

数分三期中

1(44) (1) 设 $f(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的函数, 叙述 f 在原点 $(0, 0)$ 可微的定义.

(2) 探究如下函数在点 $(0, 0)$ 处的可微性:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(3) 证明 $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)$ 在 \mathbb{R}^2 上半平面上满足 $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

(4) 若 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续可偏导, 且 $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 证明 $\exists \phi$, 使得 $f(x, y) = \phi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

(5) 设 f 在 \mathbb{R}^3 上可微, $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ 是 \mathbb{R}^3 中的三个线性无关的向量, 且 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_i} = 0, (i = 1, 2, 3)$, 证明 $f(x, y, z)$ 在 \mathbb{R}^3 中恒为常数.

2(12) 设 $B \subseteq \mathbb{R}^n, (n \geq 2)$ 是单位开球, 函数 u, v 在 \bar{B} 上连续, 在 B 内二阶连续可导且满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1 - u^2 - v^2)u = 0, & x \in B \\ -\Delta v - (1 - u^2 - v^2)v = 0, & x \in B \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases}$$

证明: $u^2(x) + v^2(x) \leq 1, (\forall x \in \bar{B})$, 其中 Δ 代表 Laplace 算子.

3(16) 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的最小体积, 其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

4(13) (1) 令

$$F(t) = \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2) \, dx \, dy, t > 0$$

其中 f 是 \mathbb{R}^2 上的连续函数且 $f(1) = 1$, 计算 $F'(1)$ 的值.

(2) 设函数 $f(x, y), f_y(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ 上连续, 其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 若 $\forall x \in [a, b], f(x, \varphi(x)) = 0$, 则 $\exists K \in \mathbb{R}$, 使得

$$\iint_D f^2(x, y) \, dx \, dy \leq K \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(x, y) \, dx \, dy.$$

5(15) (1) 设方程 $e^z - xyz = 0$ 确定 $z = f(x, y)$ 的隐函数, 计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(2) 设函数 $f(x, y), g(x, y)$ 在平面开区域 G 上连续可偏导, 且

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0, (\forall (x, y) \in G),$$

又设有界闭区域 $D \subset G$. 证明: 在 D 中满足方程组 $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ 的点至多有有限个.