高代一期末

1. 对域 $\mathbb{F}$ 上的多项式环 $F[x]$ 以及集合 $I \in F[x]$, 若 I 满足以下两条性质：

(1) 若 $f, g \in I$, 则 $f - g \in I$, (2) 若 $g \in I$, 则 $\forall f \in F[x]$,$f \cdot g \in I$,

证明：$\exists g \in I$, 使得 $I = \{f \cdot g | f \in F[x]\}$.

2. 若整系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(a_i) = 5, a_i \in \mathbb{Z}\,(i = 1, \cdots, 5)$, 证明：$f(x)$ 没有整数根.

3. 求行列式的值：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

4. 若 $f_i(x), (i = 1, \cdots, n)$ 是 n 个次数不超过 $n-2$ 次的多项式, 记 $a_{ij} = f_i(a_j), a_j \in \mathbb{R}$.

证明：$|A| = (a_{ij})_{n \times n} = 0$.

5. 若不超过 $n-1$ 次的多项式 $f(x)$ 满足 $f(a_i) = b_i, (i = 1, \cdots, n)$, 其中 a_i 是互异实数.

证明：$f(x)$ 存在且唯一.

6. 探索矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件, 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是 $m \times l$ 矩阵.

7. 证明：n 阶实对称阵 A 正定的充要条件是存在实非异阵 C, 使得 $A = C'C$.

8. 化简二次型 $f = 4x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_3^2$ 为标准型, 并写出所经历的非退化线性替换.