高等代数

《高等代数学》姚慕生
《高等代数学》张贤科

目录

1 行列式 **1**

1.1 二阶行列式 1

1.2 n 阶行列式 1

1.3 行列式的展开和转置 2

1.4 行列式的计算 3

1.5 行列式的等价定义 5

1.6 Laplace 定理 5

2 矩阵 **7**

2.1 矩阵的概念 7

2.2 矩阵的运算 9

2.3 方块的逆阵 10

2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵 11

2.5 矩阵乘积的行列式与初等变换法求逆阵 12

2.6 分块矩阵 13

2.7 Cauchy-Binet 公式 14

3 线性空间 **17**

3.1 数域 17

3.2 行向量和列向量 17

3.3 线性空间 17

3.4 向量的线性关系 18

3.5 向量组的秩 19

3.6 矩阵的秩 20

3.7 坐标向量 22

3.8 基变换与过渡矩阵 24

3.9 子空间 24
3.10 线性方程组的解 26

4 线性映射 **29**
4.1 线性映射的概念 29
4.2 线性映射的运算 30
4.3 线性映射与矩阵 31
4.4 线性映射的像与核 32
4.5 不变子空间 33

5 多项式 **36**
5.1 一元多项式代数 36
5.2 整除 37
5.3 最大公因式 37
5.4 因式分解 38
5.5 多项式函数 39
5.6 复系数多项式 40
5.7 实系数多项式和有理系数多项式 40
5.8 多元多项式 41
5.9 对称多项式 42
5.10 结式和判别式 43

6 特征值 **45**
6.1 特征值和特征向量 45
6.2 对角化 46
6.3 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理 48
6.4 特征值的估计 49

7 相似标准型 **50**

7.1 多项式矩阵 50
7.2 矩阵的法式 51
7.3 不变因子 52
7.4 有理标准型 53
7.5 初等因子 53
7.6 Jordan 标准型 54
7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用 55
7.8 矩阵函数 56

8 二次型 **58**

8.1 二次型的化简与矩阵的合同 58
8.2 二次型的化简 59
8.3 惯性定理 59
8.4 正定型与正定矩阵 60
8.5 Hermite 型 61

9 内积空间 **63**

9.1 内积空间的概念 63
9.2 内积的表示和正交基 64
9.3 伴随 66
9.4 内积空间的同构，正交变换和酉变换 67
9.5 自伴随算子 68
9.6 复正规算子 68
9.7 实正规矩阵 70
9.8 谱 71
9.9 奇异值分解 71
9.10 最小二乘解 73

10 双线性型 **74**

10.1 对偶空间 74

10.2 双线性型 75

1 行列式

1.1 二阶行列式

定义 1 二阶行列式定义为 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

命题 1 对二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, 它的解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

命题 2 二阶行列式的几何意义：若 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{ON} = (b_1, b_2)$, 则面积 $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, 其中行列式的值取绝对值.

1.2 n 阶行列式

定义 1 三阶行列式递归定义为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$

定义 2 n 阶行列式表示为 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 有时也记作 $\det(A)$.

定义 3 设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式. 定义余子式 M_{ij} 为划去 $|A|$ 的第 i 行和第 j 列后剩下的元素按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式; 定义代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

定义 4 行列式的递归定义：$|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$. 这里默认按第一列展开.

定义 5 若 $\forall i > j$, $a_{ij} = 0$, 则称 $|A|$ 为上三角行列式; $\forall j > i$, $a_{ij} = 0$, 则称 $|A|$ 为下三角行列式.

命题 1 上下三角行列式的值等于主对角线元素的乘积.

命题 2 若行列式 $|A|$ 的某一行或某一列的元素全部为 0, 则 $|A| = 0$.

命题 3 行列式 $|A|$ 的某一行或某一列乘常数 c, 所得行列式 $|B| = c|A|$.

命题 4 对换行列式 $|A|$ 的两行或两列, 所得行列式 $|B| = -|A|$.

命题 5 若行列式 $|A|$ 的两行或列成比例, 则 $|A| = 0$.

命题 6 行列式的拆分：$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 列同理.

命题 7 行列式的某一行或列乘常数 c 后加到另一行或列上, 行列式的值不变.

1.3 行列式的展开和转置

定义 1 Kronecker 函数：$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

命题 1 行列式按第 i 行或第 j 列展开：$|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$.

命题 2 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $1 \leq r, s \leq n$, 则：

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir}A_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}A_{sj} = \delta_{rs}|A| = \begin{cases} |A| & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}.$$

定义 2 n 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的转置定义为 $|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

注 $|A|$ 的第 (i, j) 元素为 $|A'|$ 的第 (j, i) 元素, $|A|$ 的第 i 行为 $|A'|$ 的第 i 列.

命题 3 行列式转置后的值不变, 即 $|A| = |A'|$.

定理 1 Cramer 法则：对 n 元线性方程组及其系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_1 \end{cases}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

若 $|A| \neq 0$, 则该方程组有且仅有一组解, 且 $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, 其中 $|A_i|$ 表示用 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换 $|A|$ 的

第 i 列所得到的行列式.

1.4 行列式的计算

命题 1 爪型行列式：$\forall 1 \leq i \leq n, a_i \neq 0$ 时,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n} a_i \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i} \right).$$

命题 2 Vandermonde 行列式：

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

注 降幂的 Vandermonde 行列式：

$$\tilde{V_n} = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

命题 3 一些行列式的计算方法：

(1) 降阶法：利用行列式的性质, 将行列式的某一行或某一列化出尽可能多的 0, 再按这一行或列进行展开, 进行降阶处理; 或利用行列式的性质, 将行列式化为上 (下) 三角行列式, 爪型行列式等重要模板, 然后直接代入公式得到结果.

(2) 求和法：若一个行列式各行或各列的元素和相等, 则可以将这些行 (列) 的所有元素加起来, 提取因子后得到元素 1, 然后对行列式进行降阶处理.

(3) 递推法：按行或列展开行列式, 比较原行列式和降阶后的行列式的异同, 找出递推关系. 如降阶一次仍看不出关系, 可再降一次尝试. 从递推式求通式往往需要一定的技巧. 数学归纳法本质上也是一种递推法, 但须事先知道结论. 因此有时可以先猜出结论, 然后归纳证明它.

(4) 拆分法：当行列式有一行或一列为和或差的形式时多采用拆分法; 行列式中存在一行或列中有一个元素与其他元素规律不同时亦可考虑运用.

(5) 升阶法：如果行列式明确缺少某行 (列) 或元素上有附加的常数时可采取升阶法消掉常数; 另外, 若某行 (列) 有公因子时, 可通过升阶法将公因子放在同一行 (列) 中进行化简.

(6) 求根法：通过某些变换或赋值求得行列式的一些因式, 然后通过讨论次数得到行列式的值.

(7)Laplace 定理法：在分块行列式与某几行或列有较多元素为 0 的行列式求值时应用; 也可以与数学归纳法或递推法综合使用求出行列式的值.

命题 4 拆分公式：记 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 $|A|$ 中第 (i,j) 元素的代数余子式, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11}+t_1 & a_{12}+t_2 & \cdots & a_{1n}+t_n \\ a_{21}+t_1 & a_{22}+t_2 & \cdots & a_{2n}+t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+t_1 & a_{n2}+t_2 & \cdots & a_{nn}+t_n \end{vmatrix} = |A| + \sum_{j=1}^{n} t_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

命题 5 三对角型行列式：对三对角型行列式

$$S_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix},$$

在 $n > 2$ 时的递推公式为：$S_n = a_n S_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}S_{n-2}$.

特别地, $a_1 = \cdots = a_n = a$, $b_1 = \cdots = b_{n-1} = b$, $c_1 = \cdots = c_{n-1} = c$ 时, 记 $a = \alpha + \beta$, $bc = \alpha\beta$,

$$S_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}(\alpha \neq \beta), \quad S_n = (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n, (\alpha = \beta).$$

命题 6 升阶公式：记 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 $|A|$ 中第 (i,j) 元素的代数余子式, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 1 \end{vmatrix} = |A| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i y_j.$$

1.5 行列式的等价定义

定义 1 记由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组为 n 阶排列, n 阶排列共有 $n!$ 个. 其中, 称排列 $(1, 2, \cdots, n)$ 为常序排列, 称其余排列为逆序排列.

定义 2 在一个排列中, 若 $j > i$ 且 j 排在 i 之前, 则称 (j, i) 为一个逆序对. 任一排列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 中逆序对的总数称为该排列的逆序数, 记作 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$.

注 逆序数的求法：若 j_i 后面有 m_i 个数比它小, 则 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$.

定义 3 把一个排列中某两个数的位置互换称为一次对换.

命题 1 对换改变排列的奇偶性.

命题 2 任意一个排列都能经过若干次对换之后化为常序排列, 且所作对换次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

定义 4 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

定义 5 行列式的组合定义：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

命题 3 设 $(i_1, i_2, \cdots, i_n), (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 是两个排列, 则 $\prod\limits_{k=1}^{n} a_{i_k j_k}$ 在行列式展开式中的符号为：

$$(-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n) + \tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)}.$$

1.6 Laplace 定理

定义 1 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, 给定正整数 $1 \le k < n$ 与另两组正整数 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$. 取 $|A|$ 的一个由第 $i_1, \cdots, i_k$ 行与第 $j_1, \cdots, j_k$ 列交点上的元素按原次序排成的 k 阶行列式称为 $|A|$ 的 k 阶子式, 记作：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

去掉这些交点后的元素按原次序排成的 $n-k$ 阶行列式称作上述子式的余子式, 记作 $M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$;

设 $p = \sum_{s=1}^{k} i_s$, $q = \sum_{s=1}^{k} j_s$, 则上述子式的代数余子式：

$$\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{p+q} M \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

定理 1　Laplace 定理：设 $|A|$ 是 n 阶行列式, 给定正整数 $1 \le k < n$ 并取定行列式中的 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ 这 k 行, 则

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

类似地, 若取定行列式中的 $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ 这 k 列, 则

$$|A| = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

命题 1　对分块上三角行列式 $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ O & D \end{vmatrix}$ 或分块下三角行列式 $\begin{vmatrix} B & O \\ C & D \end{vmatrix}$, 有 $|A| = |B| \cdot |D|$.

2 矩阵

2.1 矩阵的概念

定义 1 把 $m \times n$ 个数 $a_{ij}, (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ 排成一个 m 行, n 列的矩形阵列, 称其为一个 $m \times n$ 阶矩阵, 记作

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}.$$

若 A 中所有元素都为实数, 则称 A 为实矩阵; 若 A 中所有元素都为复数, 则称 A 为复矩阵; 若 A 中所有元素都为 0, 则称 A 为零矩阵, 记作 $O_{m \times n}$.

注 若在上述定义中 $m = n$, 则称 A 为 n 阶方阵.

定义 2 设 A 为 n 阶方阵且除主对角线之外的所有元素值都为 0, 则称其为对角阵, 记作 $A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$. 若进一步有 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$, 则称其为 n 阶单位阵, 记作 I_n.

定义 3 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{s \times t}$, 则 $A = B$ 等价于 $m = s, n = t, a_{ij} = b_{ij}, (\forall 1 \le m \le m, 1 \le j \le n)$ 时成立. 也就是说两个矩阵相等当且仅当它们完全一样.

定义 4 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则分别记 A 的第 i 行向量, 第 j 列向量为

$$\begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

有时也称 $1 \times n$ 矩阵为 n 维行向量, $n \times 1$ 矩阵为 n 维列向量.

定义 5 标准单位向量：n 维标准单位列向量指 n 个 n 维列向量 $e_1, \cdots, e_n$, 其中 e_i 表示第 i 元素是 1, 其余元素都是 0 的 n 维列向量. 向量 $e_1', \cdots, e_n'$ 被称为 n 维标准单位行向量.

命题 1 标准单位向量有以下性质：

(1)$i \ne j$ 时 $e_i' e_j = 0$, 而 $e_i' e_i = 1$. 即 $e_i' e_j = \delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 表示 Kronecker 函数.

(2) 对 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, Ae_i 表示 A 的第 i 个列向量, $e_i' A$ 表示 A 的第 i 个行向量, $e_i' A e_j = a_{ij}$.

定义 6 基础矩阵：n 阶基础矩阵是指 n^2 个 n 阶方阵 $E_{ij} (1 \le i, j \le n)$. 这里 E_{ij} 是一个 n 阶矩阵, 它的第 (i, j) 元素等于 1, 其他元素全为 0. 基础矩阵也可以看成是标准单位向量的积 $(E_{ij} = e_i e_j')$.

命题 2 设 A 是 n 阶方阵, 基础矩阵具有下列性质：

(1)$j \ne k$ 时 $E_{ij} E_{kl} = O$, 而 $E_{ij} E_{jl} = E_{il}$. 即 $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$.

(2)$E_{ij}A$ 的第 i 行为 A 的第 j 行, 其他元素均为 0; AE_{ij} 的第 j 列为 A 的第 i 列, 其他元素均为 0.

(3) 矩阵 A 和组成 A 的元素可以相互表示, $A=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$, $E_{ij}AE_{kl}=a_{jk}Eil$.

定义 7 基础循环矩阵：记 n 阶方阵 $J=\begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}$ 为基础循环矩阵. 对满足 $1 \leq k \leq n$ 的正整数 k, 有 $J^k=\begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}$. 特殊地, $J^n=I_n$.

定义 8 循环矩阵：称具有如下形状的矩阵为循环矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

命题 3 一个矩阵是循环矩阵的充要条件是它能表示为基础循环矩阵的多项式形式.

推论 同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.

命题 4 对上述循环矩阵 A, 记 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$, 则 $|A|=\prod\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)$, 其中 ε_i 表示 n 次单位根.

定义 9 幂零 Jordan 块：记 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ O & O \end{pmatrix}$ 为幂零 Jordan 块. 对满足 $1 \leq k \leq n$ 的正整数 k, 有 $A^k=\begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix}$. 特殊地, $A^n=O$.

注 对矩阵 A, 若 $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $A^k=O$, 则称 A 是幂零阵. 此时必有 $A^{\mathrm{r}(A)+1}=O$.

定义 10 多项式友阵：对首一多项式 $f(x)=x_n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 定义 $f(x)$ 的友阵

$$C(f(x))=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

它的转置 $F(f(x))=C'(f(x))$ 称为 $f(x)$ 的 Frobenius 块.

注 多项式的行列式表示：$f(x)=|xI_n-C(f(x))|$, 其中 $C(f(x))$ 表示 $f(x)$ 的友阵.

定义 11 矩阵的多项式：对 n 阶方阵 A 及多项式 $f(x)=a_mx_m+\cdots+a_1x+a_0$, 定义 A 的多项式 $f(A)=a_mA_m+\cdots+a_1A+a_0I_n$.

2.2 矩阵的运算

定义 1 矩阵加法：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, 则 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

命题 1 矩阵加法运算规则:矩阵加法满足交换律 $A+B=B+A$; 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$; 零矩阵 $O+A=A$.

定义 2 矩阵数乘：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, c\in\mathbb{R}$, 则 $cA=(ca_{ij})_{m\times n}$.

命题 2 矩阵数乘运算规则:分配律 $(c+d)A=cA+dA$, $c(A+B)=cA+cB$; 结合律 $(cd)A=c(dA)$; 零矩阵 $0\cdot A_{m\times n}=O_{m\times n}$.

定义 3 矩阵乘法：设 $A=(a_{ij})_{m\times k}, B=(b_{ij})_{k\times n}$, 则 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中 $c_{ij}=\sum\limits_{r=1}^{k}a_{ir}b_{rj}$, 这代表 C 的第 (i,j) 元素为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素乘积之和.

注 只有数量矩阵 $kI_n\ (k\in\mathbb{R})$ 满足乘法的交换律.

命题 3 矩阵乘法运算规则：

(1) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$;

(2) 结合律：$A(BC)=(AB)C$;

(3) 数乘：$c(AB)=(cA)B=A(cB)$;

(4) 单位矩阵：$I_mA_{m\times n}=A=A_{m\times n}I_n$;

(5) 乘方：$A^rA^s=A^{r+s}$, $(A^r)^s=A^{rs}$.

注 消去律一般不成立, 即若 $AB=AC$, $A\neq O$, 我们无法推出 $B=C$.

定义 4 矩阵的转置：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 定义 A 的转置 $A'=(a_{ji})_{n\times m}$.

定义 5 若 $A=A'$, 则称 A 为对称阵. 若 $A=-A'$, 则称 A 为反对称阵.

命题 4 n 阶方阵 A 是反对称阵的充要条件是对任意 n 维列向量 α, 都有 $\alpha'A\alpha=0$ 成立.

推论 n 阶对称阵 A 是零矩阵的充要条件是对任意 n 维列向量 α, 都有 $\alpha'A\alpha=0$ 成立.

命题 5 矩阵转置运算规则：

(1) 双转置：$(A')'=A$;

(2) 线性运算：$(A+B)'=A'+B'$, $(cA)'=cA'$;

(3) 交换律：$(AB)'=B'A'$;

(4) 行列式：$|A'| = |A|$.

命题 6 对 n 阶方阵 A, $\dfrac{1}{2}(A+A')$ 称为 A 的对称化, $\dfrac{1}{2}(A-A')$ 称为 A 的反对称化.

定义 6 矩阵的共轭：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个复矩阵, 则其共轭 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$.

命题 7 矩阵共轭运算规则：分配律 $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$, 数乘 $\overline{cA}=\overline{c}\overline{A}$, 转置 $\overline{(A')}=(\overline{A})'$.

2.3 方块的逆阵

定义 1 设 A 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B, 使得 $AB=BA=I_n$, 则称 B 为 A 的逆阵, 记为 $B=A^{-1}$. 若 A 存在逆阵, 则称其为非异阵或可逆阵, 否则称其为奇异阵或不可逆阵.

注 只有方阵才有逆阵的定义, $m\neq n$ 时没有该定义; 逆阵不一定存在, 但存在时必定唯一.

命题 1 逆阵的性质：

(1) 若 A,B 都是 n 阶非异阵, 则 AB 也是 n 阶非异阵且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(2) 若 A 是 n 阶非异阵, $c\in\mathbb{R}$, 则 cA 也是非异阵且 $(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$;

(3) 若 A 是 n 阶非异阵, 则 A 的转置 A' 也是非异阵且 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$;

(4) 若 A 是 n 阶非异阵, 则 $(A^{-1})^{-1}=A$;

(5) 若 A 是 n 阶非异阵, 则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$;

(6) 对逆阵而言, 乘法的消去律成立, 即若 A 可逆且 $AB=AC(BA=CA)$, 则有 $B=C$ 必定成立;

(7) 对逆阵而言, 整性成立, 即若 A 可逆且 $B\neq 0$, 则有 $AB\neq 0$, $BA\neq 0$ 必定成立;

(8) 任一方阵与同阶奇异阵之积必是奇异阵;

(9) 对对角矩阵 $A=\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $A^{-1}=\mathrm{diag}\{a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1}\}$.

定义 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A|$ 中的代数余子式, 则定义 A 的伴随阵 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$.

命题 2 设 A 为 n 阶方阵, 则 $AA^*=A^*A=|A|I_n$.

命题 3 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 为可逆阵的充要条件是 $|A|\neq 0$, 此时 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

命题 4 设 A,B 为 n 阶方阵, 则 $|AB|=|A|\cdot|B|$.

推论 设 A 为 n 阶方阵, $n\geq 2$, 则伴随的性质：

(1) 行列式：$|A^*|=|A|^{n-1}$, $(A^*)^*=|A|^{n-2}\cdot A$, 其中约定 $|A|^0=1$;

(2) 数乘：$(cA)^* = c^{n-1}A^*$;

(3) 转置：$(A')^* = (A^*)'$;

(4) 逆：$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$;

(5) 乘法：$(AB)^* = B^*A^*$.

命题 5 上 (下) 三角阵的加减, 数乘, 乘法 (幂), 多项式, 伴随, 求逆都是上 (下) 三角阵, 且所得三角阵的主对角元由原三角阵中对应元素作相应的运算得到.

命题 6 对两矩阵 $A_{m\times n}, B_{n\times m}$, 若 $I_m + AB$ 可逆, 则 $I_n + BA$ 也可逆, 且

$$(I_n + BA)^{-1} = I_n - B(I_m + AB)^{-1}A.$$

推论 对两 n 阶可逆矩阵 A, B, 若 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 则 $A + B$ 也可逆, 且

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 1 定义线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_1 \end{cases}$ 的增广矩阵为

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

定义 2 下列三种矩阵变换称为矩阵的初等变换:

(1) 第一类：对换矩阵中某两行 (列) 的位置.

(2) 第二类：用一非零常数乘以矩阵的某一行 (列).

(3) 第三类：将矩阵的某一行 (列) 乘以常数后加到另一行 (列) 上去.

定义 3 若矩阵 A 经过若干初等变换后能变成 B, 则称 A 与 B 等价或 A 与 B 相抵, 记为 $A \sim B$.

命题 1 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则 A 必相抵于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 这称为 A 的相抵标准型, 其中 $r = \mathrm{r}(A)$.

定义 4 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则记 a_{ik_i} 为 A 的第 i 行从左至右第一个非零元素, 称作第 i 行的阶梯点. 若 A 阶梯点的列指标 k_i 严格单增, 则称 A 是阶梯形矩阵.

命题 2 任意一个矩阵都能经过若干次初等行变换化为阶梯形矩阵.

定义 5 对单位矩阵 I_n 进行三类初等变换后得到的矩阵称为三类初等阵.

(1) 第一类：P_{ij} 表示将 I_n 的 i,j 两行对换后得到的矩阵.

(2) 第二类：$P_i(c)$ 表示将常数 c 乘以第 i 行后得到的矩阵.

(3) 第三类：$T_{ij}(c)$ 表示将 I_n 的第 i 行乘常数 c 后加到第 j 行上得到的矩阵.

命题 3 初等行 (列) 变换等价于左 (右) 乘对应的初等阵.

(1) 将 A 的 i,j 两行对换后得到的矩阵为 $P_{ij}A$, 对应的列变换后为 AP_{ij}.

(2) 将常数 c 乘以 A 的第 i 行后得到的矩阵为 $P_i(c)A$, 对应的列变换后为 $AP_i(c)$.

(3) 将 A 的第 i 行乘常数 c 后加到第 j 行上得到的矩阵为 $T_{ij}(c)A$, 对应的列变换后为 $AT_{ji}(c)$.

命题 4 初等阵都可逆且逆阵为同类初等阵：$P_{ij}^{-1}=P_{ij}$, $P_i^{-1}(c)=P_i(c^{-1})$, $T_{ij}^{-1}(c)=T_{ij}(-c)$.

命题 5 初等阵的行列式：$|P_{ij}|=-1$, $|P_i(c)|=c$, $|T_{ij}(c)|=1$.

命题 6 非异阵经过初等变换后仍可逆, 奇异阵经过初等变换后仍不可逆.

命题 7 矩阵相抵关系的性质：自反性 ($A\sim A$); 对称性 (若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$); 传递性 (若 $A\sim B, B\sim C$, 则 $A\sim C$). 这说明矩阵的相抵关系是等价关系.

2.5 矩阵乘积的行列式与初等变换法求逆阵

命题 1 对 n 阶方阵 A, 以下结论是等价的：

(1)A 是非异阵;

(2)A 的行列式 $|A|\neq 0$;

(3)A 等价于单位矩阵, 即 $A\sim I_n$;

(4)A 只通过初等行变换或初等列变换就能变为 I_n;

(5)A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积;

(6) 组成 A 的 n 个行向量 (或列向量) 线性无关, 即 A 是满秩阵.

推论 n 阶方阵 A 是奇异阵的充要条件是存在不为 0 的同阶方阵 B, 使得 $AB=O$; 或存在不为

0 的 n 维列向量 x, 使得 $Ax = 0$.

命题 2 初等变换法求逆阵：设 A 是 n 阶非异阵, 作 $n \times 2n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} A, I_n \end{pmatrix}$, 对其作初等行变换将 A 化为单位矩阵 I_n, 这时右侧分块为 A^{-1}.

命题 3 对矩阵方程 $AX = B$, 其中 $A_{n\times n}, X_{n\times m}, B_{n\times m}$ 且 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$. 考虑对矩阵 $\begin{pmatrix} A, B \end{pmatrix}$ 实施初等行变换：$\begin{pmatrix} A, B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n, A^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n, X \end{pmatrix}$ 求解 X.

另外, 对矩阵方程 $XA = B$ 类似地构造分块列矩阵并实施初等列变换即可.

2.6 分块矩阵

定义 1 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 若用若干条横线将它分成 r 块, 若干条纵线将它分成 s 块, 我们就得到了一个有 rs 分块的分块矩阵, 记作

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{r\times s}.$$

记第 (i,j) 块 A_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 阶矩阵, 则称 $m_1, \cdots, m_r$ 为行分块方式, $n_1, \cdots, n_s$ 为列分块方式.

命题 1 分块矩阵的加减, 数乘, 乘法等运算在形式上不变.

注 对 $A = (A_{ij})_{r\times s}$, 其转置与共轭 $A' = (A'_{ij})_{s\times r}$, $\overline{A} = (\overline{A_{ij}})_{r\times s}$.

命题 2 记分块对角阵 $A = \mathrm{diag}\{A_1, \cdots, A_k\}, B = \mathrm{diag}\{B_1, \cdots, B_k\}$ 有相同的分块方式, 则 $AB = \mathrm{diag}\{A_1B_1, \cdots, A_kB_k\}$.

命题 3 对分块对角阵 $A = \mathrm{diag}\{A_1, \cdots, A_k\}$, 则 $|A| = |A_1| \cdots |A_k|$. 若 $A_1, \cdots, A_k$ 均可逆, 则 A 也可逆, $A^{-1} = \mathrm{diag}\{A_1^{-1}, \cdots, A_k^{-1}\}$.

命题 4 对分块对角阵 $A = \mathrm{diag}\{A_1, \cdots, A_k\}$, 则 $A^* = \mathrm{diag}\{\dfrac{|A|}{|A_1|}A_1^*, \cdots, \dfrac{|A|}{|A_k|}A_k^*\}$; 这里每个分块 $A_i, (1 \le i \le k)$ 为方阵. 特殊地, 若 $\exists A_j$ 为 1×1 矩阵, 定义 $A_j^* = 1$, 此时 $\dfrac{|A|}{|A_j|}A_j^* = \dfrac{|A|}{a_j}$.

定义 2 分块初等变换和普通的初等变换类似, 包含三类:

(1) 第一类：对调分块矩阵的两分块行或两分块列;

(2) 第二类：以某个可逆矩阵左乘以分块矩阵的某一分块行, 或右乘以某一分块列;

(3) 第三类：以某个矩阵左乘以分块矩阵的某一分块行后加到另一分块行上去, 或以某个矩阵右乘以分块矩阵的某一分块列后加到另一分块列上去.

我们假定上面所提到的运算都是可以进行的. 分块初等变换不改变矩阵的秩.

定义 3 对分块单位矩阵 $I = \mathrm{diag}\{I_{m_1}, \cdots I_{m_k}\}$ 定义下列三种矩阵为分块初等矩阵：

(1) 第一类：P_{ij} 表示将 I 的 i, j 两分块行 (列) 对换后得到的矩阵;

(2) 第二类：$P_i(M)$ 表示将可逆矩阵 M 左 (右) 乘以第 i 分块行 (列) 后得到的矩阵;

(3) 第三类：$T_{ij}(M)$ 表示将 I 的第 i 分块行 (列) 左 (右) 乘可逆矩阵 M 后加到第 j 分块行 (列) 上得到的矩阵.

命题 5 分块初等行 (列) 变换等价于左 (右) 乘对应的分块初等阵.

(1) 将 A 的 i, j 两分块行对换后得到的矩阵为 $P_{ij}A$, 对应的列变换后为 AP'_{ij};

(2) 将可逆矩阵 M 左乘以 A 的第 i 分块行后得到的矩阵为 $P_i(M)A$, 对应的列变换后为 $AP_i(M)$;

(3) 将 A 的第 i 分块行左乘可逆矩阵 M 后加到第 j 分块行上得到的矩阵为 $T_{ij}(M)A$, 对应的列变换后为 $AT_{ji}(M)$.

命题 6 分块初等阵都是可逆阵且逆阵为同类分块初等阵：

$$P_{ij}^{-1} = P'_{ij},\ P_i^{-1}(M) = P_i(M^{-1}),\ T_{ij}^{-1}(M) = T_{ij}(-M).$$

命题 7 分块初等阵的行列式：

$$|P_{ij}| = (-1)^{m_i m_j + (m_i + m_j) \sum\limits_{i<r<j} m_r},\ |P_i(M)| = |M|,\ |T_{ij}(M)| = 1.$$

命题 8 对方阵 A, D, 记 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 则：

$$\begin{cases} |M| = |A||D - CA^{-1}B| & A\text{可逆} \\ |M| = |D||A - BD^{-1}C| & D\text{可逆} \\ |A||D - CA^{-1}B| = |D||A - BD^{-1}C| & A, D\text{均可逆} \end{cases}.$$

2.7 Cauchy-Binet 公式

定理 1 Cauchy-Binet 公式：记 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$ 表示 A 的一个由 $i_1, \cdots, i_s$ 行与 $j_1, \cdots, j_s$ 列交点上的元素按原次序排成的 s 阶行列式. 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times m}$, 则：

(1) 若 $m > n$, 则 $|AB| = 0$.

(2) 若 $m \le n$, 则：

$$|AB| = \sum_{1\le j_1 < \cdots < j_m \le n} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ 1 & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

推广 对 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times m}$ 及满足 $1\le r\le m$ 的正整数 r, 有：

(1) 若 $r>n$, 则 AB 的任一 r 阶子式的值为 0.

(2) 若 $r\le n$, 则：

$$AB\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}.$$

定义 1 对 A 的 r 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$, 若 $\forall 1\le k\le r$, $i_k=j_k$, 则称其为 A 的 r 阶主子式.

命题 1 若 A 为 $m\times n$ 实矩阵, 则方阵 AA' 的任一主子式都大于等于 0.

定理 2 Lagrange 恒等式：对正整数 $n\ge 2$, 成立如下恒等式：

$$(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) = (\sum_{i=1}^n a_ib_i)^2 + \sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

定义 2 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$, A 主对角线上元素之和 $\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$ 称为 A 的迹, 记作 $\mathrm{tr}A$.

命题 2 设 A,B 是 n 阶方阵, 矩阵迹的性质：

(1) 线性运算：$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$, $\mathrm{tr}(cA)=c\mathrm{tr}A$;

(2) 转置对称性：$\mathrm{tr}(A')=\mathrm{tr}A$;

(3) 乘法交换性：若 $A_{m\times n}, B_{n\times m}$, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$;

(4) 相似不变性：若 B 是可逆的, 则 $\mathrm{tr}(B^{-1}AB)=\mathrm{tr}A$, 即相似矩阵具有相同的迹;

(5) 正定性：对 n 阶实方阵 A, 必有 $\mathrm{tr}(AA')\ge 0$; 对 n 阶复方阵 A, 必有 $\mathrm{tr}(A\overline{A}')\ge 0$. 二者等号成立均当且仅当 A 为零矩阵.

命题 3 设 A 是 n 阶实方阵, 则 $\mathrm{tr}(A^2)\le\mathrm{tr}(AA')$, 等号成立当且仅当 A 是对称矩阵.

命题 4 矩阵迹的刻画：设数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵的集合为 $\mathbb{F}$, f 是一个 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{K}$ 的一个映射. 若它满足以下条件, 则映射 f 必是矩阵的迹, 即 $f(A)=\mathrm{tr}(A)$：

(1) 对 $\forall A,B\in\mathbb{F}$, $f(A+B)=f(A)+f(B)$;

(2) 对 $\forall A\in\mathbb{F}$, $c\in\mathbb{K}$, $f(cA)=cf(A)$;

(3) 对 $\forall A,B\in\mathbb{F}$, $f(AB)=f(BA)$;

(4) $f(I_n)=n$.

命题 5 对 n 阶方阵 A, $\exists a>0$, 使得 $\forall t\in(0,a)$, 矩阵 tI_n+A 都是非异阵.

注 这是摄动法的前提, 它表明任意 n 阶方阵 A 都能通过微小的一维摄动后化为非异阵的形式.

命题 6 摄动法证明矩阵问题的过程：

(1) 证明矩阵问题对非异阵成立.

(2) 对 n 阶方阵 A, 存在一列数 $t_k\to 0$, 使得 t_kI_n+A 都是非异阵; 且该命题对 t_kI_n+A 成立.

(3) 说明该矩阵问题对于 t_k 是连续的, 从而通过取极限 $t_k\to 0$ 得到对一般的方阵 A 成立.

定义 3 对 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $k\times l$ 阶矩阵 $B=(b_{ij})_{k\times l}$, 定义它们的 Kronecker 积：

$$(A\otimes B)_{mk\times nl}=(a_{ij}B)_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

注 矩阵 Kronecker 积的几何意义是两矩阵 (两线性映射) 张量积的表示矩阵.

命题 7 Kronecker 积的性质 (假设下列加法与乘法均有意义)：

(1) 线性运算：$(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$; $(cA)\otimes B=c(A\otimes B)=A\otimes(kB)$;

(2) 乘法：$(AB)\otimes(CD)=(A\otimes C)(B\otimes D)$; $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$;

(3) 单位阵：$I_m\otimes I_n=I_{mn}$;

(4) 逆阵：对可逆矩阵 A,B, $A\otimes B$ 也是可逆阵且 $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$;

(5) 行列式：对 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B, $|A\otimes B|=|A|^n|B|^m$;

(6) 转置：$(A\otimes B)'=A'\otimes B'$;

(7) 迹：$\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}(A)\cdot\mathrm{tr}(B)$;

(8) 秩：$\mathrm{r}(A\otimes B)=\mathrm{r}(A)\cdot\mathrm{r}(B)$.

3 线性空间

3.1 数域

定义 1 设 $\mathbb{K}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集且至少有两个不同的元素, 如果 $\mathbb{K}$ 中任意两个数的加减乘除 (除数不为零) 仍属于 $\mathbb{K}$, 则称 $\mathbb{K}$ 是数域, 它对加减乘除封闭. 若 $\mathbb{K}$ 中元素对除法不封闭, 则称 $\mathbb{K}$ 为数环.

命题 1 任一数域 $\mathbb{K}$ 必定包含有理数域 $\mathbb{Q}$, 即 $\mathbb{Q}$ 是最小的数域.

3.2 行向量和列向量

定义 1 设 $\mathbb{K}$ 是数域, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$, 则记 $\mathbb{K}$ 上的 n 维行向量, n 维列向量为:

$$\begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

定义 2 $\mathbb{K}$ 上的 n 维行向量全体组成 $\mathbb{K}$ 上的 n 维行向量空间, 记作 $\mathbb{K}^n$; $\mathbb{K}$ 上的 n 维列向量全体组成 $\mathbb{K}$ 上的 n 维列向量空间, 记作 $\mathbb{K}_n$.

命题 1 行 (列) 向量的运算规则：设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}^n(\mathbb{K}_n)$, $k, l \in K$, 则其运算规律满足：

(1) 加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) 加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) 零向量：$\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;

(4) 负向量：$\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$;

(5) 数乘单位元：$1 \cdot \alpha = \alpha$;

(6) 数乘分配律：$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$, $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

(7) 数乘结合律：$k(l\alpha) = (kl)\alpha$.

3.3 线性空间

定义 1 线性空间：设 $\mathbb{K}$ 是一个数域, V 是一个集合, 在 V 上定义加法“+”, 即对 V 中任意两个元素 α, β, 总存在 V 中唯一的元素 γ 与之对应, 记为 $\gamma = \alpha + \beta$; 在数域 $\mathbb{K}$ 与 V 之间定义数乘运算, 即对 $\mathbb{K}$ 中任一数 k 及 V 中任一元 α, 在 V 中有唯一的元素 δ 与之对应, 记为 $\delta = k\alpha$.

若 $\forall \alpha,\beta,\gamma\in V$, $k,l\in\mathbb{K}$, 上述加法及数乘满足下列运算规则：

(1) 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) 加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 零向量：$\exists\mathbf{0}\in V$, $\forall\alpha\in V$, $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

(4) 负向量：$\forall\alpha\in V$, $\exists\beta\in V$, $\alpha+\beta=\mathbf{0}$;

(5) 数乘单位元：$1\cdot\alpha=\alpha$;

(6) 数乘中数的分配律：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(7) 数乘中向量的分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) 数乘结合律：$k(l\alpha)=(kl)\alpha$,

则集合 V 称为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间或向量空间, V 中的元素称为向量.

命题 1 若 $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{K}_0$, 则可以将 $\mathbb{K}_0$ 看作 $\mathbb{K}$ 上的线性空间.

命题 2 在线性空间的定义中, 零向量与负向量是唯一的.

命题 3 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 有：

(1) 加法消去律：若 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, 则 $\beta=\gamma$;

(2) 零向量：$0\cdot\alpha=\mathbf{0}$, $k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

(3) 减法定义为 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=\alpha+(-1)\beta$;

(4) 若 $k\alpha=\mathbf{0}$, 则 $\alpha=\mathbf{0}$ 或 $k=0$.

3.4 向量的线性关系

定义 1 对线性方程组及其增广矩阵

$$(*):\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases},\ \tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&b_1\\ a_{21}&\cdots&a_{2n}&b_2\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}&b_n\end{pmatrix},$$

记它的分块表示为 $\tilde{A}=\Big(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\Big)$, 其中 α_i,β 为 $\tilde{A}$ 的列向量.

此时, 线性方程组 $(*)$ 等价于向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$.

定义 2 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta \in V$, 若 $\exists k_1,k_2,\cdots,k_n \in \mathbb{K}$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$, 则称 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出.

定义 3 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \in V$, 若 $\exists k_1,k_2,\cdots,k_n \in \mathbb{K}$ 且它们不全为 0, 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n = \mathbf{0}$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 否则称它们线性无关.

注 线性方程组 $(*)$ 有解的充要条件是 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出; 在 $\beta = \mathbf{0}$ 时有解的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

命题 1 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 则任一包含这组向量的向量组必线性相关; 又若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 则任一包含于这组向量之中的向量组必线性无关.

命题 2 记 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m \in V$, 则它们线性相关的充要条件是至少存在一个向量能够表示成其余向量的线性组合.

命题 3 记 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta \in V$, 若 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出, 则该表示方法唯一的充要条件是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

命题 4 线性组合的传递性: 设线性空间 V 上的向量组 $A=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}, B=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}, C=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_p\}$ 满足 A 中任一向量都是 B 中向量的线性组合, B 中任一向量都是 C 中向量的线性组合, 则 A 中任一向量都是 C 中向量的线性组合.

3.5 向量组的秩

定义 1 在线性空间 V 上, 向量族代表 V 的任一个子集, 可能包含有限或无限多个向量; 向量组代表 V 中有限多个向量组成的集合.

定义 2 设 S 是 V 上的一个向量族, 若存在 S 中的向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 使得它们线性无关但可以线性表出向量族中任一向量, 则称 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 是 S 的极大线性无关组, 或称作极大无关组.

命题 1 若 S 由有限个向量组成且至少包含一个非零向量, 则其极大无关组必存在但一般不唯一.

命题 2 替换定理: 设 A,B 是线性空间 V 上的两个向量组, A 有 r 个向量, B 有 s 个向量. 若 A 中向量线性无关且 A 中每个向量均可用 B 中向量线性表出, 则 $r \le s$.

推论 1 逆否命题: 设 A,B 是线性空间 V 上的两个向量组, A 有 r 个向量, B 有 s 个向量, $r > s$. 若 A 中每个向量均可用 B 中向量线性表出, 则 A 中向量线性相关.

推论 2 设 A,B 是线性空间 V 上两线性无关的向量组, 若 A 中每个向量均可用 B 中向量线性表出, B 中每个向量也均可用 A 中向量线性表出 (可互相线性表出), 则 A,B 所含向量个数相等.

定义 3 向量族 S 的极大无关组所含的向量个数称为 S 的秩, 记作 $\mathrm{r}(S)$; 约定由零向量组成的向量组的秩为 0.

注 设 A,B 是线性空间 V 上向量族 S 的极大无关组, 则 A,B 两组向量所含向量个数相等.

定义 4 若向量组 A, B 可以互相线性表出, 则称这两个向量组等价.

命题 3 等价的向量组有相同的秩.

命题 4 对两向量组 $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$, 则它们等价的充要条件是 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$ 且其中一组向量可以用另一组向量线性表出.

定义 5 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 若在 V 中存在线性无关的向量组 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 使得 V 中任一向量均可表示为这组向量的线性组合, 则称 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 线性空间 V 称为 n 维线性空间, 此时 V 的维数为 n, 记作 $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. 若这样的基不存在, 则称 V 是无限维线性空间.

注 事实上, 任一线性空间 V 都存在基, 包括无限维线性空间.

推论 n 维线性空间 V 中任一超过 n 个向量的向量组必线性相关.

定义 6 设 $B = \{e_i\}_{i \in I}$ 是线性空间 V 上的向量族, 若 B 中任意有限个向量都线性无关, 则称向量族 B 线性无关; 若向量 α 能表示为 B 中有限个向量的线性组合, 则称 α 可以被向量族 B 线性表示.

若线性空间 V 中存在线性无关的向量族 B, 使得 $V \in L(B)$, 即 V 中任一向量都可被 B 线性表出, 则称向量族 B 是 V 的一组基.

注 事实上, 利用选择公理或 Zorn 引理便可得出任意线性空间中基的存在性.

命题 5 设 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ 为数域, 视 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间且 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 为一组基; 取 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 与 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 则 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 mn 维线性空间, 且 $\{\alpha_i e_j \,\big|1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n\}$ 为其一组基.

命题 6 设 $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $e_1, e_2, \cdots, e_n \in V$, 若下列条件之一成立, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基:

(1)$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关.

(2)V 中任一向量都能由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性表出.

命题 7 设 $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 是 V 的一组线性无关向量, $m < n$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 V 的一组基. 则 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 中必存在 $n - m$ 个向量, 使它们和 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 一起构成 V 的一组基.

推论 基扩张定理: n 维线性空间 V 中任一线性无关的向量组可扩张为 V 的一组基; V 的任一子空间的基均可扩张为全空间 V 的一组基.

3.6 矩阵的秩

定义 1 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 A 的 m 个行向量的秩称为其行秩, n 个列向量的秩称为其列秩.

命题 1 矩阵的行秩与列秩在初等变化下不改变.

推论 任一矩阵与一可逆矩阵相乘, 其秩不变.

推论 两个 $m\times n$ 矩阵 A,B 等价的充要条件是 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

命题 2 设 $A_{m\times n}$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列向量是 A 的列极大无关组, 则对任意 m 阶非异方阵 Q, 矩阵 QA 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列向量也是 QA 的列极大无关组.

命题 3 任一矩阵的行秩和列秩相等, 统称为矩阵的秩, 记作 $\mathrm{r}(A)$ 或 $\mathrm{rank}A$.

推论 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A')$, 即矩阵转置的秩等于矩阵的秩.

定义 2 对 $A_{m\times n}$, 若 $\mathrm{r}(A)=m$, 则称 A 是行满秩的, 当且仅当这 m 个行向量线性无关; 若 $\mathrm{r}(A)=n$, 则称 A 是列满秩的, 当且仅当这 n 个列向量线性无关. 若此时 A 为 n 阶方阵且 $\mathrm{r}(A)=n$, 则称 A 是满秩阵, 当且仅当这 n 个行 (列) 向量分别均线性无关.

命题 4 n 阶方阵 A 是非异阵的充要条件是 $\mathrm{r}(A)=n$, 即 A 是满秩阵.

命题 5 对阶梯形矩阵 A, 设其阶梯点为 $a_{1k_1},a_{2k_2},\cdots,a_{rk_r}$, 则 $\mathrm{r}(A)=r$, 即 A 的秩为其非零行的个数; 第 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 列是 A 的一个列极大无关组, 即阶梯点所在的列向量是 A 的列极大无关组.

推论 仅用初等行变换将矩阵 A 化为阶梯形矩阵 B, 则 B 非零行的个数就是 A 的秩.

命题 6 若向量组 $A=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 满足 $\mathrm{r}(A)=r$, 在其中取出 r 维向量组 $\{\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir}\}$, 若下列条件之一成立, $\{\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir}\}$ 就是 A 的极大无关组.

(1)$\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir}$ 线性无关.

(2)A 中任一向量都能由 $\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir}$ 线性表出.

注 也可将向量按列 (行) 向量排成一矩阵, 利用初等变换求出矩阵的秩, 从而求出向量组的秩.

命题 7 矩阵秩的子式判别法：对 $A_{m\times n}$, $\mathrm{r}(A)=r$ 的充要条件是 A 有一个 r 阶子式的值不为 0, 且所有 $r+1$ 阶子式的值全部为 0.

命题 8 矩阵秩的基本公式：

(1) 若 $c\neq 0$, 则 $\mathrm{r}(cA)=\mathrm{r}(A)$;

(2) $\mathrm{r}\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

(3) $\mathrm{r}\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$, $\mathrm{r}\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$. 当且仅当 $AX+BY=C$ 有解时取等;

(4) $\mathrm{r}\begin{pmatrix}A,B\end{pmatrix}\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$, $\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

(5) $\mathrm{r}(A+B)\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$, $\mathrm{r}(A-B)\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$, $\mathrm{r}(A-B)\geq|\mathrm{r}(A)-\mathrm{r}(B)|$;

(6) 对 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(M)=\begin{cases} \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(D-CA^{-1}B) & A\text{可逆} \\ \mathrm{r}(D)+\mathrm{r}(A-BD^{-1}C) & D\text{可逆} \\ \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(D-CA^{-1}B)=\mathrm{r}(D)+\mathrm{r}(A-BD^{-1}C) & A,D\text{均可逆} \end{cases}$.

定理 1 Sylvester 不等式：对 $A_{m\times n}, B_{n\times k}$, $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n\le \mathrm{r}(AB)\le \min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$.

推广 Frobenius 不等式：对 $A_{m\times n}, B_{n\times k}, C_{k\times l}$, $\mathrm{r}(ABC)\ge \mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)-\mathrm{r}(B)$.

命题 9 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 则：

(1) 若 $\mathrm{r}(A)=n$, 即 A 列满秩时, 必存在 $B_{n\times m}$ 且 $\mathrm{r}(B)=n$, 使得 $BA=I_n$, B 称为 A 的左逆.

(2) 若 $\mathrm{r}(A)=m$, 即 A 行满秩时, 必存在 $C_{n\times m}$ 且 $\mathrm{r}(C)=m$, 使得 $AC=I_m$, C 称为 A 的右逆.

推论 列满秩矩阵满足左消去律, 行满秩矩阵满足右消去律.

命题 10 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 和 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是线性空间 V 的两组向量, 且

$$\begin{cases} f_1=a_{11}e_1+\cdots+a_{1m}e_m \\ f_2=a_{21}e_1+\cdots+a_{2m}e_m \\ \qquad\qquad\cdots \\ f_n=a_{n1}e_1+\cdots+a_{nm}e_m \end{cases},$$

记上述表示中的系数矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times m}$, 则：

(1) 若 $\mathrm{r}(A)=m$, 则这两组向量等价.

(2) 若 $\mathrm{r}(A)=r$, 则向量组 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的秩不超过 r.

(3) 若 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 线性无关, 则向量组 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的秩等于 $\mathrm{r}(A)$.

命题 11 设 $A_{m\times n}$ 满足 $\mathrm{r}(A)=r$, 则存在 $B_{m\times r}, C_{r\times n}$ 且 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(C)=r$, 使得 $A=BC$. 这称为 A 的满秩分解.

若 $A_{m\times n}$ 存在两个满秩分解 $A=BC=DE$, 则存在 r 阶非异阵 P, 使得 $D=BP$, $E=P^{-1}C$.

注 几何角度理解, $A=BC$ 是满秩分解当且仅当 B 的 r 个列向量是 A 的 n 个列向量张成的线性空间的一组基, 或 C 的 r 个行向量是 A 的 m 个行向量张成的线性空间的一组基.

3.7 坐标向量

命题 1 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, 若 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基, 则 V 中任一向量能且仅能以一种方式表示为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的一个线性组合.

定义 1 设 V 是数域 $\mathbb{K}_n$ 上的 n 维线性空间, $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基且其顺序固定, 定义

由 V 到 $\mathbb{K}_n$ 的映射

$$\varphi : \alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

这个列向量称为 α 在给定基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 上的坐标向量.

注 这里的 n 维列向量空间 $\mathbb{K}_n$ 可用 n 维行向量空间 $\mathbb{K}^n$ 替代, 行向量也可作为坐标向量.

定义 2 设 V, U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, 若存在由 V 到 U 的双射 φ,

$$\forall \alpha, \beta \in V, k \in \mathbb{K}, \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha),$$

则称 V 与 U 这两个线性空间同构或 V 同构于 U, 记作 $V \cong U$.

命题 2 数域 $\mathbb{K}$ 上的任一 n 维线性空间 V 均与 n 维行 (列) 向量空间 $\mathbb{K}^n(\mathbb{K}_n)$ 同构, 即对映射

$$\varphi : V \to \mathbb{K}^n(\mathbb{K}_n), \forall \alpha, \beta \in V, k \in \mathbb{K}, \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha).$$

命题 3 对线性同构 $V \cong U$, 其对应双射 $\varphi : V \mapsto U$ 满足 $\varphi(0) = 0$, 且 φ 将线性组合映为线性组合, 将线性相关的向量组映为线性相关的向量组, 将线性无关的向量组映为线性无关的向量组.

命题 4 对 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 选取 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta \in V$ 且记它们在这组基下的坐标向量分别为 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}$, 则：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关的充要条件是 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_m$ 线性无关;

(2) β 可用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表出的充要条件是 $\tilde{\beta}$ 可用 $\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_m$ 线性表出, 且此时系数对应相等;

(3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_m$ 的秩相等, 且上述两个向量组极大无关组的下标相同.

命题 5 对一般化加法与数乘的定义：设 V 是定义在向量的加法与数乘下的 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\varphi : S \to V$ 是从集合 S 到 V 上的双射. 设 $a, b \in S$, $k \in \mathbb{K}$, 定义 S 上的加法 $\oplus$ 与关于数域 $\mathbb{K}$ 的数乘 $\otimes$ 为：

$$a \oplus b = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)), k \otimes a = \varphi^{-1}(k \cdot \varphi(a)), (k \in \mathbb{K}),$$

则 S 是定义在以 $\oplus$ 为加法与 $\otimes$ 为数乘下的 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 且 $\varphi : S \to V$ 是线性同构.

3.8 基变换与过渡矩阵

定义 1 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的两组基, 则 $f_1, \cdots, f_n$ 可由 $e_1, \cdots, e_n$ 的线性组合表示：

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n \\ f_2 = a_{12}e_1 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \qquad\qquad \cdots \\ f_n = a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n \end{cases},$$

其系数矩阵的转置 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 到基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 的过渡矩阵.

推论 设 A 为基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 到基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 的过渡矩阵, 则 $\begin{pmatrix} f_1, \cdots, f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, \cdots, e_n \end{pmatrix} A$.

命题 1 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是线性空间 V 的基, 对 $A_{n\times m}, B_{n\times m}$, 若 $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} B$, 则 $A = B$.

命题 2 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 和 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 的两组基, 若 V 中向量 α 在基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下的坐标向量是 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 在基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 下的坐标向量是 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 则 A 是基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 到基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 的过渡矩阵的充要条件是 $\forall \alpha \in V$, $X = AY$.

命题 3 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 和 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 的两组基, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 到 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 的过渡矩阵是 A, $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 到 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的过渡矩阵是 B, 则 A, B 互为逆阵.

命题 4 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 和 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 的三组基, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 到 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 的过渡矩阵是 A, $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 到 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 的过渡矩阵是 B, 则 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 到 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 的过渡矩阵是 AB.

3.9 子空间

定义 1 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, V_0 是 V 的非空子集, 且 $\forall \alpha, \beta \in V_0$, $k \in \mathbb{K}$, 总有 $\alpha + \beta \in V_0$, $k\alpha \in V_0$, 则称 V_0 是 V 的线性子空间, 简称子空间.

命题 1 V 的子空间 V_0 在 V 的加法及数乘下构成了数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间.

推论 子空间对线性组合是封闭的, 即 $\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in V_0$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \in V_0$.

定义 2 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 它至少有两个子空间：零子空间 $\{\mathbf{0}\}$(维数为 0) 与全空间 V(维数为 n). 它们称为 V 的平凡子空间, 其他子空间称为非平凡子空间.

推论 若 V_0 是 V 的非平凡子空间, 则 $0 < \dim V_0 < \dim V$.

定义 3 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 定义它们的交 $V_1 \bigcap V_2 = \{\alpha | \alpha \in V_1,\, \alpha \in V_2\}$, 它们的和 $V_1 + V_2 = \{\alpha + \beta | \alpha \in V_1,\, \beta \in V_2\}$.

命题 2 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 它们的交 $V_1 \bigcap V_2$ 与和 $V_1 + V_2$ 都是 V 的子空间, 分别称为 V_1 与 V_2 的交空间与和空间.

定义 4 设 S 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的非空子集, 记 $L(S)$ 为 S 中向量所有线性组合构成的集合, 即：

$$L(S) = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i | \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in S, m \geq 0\}.$$

显然 $L(S)$ 是 V 的子空间, 一般将其称作由 S 张成的 (生成的) 子空间.

命题 3 设 S 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的非空子集, $L(S)$ 为 S 张成的子空间, 则：

(1)$L(S)$ 是 V 中包含 S 的最小子空间, 即对任意包含 S 的子空间 V_0, 有 $S \subseteq L(S) \subseteq V_0$.

(2) 若 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ 是 S 的极大无关组, 则 $L(S) = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$, 且 $\dim L(S) = r = \mathrm{r}(S)$.

推论 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 $L(V_1 \bigcup V_2) = V_1 + V_2$.

命题 4 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \bigcap V_2)$.

定义 5 设 $V_1, \cdots, V_m$ 是线性空间 V 的子空间, 若

$$\forall i = 1, 2, \cdots m\,,\ V_i \bigcap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_m) = \mathbf{0},$$

则称 $V_1 + \cdots + V_m$ 是直和或内直和, 记作 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$.

注 对线性空间 V 的子空间 $V_1, \cdots, V_m$, 若其两两相交为 $\mathbf{0}$, 不能保证 $V_1 + \cdots + V_m$ 是直和.

命题 5 设 $V_1, \cdots, V_m$ 是线性空间 V 的子空间, 记 $V_0 = V_1 + \cdots + V_m$, 则下列命题两两等价：

(1)$V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ 是直和.

(2)$\forall i = 2, 3, \cdots m$, $V_i \bigcap (V_1 + \cdots + V_{i-1}) = \mathbf{0}$

(3)$\dim(V_1 + \cdots + V_m) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_m$.

(4)$V_1, \cdots, V_m$ 的 m 组两两交集为 0 的基可以拼成 V_0 的一组基.

(5)V_0 的向量写为 $V_1, \cdots, V_m$ 中的向量之和的表示唯一. 即对 $\alpha \in V_0$, $u_i, v_i \in V_i$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 若 $\alpha = v_1 + \cdots + v_m = u_1 + \cdots + u_m$, 则必有 $v_i = u_i$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

命题 6 有限多个真子空间之并不能覆盖全空间.

注 事实上, 对有限域上的线性空间结论不一定成立.

定义 6 设 U, V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, $W = U \times V = \{(u, v) \big| u \in U, v \in V\}$ 是 U, V 的 Descartes 积集合. 在 W 上定义如下的加法和数乘:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2),\ k(u, v) = (ku, kv),\ (k \in \mathbb{K}),$$

则 W 在该加法和数乘上是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 称作 U, V 的外直和.

定义 7 设 $U' = \{(u, \mathbf{0}) \big| u \in U\}$, $V' = \{(\mathbf{0}, v) \big| v \in V\}$, 则 U', V' 是 W 的子空间且 U 和 U' 同构, V 和 V' 同构, $W = U' \oplus V'$. 这也被称作 W 的直和分解或内直和分解.

注 内直和同构于外直和; 外直和的作用是构造新的线性空间, 内直和一般用于分解.

定义 8 设 U 是 W 的子空间, 则必存在 W 的子空间 V, 使得 $W = U \oplus V$. 这样的子空间 V 称作 U 在 W 中的补空间.

注 注意补空间不是补集, 且一般来说补空间不唯一. 如非平凡子空间有无穷多个补空间.

定义 9 设 V 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, U 是 V 的子空间. $\forall v \in V$, 定义集合 $v + U = \{v + u \big| u \in U\}$ 为 v 的 U-陪集. 在所有 U-陪集构成的集合 $S = \{v + U \big| v \in V\}$ 上, 定义如下的加法和数乘:

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U,\ k(v + U) = kv + U,\ (v, v_1, v_2 \in V,\ k \in \mathbb{K}),$$

则 S 在该加法和数乘上是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 称作 V 关于子空间 U 的商空间, 记作 $S = V/U$.

命题 7 U-陪集在集合关系下相等或不相交, $v_1 + U = v_2 + U$ 作为集合相等当且仅当 $v_1 - v_2 \in U$.

推论 $v + U$ 是 V 的子空间当且仅当 $v \in U$, 此时 $v + U = U$.

命题 8 S 中的加法与关于 $\mathbb{K}$ 上的数乘不依赖于代表元的选取.

命题 9 对 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 及其子空间 U, 则 $\dim V/U = \dim V - \dim U$. 若 W 是 U 在 V 上的补空间, 则存在线性同构 $\varphi : W \to V/U$.

3.10 线性方程组的解

定义 1 对 n 元线性方程组

$$(*) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

记 $(*)$ 的系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, 增广矩阵 $\tilde{A} = \Big(A, \beta\Big)$.

若 $\beta = \mathbf{0}$, 则称 $(*)$ 是齐次线性方程组, 否则称为非齐次线性方程组.

命题 1 对 n 元线性方程组 $(*)$ 与其系数矩阵 A, 增广矩阵 $\tilde{A}$, 有：

(1) 若 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A}) = n$, 则 $(*)$ 有唯一解.

(2) 若 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A}) < n$, 则 $(*)$ 有无穷多组解.

(3) 若 $\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}(\tilde{A})$, 即 $\mathrm{r}(\tilde{A}) = \mathrm{r}(A) + 1$, 则 $(*)$ 无解.

命题 2 设 γ 是 $Ax = \beta$ 的一个解, 则 α 是 $Ax = \beta$ 解的充要条件是 $\alpha - \gamma$ 是原方程组相伴的齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解.

定义 2 设 n 元齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的一组解向量为 $\eta_1, \cdots, \eta_k$, 若这组解向量线性无关且方程组的任意一个解向量均可表示为它们的线性组合, 则 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 称为 $Ax = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

定义 3 n 元齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的全部解构成 n 维列向量空间的一个子空间, 称为该齐次线性方程组的解空间. 基础解系是解空间的一组基.

命题 3 对 n 元齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$, 设 $\mathrm{r}(A) = r$, 则其解空间为 $n - r$ 维子空间, 每个基础解系均由 $n - r$ 个向量构成; 即对解空间 V_A, $\dim V_A + \mathrm{r}(A) = n$.

命题 4 $Ax = \mathbf{0}$, $A'x = \mathbf{0}$, $AA'x = \mathbf{0}$, $A'Ax = \mathbf{0}$ 同解; 这说明 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A') = \mathrm{r}(AA') = \mathrm{r}(A'A)$.

命题 5 设 γ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的一个解, 设 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A}) = r < n$. 若 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 为其相伴齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则 $Ax = \beta$ 的所有解均可表示为：

$$\sum_{i=1}^{n-r} k_i \eta_i + \eta, (k_i \in \mathbb{K}).$$

命题 6 $\mathbb{K}$ 上 n 元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的求解：

(1) 通过初等行变换将增广矩阵化作阶梯型, 比较 $\mathrm{r}(A)$ 和 $\mathrm{r}(\tilde{A})$ 并判断解是否存在.

(2) 若解存在, 在通过初等行变换和列对换将其变为

$$\begin{pmatrix} I_r & C & \delta \\ O & O & O \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix},$$

此时 $\begin{pmatrix} \delta \\ O \end{pmatrix}$ 是原方程组的一组解, $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其相伴齐次线性方程组的基础解系, 其中 $\xi_i = \begin{pmatrix} -\alpha_i \\ e_i \end{pmatrix}$, α_i 为 C 的第 i 列向量, e_i 为第 i 个 $n - r$ 元标准单位列向量.

(3) 根据列对换情况, 调整 $\xi_1, \cdots \xi_{n-r}, \delta$ 的各分量, 得到原方程组的解 γ 和与 $Ax = \beta$ 相伴的齐次线性方程组的基础解系 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$, 得到原方程组的解 $\sum\limits_{i=1}^{n-r} k_i \eta_i + \gamma, (k_i \in \mathbb{K})$.

命题 7 设 γ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 元非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的一个解, $\eta_1,\cdots\eta_{n-r}$ 为其相伴齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则:

(1)$\gamma,\gamma+\eta_1,\cdots,\gamma+\eta_{n-r}$ 线性无关.

(2)$Ax=\beta$ 的任一解可表示为 $k_0\gamma+\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i(\gamma+\eta_i)$, 其中 $k_i\in\mathbb{K}$ 且 $\sum\limits_{i=0}^{n-r}k_i=1$.

命题 8 求方程组的公共解：$Ax=\alpha,Bx=\beta$ 是两个含 n 个未知数的非齐次线性方程组. 方程组 $Ax=\alpha$ 有特解 γ 且 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$, 方程组 $Bx=\beta$ 有特解 δ 且 $Bx=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-s}$, 通常有如下两种方法：

(1) 假设它们的公共解为 $\gamma+t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}$, 则 $\gamma+t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}-\delta$ 可以表示为 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-s}$ 的线性组合. 于是矩阵

$$\Big(\xi_1,\cdots,\xi_{n-s},\gamma+t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}-\delta\Big)$$

的秩等于 $n-s$, 由此可以求出 $t_1,\cdots,t_{n-r}$, 从而求出公共解.

(2) 假设它们的公共解为 ζ, 则 $\zeta=\gamma+t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}=\delta-u_1\xi_1+\cdots-u_{n-s}\xi_{n-s}$, 只需求解下列关于 $t_1,\cdots,t_{n-r},u_1,\cdots,u_{n-s}$ 的线性方程组

$$t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}+u_1\xi_1+\cdots+u_{n-s}\xi_{n-s}=\delta-\gamma.$$

命题 9 设 A,B 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵, 则方程组 $Ax=\mathbf{0}$, $Bx=\mathbf{0}$ 同解的充要条件是存在可逆阵 P, 使得 $B=PA$.

4 线性映射

4.1 线性映射的概念

定义 1 对 $A \to A$ 的映射 $f: f(a) = a, a \in A$, 称其为恒等映射, 记作 $\mathbf{1}_A$ 或 I_A.

命题 1 设 $f: A \to B$, 若 $\exists g: B \to A$, 使得 $g \circ f = \mathbf{1}_A, f \circ g = \mathbf{1}_B$, 则 f, g 均是双射且 $g = f^{-1}$.

定义 2 设 V, U 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 对 $\varphi: V \to U$, 若满足

$$\forall \alpha, \beta \in V, k \in \mathbb{K}, \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha),$$

则称 φ 是 $V \to U$ 的线性映射. 若 $U = V$, 则称其为 V 上的线性变换.

若 φ 是单射, 则称其为单线性映射; 若 φ 是满射, 则称其为满线性映射; 若 φ 是双射, 则称其为线性同构, 简称同构, 记作 $V \cong U$. 若 $V = U$, 则称其为 V 上的自同构.

注 $V \cong U$ 只表示 V, U 之间存在线性同构, 不能表示 V, U 之间所有的线性映射都是线性同构.

定义 3 设 V, U 是 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, 对 $\varphi: V \to U$：

若 $\forall \alpha \in V$, $\varphi(\alpha) = \mathbf{0}$, 则称线性映射 φ 为零映射, 通常记为 $\mathbf{0}$.

若该映射为 V 到自身的恒等映射 $\mathbf{1}_V$, 则称线性变换 φ 为恒等变换, 记为 I_V 或 Id_V, 也简记为 I.

若 φ 为 V 上的变换, 且 $\forall \alpha \in V, \varphi(\alpha) = k\alpha$, 其中 $k \in \mathbb{K}$, 则称线性变换 φ 为纯量变换.

命题 2 设 V, U 是 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, 对线性映射 $\varphi: V \to U$, 有：

(1) $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(2) 线性组合：$\forall \alpha, \beta \in V$, $k, l \in \mathbb{K}$, $\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$.

(3) 若 φ 是同构, 则其逆映射 φ^{-1} 存在, 且 φ^{-1} 是 $U \to V$ 的同构.

(4) 若 $\varphi: V \to U$, $\psi: U \to W$ 都是线性映射 (同构), 则 $\varphi \circ \psi: V \to W$ 是线性映射 (同构).

命题 3 线性同构是等价关系, 即它满足自反性 ($V \cong V$); 对称性 (若 $V \cong U$, 则 $U \cong V$); 传递性 (若 $V \cong U$, $U \cong W$, 则 $V \cong W$).

命题 4 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 则 φ 可逆的充要条件是 φ 将 V 的基映为基.

命题 5 数域 $\mathbb{K}$ 上两个线性空间同构 (存在线性同构) 的充要条件是它们的维数相同.

4.2 线性映射的运算

定义 1 设 φ, ψ 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 $V \to U$ 上的线性映射, 对 $k \in \mathbb{K}$ 及 $\forall \alpha \in V$, 定义 $V \to U$ 的线性映射满足如下性质：

$$(\varphi + \psi)(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)\,,\, (k\varphi)(\alpha) = k\varphi(\alpha).$$

命题 1 一般记 $\mathrm{Hom}(V, U)$ 是 $V \to U$ 的线性映射全体, 则在上述线性映射的加法及数乘定义下, $\mathrm{Hom}(V, U)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间.

定义 2 对 $\mathbb{K}$ 上的线性映射 $\varphi : V \to \mathbb{K}$, 称 φ 为线性函数; $V \to \mathbb{K}$ 上的全体线性函数 $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ 构成一个线性空间 V^*, 记作 V 的共轭空间; V 有限维时, 也称其为对偶空间.

定义 3 设 A 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 若对在 A 上定义的乘法“$\cdot$”及 $\forall a, b, c \in A, k \in \mathbb{K}$, 均有：

(1) 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(2) 存在 A 中元 e, 使对 $\forall a \in A$, 均有 $e \cdot a = a \cdot e = a$,

(3) 乘法分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$,

(4) 数乘分配律：$(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$,

则称 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的代数或称 A 是 $\mathbb{K}$-代数, 元素 e 称为 A 的恒等元, 通常记作 $\mathbf{1}$.

注 1 考虑两数域 $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1$, 考虑 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 $\mathbb{K}_1$ 中数的乘法, 可知 $\mathbb{K}_1$ 是 $\mathbb{K}$-代数.

注 2 考虑 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵全体 $M_n(\mathbb{K})$ 及它上面的矩阵乘法, 可知 $M_n(\mathbb{K})$ 是 $\mathbb{K}$-代数.

命题 2 对 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V, 考虑 V 上的全体线性变换 $\mathrm{Hom}(V)$ 及线性映射的复合, 可知 $\mathrm{Hom}(V)$ 是 $\mathbb{K}$-代数.

命题 3 对 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V, $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 定义 φ^n 为 n 个 φ 的复合. 则有：

(1) $\varphi^n \circ \varphi^m = \varphi^{n+m}$, $(\varphi^n)^m = \varphi^{nm}$.

(2) 若 φ 是 $\mathbb{K}$ 上的自同构, 则 φ^{-1} 也是 $\mathbb{K}$ 上的自同构, 且满足 $\varphi^{-n} = (\varphi^{-1})^n = (\varphi^n)^{-1}$.

(3) 约定 φ^0 为恒等映射 I_V.

注 线性变换的复合通常不满足交换律, 即一般来说 $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$.

命题 4 若 φ 与 ψ 均是 $\mathbb{K}$ 上的自同构, 则 $\varphi \circ \psi$ 也是自同构, 且 $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$; 对 $\forall k \in \mathbb{K}$ 且 $k \neq 0$, 若 φ 是自同构, 则 $k\varphi$ 也可逆, 且 $(k\varphi)^{-1} = k^{-1}\varphi^{-1}$.

4.3 线性映射与矩阵

定理 1 线性扩张定理：设 V,U 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基：

(1) 若有 $V\to U$ 的线性映射 φ 和 ψ, 满足 $\psi(e_i)=\varphi(e_i),(i=1,\cdots,n)$, 则 $\psi=\varphi$.

(2) 对给定的 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in U$, 存在唯一的线性映射 $\varphi:V\to U$, 满足 $\varphi(e_i)=\beta_i,(i=1,\cdots,n)$.

命题 1 对线性空间 V 及其直和分解 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$, 设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 分别是 $V_1,\cdots,V_m$ 到 U 的线性映射, 则存在唯一的 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,U)$, 使得 $\varphi\big|_{V_i}=\varphi_i$.

定义 1 设 V,U 分别是 $\mathbb{K}$ 上的 n,m 维线性空间, $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 分别是 V,U 的一组基, 对线性映射 $\varphi:V\to U$, 设

$$(*):\begin{cases}a_{11}f_1+\cdots+a_{m1}f_m=\varphi(e_1)\\ a_{12}f_1+\cdots+a_{m2}f_m=\varphi(e_2)\\ \qquad\cdots\\ a_{1n}f_1+\cdots+a_{mn}f_m=\varphi(e_n)\end{cases},$$

称 $(*)$ 系数矩阵的转置 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为 φ 在给定基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 与 $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 下的表示矩阵.

推论 表示矩阵 A 满足 $\Big(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_n)\Big)=\Big(f_1,\cdots,f_m\Big)A$. 当 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V)$, 即 φ 是线性变换时, 表示矩阵 $A_{n\times n}$ 满足 $\Big(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_n)\Big)=\Big(e_1,\cdots,e_n\Big)A$.

命题 2 设 V,U 分别是 $\mathbb{K}$ 上的 n,m 维线性空间, $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 分别是 V,U 的一组基, 对线性映射 $\varphi:V\to U$ 及 φ 在 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 与 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 下的表示矩阵 A, $\forall\alpha\in V$, α 在 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下的坐标向量 $X=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$, $\varphi(\alpha)$ 在 $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 下的坐标向量 $Y=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_m\end{pmatrix}$, 则 $Y=AX$.

命题 3 设 V,U 分别是 $\mathbb{K}$ 上的 n,m 维线性空间, 设 $T:\mathrm{Hom}(V,U)\to M_{m\times n}(\mathbb{K})\quad\varphi\mapsto A$(即 $T(\varphi)=A$), 其中 A 为 φ 在给定基下的表示矩阵, 则映射 $T:\mathrm{Hom}(V,U)\to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 是线性同构.

命题 4 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V, m 维线性空间 U, 分别给定基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\{f_1,\cdots,f_m\}$, 定义 η_1,η_2 分别为 V,U 中某向量到它在给定基下坐标向量的线性同构. 对线性映射 $\varphi:V\to U$ 及 $\varphi_M:\mathbb{K}_n\to\mathbb{K}_m\quad x\mapsto Mx,(M\in M_{m\times n}(\mathbb{K}))$, 记 A 为 φ 在给定基下的表示矩阵, 则下图是一个交换图：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_1"'] & U \arrow[d, "\eta_2"] \\ \mathbb{K}_n \arrow[r, "\varphi_A"] & \mathbb{K}_m \end{tikzcd}$$

这代表 $\eta_1\circ\varphi_A=\varphi\circ\eta_2$. 它本质上建立了几何与代数之间的关系.

命题 5 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V, m 维线性空间 U, p 维线性空间 W 及线性映射 $\varphi:V\to U$, $\psi:U\to W$, 复合映射 $\psi\circ\varphi$ 也是线性映射, 且 $T(\psi\circ\varphi)=T(\psi)T(\varphi)$.

推论 对 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 及 $T:\mathrm{Hom}(V)\to M_n(\mathbb{K})$：

(1)$T(I_V)=I_n$.

(2)T 保持乘法, 即此时线性同构 T 是 $\mathbb{K}$-代数, 称为 T 是 $\mathbb{K}$-代数同构.

(3)φ 是 V 上自同构的充要条件是 $T(\varphi)$ 非异, 且此时 $T(\varphi^{-1})=T(\varphi)^{-1}$.

注 该命题事实上说明了矩阵乘法的几何意义是线性映射的复合.

命题 6 对 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 及其两组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\{f_1,\cdots,f_n\}$, 及 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V)$, 设从基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 到 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 的过渡矩阵为 P, φ 在两组基下的表示矩阵分别为为 A,B, 则 $B=P^{-1}AP$.

定义 2 对 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 A,B, 若存在 n 阶非异阵 P, 使得 $B=P^{-1}AP$, 则称为 A 与 B 相似, 记为 $A\approx B$.

命题 7 矩阵的相似关系是等价关系, 即它满足：自反性 ($A\approx A$); 对称性 (若 $A\approx B$, 则 $B\approx A$); 传递性 (若 $A\approx B, B\approx C$, 则 $A\approx C$).

4.4 线性映射的像与核

定义 1 对 $\mathbb{K}$ 上 n,m 维线性空间 V,U, 对线性映射 $\varphi:V\to U$, 定义 φ 的像 $\mathrm{Im}\,\varphi=\{\varphi(\alpha)|\alpha\in V\}$ 为 φ 的全体像组成的集合, φ 的核 $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{\alpha\in V|\varphi(\alpha)=\mathbf{0}\}$ 为 $\mathbf{0}$ 在 φ 下的全体原像组成的集合.

命题 1 对线性映射 $\varphi:V\to U$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ 是 U 的子空间, 称作 φ 的像空间; $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 是 V 的子空间, 称作 φ 的核空间.

推论 φ 是满射等价于 $\dim\mathrm{Im}\,\varphi=\dim U$, φ 是单射等价于 $\mathrm{Ker}\,\varphi=0$ 或 $\dim\mathrm{Ker}\,\varphi=0$.

定义 2 对 $\mathbb{K}$ 上 n,m 维线性空间 V,U, 对线性映射 $\varphi:V\to U$, 称像空间维数 $\dim\mathrm{Im}\,\varphi$ 为 φ 的秩, 记作 $\mathrm{r}(\varphi)$; 核空间维数 $\dim\mathrm{Ker}\,\varphi$ 为 φ 的零度.

定义 3 对 $\mathbb{K}$ 上 n,m 维线性空间 V,U, 对线性映射 $\varphi:V\to U$, V',U' 分别为 V,U 的子空间且满足 $\varphi(V')\subseteq U'$, 则通过定义域的限制可得线性映射 $\varphi':V'\to U'$, 使得 φ' 与 φ 具有相同的映射法则, 这样的 φ' 称为 φ 的一个限制, 记作 $\varphi|_{V'}$.

推论 若 φ 是单射, 则 φ' 也是单射.

命题 2 设 $V,U\subset\mathbb{K}$, $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,U)$,

(1)φ 是单射的充要条件是 $\exists\psi\in\mathrm{Hom}(U,V)$, 使得 $\psi\circ\varphi=I_V$, 这里 I_V 表示 V 上的恒等映射.

(2)φ 是满射的充要条件是 $\exists\eta\in\mathrm{Hom}(U,V)$, 使得 $\varphi\circ\eta=I_U$, 这里 I_U 表示 U 上的恒等映射.

推广 设 $V,U\subset\mathbb{K}$, $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}(V,U)$, (1)$\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$ 的充要条件是 $\exists \xi \in \operatorname{Hom}(U)$, 使得 $\psi = \xi \circ \varphi$.

(2)$\operatorname{Im}\psi \subseteq \operatorname{Im}\varphi$ 的充要条件是 $\exists \xi \in \operatorname{Hom}(V)$, 使得 $\psi = \varphi \circ \xi$.

命题 3 对 $\mathbb{K}$ 上 n, m 维线性空间 V, U, 分别给定 V, U 的一组基, 对线性映射 $\varphi : V \to U$, 设 φ 在给定基下的表示矩阵为 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, 则 $\dim \operatorname{Im}\varphi = \mathrm{r}(\varphi) = \mathrm{r}(A)$, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n - \mathrm{r}(A)$.

推论 对线性映射 $\varphi : V \to U$, $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$.

命题 4 对 $\mathbb{K}$ 上 n, m 维线性空间 V, U, 分别给定 V, U 的一组基, 对线性映射 $\varphi : V \to U$, 设 φ 在给定基下的表示矩阵为 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, 则

(1)φ 是满射的充要条件是 A 行满秩, $\mathrm{r}(A) = m$.

(2)φ 是单射的充要条件是 A 列满秩, $\mathrm{r}(A) = n$.

推论 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V, U, 及线性映射 $\varphi : V \to U$, 则 φ 是线性同构当且仅当 φ 是单射或满射. 特别地, 对 V 上的线性变换 φ, φ 自同构当且仅当 φ 是单射或满射.

命题 5 对 $\mathbb{K}$ 上 n, m 维线性空间 V, U, 分别给定 V, U 的一组基, 对线性映射 $\varphi : V \to U$, 设 φ 在给定基下的表示矩阵为 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, 则求像空间和核空间的方法:

(1) 对表示矩阵 A 实施初等行变换 (列对换), 得到 A 的列向量极大无关组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}, (r = \mathrm{r}(A))$ 以及 $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系 $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}\}$.

(2)$\operatorname{Im}\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} k_i \eta_2^{-1}(\alpha_i)$, 其中 $\eta_2^{-1}(\alpha_i)$ 代表坐标向量 α_i 在 U 的给定基下的原像, $k_i \in \mathbb{K}$.

(3)$\operatorname{Ker}\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-r} l_i \eta_1^{-1}(\beta_i)$, 其中 $\eta_1^{-1}(\beta_i)$ 代表坐标向量 β_i 在 V 的给定基下的原像, $l_i \in \mathbb{K}$.

命题 6 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 则 $\exists m \in \mathbb{N}_+$, $m \leq n$, 使得:

$$\forall k \in \mathbb{N}_+,\ k \geq m,\ \operatorname{Im}\varphi^k = \operatorname{Im}\varphi^m;\ \operatorname{Ker}\varphi^k = \operatorname{Ker}\varphi^m;\ V = \operatorname{Im}\varphi^k \oplus \operatorname{Ker}\varphi^k.$$

推论 对 n 阶方阵 A, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $k \geq n$, $\mathrm{r}(A^k) = \mathrm{r}(A^n)$.

4.5 不变子空间

定义 1 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 及其子空间 U, $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 若 $\varphi(U) \subseteq U$, 则称 U 为 φ-不变子空间.

进一步, 若将定义域限制在 U 上, 得到的 U 上的线性变换 $\varphi\big|_U : U \to U$ 称作 φ 在 U 上的限制.

推论 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 零子空间 $\mathbf{0}$, 全空间 V, 核空间 $\operatorname{Ker}\varphi$, 像空间 $\operatorname{Im}\varphi$ 都是 φ-不变子空间. 其中, $\mathbf{0}, V$ 称作平凡的 φ-不变子空间.

命题 1 对 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 取 V 上向量组 $S = \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 若子空间 $U = L(S)$ 是由 S 张成的子空间, 则 U 是 φ-不变子空间的充要条件是 $\varphi(\alpha_i) \in U$, $(i = 1, \cdots, m)$.

命题 2 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 设 U 是 r 维 φ-不变子空间. 取 U 的基 $\{e_1, \cdots, e_r\}$, 并将其扩充为 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$, 则 φ 在这组基下的表示矩阵必定有 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$ 的形状, 其中 A 为 r 阶方阵且是 $\varphi\big|_U$ 的表示矩阵, D 为 $n-r$ 阶方阵.

注 上述逆命题也成立, 即若 φ 在基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$ 的形状, 其中 A 为 r 阶方阵, 则由 $\{e_1, \cdots, e_r\}$ 张成的子空间 U 是 φ 的不变子空间.

推论 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, $V = V_1 \oplus V_2$ 且 V_1, V_2 都是 φ-不变子空间. 设 $\{e_1, \cdots, e_r\}$, $\{e_{r+1}, \cdots, e_n\}$ 分别是 V_1, V_2 的一组基, 则 φ 在基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下的表示矩阵为分块对角阵 $\mathrm{diag}\{A, B\}$, 其中 A 为 r 阶方阵, B 为 $n-r$ 阶方阵, 且 A, B 分别是 $\varphi\big|_{V_1}, \varphi\big|_{V_2}$ 的表示矩阵. 该结论可以推广到 V 的 m 维直和分解.

命题 3 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 以下九个结论等价:

(1)$V = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\varphi$.

(2)$V = \mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi$.

(3)$\mathrm{Ker}\,\varphi \bigcap \mathrm{Im}\,\varphi = 0$.

(4)$\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi^2$.

(5)$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi^2$.

(6)$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\varphi^2$.

(7)$\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Im}\,\varphi^2$, 或记作 $\mathrm{r}(\varphi) = \mathrm{r}(\varphi^2)$.

(8)$\mathrm{Ker}\,\varphi$ 存在 φ-不变补空间, 即存在 φ-不变子空间 U, 使得 $V = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus U$.

(9)$\mathrm{Im}\,\varphi$ 存在 φ-不变补空间, 即存在 φ-不变子空间 W, 使得 $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus W$.

命题 4 对 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 及其子空间 U, W, 若 $\dim U + \dim W = \dim V$, 则存在 V 上的线性变换 φ, 使得 $\mathrm{Ker}\,\varphi = U$, $\mathrm{Im}\,\varphi = W$.

命题 5 设 V_1, V_2 是 V 上线性变换 φ 的不变子空间, 则 $V_1 \bigcap V_2$, $V_1 + V_2$ 也是 φ-不变子空间.

命题 6 对 $\mathbb{K}$ 上 $n \geq 2$ 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 则若 V 的任一 k, $(k = 1, \cdots, n-1)$ 维子空间都是 φ-不变子空间, 则 V 的任一非平凡子空间都是 φ-不变子空间, 且 φ 是纯量变换.

定义 2 线性变换 φ 若满足 $\varphi^2 = \varphi$, 则称 φ 为幂等变换.

定义 3 设 $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$ 为线性空间 V 关于 V_i 的直和分解, 则 V 中任一向量 v 可唯一分解为 $v = v_1 + \cdots + v_m$, 其中 $v_i \in V_i$.

定义 V 上的线性变换 φ_i 满足 $\varphi_i(v) = v_i$, 它们称作 V 到 V_i 的投影变换.

命题 7 投影变换有如下性质：

(1)$\varphi_i^2 = \varphi_i$, $\varphi_i\varphi_j = \mathbf{0}\,(i \neq j)$, $I_V = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$.

(2)$\operatorname{Im}\varphi_i = V_i$, $\operatorname{Ker}\varphi_i = \bigoplus\limits_{j \neq i} V_j$, $V = \operatorname{Im}\varphi_i \oplus \operatorname{Ker}\varphi_i$.

(3)$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\varphi_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}\varphi_i = 0$.

命题 8 设 φ 是线性空间 V 上的幂等变换, 则 $V = U \oplus W$, 且 φ 是从 V 到 U 的投影变换, 其中

$$U = \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}(I_V - \varphi),\ W = \operatorname{Im}(I_V - \varphi) = \operatorname{Ker}\varphi.$$

注 设 φ 是线性空间 V 上的幂等变换, 则存在 V 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为分块对角阵的形式. 若记 $\dim\operatorname{Im}\varphi = r$, 则其可表示为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

5 多项式

5.1 一元多项式代数

定义 1 设 $\mathbb{K}$ 是数域, x 为一个形式符号 (称为未定元), 若 $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}, (a_n \neq 0, n \geq 0)$, 称形式表达式 $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上关于 x 的一元 n 次多项式. $\mathbb{K}$ 上一元多项式全体记为 $\mathbb{K}[x]$.

若 $a_n \neq 0$, 则定义 $f(x)$ 的次数 $\deg f(x) = n$, 约定零多项式的次数 $\deg 0 = 0$.

定义 2 两个多项式称为相等当且仅当它们次数相同且各次项的系数相等, 即若

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

则 $f(x) = g(x)$ 当且仅当 $m = n, a_i = b_i, (i = 0, \cdots, n)$.

定义 3 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $k \in \mathbb{K}$, 设 $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, 记

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,$$

不妨设 $n \geq m$, 则定义：

(1) $f(x) + g(x) = a_n x^n + \cdots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$.

(2) $kf(x) = ka_n x^n + \cdots + ka_1 x + ka_0$.

(3) $f(x) \cdot g(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \cdots + c_1 x + c_0$, 其中 $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$.

注 $\mathbb{K}[x]$ 在加法与数乘之下构成 $\mathbb{K}$ 上的线性空间.

命题 1 $\mathbb{K}[x]$ 上的乘法满足如下的规则：

(1) 交换律：$f(x)g(x) = g(x)f(x)$.

(2) 结合律：$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$.

(3) 分配律：$(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$.

(4) 数乘：$c(f(x)g(x)) = (cf(x))g(x) = f(x)(cg(x))$, 其中 $c \in \mathbb{K}$.

(5) 乘法单位元：$1 \cdot f(x) = f(x)$, 其中 1 代表多项式 $g(x) = 1$.

于是, $\mathbb{K}[x]$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 (交换) 代数, 一般称作 $\mathbb{K}$ 上的一元多项式代数或一元多项式环.

命题 2 若 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则 $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

命题 3 整性：若 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则 $f(x)g(x) \neq 0$ 的充要条件是 $f(x) \neq 0$ 且 $g(x) \neq 0$.

推论 若 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$ 且 $f(x) \neq 0$, 则 $g(x) = h(x)$ 的充要条件是 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$.

命题 4 若 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $c \in \mathbb{K}$ 且 $c \neq 0$, 则：

$$\deg(cf(x)) = \deg f(x),\ \deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

5.2 整除

定义 1 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 若 $\exists h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $f(x) = g(x)h(x)$, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式或 $g(x)$ 可以整除 $f(x)$, 记为 $g(x)|f(x)$. 否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

命题 1 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$, $c \in \mathbb{K}$ 且 $c \neq 0$, 则：

(1) 若 $f(x)|g(x)$, 则 $cf(x)|g(x)$, 因此非零常数多项式 c 是任一非零多项式的因子.

(2) $f(x)|f(x)$.

(3) 若 $f(x)|g(x)$, $g(x)|h(x)$, 则 $f(x)|h(x)$.

(4) 若 $f(x)|g(x)$, $f(x)|h(x)$, 则对任意的多项式 $u(x), v(x)$, 有 $f(x)|g(x)u(x) + h(x)v(x)$.

(5) 设 $f(x)|g(x)$, $g(x)|f(x)$ 且 $f(x), g(x)$ 都是非零多项式, 则存在 $\mathbb{K}$ 中非零元 c, 使 $f(x) = cg(x)$.

注 可以互相整除的两个多项式 $f(x), g(x)$ 称为相伴多项式, 记作 $f(x) \sim g(x)$.

定理 1 多项式带余除法：设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $g(x) \neq 0$, 则存在唯一的 $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得：

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x).$$

推论 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $g(x) \neq 0$, 则 $g(x)|f(x)$ 的充要条件是带余除法中 $r(x) = 0$.

5.3 最大公因式

定义 1 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式, 且对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式 $h(x)$ 均有 $h(x)|d(x)$, 则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 记为 $d(x) = (f(x), g(x))$ 或 $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$.

同理, 若 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公倍式, 且对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公倍式 $l(x)$ 均有 $m(x)|l(x)$, 则称 $m(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式, 记为 $m(x) = [f(x), g(x)]$ 或 $m(x) = \mathrm{lcm}(f(x), g(x))$.

注 约定最大公因式, 最小公倍式均为首一多项式, 这时最大公因式, 最小公倍式均存在且唯一.

定理 1 Euclid 辗转相除法：设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $d(x) = (f(x), g(x))$, 则 $\exists u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$.

命题 1 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则 $((f(x), g(x)), h(x)) = (f(x), (g(x), h(x))) = (f(x), g(x), h(x))$.

定义 2 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

命题 2 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$：

(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是 $\exists\, u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

(2) 若 $g(x)|f(x)$, $h(x)|f(x)$ 且 $g(x), h(x)$ 互素, 则 $g(x)h(x)|f(x)$.

(3) 若 $f(x)|g(x)h(x)$ 且 $f(x), g(x)$ 互素, 则 $f(x)|h(x)$.

(4) 设 $d(x) = (f(x), g(x))$, 记 $f(x) = d(x)u(x)$, $g(x) = d(x)v(x)$, 则 $u(x), v(x)$ 互素.

(5) 设 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则 $(h(x)f(x), h(x)g(x)) = h(x)d(x)$.

(6) 若 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 则 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

(7) 若 $f(x), g(x) \neq 0$, 则 $f(x)g(x) \sim (f(x), g(x))[f(x), g(x)]$.

定理 2 中国剩余定理：对 n 个两两互素的多项式 $f_i(x) \in \mathbb{K}[x], (i = 1, \cdots, n)$ 及 n 个多项式 $r_i(x), (i = 1, \cdots, n)$, $\exists\, g(x), q_i(x)$, 使得 $g(x) = f_i(x)q_i(x) + r_i(x)$, $(i = 1, \cdots, n)$ 成立.

5.4 因式分解

定义 1 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非常数多项式, 若 $f(x)$ 可以分解为两个次数小于 $f(x)$ 次数的 $\mathbb{K}$ 上多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可约多项式. 否则, 称之为 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式.

命题 1 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, 则 $\forall g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $f(x)|g(x)$ 或 $(f(x), g(x)) = 1$.

命题 2 素性：若 $p(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ 且 $p(x)|f(x)g(x)$, 则 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$.

推论 设 $p(x)$ 为不可约多项式且 $p(x)|f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$, 则 $p(x)$ 必可整除其中某个 $f_i(x)$.

命题 3 因式分解：设 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ 且 $\deg f(x) \geq 1$, 则

(1) $f(x)$ 可分解为 $\mathbb{K}$ 上的有限个不可约多项式之积.

(2) 若 $f(x) = p_1(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)\cdots q_t(x)$ 是 $f(x)$ 的两个不可约分解, 即 $p_i(x), q_j(x), (i = 1, \cdots, s;\ j = 1, \cdots, t)$ 都是 $\mathbb{K}$ 上的次数大于零的不可约多项式, 则 $s = t$, 且经过适当调换因式的次序以后, 有 $q_i(x) \sim p_i(x), (i = 1, 2, \cdots, s)$.

注 这表示任一多项式可唯一分解为若干个不可约多项式之积, 这里的唯一是相伴意义下的唯一.

定义 2 设 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ 且 $\deg f(x) \geq 1$, 则定义其标准因式分解 $f(x) = c\prod\limits_{i=1}^{m} p_i(x)^{e_i}$, 其中 $c \neq 0$, $p_i(x)$ 是互异的首一不可约多项式, $e_i \geq 1, (i = 1, \cdots, m)$.

命题 4 设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的两个多项式, 设它们有如下的分解式：

$$f(x) = c\prod_{i=1}^{m} p_i(x)^{e_i},\ g(x) = d\prod_{i=1}^{m} p_i(x)^{f_i},$$

其中 $e_i \geq 0, f_i \geq 0, (i = 1, \cdots, n)$, 则：

$(1)(f(x), g(x)) = \prod_{i=1}^{m} p_i(x)^{k_i}$, 其中 $k_i = \min\{e_i, f_i\}, (i = 1, \cdots, n)$.

$(2)[f(x), g(x)] = \prod_{i=1}^{m} p_i(x)^{h_i}$, 其中 $h_i = \max\{e_i, f_i\}, (i = 1, \cdots, n)$.

定义 3 设 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ 且标准分解为 $f(x) = c\prod_{i=1}^{m} p_i(x)^{e_i}$, 若 $e_i > 1$, 则称 $p_i(x)$ 为 $f(x)$ 的 e_i 次重因式; 若 $e_j = 1$, 则称 $p_j(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式.

定义 4 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, 定义其形式导数

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

命题 5 数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(x)$ 没有重因式的充要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

命题 6 对数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(x)$, 记 $d(x) = (f(x), f'(x))$, 则 $\dfrac{f(x)}{d(x)}$ 无重因式且有与 $f(x)$ 相同的不可约因式.

5.5 多项式函数

定义 1 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, 对 $b \in \mathbb{K}$, 定义 $f(b) = a_n b^n + \cdots + a_1 b + a_0$ 为 $f(x)$ 在点 b 处的值, 这里称多项式 $f(x)$ 为 $\mathbb{K}$ 上的多项式函数.

定义 2 设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], b \in \mathbb{K}$, 若 $f(b) = 0$, 则称 b 是 $f(x)$ 的一个根或零点.

定理 1 余数定理：设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], b \in \mathbb{K}$, 则 $\exists\, g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $f(x) = (x-b)g(x) + f(b)$, b 是 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x-b)|f(x)$.

定义 3 设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], b \in \mathbb{K}$, 若存在正整数 k, 使 $(x-b)^k|f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 b 是 $f(x)$ 的一个 k 重根. 若 $k = 1$, 则称 b 为单根.

命题 1 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式且 $\deg f(x) \geq 2$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中没有根.

命题 2 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中最多有 n 个根.

命题 3 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}, \deg f(x) \leq n, \deg g(x) \leq n$, 若存在 $\mathbb{K}$ 上 $n+1$ 个不同的数 $b_1, \cdots, b_{n+1}$, 使 $f(b_i) = g(b_i), (i = 1, \cdots, n+1)$, 则 $f(x) = g(x)$.

注 在非数域的一般域上, 多项式相等不意味着多项式函数相等.

命题 4 设 $f(x), g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式, φ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $f(\varphi)g(\varphi)=0$, 则 $V=V_1\oplus V_2$, 其中 $V_1=\operatorname{Ker} f(\varphi)$, $V_2=\operatorname{Ker} g(\varphi)$.

命题 5 设 $f(x), g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式, A 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 则 $f(A)g(A)=O$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(f(A))+\mathrm{r}(g(A))=n$.

推论 设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式, A 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 若 $f(A)=O$, 则 $g(A)$ 可逆.

5.6 复系数多项式

定理 1 代数基本定理：每个次数大于 0 的复系数多项式都至少有一个复数根.

推论 一元复系数 n 次多项式恰有 n 个复根 (包括重根).

命题 1 复系数不可约多项式都是一次多项式, 一元复系数 n 次多项式必可分解为 n 个一次因式之积.

定理 2 Vieta 定理：对 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{K}[x]$, 及 $\mathbb{K}$ 中的 n 个根 $x_1,\cdots,x_n$, 有：

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_r}=(-1)^r\frac{a_r}{a_0}.$$

注 一般地, 求一元多项式的根式解时, 三次方程使用 Cardan 公式, 四次方程用 Ferrari 方法, 五次及以上方程用 Galois 理论.

5.7 实系数多项式和有理系数多项式

定理 1 虚根共轭原理：对实系数多项式 $f(x)$, 若复数 $a+b\mathrm{i}$, $b\neq 0$ 是 $f(x)$ 的一个虚根, 则 $a-b\mathrm{i}$ 也是 $f(x)$ 的虚根.

定理 2 实系数不可约多项式都是一次或二次多项式, 一元实系数多项式必可分解为若干个一次因式及不可约二次因式之积.

命题 1 对整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 若既约有理数 $\dfrac{q}{p}$ 是它的根, 则 $p|a_n$, $q|a_0$.

定义 1 对整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 若 $a_n,\cdots,a_0$ 的无大于 1 公共因子, 则称 $f(x)$ 是本原多项式.

定理 3 Gauss 引理：两个本原多项式之积仍是本原多项式.

命题 2 对整系数多项式 $f(x)$, 它在 $\mathbb{Q}$ 上可约的充要条件是它在 $\mathbb{Z}$ 上可约.

定理 4 Eisenstein 判别法：对整系数多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_+)$, 若存在素数 p, 使得 $p | a_i$, $(i = 0, \cdots, n-1)$ 但 $p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

定理 5 Osada 判别法：对整系数首一多项式 $f(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $(n \in \mathbb{N}_+)$, 若成立 $|a_0| > 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} |a_i|$ 且 $|a_0|$ 是素数, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

定义 2 设 $u \in \mathbb{C}$, 若对某个非零有理系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 有 $f(u) = 0$, 则称 u 是一个代数数. 对任一代数数 u, 存在唯一一个首一有理系数多项式 $g(x)$, 使得 $g(x)$ 是满足 $f(u) = 0$ 的所有非零有理系数多项式中次数最小者. 这样的 $g(x)$ 称为 u 的极小多项式或最小多项式.

命题 3 设 u 是代数数, $g(x)$ 是满足 $g(u) = 0$ 的首一有理系数多项式, 则 $g(x)$ 是 u 的极小多项式的充要条件是 $g(x)$ 是有理数域上的不可约多项式.

5.8 多元多项式

定义 1 对数域 $\mathbb{K}$ 及 n 个未定元 $x_1, \cdots, x_n$, 称 $a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ 为一个单项式, 其中 $a \in \mathbb{K}$ 是系数, $i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}$. 若 $a \neq 0$, 则定义其次数 $i = i_1 + \cdots + i_n$.

若两个单项式中未定元相同且相同未定元的次数相同, 则称这两个单项式为同类项.

定义 2 有限个单项式的形式和

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

称为多元多项式. 定义其次数为和式中单项式的最高次数.

命题 1 数域 $\mathbb{K}$ 上的关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 n 元多项式全体在多项式的加法和数乘下构成 $\mathbb{K}$ 上的代数, 称为关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 n 元多项式环.

定义 3 字典排列法：记未定元的自然下标排序为 $x_1, \cdots, x_n$, 若 $\exists 1 \leq k \leq n$, 使得 x_k 之前的未定元指数均一样, 则按照 x_k 的指数降幂排列. 即对于 n 元多项式中进行排序时, 先对含 x_1 的项对 x_1 降幂排列, 再依次按照未定元的自然下标排序降幂排列.

命题 2 整性：设 $0 \neq f, g \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, 则 $fg \neq 0$.

推论 乘法消去律：设 $f, g, h \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, $(h \neq 0)$, 若 $fh = gh$, 则 $f = g$.

定义 4 若多项式 f 的所有单项式都是 m 次的, 则称 f 为 m 次齐次多项式或 m 次型.

命题 3 设 $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, 则

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g,\ \deg(f \pm g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}.$$

5.9 对称多项式

定义 1 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元多项式, 若对任意的 $i \neq j (1 \leq i, j \leq n)$, 均有：

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n),$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元对称多项式.

定义 1 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是数组 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个全排列. 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个对称多项式, 则：

$$f(x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

称 $x_1 \to x_{k_1}, \cdots, x_n \to x_{k_n}$ 是未定元的一个置换. 因此对称多项式在未定元的任一置换下不变.

定义 2 定义 n 元初等对称多项式为多项式：

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n}^{n} \prod_{k=1}^{j} x_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n}^{n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}.$$

定理 1 对称多项式基本定理：设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的对称多项式, 则必存在 $\mathbb{K}$ 上唯一的一个多项式 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 使得：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

定义 3 称如下多项式为 $x_1, \cdots, x_n$ 的 Fermat 和：

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,\ (k \geq 1);\ s_0 = n.$$

命题 1 记 s_i 为 Fermat 和, σ_i 为 n 元初等对称多项式, 则对多项式

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n,$$

有如下结论：

$$x^{k+1} f'(x) = (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k) f(x) + g(x),$$

其中 $\deg g(x) < n$.

定理 2 Newton 公式: 记 s_i 为 Fermat 和, σ_i 为 n 元初等对称多项式, 则：

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0,\ (k \leq n-1);$$

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^n s_{k-n} \sigma_n = 0,\ (k \geq n).$$

5.10 结式和判别式

命题 1 对数域 $\mathbb{K}$ 上的两多项式 $f(x), g(x)$, 它们在 $\mathbb{K}$ 上互素等价于它们在复数域 $\mathbb{C}$ 上互素.

命题 2 对数域 $\mathbb{K}$ 上的两多项式 $f(x), g(x)$, 它们在 $\mathbb{K}$ 上不互素的充要条件是存在 $\mathbb{K}$ 上的非零多项式 $u(x), v(x)$, 使得:

$$f(x)u(x) = g(x)v(x), \deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x).$$

定义 1 设

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,\ g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m.$$

定义下列 $m+n$ 阶行列式:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式, 或称其为 Sylvester 行列式.

命题 3 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域中有公根的充要条件是它们的结式 $R(f,g)=0$.

推论 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是 $R(f,g) \neq 0$.

命题 4 对 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则:

$$R(f(x), g(x)(x-\lambda)) = (-1)^n f(\lambda) R(f,g), R(f(x), x-\lambda) = (-1)^n f(\lambda).$$

命题 5 设

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,\ g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

$f(x)$ 的根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $g(x)$ 的根为 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式为:

$$R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (x_i - y_j).$$

定义 2 多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的判别式定义为:

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_0^{-1} R(f, f').$$

命题 6 对多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 及其根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则它的判别式

$$\Delta(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2 .$$

推论 多项式 $f(x)$ 有重根的充要条件是它的判别式 $\Delta(f)=0$.

6 特征值

6.1 特征值和特征向量

定义 1 对线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 若 $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbf{0} \neq e \in V$, 使得 $\varphi(e) = \lambda e$, 则称 λ 为 φ 的特征值, e 为 φ 的关于特征值 λ 的特征向量.

令 $V_\lambda = \{v \in V \big| \varphi(v) = \lambda v\}$ 是由 λ 的特征向量和零向量所构成的子空间, 则它是 V 的 φ-不变子空间, 称为特征值 λ 的特征子空间.

定义 2 代数语言：设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 若 $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbf{0} \neq \alpha \in \mathbb{K}_n$, 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则称 λ 为 A 的特征值, α 为 A 的关于特征值 λ 的特征向量.

令 V_λ 是线性方程组 $(\lambda I_n - A)x = \mathbf{0}$ 的解空间, 则称其为特征值 λ 的特征子空间.

定义 3 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 称 $\lambda I_n - A$ 为 A 的特征矩阵; $f(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ 为 A 的特征多项式, 它是一个以 λ 为未知数的 n 次首一多项式, 特征值便是它的根.

命题 1 相似矩阵有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值 (计重根).

定义 4 对线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 对任意一组基下的表示阵 A, 则 φ 的特征多项式定义为 $|\lambda I_n - A|$, 也记为 $|\lambda I_V - \varphi|$.

注 对取定的线性变换, 特征多项式的定义不依赖于基或表示阵的选取.

命题 2 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 且 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda_{n-1} + \cdots + a_n$, 则：

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathrm{tr}A, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|, \quad a_1 = -\mathrm{tr}A, \quad a_n = (-1)^n|A|.$$

推广 更一般地, $(-1)^j a_j = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n}^n \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_j} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n}^n A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_j \\ i_1 & \cdots & i_j \end{pmatrix}$.

推论 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $|A|$ 是非异阵的充要条件是 A 的特征值全部不为 0.

命题 3 对上 (下) 三角阵 A, 它的特征值就是它的主对角元.

命题 4 任一复方阵必定复相似与一上三角阵.

注 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 若 A 特征值全在 $\mathbb{K}$ 中, 则 A 相似于 $\mathbb{K}$ 上的三角阵.

命题 5 设 A 是数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, $f(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的多项式, 则 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

命题 6 设 n 阶矩阵 A 适合多项式 $g(x)$, 即 $g(A) = O$, 则 A 的任一特征值也适合 $g(x)$.

命题 7 设 n 阶非异阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 A^{-1} 的特征值为 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$.

若记 $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, 则 A 的伴随 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_1}, \cdots, \dfrac{|A|}{\lambda_n}$.

推论 多项式的逆, 伴随与相似关系相容, 即对相似关系整体作上述变换等价于对原矩阵作相同的变换, 且过渡矩阵不改变.

定义 5 对 n 阶分块对角阵 $A = \operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_m\}$, 其中 A_i 是 n_i 阶复方阵, 对 A_i 的任一特征值 λ_j 及其对应的特征向量 α_j, 则可在 α_j 的上下添加适当多的零, 得到非零向量 β_j, 使得 β_i 是 A 关于 λ_i 的特征向量, 此时称 β_i 为 α_i 的延拓.

命题 8 对 n 阶分块对角阵 $A = \operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_m\}$, 其中 A_i 是 n_i 阶复方阵, 设 λ_0 是 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_r}$ 的特征值, 但不是其他分块的特征值, 则 A 关于 λ_0 的特征子空间的一组基可取为 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_r}$ 关于 λ_0 的特征子空间的基延拓的并集.

命题 9 基础循环阵 $J = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_i = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $(k = 0, \cdots, n-1)$.

命题 10 特征值降阶公式: 对两矩阵 $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $(m \geq n)$, 则 $|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$.

推论 对两矩阵 $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $(m \geq n)$ 且 $BA \neq \mathbf{0}$, 则 AB 可对角化的充要条件是 BA 可对角化.

6.2 对角化

定义 1 对线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 若 φ 在某组基下的表示阵为对角阵, 则称 φ 可对角化.

对 n 阶方阵 A, 若 A 相似于对角阵, 则称 A 可对角化.

命题 1 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 则 φ 可对角化的充要条件是 φ 有 n 个线性无关的特征向量.

命题 2 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 则属于 φ 的不同特征值的特征向量一定线性无关.

定义 2 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 设 λ_0 为 φ 的特征值, V_0 是对应的特征子空间, 则称 $\dim V_0$ 为 λ_0 的度数或几何重数, λ_0 作为 φ 的特征多项式根的重数称作 λ_0 的重数或代数重数.

命题 3 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 对其任一特征值, 它的几何重数小于等于代数重数.

推论 若某特征值的代数重数为 1, 则其几何重数必定为 1.

定义 3 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$, 若对 φ 的任一特征值 λ, 其几何重数和代数重数相等, 则称 φ 有完全的特征向量系.

命题 4 对分块对角阵 $A = \operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_n\}$, 则 A 的代数重数或几何重数为各分块代数重数或几何重数之和.

命题 5 对 n 阶复方阵 A, 以下六个命题两两等价：

(1)A 可对角化;

(2)A 有 n 个线性无关的特征向量;

(3)n 维复列向量空间 $\mathbb{C}_n$ 是 A 的特征子空间直和;

(4)A 有完全的特征向量系;

(5)A 的极小多项式无重根;

(6)A 的初等因子都是一次多项式.

注 若 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 必可对角化; 反之不一定成立.

命题 6 对可对角化的 n 阶方阵 A, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是其对应的特征向量, 若设 $\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_n\right) = P$, 则 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 是对角阵.

注 由于特征向量不唯一, 故 P 不唯一. 注意 P 的第 i 列向量对应第 i 个特征值.

命题 7 若矩阵问题的条件和结论在相抵 (相似, 合同) 关系下不变, 则可直接讨论标准型的情况.

命题 8 若 A 可对角化, 则对任意多项式 $f(x)$, $f(A)$ 也可对角化.

命题 9 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值, 则对任意 n 阶方阵 B, 它可对角化的充要条件是存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 B 相似于 $f(A)$.

注 事实上, 该多项式若存在则必唯一, 唯一性由 Lagrange 插值公式给定.

推论 n 阶复方阵 B 可对角化的充要条件是 B 相似于某个循环矩阵.

命题 10 乘法交换性诱导的同时性质：对满足 $AB = BA$ 的 n 阶复方阵 A, B, 有：

(1)A 的任一特征子空间是 B-不变子空间;

(2)A, B 至少有一个公共特征向量;

(3)A, B 可同时上三角化;

(4) 若 A, B 均可对角化, 则 A, B 可同时对角化;

(5) 若 A, B 与它们的特征值都在 $\mathbb{K}$ 上, 则上面四条性质在 $\mathbb{K}$ 上也成立.

推广 1 上述对满足两两乘法可交换的 n 阶复方阵 $A_1, \cdots, A_m$ 也成立, 即它们至少有一个公共的特征向量, 且可同时上三角化 (对角化).

推广 2 对满足两两乘法可交换的 n 阶实方阵 $A_1, \cdots, A_m$, 若阶数 n 是奇数, 则它们也至少有一个公共的特征向量.

6.3 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

定义 1 若 n 阶方阵 A(或 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ) 适合一个非零首一多项式 $m(x)$, 且 $m(x)$ 是 A(或 φ) 所适合的所有非零多项式中次数最小的, 则称 $m(x)$ 是 A(或 φ) 的一个极小多项式.

命题 1 A 的极小多项式 $m(x)$ 整除 A 所适合的任意多项式 $f(x)$.

推论 任一 n 阶方阵 A 的极小多项式 $m(x)$ 存在且唯一.

注 矩阵的极小多项式不一定不可约.

命题 2 相似的矩阵具有相同的极小多项式, 即极小多项式是相似关系下的不变量.

命题 3 设 $A = \mathrm{diag}\{A_1, \cdots, A_k\}$, 其中 A_i 是方阵且 A_i 的极小多项式是 $m_i(x)$, 则 A 的极小多项式 $m(x)$ 是 $m_i(x)$ 的最小公倍式, 即 $m(x) = [m_1(x), \cdots, m_i(x)]$.

命题 4 设 n 阶方阵 A 可对角化, 且其全部不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 则 A 的极小多项式为

$$m(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i).$$

推论 设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的任一特征值, $m(x)$ 是其极小多项式, 则 $(x - \lambda_0)\big|m(x)$.

定理 1 Cayley-Hamilton 定理: 设 A 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $f(x)$ 是 A 的特征多项式, 则 $f(A) = O$.

推论 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $f(x)$, 极小多项式为 $m(x)$,

(1) $m(x)|f(x)$, $f(x)|m(x)^n$. 特别地, $0 \le \deg m(x) \le n$.

(2) 不计重数的情况下, $f(x)$ 与 $m(x)$ 有相同的根.

注 几何语言: 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, $f(x) = |xI_V - \varphi|$ 是其特征多项式, 则 $f(\varphi) = \mathbf{0}$.

命题 5 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是 A 的极小多项式的常数项不为 0.

命题 6 摄动法: 不可对角化的矩阵 A 可利用一列可对角化的互异矩阵 A_{t_k} 连续逼近; 然后证明该问题对可对角化的矩阵成立, 并说明问题对于 t_k 连续即可得到对一般情况的证明.

命题 7 对 m 阶方阵 A, n 阶方阵 B, 若 A, B 无公共特征值, 则矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.

命题 8 设 n 阶方阵 A 适合首一多项式 $g(x)$ 且 $g(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无重根, 则 A 可对角化.

命题 9 对 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 A 及 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式 $f(x), g(x)$, 若二者在 $\mathbb{C}$ 上都无重根, 且 $\mathrm{r}(f(A)) + \mathrm{r}(g(A)) = n$, 则 A 可对角化.

命题 10 对 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 设 φ 的特征多项式是 $f(\lambda)$. 若存在互素的首一多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$, 使得 $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$, 记 $\mathrm{Ker}\, f_1(\varphi) = V_1$, $\mathrm{Ker}\, f_2(\varphi) = V_2$, 则:

(1)V_1, V_2 都是 φ-不变子空间, 且 $V = V_1 \oplus V_2$;

(2)$V_1 = \operatorname{Im} f_2(\varphi)$, $V_2 = \operatorname{Im} f_1(\varphi)$;

(3)$\varphi\big|_{V_1}$ 的特征多项式是 $f_1(\lambda)$, $\varphi\big|_{V_2}$ 的特征多项式是 $f_2(\lambda)$;

(4)$\mathrm{r}(f_1(\varphi)) = \dim V_2 = \deg f_2(\lambda)$, $\mathrm{r}(f_2(\varphi)) = \dim V_1 = \deg f_1(\lambda)$.

注 这告诉我们, 线性变换特征多项式的互素因式分解可以诱导出全空间的直和分解.

命题 11 对 m 阶方阵 A 及其特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, n 阶方阵 B 及其特征值 $\mu_1, \cdots, \mu_n$, 则 $A \otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i \mu_j$, $(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$, 其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积.

命题 12 对 $\mathbb{K}$ 上 m 阶方阵 A 及其特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, n 阶方阵 B 及其特征值 $\mu_1, \cdots, \mu_n$, 设 V 是 $\mathbb{K}$ 上 $m \times n$ 矩阵全体构成的线性空间,

(1) 定义 V 上线性变换 $\varphi(X) = AXB$, 则 φ 全体特征值为 $\lambda_i \mu_j$, $(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$.

(2) 定义 V 上线性变换 $\psi(X) = AX - XB$, 则 ψ 全体特征值为 $\lambda_i - \mu_j$, $(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$.

推论 1 此时, φ 是线性同构的充要条件是 A, B 均可逆.

推论 2 此时, 若 A, B 在 $\mathbb{C}$ 上无公共特征值, 则 ψ 是线性同构; 此时对任一矩阵 $C_{m \times n}$, 矩阵方程 $AX - XB = C$ 存在唯一解.

6.4 特征值的估计

定理 1 戈氏圆盘第一定理：设 $A = (a_{ij})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵, 则其特征值 λ_i 落在如下圆盘中：

$$|z - a_{ii}| \le R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|, \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

这样的圆盘被称作戈氏圆盘 (Gerschgorin 圆盘).

定义 1 若 n 个戈氏圆盘相连, 则称相连的区域 (包括圆周) 为连通区域, 称这些圆盘为连通圆盘.

命题 1 对关于 x 的 n 次复系数多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, 它的 n 个根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 关于 $f(x)$ 的系数 $a_n, \cdots, a_0$ 连续.

定理 2 戈氏圆盘第二定理：设 k 个戈氏圆盘构成一个连通区域, 则有且只有 k 个特征值落在这一连通区域中. 若戈氏圆盘重合或特征值为重根, 则需要计算重数.

7 相似标准型

7.1 多项式矩阵

定义 1 设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 其中 $a_{ij}(\lambda)$ 是关于未定元 λ 的多项式, 则称 $A(\lambda)$ 为 λ-矩阵.

注 λ-矩阵的相等、加法、数乘与乘法的定义与数字矩阵相同, 只需在运算过程中将数的运算代之以多项式运算即可.

定义 2 下列三种变换称为 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的初等变换:

(1) 第一类：对换 $A(\lambda)$ 矩阵中某两行 (列) 的位置.

(2) 第二类：用一非零常数 c 乘以 $A(\lambda)$ 的某一行 (列).

(3) 第三类：将 $A(\lambda)$ 的某一行 (列) 乘以多项式 $f(\lambda)$ 后加到另一行 (列) 上.

定义 3 对单位矩阵 I_n 进行三类 λ-矩阵的初等变换后得到的 λ-矩阵称为三类初等 λ-矩阵：

(1) 第一类：P_{ij} 表示将 I_n 的 i,j 两行对换后得到的 λ-矩阵.

(2) 第二类：$P_i(c)$ 表示将常数 c 乘以第 i 行后得到的 λ-矩阵.

(3) 第三类：$T_{ij}(f(\lambda))$ 表示将 I_n 的第 i 行乘多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上得到的 λ-矩阵.

命题 1 λ-矩阵的初等行 (列) 变换等价于左 (右) 乘对应的初等 λ-矩阵.

(1) 将 $A(\lambda)$ 的 i,j 两行对换后得到的矩阵为 $P_{ij}A(\lambda)$, 对应的列变换后为 $A(\lambda)P_{ij}$.

(2) 将常数 c 左乘 $A(\lambda)$ 的第 i 行后得到的矩阵为 $P_i(c)A(\lambda)$, 对应的列变换后为 $A(\lambda)P_i(c)$.

(3) 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上得到的矩阵为 $T_{ij}(f(\lambda))A(\lambda)$, 对应的列变换后为 $A(\lambda)T_{ji}(f(\lambda))$.

定义 4 若 $A(\lambda)$ 通过若干次 λ-矩阵的初等变换可变为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)$.

注 易证 λ-矩阵的相抵关系是等价关系.

定义 5 设 $A(\lambda),B(\lambda)$ 是 n 阶 λ-阵, 若 $A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$, 则称 $A(\lambda)$ 为可逆 λ-阵, 称 $B(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的逆阵, 记作 $A(\lambda)^{-1}$.

命题 2 初等 λ-矩阵都是可逆阵, $P_{ij}^{-1}=P_{ij}$, $P_i(c)^{-1}=P_i(c^{-1})$, $T_{ij}(f(\lambda))^{-1}=T_{ij}(-f(\lambda))$.

定义 6 对 n 阶 λ-矩阵 $M(\lambda)$, 它的如下表达式

$$M(\lambda)=M_m\lambda^m+M_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+M_1\lambda+M_0$$

被称作 $M(\lambda)$ 的矩阵多项式形式. 若 $M_m\neq 0$, 定义 $\deg M(\lambda)=m$; 约定 $\deg\mathbf{0}=-\infty$.

命题 3 带余除法：对 n 阶 λ-矩阵 $M(\lambda)$, n 阶数字矩阵 B, 则存在 λ-矩阵 $Q(\lambda)$, $S(\lambda)$ 及数字矩阵 R, T, 使得成立带余除式：

$$M(\lambda) = (\lambda I - B)Q(\lambda) + R = S(\lambda)(\lambda I - B) + T.$$

注 事实上, 这里的除式 $Q(\lambda), S(\lambda)$ 及余式 R, T 都是唯一确定的.

定理 1 设 A, B 是 n 阶数字方阵, 则 A 与 B 相似的充要条件是 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 相抵.

7.2 矩阵的法式

命题 1 设 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 是非零 λ-矩阵, 则 $A(\lambda)$ 必相抵于 $B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 它满足

$$b_{11}(\lambda) \neq \mathbf{0},\ b_{11}(\lambda)|b_{ij}(\lambda),\ (\forall 1 \leq i, j \leq n).$$

定理 1 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵, 则 $A(\lambda)$ 相抵于如下形式的矩阵：

$$B(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, \cdots, r-1)$.

推广 对非零 λ-矩阵 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 则其相抵于如下形式的矩阵：

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} B'(\lambda) & O \\ O & O \end{pmatrix},\ B'(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)\}.$$

注 主对角线上非零多项式个数 r 也被称为 $A(\lambda)$ 的秩, 但是 $\mathrm{r}(A(\lambda)) = n$ 不能得到 $A(\lambda)$ 可逆.

定义 1 称上述定理 1 中的对角 λ 矩阵 $B(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的法式或相抵标准型.

命题 2 对 n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$, 以下结论等价：

(1)$A(\lambda)$ 是可逆 λ-矩阵;

(2)$|A(\lambda)|$ 是非零常数;

(3)$A(\lambda)$ 的法式为 I_n;

(4)$A(\lambda)$ 只通过初等行 (列) 变换可变为 I_n;

(5)$A(\lambda)$ 可表示为初等 λ-矩阵的乘积.

注 此时 $A(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{|A(\lambda)|} \cdot A(\lambda)^*$.

命题 3 设 A 是 n 阶方阵, 则 $\lambda I_n - A$ 相抵于如下形式的矩阵：

$$B(\lambda) = \mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非常数首一多项式且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), (i=1,\cdots,m-1)$.

注 若法式中 $m=n$, 即 $\lambda I_n - A$ 相抵于 $\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\}$, 则 $A=cI_n$ 为纯量阵.

定义 2 若 n 阶方阵的特征值全部为 1, 则称 A 是幺幂阵.

命题 4 对任意的幺幂阵 A, $\forall k\in\mathbb{N}_+$, A^k 和 A 相似.

7.3 不变因子

定义 1 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵, $\forall 1\le k\le n$, 如果 $A(\lambda)$ 至少有一个 k 阶子式不为 0, 则定义 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式, 此时它是非零首一多项式.

如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式都等于 0, 则规定 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)=0$.

推论 法式 $A(\lambda)=\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda),0,\cdots,0\}$ 的行列式因子 $D_i(\lambda)=\prod\limits_{j=1}^{i} d_j(\lambda)$, $(1\le i\le r)$.

命题 1 设 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子 $D_1(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$, 则 $D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda)$, $(1\le i\le r-1)$.

定义 2 设 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子 $D_1(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$, 则定义 $A(\lambda)$ 的不变因子

$$g_1(\lambda)=D_1(\lambda), g_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}, (2\le i\le r).$$

推论 法式 $A(\lambda)=\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda),0,\cdots,0\}$ 的不变因子 $g_i(\lambda)=d_i(\lambda)$, $(1\le i\le r)$.

定理 1 相抵的 λ-矩阵一定有相同的行列式因子, 从而有相同的不变因子.

推论 设 $A(\lambda)$ 的法式为 $\Lambda=\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda),0,\cdots,0\}$, 则 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $g_i(\lambda)=d_i(\lambda)$, $(1\le i\le r)$; 特别地, 法式与不变因子之间相互唯一确定.

命题 2 两个 λ-矩阵相抵的充要条件是它们有相同的法式.

注 行列式因子组或不变因子组是 λ-矩阵在相抵关系下的全系不变量.

命题 3 两数字矩阵相似的充要条件是它们的特征矩阵有相同的行列式因子组或不变因子组, 也可简记作这两个数字矩阵有相同的行列式因子组或不变因子组.

推论 对数域 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}$ 及 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 A,B, 则 A,B 在 $\mathbb{F}$ 上相似的充要条件是在 $\mathbb{K}$ 上相似.

定理 2 设 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵 A 的不变因子组为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$, 其中 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, $(i=1,\cdots,k-1)$, 则 A 的极小多项式为 $d_k(\lambda)$.

7.4 有理标准型

命题 1 对如下的 r 阶矩阵

$$F(f(\lambda))=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

F 的行列式因子组与不变因子组均为

$$1,\cdots,1,f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r,$$

其中有 $r-1$ 个 1, 且 $f(\lambda)$ 是 F 的特征多项式与极小多项式.

定理 1 对 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 A, 设其不变因子组 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$, 则 A 相似于 $F=\operatorname{diag}\{F(d_1(\lambda)),\cdots,F(d_k(\lambda))\}$, 其中 $F(d_i(\lambda))$ 是形如命题 1 中的矩阵.

定义 1 定理 1 中的分块 $F=\operatorname{diag}\{F(d_1(\lambda)),\cdots,F(d_k(\lambda))\}$ 称为 A 的 Frobenius 标准型或有理标准型, 每个 $F(d_i(\lambda))$ 称为 A 的 Frobenius 块.

7.5 初等因子

定义 1 对 $\mathbb{K}$ 上多项式 $f(\lambda)$ 及不可约多项式 $p(\lambda)$, 若 $\exists e\in\mathbb{N}_+$, 使得

$$p(\lambda)^e\mid f(\lambda),\ p(\lambda)^{e+1}\nmid f(\lambda),\ (p(\lambda)^e\|f(\lambda)),$$

则称 $p(\lambda)^e$ 为 $f(\lambda)$ 的准素因子. 于是 $f(\lambda)$ 的标准分解也可叫做它的准素分解.

定义 2 对 $\mathbb{K}$ 上方阵 A 的所有非常数不变因子 $d_i(\lambda)$, $(i=1,\cdots,k)$ 进行公共准素分解:

$$d_i(\lambda)=\prod_{j=1}^{t}p_j(\lambda)^{e_{ij}},\ (i=1,\cdots,k);\ 0\le e_{1j}\le e_{2j}\le\cdots\le e_{kj},\ (j=1,\cdots,t),$$

若上述分解中某 $e_{ij}>0$, 则称该 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 A 的一个初等因子, 称 A 的全体初等因子为其初等因子组.

命题 1 A 的所有非常数不变因子的准素因子就是 A 的初等因子, A 的初等因子组就是其多有非常数不变因子的准素因子全体.

推论 分块对角阵的初等因子组是其各分块初等因子组的无交并.

定理 1 $\mathbb{K}$ 上的两个矩阵 A,B 相似的充要条件是 A 与 B 有相同的初等因子组, 即矩阵的初等因子组也是相似关系下的全系不变量.

注 初等因子的选取依赖于数域的选取. 因为各数域上的因式分解结果不一定相同.

7.6 Jordan 标准型

命题 1 r 阶矩阵

$$J_r(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_0)^r$.

命题 2 设特征矩阵 $\lambda I - A$ 相抵于对角阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$, 其中 $f_i(\lambda)$ 为首一多项式, 则 $f_1(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)$ 的准素因子全体就是 A 的初等因子组.

推论 对角阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda)\}$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{g(\lambda), h(\lambda)\}$, 其中 $g(\lambda) = \gcd(f_1(\lambda), f_2(\lambda))$, $h(\lambda) = \mathrm{lcm}(f_1(\lambda), f_2(\lambda))$. 事实上, $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 与 $g(\lambda), h(\lambda)$ 的准素因子全体是相同的.

命题 3 设矩阵 $A = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$, 则其初等因子组为每个 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 的全体, 即为

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}.$$

定理 1 对复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵 A, 设其初等因子组为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, \cdots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, 则 A 相似于分块对角阵 $J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

定义 1 上述定理 1 中的 J 称为 A 的 Jordan 标准型, 每个 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 称为 A 的一个 Jordan 块.

注 Jordan 标准型中, 各 Jordan 块的顺序可互换, 且每个 Jordan 块由一个初等因子唯一决定.

推论 在不考虑 Jordan 块的顺序的情况下, Jordan 标准型是由 A 唯一确定的.

定理 2 几何语言：对 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 则存在 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 使得 φ 在这组基下的表示阵为 Jordan 标准型 $J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

命题 4 对 n 阶复矩阵 A, 它可对角化的充要条件是其极小多项式无重根, 即等价于它的初等因子都是一次多项式.

命题 5 对 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, V_0 是 φ 的不变子空间, 若 φ 可对角化, 则 $\varphi\big|_{V_0}$ 也可对角化.

推广 对 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, 其中每个 V_i 都是 φ 的不变子空间, 则 φ 可对角化的充要条件是 φ 在每个 V_i 上的限制都可对角化.

命题 6 对 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A, 若 A 的特征值全在 $\mathbb{K}$ 中, 则 A 在 $\mathbb{K}$ 上相似于其 Jordan 标准型.

定理 3 对 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 特征值 λ_i 的代数重数等于属于 λ_i 的 Jordan 块的阶数之和, 几何重数等于属于 λ_i 的 Jordan 块的个数.

7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用

定义 1 对线性空间 V 的 r 维子空间 V_0 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 若 $\exists \mathbf{0} \neq \alpha \in V_0$, 则称由 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \cdots\}$ 张成的子空间 $C(\varphi, \alpha)$ 称作 φ 关于循环向量 α 的循环子空间.

推论 若 $\dim C(\varphi, \alpha) = m$, 则 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)\}$ 是其一组基.

命题 1 设属于 λ_i 的所有循环子空间组成 V 的子空间 $R(\lambda_i)$, 则：

$$R(\lambda_i) = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda_i I_V)^n = \{v \in V \big| (\varphi - \lambda_i I_V)^n(v) = \mathbf{0}\}.$$

定义 2 对 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 设 λ_0 为其一特征值, 则命题 1 中的

$$R(\lambda_0) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda_0 I_V)^n = \{v \in V \big| (\varphi - \lambda_0 I_V)^n(v) = \mathbf{0}\} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

构成的 V 的子空间称为特征值 λ_0 的根子空间, 且 $\dim(R(\lambda_0))$ 等于 λ_0 的代数重数.

注 $(\varphi - \lambda_0 I_V)^n$ 中的 n 不唯一, 最优值 $n = \max\{r_1, \cdots, r_s\}$ 为属于 λ_0 的 Jordan 块阶数最大值.

命题 2 λ_0 的特征子空间包含于其根子空间, 即 $V_{\lambda_0} = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda_0 I_V) \subseteq R(\lambda_0)$.

推论 对 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, φ 可对角化的充要条件是对任一特征值 λ, 均有 $R(\lambda) = V_\lambda$.

定理 1 循环直和分解与根式直和分解：对 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$,

(1) 设 φ 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, \cdots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, 设 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ 对应的子空间为 V_i, 则 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, 且 V_i 是关于 $\varphi - \lambda_i I_V$ 的循环子空间.

(2) 设 φ 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 则 $V = R(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s)$.

定理 2 Jordan-Chevalley 分解：对 n 阶复矩阵 A, 它可以唯一分解成 $A = B + C$ 的形式, 其中：

(1)B 可对角化, C 是幂零阵且 $BC = CB$;

(2)B, C 均可表示为 A 的多项式.

命题 3 求带参矩阵的 Jordan 标准型技巧：

(1) 选取若干 r 阶子式, 使得它们互素, 则 $D_r(\lambda) = 1$.

(2) 计算特征值的几何重数, 从而确定 Jordan 块的个数.

(3) 计算极小多项式, 以确定最大的 Jordan 块的参数.

命题 4 对 $\mathbb{K}$ 上循环空间 $V = C(\varphi, \alpha)$ 及 $\psi \in \mathrm{Hom}(V)$, 若 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 则：

(1)ψ 由 $\psi(\alpha)$ 的值唯一确定;

(2) 存在 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $g(\lambda)$, 使得 $\psi = g(\varphi)$.

推论 若 A 是 Frobenius 块 $F(d(\lambda_0))$ 或 Jordan 块 $J_n(\lambda_0)$, 则与其乘法可交换的矩阵 B 一定能表示成 A 的多项式形式, 即若 $AB = BA$, 则 $B = g(A)$.

7.8 矩阵函数

定义 1 对 n 阶复方阵序列 $\{A_p\}$, 其中 $A_p = (a_{ij}^{(p)})_{n\times n}$, 及同阶复方阵 $B = (b_{ij})$, 若 $\forall 1 \le i, j \le n$, $\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = b_{ij}$, 则称该矩阵序列收敛到 B, 记为 $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = B$; 否则, 则称该矩阵序列发散.

定义 2 设 A 是 n 阶复方阵, 对如下的复幂级数及其部分和:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f_p(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n,$$

若矩阵序列 $\{f_p(A)\}$ 收敛于 B, 则称矩阵幂级数

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots$$

收敛到 B, 记为 $f(A) = B$.

定理 1 设 $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ 是复幂级数, $f(X)$ 是方阵幂级数, 则:

(1)$f(X)$ 收敛的充要条件是对任一非异阵 P, $f(P^{-1}XP)$ 都收敛, 这时 $f(P^{-1}XP) = P^{-1}f(X)P$;

(2) 若 $X = \mathrm{diag}\{X_1, \cdots, X_k\}$, 则 $f(X)$ 收敛的充要条件是 $f(X_1), \cdots, f(X_k)$ 都收敛, 这时满足 $f(X) = \mathrm{diag}\{f(X_1), \cdots, f(X_k)\}$;

(3) 对 Jordan 块 $J_{r_i}(\lambda_i)$, 若 $f(z)$ 的收敛半径为 R, 则 $|\lambda_i| < R$ 时 $f(J_{r_i}(\lambda_i))$ 收敛, 且

$$f(J_{r_i}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}f^{(r_i-1)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-2)!}f^{(r_i-2)}(\lambda_i) \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-3)!}f^{(r_i-3)}(\lambda_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

定理 2 设复幂级数 $f(z)$ 的收敛半径为 R;n 阶复方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 记 A 的谱半径 $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$, 则:

(1) 若 $\rho(A) < R$, 则 $f(A)$ 收敛;

(2) 若 $\rho(A) > R$, 则 $f(A)$ 发散;

(3) 若 $\rho(A)=R$, 则 $\forall|\lambda_j|=R$, 设属于 λ_j 的初等因子最高幂次为 n_j, 则 $f(A)$ 收敛的充要条件是 n_j 个数值级数 $f^{(k)}(\lambda_j)$, $(k=0,\cdots,n_j-1)$ 均收敛;

(4) 若 $f(A)$ 收敛, 则 $f(A)$ 特征值为 $f(\lambda_i)$, $(i=1,\cdots,n)$.

8 二次型

8.1 二次型的化简与矩阵的合同

定义 1 设 f 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次齐次多项式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j,$$

称 f 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次型, 简称二次型.

定义 2 为了用矩阵来处理二次型, 通常将 f 写成矩阵形式：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

这里矩阵 A 是一个对称矩阵, 即 $\forall i, j$, $a_{ij} = a_{ji}$.

矩阵 $A = (a_{ij})$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 称为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的系数矩阵 (或相伴矩阵), 这个二次型 f 称为矩阵 A 的相伴二次型.

注 任意 n 元二次型有且仅有一个 $\mathbb{K}$ 上的 n 元对称阵作为它的系数矩阵, 即这是一个双射.

推论 一个二次型只含平方项当且仅当它的相伴矩阵是一个对角阵.

命题 1 设 V 是 n 维线性空间, $x \in V$, 则二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以看成是向量 x 的二次函数. 若设 V 的两组基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 且 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 到 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 的过渡矩阵为 C, 若记向量 x 在这两组基下的坐标分别为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 则 $x = Cy$.

定义 3 设 A, B 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 存在 n 阶非异阵 C, 使 $B = C'AC$, 则称 B 与 A 是合同的, 或称 B 与 A 具有合同关系. 显然合同关系是相抵的特殊情况.

命题 2 合同关系是一个等价关系, 即它满足：

(1) 自反性：任一矩阵 A 与自己合同;

(2) 对称性：若 B 与 A 合同, 则 A 与 B 合同;

(3) 传递性：若 B 与 A 合同, D 与 B 合同, 则 D 与 A 合同.

命题 3 对称阵 A 的下列变换都是合同变换, 我们将其称为对称初等变换:

(1) 对换 A 的第 i 行与第 j 行, 再对换第 i 列与第 j 列;

(2) 将非零常数 c 乘以 A 的第 i 行, 再将 c 乘以第 i 列;

(3) 将 A 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上, 再将第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

注 事实上, 任一合同变换可以看作若干次对称初等变换的复合.

命题 4 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非零对称阵, 则必存在非异阵 C, 使 $C'AC$ 的第 $(1,1)$ 元素不等于零.

定理 1 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称阵, 则必存在 n 阶非异阵 C, 使 $C'AC$ 为对角阵.

注 这说明任一对称阵都合同于一个与它同阶的对角阵.

定义 4 对分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{n} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{n\times n},$$

若满足 $A_{ii}\,(i=1,\cdots,n)$ 都是对称阵且 $A'_{ij}=A_{ji},\,(i\neq j)$, 则称其为分块对称阵.

命题 5 将分块对称阵 $A=(A_{ij})_{n\times n}$ 的下列变换称为分块对称初等变换:

(1) 对换 A 的第 i 分块行与第 j 分块行, 再对换第 i 分块列与第 j 分块列.

(2) 将 A 的第 i 分块行左乘非异阵 M, 再将第 i 分块列右乘 M'.

(3) 将 A 第 i 分块行左乘非异阵 M 加到第 j 分块行上, 再将第 i 分块列右乘 M' 加到第 j 列上.

8.2 二次型的化简

命题 1 配方法：现将二次型 f 进行 Lagrange 配方, 得到 $f=f_1^2+f_2^2+\cdots+f_n^2$, 其中 f_i 是对 $f_i,f_{i+1},\cdots,f_n$ 的一个线性函数; 再令 $y_i=f_i$, 反解出过渡矩阵 C.

注 该方法得到的过渡矩阵为非异上三角阵.

此外, 若已知的二次型中没有平方项, 则可采用某种换元 (如和差换元等) 将二次型转化出平方项.

命题 2 对称初等变换法：作 $n\times 2n$ 矩阵 $\Big(A, I_n\Big)$, 对其中的 A 实施对称初等变换, 将左边化为对角阵 B, 此时右边即为过渡阵 C 的转置, $A=C'BC$.

8.3 惯性定理

定义 1 对任意的 n 元实对称阵 A 及与其相伴的实二次型 f, 记 $\mathrm{r}(A)=r$, 则 A 必合同于对角阵 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1;-1,\cdots,-1;0,\cdots,0\}$, 其中有 p 个 1, q 个 -1, $n-r$ 个 0 且满足 $p+q=r$. 这个对角阵

称作 f 的合同标准型, 与其相伴的二次型 $f'=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ 称作 f 的规范标准型.

注 r 称作 f 的秩, p 称作 f 的正惯性指数, q 称作 f 的负惯性指数, $s=p-q$ 称为 f 的符号差.

定理 1 惯性定理：对确定的实二次型 f, 它的规范型是唯一的.

命题 1 秩与符号差 (或正负惯性指数) 是实对称阵在合同关系之下的全系不变量.

命题 2 对任意的 n 元复对称阵 A 及与其相伴的复二次型 f, 记 $\mathrm{r}(A)=r$, 则 f 的合同标准型为 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1;0,\cdots,0\}$, 其中有 r 个 1, $n-r$ 个 0; f 的规范标准型可表示为 $f=y_1^2+\cdots+y_r^2$.

注 这说明复对称阵在合同关系之下只有秩 r 一个全系不变量.

8.4 正定型与正定矩阵

定义 1 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 是 n 元实二次型：

(1) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'A\alpha>0$, 则称 f 是正定二次型 (简称正定型), 矩阵 A 称为正定矩阵 (简称正定阵).

(2) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'A\alpha<0$, 则称 f 是负定二次型 (简称负定型), 矩阵 A 称为负定矩阵 (简称负定阵).

(3) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'A\alpha\geq 0$, 则称 f 是半正定二次型 (简称半正定型), 矩阵 A 称为半正定矩阵 (简称半正定阵).

(4) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'A\alpha\leq 0$, 则称 f 是半正定二次型 (简称半正定型), 矩阵 A 称为半负定矩阵 (简称半负定阵).

(5) 若存在 α 使得 $\alpha'A\alpha>0$; 又存在 β 使得 $\beta'A\beta<0$, 则称 f 是不定型.

定理 1 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元实二次型, 秩为 r, 正负惯性指数分别为 p,q, 相伴矩阵为 A：

(1)f 正定的充要条件是 $p=n$ 或 A 合同于 I_n.

(2)f 负定的充要条件是 $q=n$ 或 A 合同于 $-I_n$.

(3)f 半正定的充要条件是 $p=r$ 或 A 合同于 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

(4)f 半负定的充要条件是 $q=r$ 或 A 合同于 $\begin{pmatrix} -I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

(5)f 不定的充要条件是 $p>0,q>0$.

定义 2 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$, 它的子式 $A\begin{pmatrix}1 & \cdots & k\\ 1 & \cdots & k\end{pmatrix}$, $(k=1,\cdots,n)$ 称为 A 的顺序主子式.

注 n 阶方阵的顺序主子式显然有 n 个.

定理 2 n 阶实对称阵 A 正定当且仅当 A 的 n 个顺序主子式全部为正.

命题 1 若 A 是 n 阶 (半) 正定实对称阵, 则 A 的所有主子阵都是 (半) 正定阵.

推论 A 的所有主子式全大于 (等于) 零; 特别地, 正定阵的主对角元素全大于零, 且正定阵中绝对值最大的元素仅在主对角线上.

命题 2 n 阶实对称阵 A (半) 正定当且仅当 A 的特征值全大于 (等于) 零.

命题 3 n 阶实对称阵 A 正定当且仅当存在非异实矩阵 C, 使得 $A=C'C$; n 阶实对称阵 A 半正定当且仅当存在实矩阵 C, 使得 $A=C'C$

定理 3 n 阶实对称阵 A 正定的充要条件为存在主对角线上元素全为正的上三角阵 C, 使得 $A=C'C$. 这称为正定阵 A 的 Cholesky 分解.

命题 4 n 阶实对称阵 A 半正定当且仅当 $\forall t\in\mathbb{R}^*$, 它的正摄动 $A+tI_n$ 都是正定阵,

命题 5 若 A 是 n 阶半正定实对称阵且 $a_{ii}=0$, 则 A 的第 i 行, 第 i 列元素均为 0.

命题 6 若 A 是 n 阶半正定实对称阵, α 是 n 阶实列向量, 若 $\alpha' A\alpha=\mathbf{0}$, 则 $A\alpha=\mathbf{0}$.

8.5 Hermite 型

定义 1 下列 n 个复变元的二次齐次函数称为 Hermite 型:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\overline{x}_i x_j,$$

其中 $\overline{a_{ij}}=a_{ji}$, $(\forall 1\le i,j\le n)$.

注 f 是复变元实值函数, 即作为函数, f 的值恒为实数.

定义 2 对 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵 A, 若 $\overline{A}'=A$, 则称 A 为 Hermite 阵. 此时对 f 的矩阵形式: $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{x}'Ax$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

命题 1 与实二次型相似, Hermite 型与 Hermite 阵之间也存在着一一对应的关系.

定义 3 对两 Hermite 阵 A, B, 若存在非异复矩阵 C, 使得 $B = \overline{C}'AC$, 则称 A 和 B 复相合.

注 显然复相合关系是一种等价关系.

定理 1 若 A 是 Hermite 阵, 则存在非异阵 C, 使得 $\overline{C}'AC$ 是实对角阵.

定义 4 Hermite 的规范标准型为 $f' = x_1\overline{x}_1 + \cdots + x_p\overline{x}_p - x_{p+1}\overline{x}_{p+1} - \cdots - x_r\overline{x}_r$, 其中 r 称作 f 的秩, p 称作正惯性指数, $q = r - p$ 称作负惯性指数, $s = p - q$ 称为符号差.

定理 2 惯性定理：对确定的 Hermite 型, 它的规范型是唯一的.

命题 2 秩与符号差 (或正负惯性指数) 是 Hermite 阵在复相合关系之下的全系不变量.

定义 5 可完全按照二次型正负定平行定义 Hermite 型, 并给出复相合关系下的判定准则.

9 内积空间

9.1 内积空间的概念

定义 1 对实线性空间 V 及二元运算：$V \times V \to \mathbb{R}, \quad \alpha \times \beta \mapsto (\alpha, \beta)$, 且 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in \mathbb{R}$, 有：

(1) 对称性：$(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta)$;

(2) 加法：$(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

(3) 数乘：$(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)$, $(\alpha, c\beta) = c(\alpha, \beta)$;

(4) 正定性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = \mathbf{0}$,

则称该二元运算为 V 上的一个内积, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ 称作 α 和 β 的内积.

给定一个内积结构的实线性空间称作实内积空间, 有限维实内积空间称作 Euclid 空间.

定义 2 对复线性空间 V 及二元运算：$V \times V \to \mathbb{C}, \quad \alpha \times \beta \mapsto (\alpha, \beta)$, 且 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in \mathbb{C}$, 有：

(1) 共轭对称性：$(\beta, \alpha) = \overline{(\alpha, \beta)}$;

(2) 加法：$(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

(3) 共轭数乘：$(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)$, $(\alpha, c\beta) = \overline{c}(\alpha, \beta)$;

(4) 正定性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = \mathbf{0}$,

则称该二元运算为 V 上的一个内积, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ 称作 α 和 β 的内积.

给定一个内积结构的复线性空间称作复内积空间, 有限维复内积空间称作酉空间.

注 实内积空间的定义相容于复内积空间, 即实内积空间必是复内积空间. 二者统称为内积空间.

定义 3 标准内积：标准内积指的是如下四种内积结构：

(1)n 维实列向量空间上的内积 $(\alpha, \beta) = \alpha'\beta$;

(2)n 维实行向量空间上的内积 $(\alpha, \beta) = \alpha\beta$';

(3)n 维复列向量空间上的内积 $(\alpha, \beta) = \alpha'\overline{\beta}$;

(4)n 维复行向量空间上的内积 $(\alpha, \beta) = \alpha\overline{\beta}'$.

定义 4 对内积空间 V, $\alpha \in V$, 定义 α 的范数 (长度) 为 $\|\alpha\| = (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$.

定义 5 对内积空间 V, $\alpha, \beta \in V$, 定义 α 与 β 的距离为 $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$.

定理 1 对实 (复) 内积空间 V, $\alpha, \beta \in V$, $c \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, 则：

(1) 范数齐次性：$\|c\alpha\| = |c| \cdot \|\alpha\|$;

(2)Cauchy-Schwarz 不等式：$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$, 且等号成立当且仅当 α, β 线性相关.

(3) 三角不等式：$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

定义 6 对内积空间 V, 设非零向量 $\alpha, \beta \in V$, 则定义 α, β 的夹角 θ 为：

(1)V 是实内积空间时, $\cos\theta = \dfrac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$, 此时 $\theta \in [0, \pi]$.

(2)V 是复内积空间时, $\cos\theta = \dfrac{|(\alpha, \beta)|}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$, 此时 $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

定义 7 对内积空间 V, 设 $\alpha, \beta \in V$, 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α, β 正交, 记作 $\alpha \perp \beta$.

注 零向量和任何向量都正交; 两非零向量正交的充要条件是它们夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

定理 2 勾股定理：若内积空间 V 内两向量 α, β 正交, 则 $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$.

9.2 内积的表示和正交基

定义 1 对 Euclid 空间 V 及 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 令 $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $G = (g_{ij})_{n\times n}$, 则称 G 是 V 关于基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的度量阵或 Gram 矩阵. 显然这是一个正定实对称阵.

命题 1 对 Euclid 空间 V 及 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 设 $\alpha, \beta \in V$ 且记 α, β 在该组基下的坐标向量为 x, y, 则内积的矩阵表示为 $(\alpha, \beta) = x'Gy$.

注 若给定 n 维实线性空间 V 的一组基, 则 V 上所有内积结构与所有 n 阶正定实对称阵间关于这组基是一一对应关系.

定义 2 对酉空间 V 及 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 令 $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $G = (g_{ij})_{n\times n}$, 则称 G 是 V 关于基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的度量阵或 Gram 矩阵. 显然这是一个正定 Hermite 阵.

命题 2 对酉空间 V 及 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 设 $\alpha, \beta \in V$ 且记 α, β 在该组基下的坐标向量为 x, y, 则内积的矩阵表示为 $(\alpha, \beta) = x'G\overline{y}$.

注 若给定 n 维复线性空间 V 的一组基, 则 V 上所有内积结构与所有 n 阶正定 Hermite 阵间关于这组基是一一对应关系.

定义 3 对 n 维内积空间 V 及其基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 若 $\forall i \neq j$, $(e_i, e_j) = 0$, 则称这组基为正交基.

进一步, 若 $\forall i = 1, \cdots, n$, $\|e_i\| = 1$, 则称这组基为标准正交基.

命题 3 内积空间 V 中两两正交的非零向量必定线性无关.

推论 n 维内积空间中两两正交的非零向量至多只有 n 个.

命题 4 设向量 α 与 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 都正交, 则 α 与 $L(\beta_1, \cdots, \beta_k)$ 正交, 即 $\forall \gamma \in L(\beta_1, \cdots, \beta_k)$, $\beta \perp \gamma$.

定理 1 Gram-Schmidt 正交化：对内积空间 V 及 m 个线性无关的向量 $u_1, \cdots, u_m \in V$, 则存在两两正交的非零向量组 $\{v_1, \cdots, v_m\}$, 使得 $L(u_1, \cdots, u_m) = L(v_1, \cdots, v_m)$. 构造如下：

$$v_{m+1} = u_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \frac{(u_{m+1}, v_i)}{\|v_i\|^2} v_i.$$

注 若 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ 是一组基, 则这组基到正交基 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 的过渡矩阵为上三角阵, 且主对角线上的元素全部为 1.

推论 任一有限维线性空间均有标准正交基.

命题 5 对内积空间 V 及其两组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{f_1, \cdots, f_n\}$, 设这两组基之间的过渡阵为 C, 则：

(1) 若 V 是 Euclid 空间, 则 $G(f_1, \cdots, f_n) = C'G(e_1, \cdots, e_n)C$.

(2) 若 V 是酉空间, 则 $G(f_1, \cdots, f_n) = C'G(e_1, \cdots, e_n)\overline{C}$.

推论 对实 (复) 线性空间 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 及其 Gram 矩阵 G, 据其正定性, 总能找到非异阵 C, 使得 $C'GC = I_n (C'G\overline{C} = I_n)$.

此时取基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 满足 $\Big(f_1, \cdots, f_n\Big) = \Big(e_1, \cdots, e_n\Big) C$, 则基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 一定是标准正交基.

定义 4 设 U 是内积空间 V 的子空间, 令

$$U^{\perp} = \{v \in V \big| (v, U) = 0\}, \text{ 即 } \forall u \in U,\ (v, u) = 0,$$

易证 $U^{\perp}$ 是 V 的子空间, 称为 U 的正交补空间.

定理 2 设 V 为 n 维内积空间, U 为子空间, 则：

(1) $V = U \oplus U^{\perp}$;

(2) U 上的任意一组标准正交基均可扩张为 V 上的标准正交基.

定义 9 对内积空间 V 的子空间 $V_1, \cdots, V_k$, 若 $\forall \alpha \in V_i$, $\beta \in V_j$, $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 V_i, V_j 正交.

此时, 若 $V = V_1 + \cdots + V_k$ 且 V_i 两两正交, 则称 V 是 $V_1, \cdots, V_k$ 的正交和, 记作 $V = V_1 \perp \cdots \perp V_k$.

命题 6 正交和必为直和. 所以也可将其称作正交直和.

定义 10 设 $V = V_1 \perp \cdots \perp V_k$, E_i 是 V 到 V_i 的投影变换, 则称 E_i 是是 V 到 V_i 的正交投影.

命题 7 对内积空间 V 及其子空间 U, 设 $V = U \perp U^{\perp}$, E 是 V 到 U 的正交投影, 则：

$$\forall\, \alpha, \beta \in V,\ (E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta)).$$

定理 3 Bessel 不等式：对内积空间 V 上两两正交的非零向量组 $\{v_1, \cdots, v_m\}$, 有：

$$\forall\, y \in V, \sum_{k=1}^{m} \frac{|(y, v_k)|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|y\|^2,$$

等号成立当且仅当 $y \in L(v_1, \cdots, v_m)$.

9.3 伴随

定义 1 对内积空间 V 上的线性算子 φ, 若存在线性算子 φ^*, 使得

$$\forall\, \alpha, \beta \in V, (\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta)),$$

则称 φ^* 为 φ 的伴随算子, 简称 φ 的伴随.

注 伴随算子与矩阵的伴随没有必然联系.

命题 1 (1) 有限维内积空间上任一线性算子必定存在伴随算子;

(2) 对任意内积空间上的任一线性算子, 若它存在伴随算子, 则伴随算子必定唯一.

命题 2 对 n 维内积空间 V 及其标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ 且 φ 在这组基下的表示阵为 A, 则 φ 的伴随算子 φ^* 在该标准正交基下的表示阵为：

(1)V 是酉空间, 则表示阵为 $\overline{A}'$;

(2)V 是 Euclid 空间, 则表示阵为 A'.

命题 3 设 V 为实 (复) 内积空间, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V)$ 且 φ^*, ψ^* 存在, $c \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, 则：

(1)$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

(2)$(c\varphi)^* = \overline{c}\varphi^*$;

(3)$(\varphi \cdot \psi)^* = \psi^* \cdot \varphi^*$;

(4)$(\varphi^*)^* = \varphi$;

(5) 若 φ 可逆, 则 φ^* 也可逆, 且 $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

定理 1 对有限维线性空间 V 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$,

(1) 若 U 是 φ-不变子空间, 则 $U^\perp$ 是 φ^*-不变子空间;

(2) 若 φ 的全体特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 φ^* 的特征值为 $\overline{\lambda}_1, \cdots, \overline{\lambda}_n$.

9.4 内积空间的同构，正交变换和酉变换

定义 1 设 V,U 都是实 (复) 内积空间, $\varphi: V \to U$ 是线性映射, 若 $\forall \alpha,\beta \in V$, $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta)) = (\alpha,\beta)$, 则称 φ 为保持内积的线性映射; 若此时 φ 为线性同构, 则称 φ 为保积同构.

注 保积同构是等价关系; 保积映射一定是单射.

命题 1 对内积空间 V,U 及线性映射 $\varphi: V \to U$, 则 φ 保范 (保持范数) 的充要条件是 φ 保积.

注 对实内积空间 V, 复内积空间 U, $a,b \in V$, $x,y \in U$, 则：

$$(a,b) = \frac{1}{4}\|a+b\|^2 - \frac{1}{4}\|a-b\|^2, \quad (x,y) = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{\mathrm{i}}{4}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \frac{\mathrm{i}}{4}\|x-\mathrm{i}y\|^2.$$

定理 1 对 n 维实 (复) 内积空间 U,V 及线性映射 $\varphi: V \to U$, 则下列结论等价：

(1)φ 是保持内积的线性映射;

(2)φ 是保积同构;

(3)φ 将 V 的任一组标准正交基映为 U 的一组标准正交基;

(4)φ 将 V 的某一组标准正交基映为 U 的一组标准正交基.

推论 对 Euclid 空间 (酉空间) V,U, 它们之间存在保积同构的充要条件是 $\dim V = \dim U$.

定义 2 对 Euclid 空间 (酉空间) V 上的线性算子 φ, 若 φ 保积, 则称其为正交算子 (酉算子).

注 显然正交算子和酉算子都是可逆算子, 即它们都是 V 上的自同构.

命题 2 对 Euclid 空间 (酉空间) V 上的线性算子 φ, 它是正交算子 (酉算子) 的充要条件是 φ 可逆且 $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

定义 3 对 n 阶实方阵 A, 若 $A' = A^{-1}$, 则称 A 是正交矩阵或正交阵.

对 n 阶复方阵 C, 若 $\overline{C}' = C^{-1}$, 则称 C 是酉矩阵或酉阵.

命题 3 对 Euclid 空间 (酉空间) V 上的线性算子 φ, 它是正交算子 (酉算子) 的充要条件是它在任一组标准正交基下的表示阵为正交阵 (酉阵).

命题 4 对 n 阶实矩阵 A, A 是正交阵的充要条件是它的 n 个行 (列) 向量是 n 维实行 (列) 向量空间 $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}_n)$ 在标准内积下的一组标准正交基.

对 n 阶复矩阵 A, A 是酉阵的充要条件是它的 n 个行 (列) 向量是 n 维复行 (列) 向量空间 $\mathbb{C}^n(\mathbb{C}_n)$ 在标准内积下的一组标准正交基.

命题 5 正交阵的行列式值为 ±1, 特征值为 ±1; 酉阵的行列式值为 1, 特征值的模长为 1.

定理 2 QR 分解：设 A 是 n 阶实 (复) 方阵, 则 A 可分解为 $A = QR$ 的形式, 其中 Q 是正交阵

(酉阵), R 是上三角阵且主对角元全部非负.

进一步, 若 A 是非异阵, 则上述分解必定唯一.

9.5 自伴随算子

命题 1 Euclid 空间 (酉空间) 上两组标准正交基之间的过渡矩阵是正交阵 (酉阵).

定义 1 设 A, B 是 n 阶实方阵, 若存在正交阵 P 使得 $B = P'AP$, 则称 A 与 B 正交相似.

设 A, B 是 n 阶复方阵, 若存在酉阵 P 使得 $B = \overline{P}'AP$, 则称 A 与 B 酉相似.

注 正交相似和酉相似也是等价关系, 且它们都是矩阵相似的特殊形式.

定义 2 对内积空间 V 及线性算子 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, 若 $\varphi^* = \varphi$, 则称 φ 是自伴随算子.

若 V 是 Euclid 空间, 称 φ 为对称算子; 若 V 是酉空间, 则称 φ 是 Hermite 算子.

命题 2 对 Euclid 空间 (酉空间) V 上的线性算子 φ, 则 φ 是自伴随算子的充要条件是 φ 在任一组标准正交基下的表示阵为实对称阵 (Hermite 阵).

命题 3 对 Euclid 空间 (酉空间) V 上的自伴随算子 φ, 则 φ 的所有特征值全为实数, 且属于不同特征值的特征向量两两正交.

推论 实对称阵 (Hermite 阵) 的所有特征值全为实数, 且属于不同特征值的特征向量两两正交.

定理 1 对 n 维内积空间 V 上的自伴随算子 φ, 必存在一组标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 使得 φ 在这组基下的表示阵为实对角阵, 且 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

推论 代数语言：对 n 阶实对称阵 (Hermite 阵) A, 则存在正交阵 (酉阵) P, 使得 $P'AP(\overline{P}'AP)$ 是实对角阵. 上述 P 的 n 个列向量恰为 A 的 n 个两两正交且长度为 1 的特征向量.

命题 4 实对称阵 (Hermite 阵) 在正交相似 (酉相似) 下的全系不变量是全体特征值, 正交相似 (酉相似) 的标准型是特征值构成的实对角阵.

推论 设 $f = x'Ax$ 是实二次型, 其中实对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则存在正交相似变换 $x = Py$, 使得 f 可以化简为 $f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

进一步, f 的正 (负) 惯性指数等于 A 正 (负) 特征值的个数, 秩等于 A 的非零特征值个数.

9.6 复正规算子

定义 1 对 Euclid 空间 (酉空间) V 上的线性算子 φ, 若 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 则称 φ 为实 (复) 正规算子.

对实方阵 A, 若 $AA' = A'A$, 则称 A 为实正规阵; 对复方阵 B, 若 $B\overline{B}' = \overline{B}'B$, 则称 B 为复正规阵.

命题 1 对 Euclid 空间 (酉空间) V 上的线性算子 φ, 则 φ 是实 (复) 正规算子的充要条件是 φ 在任一组标准正交基下的表示阵是实 (复) 正规阵.

命题 2 对酉空间 V 上的正规算子 $\varphi, \forall \alpha \in V$, 有：

(1)$\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|$;

(2)α 是 φ 关于特征值 λ 的特征向量的充要条件是 α 是 φ^* 关于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量.

(3)φ 的属于不同特征值的特征向量必定两两正交.

定理 1 Schur 定理：对酉空间 V 上的线性算子 φ, 则存在 V 的一组标准正交基, 使得 φ 在这组基下的表示阵为上三角阵.

推论 代数语言：任一 n 阶复矩阵均酉相似于上三角阵.

定理 2 对酉空间 V 上的线性算子 φ, 它是正规算子的充要条件是 φ 在某组标准正交基下的表示阵是复对角阵; 且此时这组标准正交基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

推论 代数语言：n 阶复方阵 A 酉相似于复对角阵的充要条件是 A 是复正规阵.

命题 3 复正规阵在酉相似下的全系不变量是全体特征值, 酉相似标准型为特征值构成的对角阵.

定理 3 任一 n 阶酉矩阵必相似于对角阵 $\mathrm{diag}\{c_1, \cdots, c_n\}$, 其中 $c_i \in \mathbb{C}$ 且 $|c_i| = 1$.

命题 4 对酉空间 V 上的线性算子 φ, 若其所有不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 它们对应的特征子空间为 $V_1, \cdots, V_k$, 则 φ 是正规算子的充要条件是 $V = V_1 \perp \cdots \perp V_k$.

命题 5 对 Euclid 空间 V 上的自伴随算子 φ, 若其所有不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 它们对应的特征子空间为 $V_1, \cdots, V_k$, 则 $V = V_1 \perp \cdots \perp V_k$.

定理 4 Courant-Fischer 定理：对 n 阶实对称阵 A, 对其特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 有：

$$\lambda_i = \min_{V_i} \max_{0 \neq x \in V_i} \frac{x'Ax}{x'x} = \max_{V_{n+1-i}} \max_{0 \neq x \in V_{n+1-i}} \frac{x'Ax}{x'x},$$

其中 V_i 表示 n 维实列向量空间 $\mathbb{R}_n$ 的 i 维子空间.

定理 5 Cauchy 交错定理：对 n 阶实对称阵 A 及其特征值 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, 设其 m 阶主子阵的特征值 $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_m$, 则

$$\forall i = 1, \cdots, n,\ \lambda_i \leq \mu_i,\ \lambda_{n+1-i} \geq \mu_{n+1-i}.$$

定理 6 Weyl 摄动定理：对 n 阶实对称阵 A 及其特征值 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, n 阶实对称阵 B 及其特征值 $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$, 设 $A + B$ 的特征值为 $\gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_n$, 则

$$\forall i = 1, \cdots, n,\ \lambda_i + \mu_1 \leq \gamma_i \leq \lambda_i + \mu_n.$$

9.7 实正规矩阵

命题 1 对 n 维 Euclid 空间 V 及 V 上的正规算子 φ, 若 $f(x)$ 是实多项式, 则 $f(\varphi)$ 也是 V 上的正规算子.

命题 2 对 n 维 Euclid 空间 V 及 V 上的正规算子 φ, 若 $f(x), g(x)$ 是互素的实多项式, 则:

$$\forall\, \alpha \in \operatorname{Ker} f(\varphi),\ \beta \in \operatorname{Ker} g(\varphi),\ (\alpha, \beta) = 0.$$

定理 1 对 n 维 Euclid 空间 V 及 V 上的正规算子 φ, 设 φ 的极小多项式是 $g(x)$ 且 $g(x)$ 的所有互异首一不可约因式为 $g_1(x), \cdots, g_k(x)$, 记 $W_i = \operatorname{Ker} g_i(\varphi)$, 则:

(1)$\deg g_i(x) \leq 2$ 且 $g(x) = \prod\limits_{i=1}^{k} g_i(x)$;

(2)$W_i \perp W_j$ 且 $V = W_1 \perp \cdots \perp W_k$;

(3)W_i 是 φ 的不变子空间, $\varphi\big|_{W_i}$ 是 W_i 上的实正规算子且极小多项式为 $g_i(x)$.

命题 3 对 n 维 Euclid 空间 V 及 V 上正规算子 φ, 设其极小多项式为 $g(x) = (x-a)^2 + b^2$, $(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$. 设 $v \in V$, $u = b^{-1}(\varphi - aI_V)(v)$, 则有 $\|u\| = \|v\|$, $u \perp v$ 且

$$\varphi(v) = av + bu,\ \varphi^*(v) = av - bu,\ \varphi(u) = au - bv,\ \varphi^*(u) = au + bv.$$

定理 2 对 n 维 Euclid 空间 V 及 V 上正规算子 φ, 设其极小多项式为 $g(x) = (x-a)^2 + b^2, (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$, 则存在 s 个二维子空间 $V_1, \cdots, V_s$, 使得 $g(x)^s$ 是 φ 的特征多项式且 $V = V_1 \perp \cdots \perp V_s$.

另外, 每个 V_i 都存在标准正交基 $\{u_i, v_i\}$, 使得 $\varphi(u_i) = au_i - bv_i$, $\varphi(v_i) = bu_i + av_i$.

定理 3 对 n 维 Euclid 空间 V 及 V 上正规算子 φ, 则存在一组标准正交基, 使得 φ 在这组标准正交基下的表示阵为下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_r, c_{2r+1}, \cdots, c_n\}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}, (a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}).$$

注 实正规阵在正交相似关系下的全系不变量是它的全体特征值.

命题 4 设 A 是 n 阶正交阵, 则 A 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_r, 1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1\}, \quad A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}.$$

命题 5 设 A 是 n 阶反对称阵, 则 A 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_r, 0, \cdots, 0\}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}.$$

推论 实反对称阵的秩一定是偶数, 且其特征值必为 0 或纯虚数.

9.8 谱

定理 1 谱分解定理：对 n 维 Euclid 空间 (酉空间) V 及 V 上自伴随算子 (复正规算子) φ, 设其全体不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, V_i 为 λ_i 对应的特征子空间, 则 $V = V_1 \perp \cdots \perp V_k$.

设 E_i 是 V 到 V_i 上的正交投影算子, 则称分解 $\varphi = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k$ 为 φ 的谱分解.

命题 1 记号同定理 1, 若 $f_j(x) = \prod\limits_{i \neq j} \dfrac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$, 则 $E_j = f_j(\varphi)$.

命题 2 对酉空间 V 上的线性算子 φ, 则它是正规算子的充要条件是存在复系数多项式 $f(x)$, 使得 $\varphi^* = f(\varphi)$.

定义 1 对有限维内积空间上的自伴随算子 φ, 若 $\forall\, 0 \neq \alpha \in V$, 总有 $(\varphi(\alpha), \alpha) > 0((\varphi(\alpha), \alpha) \geq 0)$, 则称 φ 是正定 (半正定) 的自伴随算子.

命题 3 对酉空间 V 上的复正规算子 φ, 则：

(1) 若 φ 的特征值全为实数, 则 φ 是自伴随算子;

(2) 若 φ 的特征值全为正 (非负) 实数, 则 φ 是正定 (半正定) 自伴随算子;

(3) 若 φ 的特征值模长全为 1, 则 φ 是酉算子.

命题 4 对有限维内积空间 V 上的半正定自伴随算子 φ, 则存在 V 上的唯一半正定自伴随算子 ψ, 使得 $\psi^2 = \varphi$. 此时, 也称 ψ 为 φ 的算术平方根, 记作 $\psi = \varphi^{\frac{1}{2}}$.

推论 对半正定实对称阵 (Hermite 阵) A, 则存在唯一的半正定实对称阵 (Hermite 阵) B, 使得 $A = B^2$. 此时, 也称 B 为 A 的算术平方根, 记作 $B = A^{\frac{1}{2}}$.

定理 2 极分解：对 n 维 Euclid 空间 (酉空间) 上的线性算子 φ, 则存在 V 上的正交算子 (酉算子) ω 和 V 上的半正定自伴随算子 ψ, 使得 $\varphi = \omega\psi$.

其中, ψ 必定唯一, 且若 φ 可逆, 则 ω 也唯一.

推论 OS 分解, UH 分解：对 n 阶实矩阵 A, n 阶复矩阵 B, 则：

(1) 存在唯一的分解 $A = OS$, 其中 O 是正交阵, S 是半正定实对称阵;

(2) 存在唯一的分解 $B = UH$, 其中 U 是酉阵, H 是半正定 Hermite 阵.

9.9 奇异值分解

定义 1 设 V, U 分别是 n 维, m 维 Euclid 空间, 对线性映射 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$, 若存在线性映射 $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(U, V)$, 使得 $\forall v \in V$, $u \in U$, 都有 $(\varphi(v), u) = (v, \varphi^*(u))$ 成立, 则称 φ^* 是 φ 的伴随.

命题 1 对 n 维, m 维 Euclid 空间 V, U 及线性映射 $\varphi: V \to U$, 则 φ 的伴随 φ^* 存在且唯一.

定义 2 对 $m \times n$ 阶实矩阵 A, 若存在 $\sigma \geq 0$ 及 n 维实列向量 $\alpha \neq \mathbf{0}$, m 维实列向量 $\beta \neq \mathbf{0}$, 使得

$$A\alpha = \sigma\beta, \quad A'\beta = \sigma\alpha,$$

则称 σ 是 A 的奇异值, α, β 分别称作 A 关于奇异值 σ 的右, 左奇异向量.

定义 3 对 n 维, m 维 Euclid 空间 V, U 及线性映射 $\varphi: V \to U$, 若 $\exists 0 \neq \alpha \in V$, $0 \neq \beta \in U$, 使得

$$\varphi(\alpha) = \sigma\beta, \quad \varphi^*(\beta) = \sigma\alpha,$$

则称 σ 是 φ 的奇异值, α, β 分别称作 φ 关于奇异值 σ 的右, 左奇异向量.

注 这里, $\varphi^*\varphi(\alpha) = \sigma^2\alpha$, $\varphi\varphi^*(\beta) = \sigma^2\beta$.

定理 1 对 n 维, m 维 Euclid 空间 V, U 及线性映射 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$, 则存在 V 的标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, U 的标准正交基 $\{f_1, \cdots, f_m\}$, 使得 φ 在这两组基下的表示阵为:

$$\begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad S = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\},$$

这里 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 φ 的所有正奇异值.

推论 代数语言：对实矩阵 $A_{m\times n}$, 若 $\mathrm{r}(A) = r$, 则存在 m 阶正交阵 P 与 n 阶正交阵 Q, 使得

$$P'AQ = \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad S = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\},$$

这里 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 A 的所有正奇异值.

定义 4 A 的奇异值分解 (SVD 分解) 即为满足上述推论的分解 $A = P\begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}Q'$.

注 矩阵 $\begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 被称作 A 的正交相抵标准型.

命题 2 实矩阵 $A_{m\times n}$ 的 SVD 分解求法:

(1) 求 $A'A$ 的正交相似标准型, 即求出 n 阶方阵 Q, 使得 $Q'A'AQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0\}$, 其中 $r = \mathrm{r}(A'A) = \mathrm{r}(A)$, $\lambda_1 \geq \cdots \lambda_r > 0$.

(2) 对 Q 的列分块 $Q = \Big(\alpha_1, \cdots, \alpha_n\Big)$, 令 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $\beta_i = \dfrac{1}{\sigma_i}A\alpha_i$, $(i = 1, \cdots, r)$, 此时 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$ 是 m 维列向量空间的两两正交的单位向量. 将它们扩张为标准正交基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$.

(3) 对 m 阶正交阵 $P = \Big(\beta_1, \cdots, \beta_m\Big)$, 则完成奇异值分解

$$A = P\begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}Q'.$$

9.10 最小二乘解

定理 1 设 W 是有限维内积空间 V 的子空间, $v \in V$, 则:

(1)W 中存在唯一的向量 u, 使得 $\|v-u\|$ 最小, 且此时 $(v-u) \perp W$;

(2) 对 W 的标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 及 $W^{\perp}$ 的标准正交基 $\{e_{m+1}, \cdots, e_n\}$, 则:

$$u=\sum_{i=1}^{m}(v,e_i)e_i, \quad v-u=\sum_{i=m+1}^{n}(v,e_i)e_i, \quad \|v-u\|=(\sum_{i=m+1}^{n}|(v,e_i)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 1 Moore-Penrose 广义逆：对 n 维, m 维 Euclid 空间 V,U 及线性映射 $\varphi: V \to U$, 则存在唯一的线性映射 $\varphi^+: U \to V$, 使得它满足：

(1)$\varphi\varphi^+\varphi=\varphi$;

(2)$\varphi^+\varphi\varphi^+=\varphi^+$;

(3)$\varphi\varphi^+$ 和 $\varphi^+\varphi$ 都是自伴随算子.

则上述的 φ^+ 称为 φ 的 Moore-Penrose 广义逆.

定义 2 代数语言：对实矩阵 $A_{m\times n}$, 则存在唯一的 $m\times n$ 阶矩阵 A^+, 使得它满足：

(1)$AA^+A=A$;

(2)$A^+AA^+=A^+$;

(3)AA^+ 和 A^+A 都是实对称阵.

则上述的 φ^+ 称为 φ 的 Moore-Penrose 广义逆.

定理 2 对实矩阵 $A_{m\times n}$, 对 m 维实列向量 β, n 维实列向量 x, 对线性方程组 $Ax=\beta$,

(1) 若有解, 则 $z=A^+\beta$ 是其长度最小解, 这里指 Euclid 空间上的标准内积对应的范数;

(2) 若无解, 则 $z=A^+\beta$ 是其最佳逼近, 即 $\forall x \in \mathbb{R}_n$, $\|Az-\beta\| \le \|Ax-\beta\|$.

注 若这里 $\mathrm{r}(A)=n$, 则可解得 $z=A^+\beta=(A'A)^{-1}A'\beta$, 这也称作该线性方程组的最小二乘解.

10 双线性型

10.1 对偶空间

定义 1 对数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V, 记由 V 到 $\mathbb{K}$ 上的线性变换为线性函数. 由 V 到 $\mathbb{K}$ 的全体线性函数组成的线性空间称为 V 的共轭空间, 记为 V^*. 当 V 有限维时, 称 V^* 为 V 的对偶空间.

定义 2 对数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V 及其一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 若记线性函数 f_i 满足 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号, 则 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 是 V^* 的一组基, 称为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的对偶基.

推论 当 V 是有限维线性空间时, $\dim V^* = \dim V$.

定义 3 定义记号 $\langle , \rangle$ 满足 $\langle f, x\rangle = f(x)$, $(x \in V,\ f \in V^*)$.

注 固定 f, 则 $\langle f, -\rangle = f$ 是 V 上的线性函数; 固定 x, 则 $\langle -, x\rangle$ 是 V^* 上的线性函数.

命题 1 若 $\forall x \in V$, $\langle f, x\rangle = \mathbf{0}$, 则 $f = \mathbf{0}$; 且 $\forall f \in V^*$, $\langle f, x\rangle = \mathbf{0}$ 均成立的充要条件是 $x = \mathbf{0}$.

命题 2 对 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间 V, V 与 V^* 互为对偶空间.

定义 4 对 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间 V, U 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$, 则存在唯一的 $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(U^*, V^*)$, 使得

$$\forall x \in V,\ \forall f \in U^*,\ \langle \varphi^*(f), x\rangle = \langle f, \varphi(x)\rangle,$$

则称这样的线性映射 φ^* 为 φ 的对偶映射.

定理 1 对 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间 V, U 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(U^*, V^*)$, 则 ψ 是 φ 的对偶映射的充要条件是 $\forall x \in V$, $g \in U^*$, 成立 $\langle \psi(g), x\rangle = \langle g, \varphi(x)\rangle$.

命题 3 对 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间 V, U 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$, 记其对偶映射为 φ^*, 若 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基且 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 为其对偶基, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ 是 U 的一组基且 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 是其对偶基. 若 φ 在 $\{e_1, \cdots, e_n\}, \{u_1, \cdots, u_m\}$ 下的表示阵为 A, 则 φ^* 在 $\{v_1, \cdots, v_m\}, \{f_1, \cdots, f_n\}$ 下的表示阵为 A'.

命题 4 对 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V, U, W 及 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(V, U)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(U, W)$, 则:

(1) 线性:$(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)^* = k_1\varphi_1^* + k_2\varphi_2^*$, $(k_1, k_2 \in \mathbb{K})$.

(2) 乘法:$(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$.

(3) 若 V, U 有限维, 则 φ 是单射的充要条件是 φ^* 是满射, φ^* 是满射的充要条件是 φ 是单射.

推论 对 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间 V, U 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$, 记其对偶映射为 φ^*, 则 φ 是同构的充要条件是 φ^* 是同构, 且此时 $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

命题 5 对 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间 V, U 及其对偶空间 U^*, V^*, 则 $U^* \oplus V^*$ 与 $(U \oplus V)^*$ 同构.

10.2 双线性型

定义 1 对 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间 V,U 及它们的积集合 $U\times V$, 若存在 $g:U\times V\to\mathbb{K}$, 满足：

(1) $\forall x,y\in U,\ z\in V,\ k\in\mathbb{K},\ g(x+y,z)=g(x,z)+g(y,z),\ g(kx,z)=kg(x,z)$;

(2) $\forall x\in U,\ y,z\in V,\ k\in\mathbb{K},\ g(x,y+z)=g(x,y)+g(x,z),\ g(x,kz)=kg(x,z)$,

则称 g 是 $U.V$ 上的双线性函数或双线性型.

定义 2 对 U,V 上的双线性型 g, 设 $\{e_1,\cdots,e_m\}$, $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 分别是 U,V 的一组基, 则称 $A=(g(e_i,f_j))_{m\times n}$ 为 g 在这两组基下的表示阵.

注 双线性型的表示阵决定了一个双线性型全体到 $\mathbb{K}$ 上 $m\times n$ 矩阵全体的双射.

命题 1 若 $x\in U$ 在基 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 下的坐标向量是 α, $y\in V$ 在基 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 下的坐标向量是 β, 则 $g(x,y)=\alpha' A\beta$.

命题 2 对 U,V 上的双线性型 g, 它在 U,V 不同基下的表示阵相抵. 称 $\mathrm{r}(A)$ 为 g 的秩, 记作 $\mathrm{r}(g)$.

推论 对 U,V 上的双线性型 g, 总存在 U,V 的基, 使得 g 在这两组基下的表示阵为 A 的相抵标准型 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $r=\mathrm{r}(g)$.

定理 1 对 U,V 上的双线性型 g, 必存在 U,V 的基 $\{e_1,\cdots,e_m\}$, $\{f_1,\cdots,f_n\}$, 使得

$$g(e_i,f_j)=\delta_{ij},\ (i,j=1,\cdots,r);\quad g(e_i,f_j)=0,\ (i>r\text{ 或 }j>r),$$

其中 $r=\mathrm{r}(g)$, δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

定义 3 对 U,V 上的双线性型 g, 称 g 的左右根子空间 L,R 为

$$L=\{u\in U\big|\forall y\in V,\ g(u,y)=0\},\quad R=\{v\in V\big|\forall x\in U,\ g(x,v)=0\}.$$

命题 3 $\dim L=m-r$, $\dim R=n-r$, 其中 $\dim U=m$, $\dim V=n$, $r=\mathrm{r}(g)$.

定义 4 若 g 的左右根子空间都为零空间, 则称 g 是非退化的.

定理 2 对 U,V 上的双线性型 g, 它非退化的充要条件是 $\dim U=\dim V=\mathrm{r}(g)$.

推论 对 U,V 上的双线性型 g, 它非退化的充要条件是 g 在任意两组基下的表示阵都是非异阵.