EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Úvod do zpracování obrazů

Mechatronika

Prezentace přednášky č. 8

Matematická morfologie

doc. Ing. Josef Chaloupka, Ph.D.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
www.tul.cz

MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- Algebra nelineárních operací, segmentace s důrazem na tvar hledaných objektů >>> kvantitativní popis nalezených objektů

- Pro aplikace, kde je požadován krátký čas zpracování >>> biologie, materiálový výzkum, geologie, kriminalistika, obrazová inspekce v průmyslu, rozpoznávání znaků, dokumentů …

- Pro 2D i 1D signály

- Základ >>> bodové množiny >>> výsledky z integrální geometrie a topologie, reálné obrázky lze modelovat pomocí bodových množin libovolné dimenze N, 2D euklidovský prostor ε2 >>> pro popis rovinných útvarů

- Množinové pojmy >>> **podmnožina** (⊂), **průnik** (∩), **sjednocení** (U), **prázdná množina** 0, **množinový doplněk** (^{c}), **množinový rozdíl**:

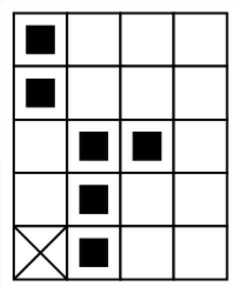
$$X \mid Y = X \cap Y^c$$

- V PV >>> digitální protějšek euklidovského prostoru, binární matematická morfologie >>> množina dvojic celých čísel ($\in Z^2$), šedotónová matematická morfologie >>> množina trojic celých čísel ($\in Z^3$)

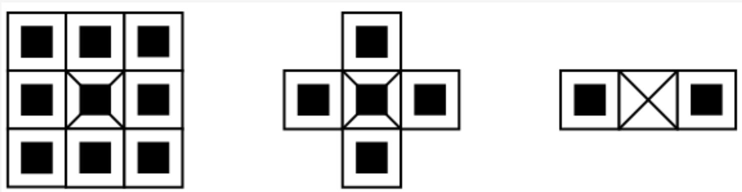
MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Binárními obrazy** >>> množina dvojic celých čísel ($\in Z^2$) - 2D bodová množina, diskrétním rastr >>> diskrétní mřížka obohacena o relaci sousedství >>> pro čtvercové i hexagonální mřížky, body objektů >>> množina X (pixel s hodnotou jedna), body doplňku X^c >>> pozadí (pixel s hodnotou nula), bod x diskrétního obrazu (radiusvektor vzhledem k počátku (0,0))

X = {(1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (0, 3), (0,4)}



- Morfologická transformace Ψ >>> relace mezi obrazem X s bodovou množinou (strukturní element - vztažen k "lokálnímu" počátku O - reprezentativní bod)



- Morfologické transformace Ψ(X) >>> systematické posouvání strukturního elementu B po obraze, výsledek relace (0 nebo 1) se zapíše do výstupního obrazu v reprezentativním pixelu

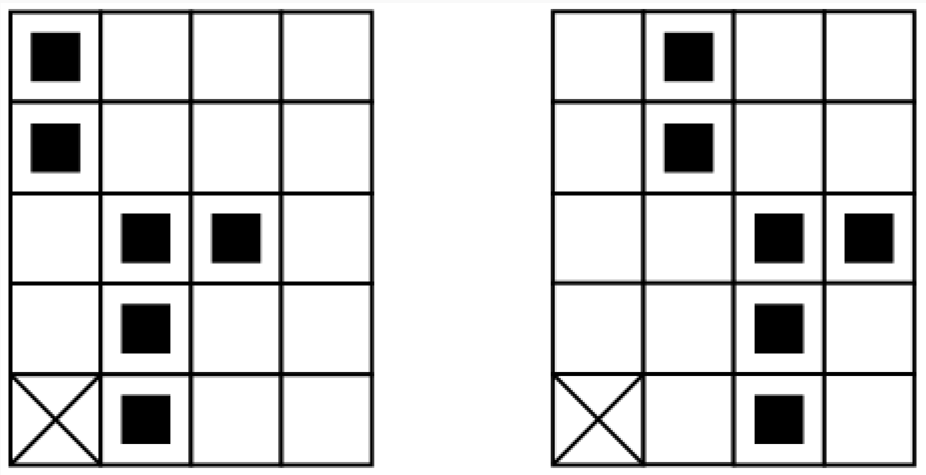
MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- Každé morfologické transformace $\Psi(X)$ má duální transformaci $\Psi^*(X)$

$$\Psi(X) = (\Psi^*(X^C))^C$$

- X_h >>> translace bodové množiny X o radiusvektor h

$$X_h = \{p \in \varepsilon^2,\ p = x + h \text{ pro některá } x \subseteq X\}$$

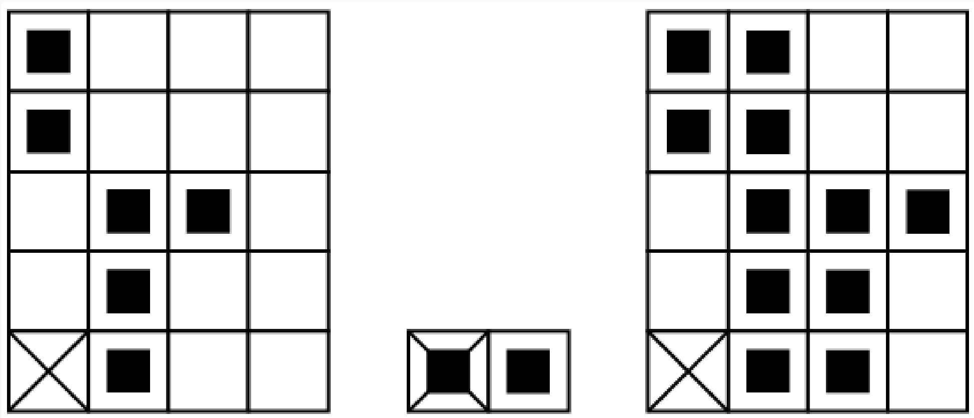


translace o vektor {(1,0)}

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Dilatace** $\oplus$ >>> skládá body dvou množin pomocí vektorového součtu, $X \oplus B$ je bodovou množinou všech možných vektorových součtů pro dvojice pixelů, pro jeden z X a jeden z B

$$X \oplus B = \{p \in \varepsilon^2 : p = x + b, x \subseteq X, b \subseteq B\}$$



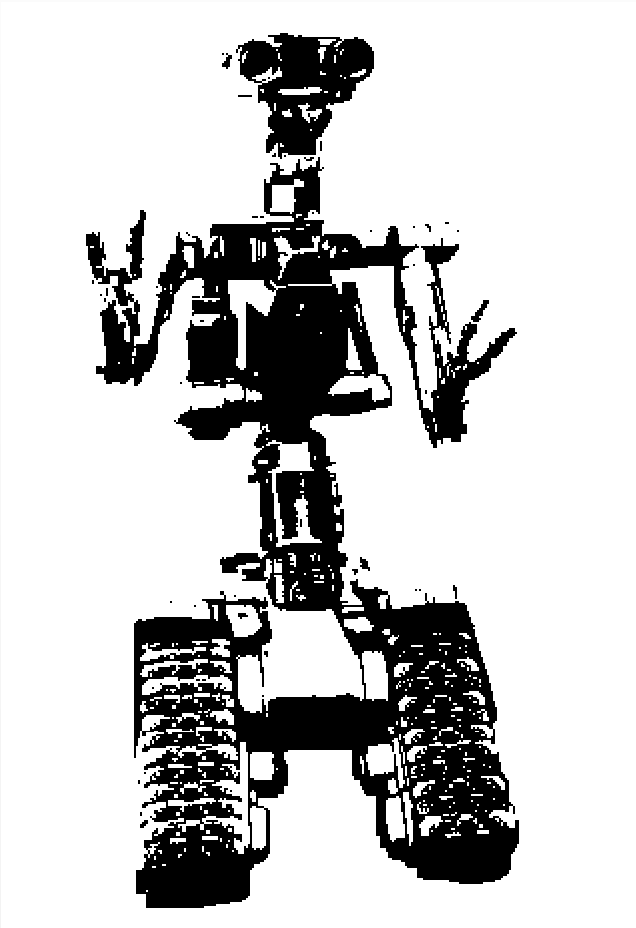
$$X = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2, 2), (0,3), (0,4)\}$$

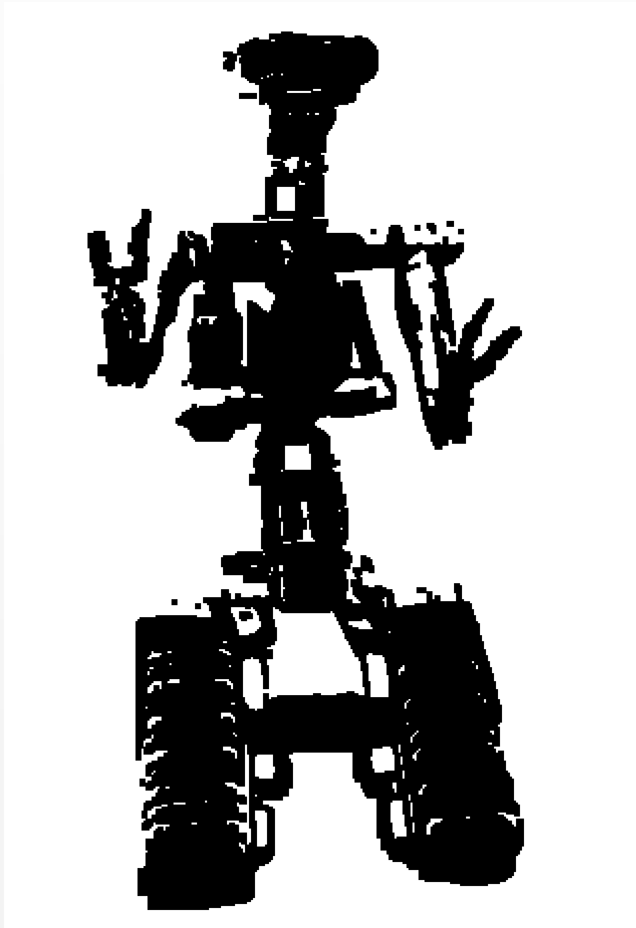
$$B = \{(0,0), (1,0)\}$$

$$X \oplus B = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2, 2), (0,3), (0,4), (2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (1,3), (1,4)\}$$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Dilatace** + isotropický (transformace se chová stejně ve všech směrech) strukturní element 3x3 (objekty expandují) >>> objekty se rozrostly o jednu "slupku" na úkor pozadí, díry s tloušťku jeden bod se zaplnily





BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Dilatace**

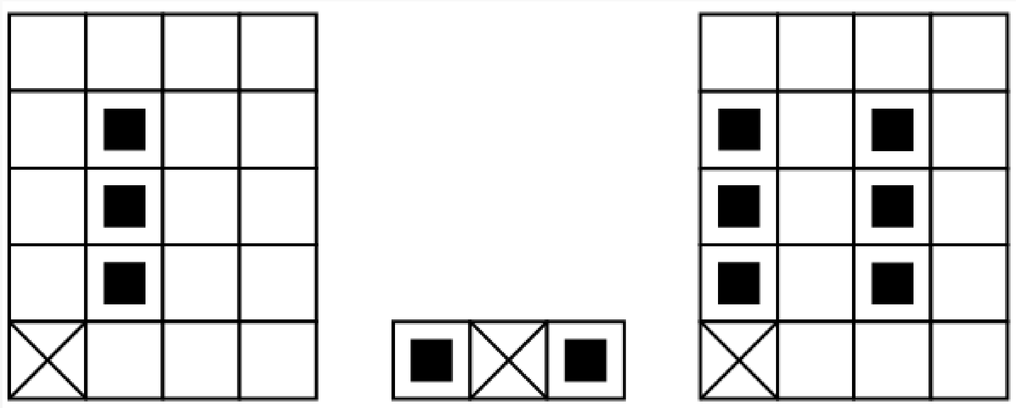
  >>> komutativní operace $X \oplus B = B \oplus X$

  >>> asociativní operace $X \oplus (B \oplus D) = (X \oplus B) \oplus D$

  >>> invariantní vůči posunu $X_h \oplus B = (X \oplus B)_h$

  >>> rostoucí transformace je-li $X \subseteq Y$, potom $X \oplus B \subseteq Y \oplus B$

  >>> sjednocení posunutých bodových množin $X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$



reprezentativní bod není prvkem strukturního elementu – porušení souvislosti

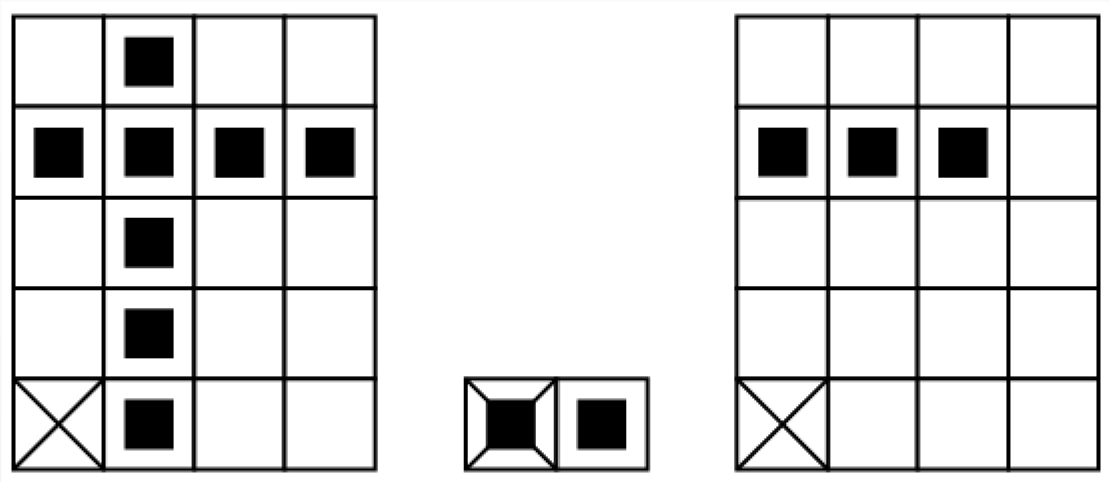
- Použití >>> samostatně k zaplnění malých děr, úzkých zálivů a pro další složitější operace, zvětšuje objekty, pro zachování původních rozměrů >>> kombinace s erozí

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Eroze** $\ominus$ >>> duální operace k dilataci, dilatace ani eroze nejsou invertovatelné, skládá dvě množiny:

$$X \ominus B = \{ p \in \varepsilon^2 : p + b \subseteq X \text{ pro každé } b \subseteq B \}$$

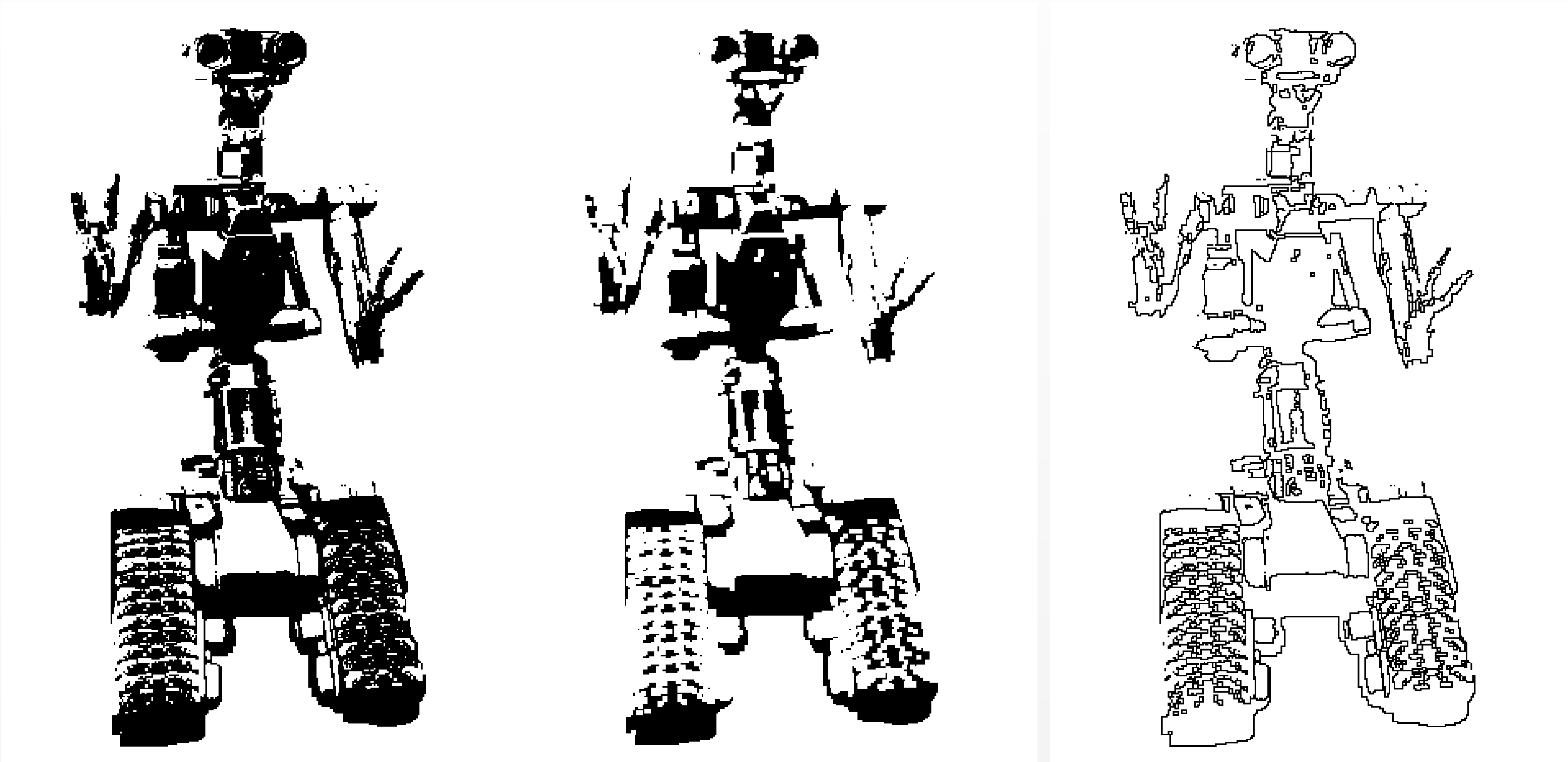
- Pro každý bod obrazu p se ověřuje, zda výsledek p + b leží v X



$$X = \{(1,0),(1,1),(1,2),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(1,4)\}$$
$$B = \{(0,0), (1,0)\}$$
$$X \ominus B = \{(0,3), (1,3), (2,3)\}$$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Eroze** >>> použití >>> zjednodušení struktury objektů, složitější objekt se rozdělí na několik jednodušších



eroze – isotropický strukturní element 3x3 - isotropické smrštění objektů, zmizely čáry a body tloušťky 1, obrys objektů >>> odečtení erodovaného obrázku od původního obrázku

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- Ekvivalentní vyjádření eroze, B_p >>> množinu B posunutá o vektor p

$$X \ominus B = \{\, p \in \varepsilon^2 : Bp \subseteq X \,\}$$

systematické posouvání strukturního elementu B po obrazu X, pokud je B posunutý o vektor p obsažen v obrazu X, potom bod odpovídající reprezentativnímu bodu B patří do eroze X   B

- Eroze

>>> není komutativní operace $X \ominus B \neq B \ominus X$

>>> antiextenzivní transformací, když (0, 0) Î B $X \ominus B$ Í$\subseteq X$

>>> invariantní vůči posunu $X_h \ominus B = (X \ominus B)_h$

$X \ominus B_h = (X \ominus B)_{-h}$

>>> rostoucí transformace   je-li $X \subseteq Y$, potom $X \ominus B \subseteq Y \ominus B$

>>> průnik posunů obrazu X o vektory -b ∈ B $X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- B, D >>> strukturními elementy, $D \subseteq B$ >>> eroze pomocí B je "agresivnější " než pomocí D:

$$X \ominus B \subseteq X \ominus D$$

uspořádání eroze dle příslušných strukturních elementů podobného tvaru, ale různého rozměru

Symetrická množina (transponovaná množina vůči reprezentativnímu bodu) $\breve{B}$:

$\breve{B}$ = { -b : b Î B}   B = {(1,2), (2,3)} $\breve{B}$ = {(-l,-2)(-2,-3)}

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Eroze versus dilatace**

- **Duální transformace**:

  $(X \ominus Y)^C = X^C \oplus \breve{Y}$

- **Eroze a průnik:**

  $(X \cap Y) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Y \ominus B)$

  $B \ominus (X \cap Y) \supseteq (B \ominus X) \cup (B \ominus Y)$

- **Dilatace a průnik**:

  $(X \cap Y) \oplus B = B \oplus (X \cap Y) \subseteq (X \oplus B) \cap (Y \oplus B)$

  $B \oplus (X \cup Y) = (X \cup Y) \oplus B = (X \oplus B) \cup (Y \oplus B)$

  $(X \cup Y) \ominus B \supseteq (X \ominus B) \cup (Y \ominus B)$

  $B \ominus (X \cup Y) = (X \ominus X) \cup (B \ominus Y)$

lze zaměnit pořadí eroze a množinového sjednocení >>> rozložení složitějších strukturních elementů na sjednocení jednodušších

- **Postupná dilatace (eroze)** obrazu X strukturním elementem B a pak strukturním elementem D

  $(X \oplus B) \oplus D = X \oplus (B \oplus D)$ $\qquad$ $(X \ominus B) \ominus D = X \ominus (B \ominus D)$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Otevření** >>> eroze následovaná dilatací

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$$

- Dilatace a eroze nejsou navzájem inverzní zobrazení

- Obraz X otevřený vzhledem k B >>> obraz X se nezmění po otevření struktur. elementem B

- Otevření oddělí objekty spojené úzkou šíjí a tak zjednoduší strukturu objektů, je antiextenzivní:

$$X \circ B \subseteq X$$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Uzavření** >>> dilatace následovaná erozí

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

- Obraz X uzavřený vzhledem k B >>> obraz X se nezmění po uzavření struktur. elementem B

- Uzavření spojí objekty, které jsou blízko u sebe, zaplní malé díry a vyhladí obrys tím, že zaplní úzké zálivy, "malý", "blízký" a "úzký" >>> relativní vzhledem k velikosti strukturního elementu, uzavření je extenzivní

$$X \subseteq X \bullet B$$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Otevření versus uzavření**

- Otevření a uzavření izotropickým strukturním elementem se používá pro odstranění detailů v obraze, které jsou menší než strukturní element, celkový tvar objektu se neporuší

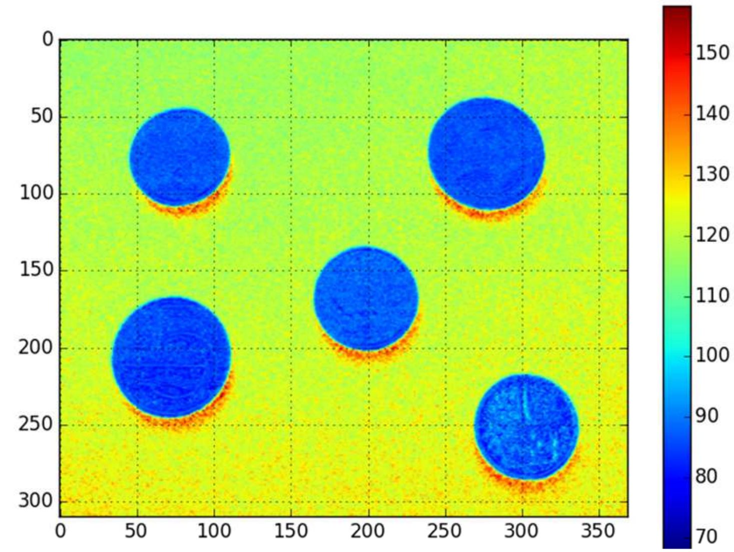
- Otevření a uzavření je invariantní vzhledem k posunu strukturního elementu (na rozdíl od eroze a dilatace), jsou to rostoucí a duální transformace:

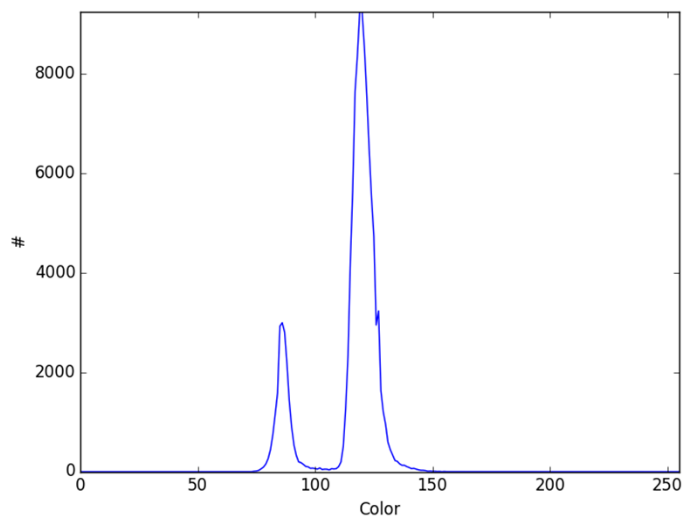
$$(X \bullet B)^C = X^C \circ \breve{B}$$

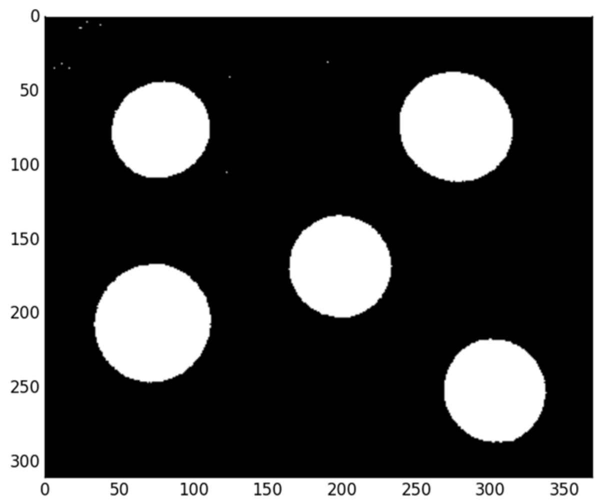
- Otevření a uzavření jsou idempotentní >>> opakované použití těchto operací nemění předchozí výsledek

$$X \circ B = (X \circ B) \circ B \qquad X \bullet B = (X \bullet B) \bullet B$$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

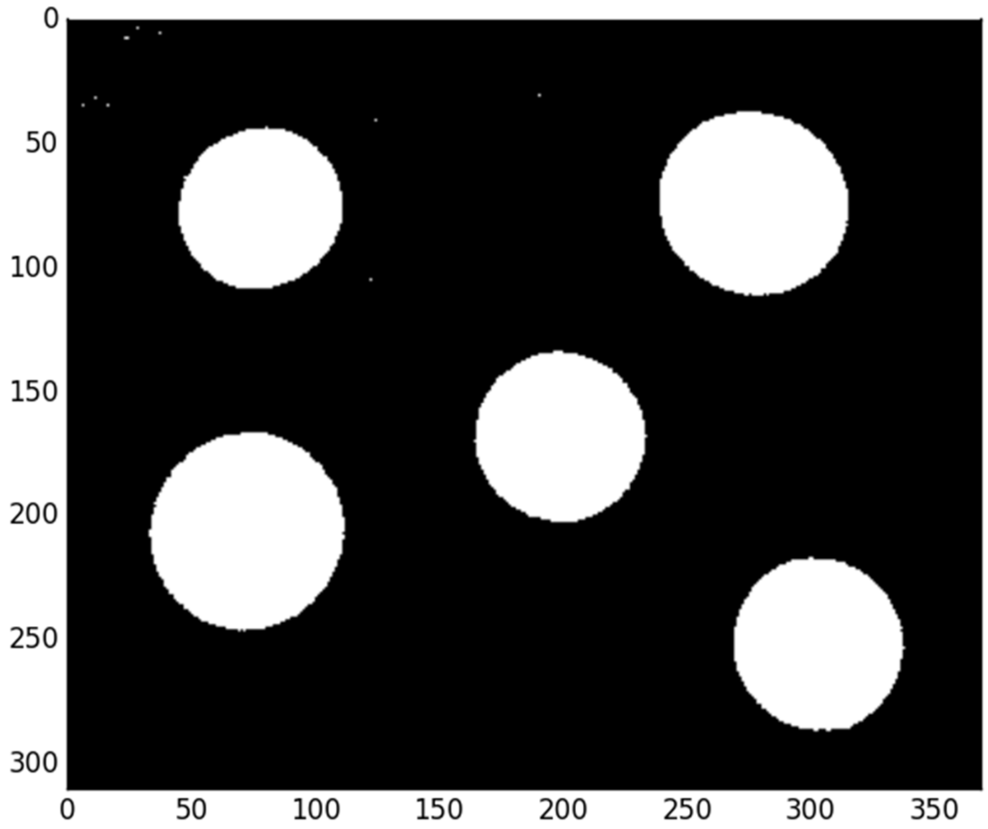






práh = 110

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE



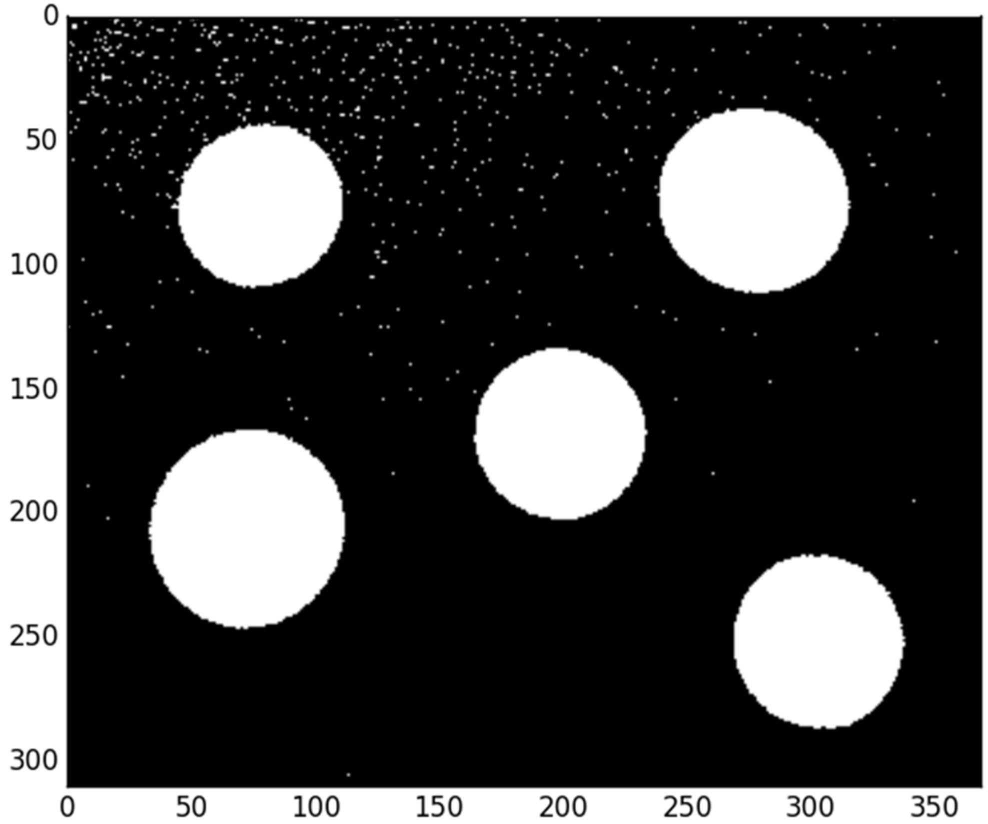
práh = 110

14 objektů, 9 objektů o velikosti 1-2 pixely (binární šum)

koruna č. 1: 3343 pixelů
koruna č. 2: 3671 pixelů
koruna č. 3: 3717 pixelů

pětikoruna č. 1: 4433 pixelů
pětikoruna č. 2: 4849 pixelů

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE



práh = 113

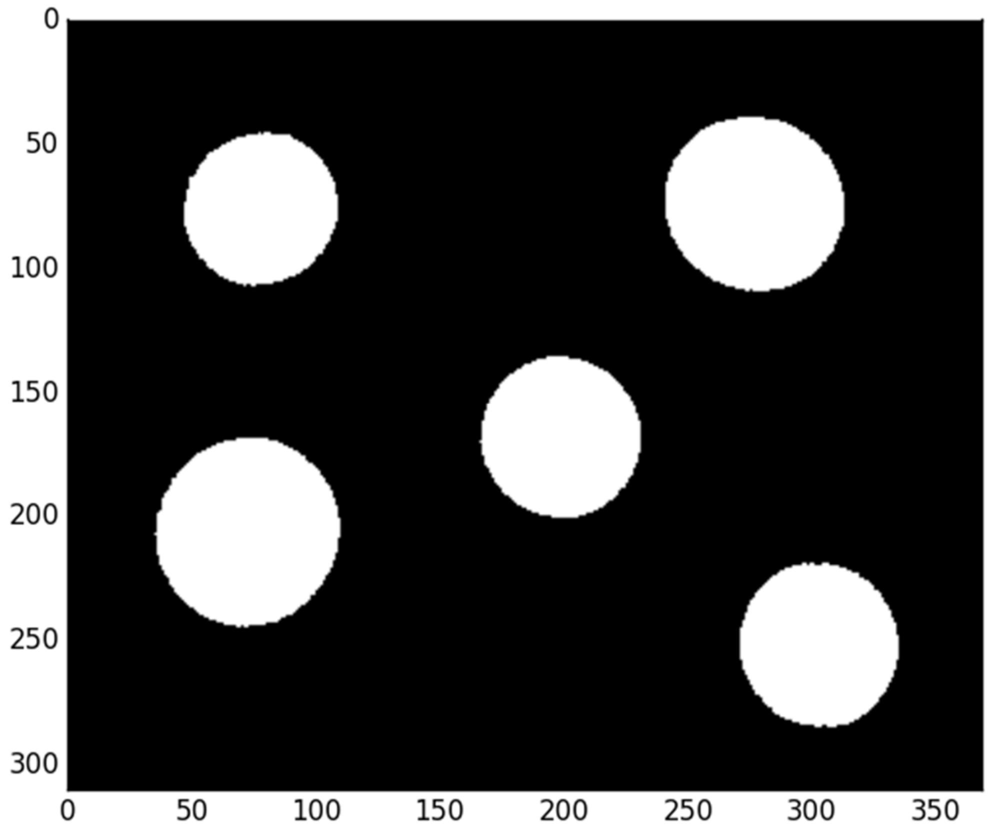
486 objektů, 481 objektů o velikosti 1-2 pixely (binární šum)

koruna č. 1: 3396 pixelů
koruna č. 2: 3706 pixelů
koruna č. 3: 3756 pixelů

pětikoruna č. 1: 4472 pixelů
pětikoruna č. 2: 4893 pixelů

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE - EROZE

[[0, 0, 0, 1, 0, 0],
[0, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[0, 1, 1, 1, 1, 1]]
strukturní element
kruh 6x6



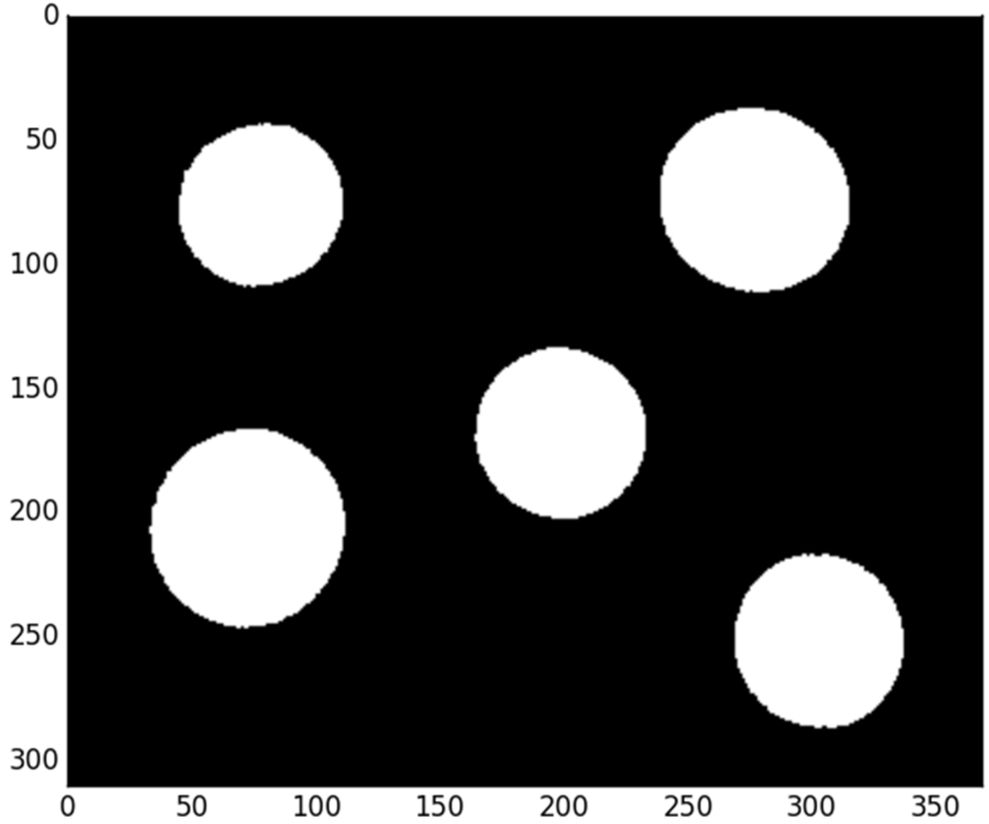
práh = **113**

5 objektů
koruna č. 1: 2969 pixelů
koruna č. 2: 3271 pixelů
koruna č. 3: 3312 pixelů

pětikoruna č. 1: **3991** pixelů
pětikoruna č. 2: 4384 pixelů

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE - OTEVŘENÍ

[[0, 0, 0, 1, 0, 0],
 [0, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [0, 1, 1, 1, 1, 1]]
strukturní element
kruh 6x6

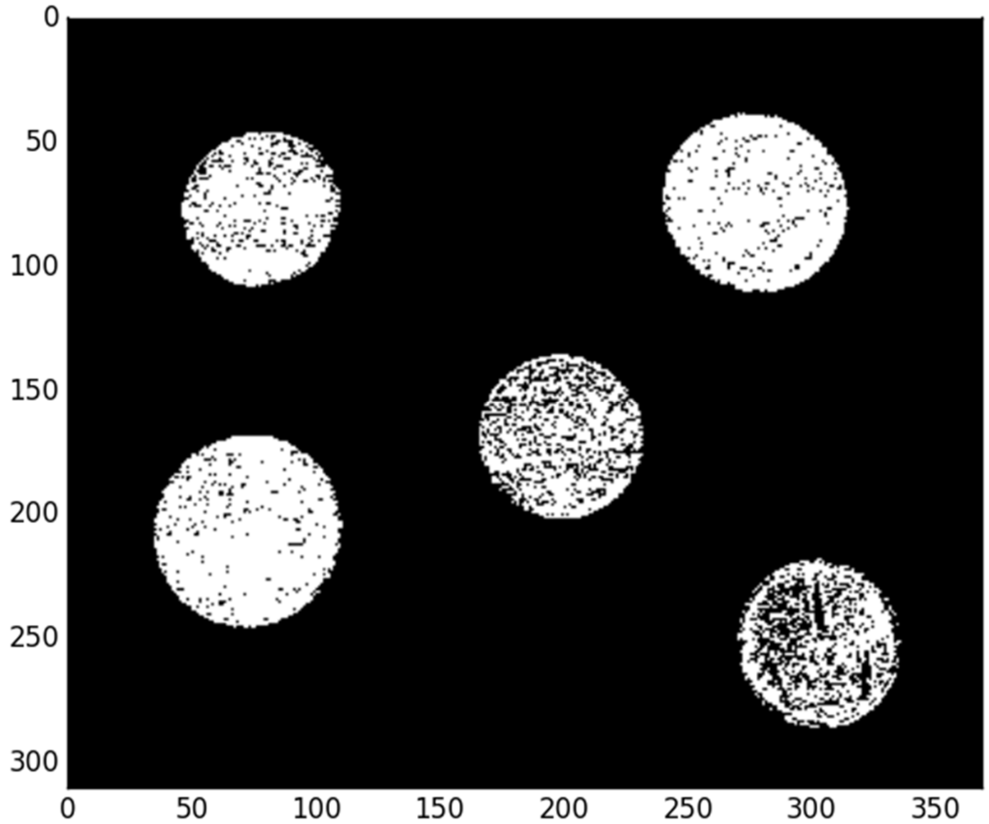


práh = **113**

5 objektů
koruna č. 1: 3380 pixelů
koruna č. 2: 3702 pixelů
koruna č. 3: 3748 pixelů

pětikoruna č. 1: 4464 pixelů
pětikoruna č. 2: 4884 pixelů

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE



práh = **89**

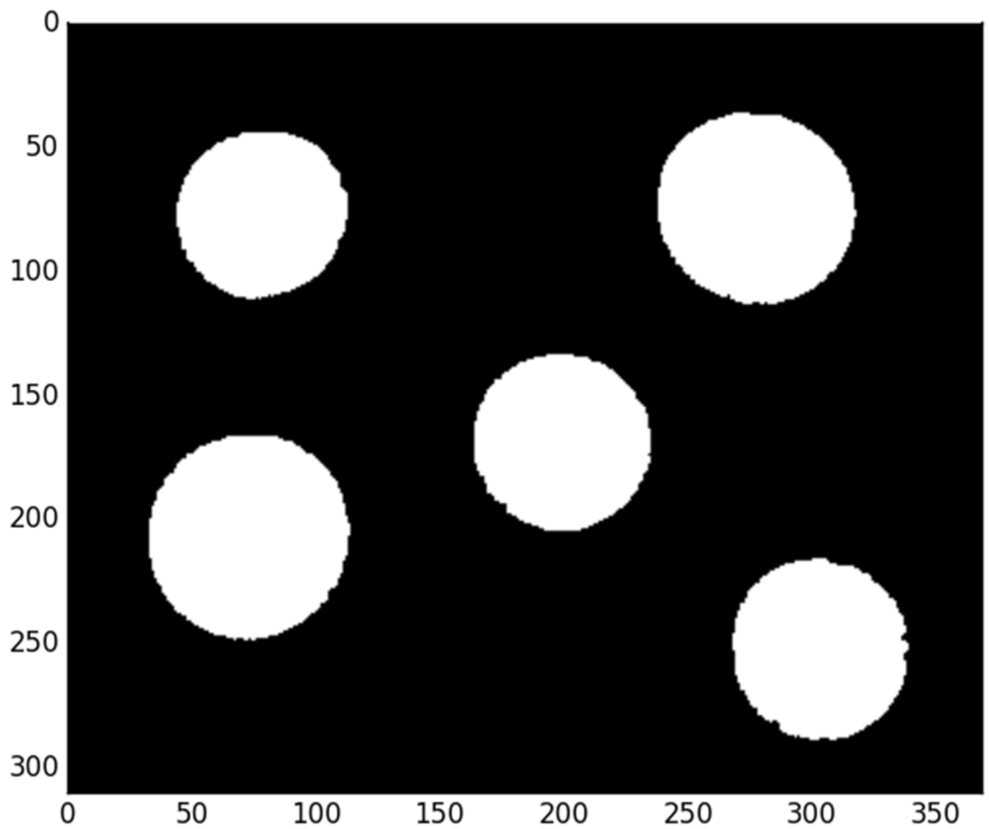
27 objektů, 22 objektů o velikosti 1-20 pixelů

koruna č. 1: 2650 pixelů
koruna č. 2: 2453 pixelů
koruna č. 3: 2054 pixelů

pětikoruna č. 1: **3905** pixelů
pětikoruna č. 2: 4278 pixelů

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE - DILATACE

[[0, 0, 0, 1, 0, 0],
[0, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[0, 1, 1, 1, 1, 1]]
strukturní element
kruh 6x6



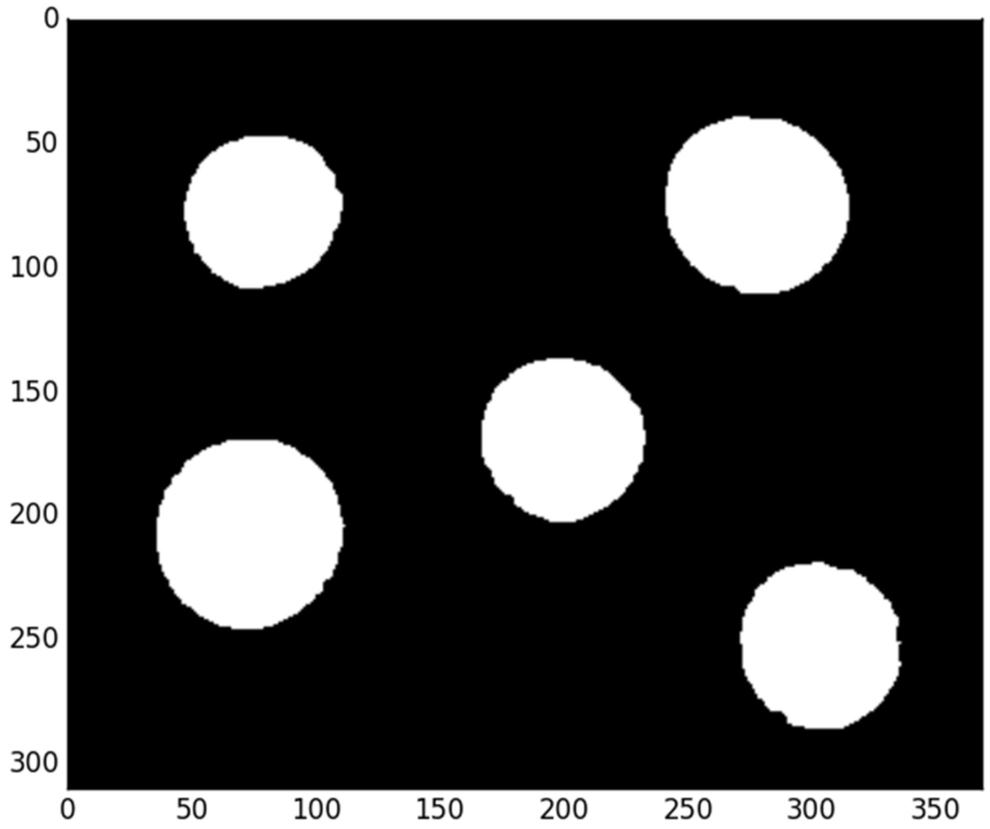
práh = **89**

5 objektů
koruna č. 1: 3619 pixelů
koruna č. 2: 3990 pixelů
koruna č. 3: **4031** pixelů

pětikoruna č. 1: 4820 pixelů
pětikoruna č. 2: 5228 pixelů

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE - UZAVŘENÍ

[[0, 0, 0, 1, 0, 0],
[0, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1],
[0, 1, 1, 1, 1, 1]]
strukturní element
kruh 6x6



práh = **89**

5 objektů
koruna č. 1: 3040 pixelů
koruna č. 2: 3382 pixelů
koruna č. 3: 3404 pixelů

pětikoruna č. 1: 4146 pixelů
pětikoruna č. 2: 4531 pixelů

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Transformace tref či miň (hit or miss)**

- Morfologický operátor $\otimes$, který indikuje shodu strukturního elementu a části obrazu, strukturní element >>> vzor, který se vyhledává, pro vyhledávání rohů, hranic objektů a pro ztenčování

- Testování, zda nějaké body do X nepatří >>> složený strukturní element >>> dvojice disjunktních množin $B = (B_1, B_2)$

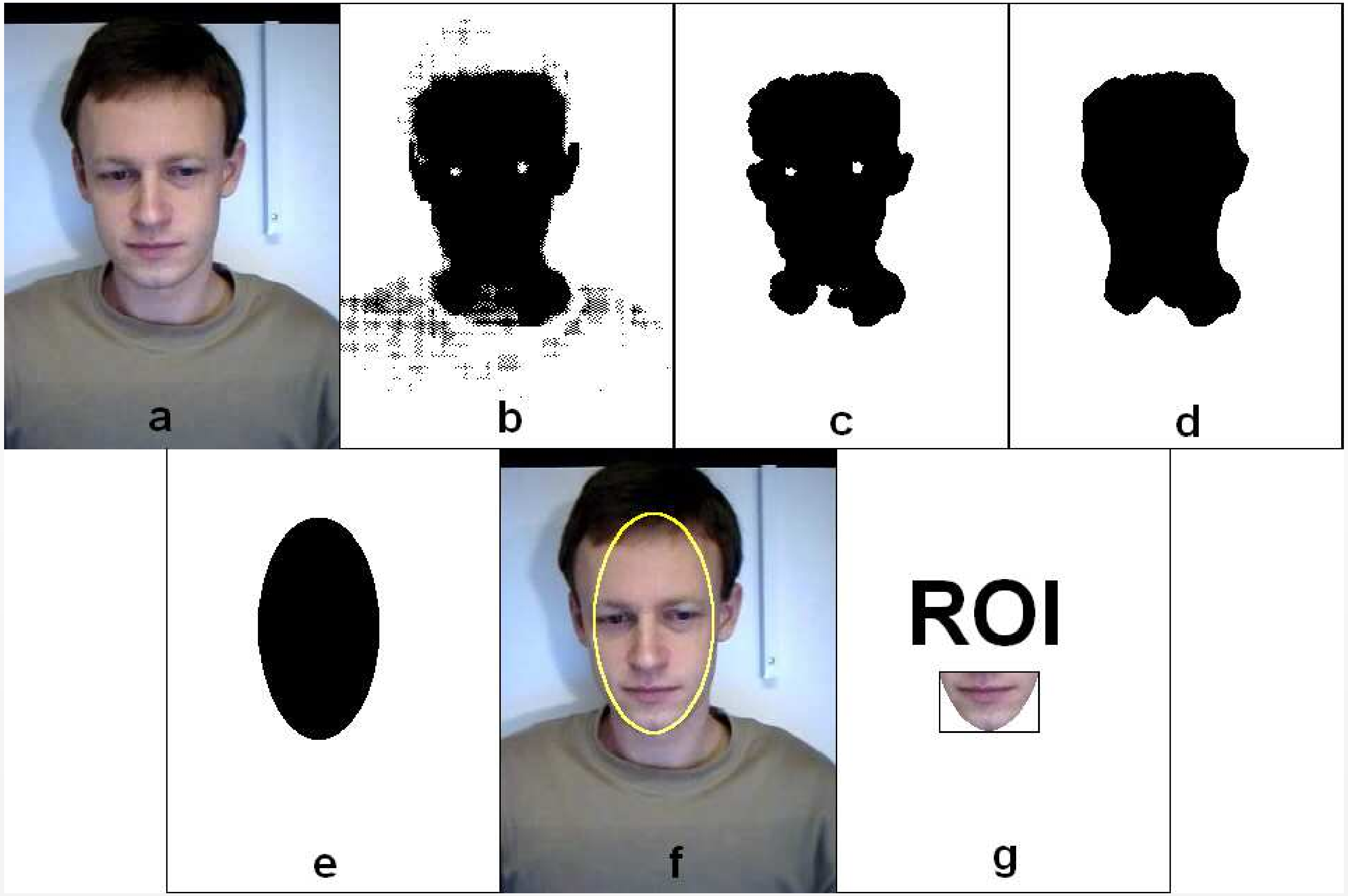
$$X \otimes B = \{x : B_1 \subset X \text{ a } B_2 \subset X^c\}$$

- Část B_1 složeného strukturního elementu s reprezentativním bodem v poloze x musí být obsažena v X a nesmí být část B_2 složeného strukturního elementu obsažena v X^c, ověřování lokální shody mezi částí obrazu X a strukturním elementem (B_1, B_2)

$$X \otimes B = (X \ominus B_1) \cap (X^c \ominus B_2) = (X \ominus B_1) \setminus (X \oplus \breve{B}_2)$$

BINÁRNÍ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

- **Použití otevření a uzavření pro detekování tváře**



b) Cr-segmentace c) otevření (SE - malý kruh) d) uzavření (SE - podlouhlá elipsa)
e) otevření (SE - automaticky vybraná elipsa)