



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

به نام خداوند جان و خرد

نام و نام خانوادگی: محمد حسین کریمی

شماره دانشجویی: 9731833

شرکت پست

تابستان 1400

توضیح کلی

این مسئله `np complete` است و در زمان چند جمله‌ای قادر به حل آن نیستیم. یک راه کلی برای حل این مسائل آن است که ضریبی از راه حل بهینه را به ما می‌دهد که در بدترین حالت دو برابر آن است.

توضیح برنامه

در ابتدا قطعات را مرتب می‌کنیم سپس از سنگین ترین قطعه شروع به پیاده سازی الگوریتم زیر می‌کنیم:

همه‌ی کامیون‌ها را با وزن خالی در یک صف اولویت قرار می‌دهیم. از بین کامیون‌های موجود کامیونی را که بیشترین فضای خالی را دارد را انتخاب می‌کنیم و هر بار بزرگ‌ترین قطعه را در نظر می‌گیریم.(اگر دو کامیون بارشون برابر بود یکی را بصورت رندوم انتخاب می‌کنیم) و قطعه فعلی را داخل این کامیون قرار می‌دهیم و به سراغ قطعه‌ی بعدی در لیست مرتب شده می‌رویم(بزرگ‌ترین قطعه‌ی موجود بعدی) این الگوریتم را تا تمام شدن قطعات ادامه می‌دهیم. حال به یک توزیع از قطعات بین کامیون‌ها رسیده‌ایم.

اثبات نرخ تقریب

می‌خواهیم ثابت کنیم الگوریتم گفته شده نرخ تقریب 2 را دارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

برهان خلف:

فرض می‌کنیم حالتی وجود دارد که در آن الگوریتم گفته شده جوابی با تخمین بدتر (بیشتر از 2 برابر جواب اصلی) ارائه می‌دهد. طبق LM گفته شده آخرین قطعه‌ای که در کامیون a قرار می‌دهیم دارای حاکثر وزن $\Theta + \frac{1}{2}$ است پس داخل کامیون حداقل $\frac{1}{2} \Theta + x$ بار وجود دارد و چون طبق الگوریتم کامیونی را انتخاب می‌کردیم که مجموعه بار آن در بین کامیون‌ها کمترین باشد پس در تمامی کامیون‌ها حداقل $\frac{1}{2} \Theta + x$ بار وجود دارد. پس یعنی مجموع بارها حداقل برابر است با:

$$K(x + \Theta/2) = k * x + k * \Theta/2$$

اما در روش بهینه که وزن سنگین ترین کامیون در آن x بود مجموع وزن قطعات حداثر برابر است با kx که این تنافض است پس روشی که نرخ تقریب 2 را نقض کند یا به عبارتی نشان دهد که الگوریتم گفته شده تقریبی بزرگ‌تر از 2 را می‌دهد وجود ندارد.

کامیونی را که بیشترین وزن را در الگوریتم گفته شده دارد را در نظر می گیریم. به این کامیون θ می گوییم که دارای وزن W است. حال طبق برهان خلف روشهای اختصاص دادن قطعات به کامیون ها وجود دارد که نرخ تقریب 2 را نقض می کند پس اگر سنگین ترین کامیون در این روش دارای وزن X باشد برای W داریم:

$$W = 2X + \Theta$$

حال آخرین قطعه ای را که ما در الگوریتم گفته شده در قراردادیم را در نظر می گیریم.

لم 1: ثابت می کنیم وزن قطعه گفته شده کمتر از $2/\theta + X$ است. چون قطعات را به ترتیب مرتب کردیم و از بزرگ ترین قطعه شروع کردیم اگر این اتفاق بیافتد وزن این قطعه از مجموع قطعاتی که در کامیون قرار دارند بیشتر می شود که یعنی از تک تک آن ها بیشتر است ولی آن ها در لیست قبل از این قطعه بودند که یعنی وزن شان باید بیشتر باشد و این تناقض است.

پیچیدگی زمانی

مرتب کردن قطعات: $n \log n$

در هر مرحله برای پیدا کردن کامیونی که کمترین وزن را تا اینجا دارد از صف اولویت استفاده می کنیم که از استفاده کردیم که اعضاش رو مرتب شده نگه می دارد و $O(n \log n)$ است ولی set نکته اینجا است که عضو تکراری نگه نمی دارد برای همین اعضا یکی که در آن ریختیم بصورت شماره کامیون - وزن کامیون هستند.

تعداد دفعات کارهای بالا به اندازه تعداد قطعات است.

$$O(n \log n) + O(3n \log n) = O(n \log n)$$

اجرای برنامه

```
Enter number of trucks : 3
Enter number of elements : 6
Enter every element weight in one line :
1
3
5
7
9
11
Answer is : 12.0
{(12.0, 1), (12.0, 2), (12.0, 0)}

Process finished with exit code 0
```

```
Enter number of trucks : 3
Enter number of elements : 5
Enter every element weight in one line :
45
23
85
47
95
Answer is : 108.0
{(92.0, 2), (108.0, 1), (95.0, 0)}

Process finished with exit code 0
```