گزارش پروژه‌ی چهارم درس طراحی الگوریتم‌ها (کامیون‌ها و بارها)

امیرعلی صادقی فرشی (۹۹۱۲۸۳۴)

توضیح الگوریتم: ابتدا متغیرهای مسئله را تعریف می‌کنیم. w_i برابر وزن بار i-ام است که $i \in \{1,2,\dots,n\}$ است و n تعداد بارهاست. T_j^t برابر مجموعه‌ی وزنه‌هایی است که در لحظه‌ی t درون کامیون j-ام قرار گرفته است. در لحظه‌ی اول برای تمام jها $T_j^0 = \{\}$ و همچنین $j \in \{1,2,\dots,k\}$ که k تعداد کامیون‌هاست.

در ابتدا بارها را به‌ترتیب نزولی مرتب می‌کنیم. بدون لطمه به کلیت مسئله فرض می‌کنیم که اندیس بارها پس از مرتب شدن به صورت زیر باشند:

$$w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$$

از w_1 شروع می‌کنیم و آن را در کامیونی قرار می‌دهیم که کمترین وزن را در لحظه‌ی کنونی داشته باشد و همین‌طور تا انتها ادامه می‌دهیم. پس در لحظه‌ی t کامیونی که انتخاب می‌شود برابر است با $c = argmin_j \sum_j T_j$. بدین‌صورت تا انتها ادامه می‌دهیم تا همه‌ی بارها تمام شوند.

اثبات 2-approximation بودن الگوریتم: ابتدا اثبات می‌کنیم که در لحظه‌ی t اختلاف سنگین‌ترین و سبک‌ترین کامیون از w_1 کوچک‌تر مساوی است. بدین‌منظور از استقرا کمک می‌گیریم. پایه‌ی استقرا را $t = 1$ در نظر می‌گیرم. سنگین‌ترین کامیون در لحظه‌ی یک، کامیونی است که w_1 در آن قرار گرفته و چون بقیه‌ی کامیون‌ها در آن لحظه خالی هستند، سبک‌ترین کامیون وزنی برابر صفر خواهد داشت که اختلاف این دو برابر w_1 است و داریم $w_1 \leq w_1$. لذا پایه‌ی استقرا صحیح است.

حال اگر فرض کنیم در یک لحظه $t > 1$ حکم برقرار باشه، درستی حکم را برای لحظه‌ی $t + 1$ اثبات می‌کنیم. با توجه به درستی حکم در لحظه‌ی t داریم:

$$max_j \sum_j T_j^t - min_j \sum_j T_j^t \leq w_1$$

با اضافه کردن وزنه‌ی w_{t+1} به کامیون مورد انتخاب بعدی یا:

۱. ماکسیمم کنونی حفظ می‌شود که در این صورت حکم همچنان برقرار است چون مینیمم لحظه‌ی $t + 1$ از لحظه‌ی t نیز بزرگ‌تر است و بنابراین اختلاف آن با ماکسیمم کمتر نیز خواهد بود.

۲. ماکسیمم تغییر می‌کند. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که اختلاف ماکسیمم و مینیمم در مرحله‌ی قبل از w_{t+1} کمتر باشد. در این صورت با افزوده شدن w_{t+1} اختلاف جدید کمتر از مقدار w_{t+1} خواهد بود که داریم $w_{t+1} \leq w_1$. در نتیجه داریم:

$$max_j \sum_j T_j^{t+1} - min_j \sum_j T_j^{t+1} \leq w_1$$

لذا شرط استقرا نیز برقرار است و این حکم اثبات می‌شود. این حکم در مرحله‌ی آخر یعنی مرحله‌ی n-ام نیز برقرار است. پس از قرار دادن بار w_n، ماکسیمم وزن میان کامیون‌ها، همان جواب روش حریصانه است که آن را G می‌نامیم. همچنین کمترین وزن در این مرحله را نیز Min می‌دانیم. با توجه به حکم اثبات شده داریم:

$$G - Min \leq w_1$$

همچنین می‌دانیم:

$$Opt \geq \frac{\sum_i w_i}{k}$$

که در آن Opt مقدار بهینه‌ی وزن سنگین‌ترین کامیون است. دلیل درستی این نامساوی این است که در بهترین حالت بارها را می‌توان به طور مساوی بین k کامیون تقسیم کرد. در صورت اعمال هر تغییری در وزن کامیون‌ها از این حالت، مقدار ماکسیمم بیشتر می‌شود. پس کران پایین جواب بهینه برابر مقدار بالاست. همچنین می‌دانیم:

$$\frac{\sum_i w_i}{k} \geq Min$$

دلیل درستی این عبارت نیز این است که جمع وزن همه‌ی بارها از k برابر وزن سبک‌ترین کامیون باید بیشتر باشد (چون بقیه‌ی کامیون‌ها وزنشان از Min بیشتر است و جمع وزن بار همه‌ی کامیون‌ها نیز برابر وزن همه‌ی بارهاست). از دو رابطه‌ی آخر داریم:

$$Opt \geq Min$$

همچنین می‌دانیم $Opt \geq w_1$ چون w_1 باید حتماً در یکی از کامیون‌ها باشد و چون این بار از همه‌ی بارها سنگین‌تر است و در لحظه‌ی اول نیز در یکی از کامیون‌ها قرار می‌گیرد و سنگین‌ترین کامیون می‌شود، در تمام مراحل بعدی یا ماکسیمم وزن متعلق به همان کامیون خواهد بود، یا این ماکسیمم عوض می‌شود که در این صورت نیز از w_1 بزرگ‌تر خواهد بود. حال با کنار هم قرار دادن $G - Min \leq w_1$ و دو رابطه‌ی آخر داریم:

$$G \leq w_1 + Min \leq 2Opt$$

و بنابراین اثبات می‌شود که $G \leq 2Opt$.

شبیه‌سازی: برای مقادیر وزن ۵، ۸، ۱، ۲ و ۱۰ برنامه تست شد که نتیجه را در زیر می‌بینیم:

```
Max Weight with greedy algorithm is 10
Assignments are [[10], [8], [5, 2, 1]]

Process finished with exit code 0
```