

پروژه چهارم الگوریتم – شرکت پست

در این مسئله به دنبال تقسیم کردن n بسته بین k کامیون هستیم به طوری که وزن سنگین ترین کامیون کمینه شود.

یک الگوریتم حریصانه برای این مسئله ارائه می‌دهیم بدین صورت که هر بسته را به سبک ترین کامیون اختصاص می‌دهیم. برای این منظور یک صف اولویت دار از کامیون ها درست میکنیم که سبک ترین کامیون در سر صف قرار دارد. حال باید ثابت کنیم این الگوریتم 2-approximate است بدین معنی که در بدترین حالت جواب بدست آمده دو برابر جواب بهینه است.

بهترین حالت زمانی است که بسته ها را پیوسته در نظر بگیریم در این صورت کالا ها را به k قسمت (تعداد کامیون ها) تقسیم میکنیم. پس جواب بهینه برای این مسئله (W^*)، بزرگتر مساوی این مقدار است :

$$W^* \geq \frac{1}{k} \sum_j w_j$$

همچنین جواب بهینه نیز از سنگین ترین کالا ($\max w$) نیز بزرگتر یا مساوی است :

$$W^* \geq \max w$$

زمانی که بسته z را به کامیون i اختصاص می‌دهیم ینی این کامیون سبکترین کامیون بوده است و قبل از اختصاص ، وزن این کامیون $W_i - w_j$ بوده پس وزن بقیه کامیون ها کوچکتر مساوی این مقدار است، پس داریم :

$$k(W_i - w_j) \leq \sum_j w_j$$

یا به عبارتی :

$$W_i - w_j \leq \frac{1}{k} \sum_j w_j$$

پس طبق عبارتی که در ابتدای مسئله بدست آوردیم :

$$W_i - w_j \leq W^*$$

$$W_i \leq W^* + w_j$$

همچنین میدانیم

$$W^* \geq \max w$$

پس:

$$W_i \leq 2W^*$$

اگر برای صف اولویت از یک BST استفاده کنیم که هزینه درج و حذف در آن $\log n$ باشد پیچیدگی زمانی این الگوریتم برابر $O(n \log k)$ میشود.