دایره (که با نگاشت نقاط اول به مختصات قطبی ایجاد شدند)

در زیر خروجی مربوط به این سه دسته را به‌ترتیب مشاهده می‌کنیم: