数学分析

《数学分析》陈纪修
《数学分析习题课讲义》谢惠民
《数学分析中的典型问题和方法》裴礼文

2021 数学基地班-耿浩源

目录

1 集合与映射

1.1 集合

命题 1 集合的基本运算：并, 交, 差, 补. 集合运算的性质：交换律, 结合律, 分配律, 对偶律.

定义 1 若集合 S 由有限多个元素组成 (包括空集), 则称 S 为有限集, 否则称其为无限集. 若一个无限集中的元素能够按某种规律排成一个序列, 则称其为可列集.

命题 2 可列个可列集之并也是可列集, 通常用对角线法则表出. 有限个可列集的 Descartes 积可列, 可列个可列集的 Descartes 积不可列.

命题 3 整数集 $\mathbb{Z}$ 可列, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 可列, 实数集 $\mathbb{R}$ 不可列.

定义 2 Descartes 积：定义集合 A 和集合 B 的 Descartes 积 $A \times B = \{(x, y) |\, x \in A, y \in B\}$.

1.2 映射与函数

定义 1 映射：设 X, Y 是两个给定的集合, 若按照某种规则 f, 使得对集合 X 中的每一个元素 x, 都可以找到集合 Y 中惟一确定的元素 y 与之对应, 则称这个对应规则 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射, 记为 $f : X \to Y \quad x \mapsto y = f(x)$. 其中 y 称为在映射 f 之下 x 的像,x 称为在映射 f 之下 y 的一个逆像 (也称为原像). 像是唯一的, 但逆像不一定唯一.

集合 X 称为映射 f 的定义域, 记为 D_f, 而在映射 f 之下,X 中元素 x 的像 y 的全体称为映射 f 的值域, 记为 R_f. 即 $R_f = \{y|y \in Y \text{且} y = f(x), x \in X\}, R_f \subset Y$.

定义 2 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射, 若 f 的逆像唯一, 则称 f 是一个单射; 若 f 满足 $R_f = Y$, 则称 f 是一个满射; 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是一个双射 (或称一一对应).

定义 3 逆映射, 复合映射的定义 (略).

定义 4 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射, 若 $X \subset \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$, 则称 f 为一元实函数, 简称函数. 函数有显式表示, 隐式表示, 分段表示, 参数表示等表示方法; 有有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性等简单特性.

定义 5 基本初等函数包括常数函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算产生的函数称为初等函数.

2 数列极限

2.1 实数系的连续性

定义 1 设 S 是一个非空数集, 如果 $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in S$, 有 $x \leq M$, 则称 M 是 S 的一个上界; 如果 $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in S$, 有 $x \geq M$, 则称 M 是 S 的一个下界. 当数集 S 既有上界, 又有下界时, 称 S 为有界集.

定义 2 设数集 S 有上界, 记 U 为 S 的上界全体所组成的集合, 则 U 一定有最小数. 设 U 的最小数为 β, 就称 β 为数集 S 的上确界, 即最小上界, 记为 $\beta = \sup S$. 下确界可类似地定义.

定理 1 确界存在定理：非空有上界的数集必有上确界, 非空有下界的数集必有下确界.

命题 1 非空有界数集的上下确界唯一.

定理 2 Dedekind 分割 (略).

2.2 数列极限

定义 1 设 $\{x_n\}$ 是一给定数列,$a \in \mathbb{R}$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得正整数 $n > N$ 时成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 若这样的 a 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

定义 2 在收敛的数列中, 我们称极限为 0 的数列为无穷小量; 事实上, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 等价于 $\{x_n - a\}$ 是无穷小量.

命题 1 收敛数列极限唯一.

命题 2 既有上界又有下界的数列称为有界数列. 收敛数列必定有界.

命题 3 保序性：设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两收敛数列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ 且 $a < b$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得正整数 $n > N$ 时成立 $x_n < y_n$.

推论 局部保号性：设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得正整数 $n > N$ 时成立 $|y_n| > \dfrac{|b|}{2} > 0$. 这里 y_n 与 b 正负相同.

定理 1 夹逼定理：对三数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, 若从某项开始成立 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

命题 4 数列极限的四则运算：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则：

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n \pm \beta y_n) = \alpha a \pm \beta b, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}); \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab; \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0).$$

注 数列极限的四则运算对无限个数列或不定个数个数列时不一定成立.

2.3 无穷大量

定义 1 对给定的数列 $\{x_n\}$, 若 $\forall G>0, \exists N\in\mathbb{N}_+$, 使得正整数 $n>N$ 时成立 $|x_n|>G$, 则称 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. 若无穷大量 $\{x_n\}$ 从某项起全为正 (负), 则称其为正 (负) 无穷大量, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$; 否则称其为不定号无穷大量.

命题 1 若 $x_n\neq 0$, 则 $\{x_n\}$ 是无穷大量等价于 $\{\dfrac{1}{x_n}\}$ 是无穷小量.

命题 2 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 若 $\exists N\in\mathbb{N}_+$, 使得正整数 $n>N$ 时成立 $|y_n|\geq\delta>0$, 则 $\{x_ny_n\}$ 也是无穷大量.

推论 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b\neq 0$, 则 $\{x_ny_n\}$ 和 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 都是无穷大量.

定义 2 若 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\leq x_{n+1}, (n\in\mathbb{N}_+)$, 则称其为单增数列; 若上式中的不等号严格成立, 则称其为严格单增数列. 单减数列, 严格单减数列同理可定义.

定理 1 Stolz 定理：

(1)$\dfrac{*}{\infty}$ 型：设 $\{y_n\}$ 是严格单增的正无穷大量, 且 $\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$, 则 $\dfrac{x_n}{y_n}=a$. 其中 a 可以为有限量或 $\pm\infty$.

(2)$\dfrac{0}{0}$ 型：设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 都是无穷小量,$\{y_n\}$ 严格单减, 且 $\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$, 则 $\dfrac{x_n}{y_n}=a$. 其中 a 可以为有限量或 $\pm\infty$.

命题 3 迭代数列的极限：若迭代数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1}=f(n), n\in\mathbb{N}_+$,

(1) 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\xi)$, 则极限 ξ 一定是方程 $f(x)=x$ 的根, 这时称 ξ 为函数 $f(x)$ 的不动点.

(2) 若 $f(x)$ 在区间 I 上单调, 且 $x_n\in I, (n\in\mathbb{N}_+)$, 则 $f(x)$ 单增时 $\{x_n\}$ 单调; $f(x)$ 单减时 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{2k}\}$ 和 $\{x_{2k-1}\}$ 分别单调, 且单调性相反.

(3) 设 a 是 $f(x)$ 的不动点, 函数 $f(x)$ 在 a 处连续, 在 a 的邻域 $O(a,r)$ 上严格单增. 若在 $(a-r,a)$ 上 $f(x)>x$, 在 $(a,a+r)$ 上 $f(x)<x$, 且迭代数列的首项 $x_1\in O(a,r)\setminus\{a\}$, 则 $\forall n\in\mathbb{N}_+, x_n\in O(a,r)$, 数列 $\{x_n\}$ 是以 a 为极限的严格单调数列.

定理 2 Toeplitz 定理：设对 $n,k\in\mathbb{N}_+$, 有 $t_{nk}\geq 0,\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$. 若已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 定义 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k, (n\in\mathbb{N}_+)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

注 事实上, 将上述条件改为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 时该定理依然成立.

2.4 收敛准则

定义 1 弧度 π 的定义：$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{180^\circ}{n} = \pi.$

定义 2 自然常数 e 的定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$

注 e 的无穷级数展开式：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}\right) = e.$

定义 3 Euler 常数 γ 的定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i} - \ln n\right) = \gamma.$

注 Catalan 恒等式：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i} = \sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{i+1}}{i}$

命题 1 单调有界数列必收敛.

定义 4 如果一系列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], (n \in \mathbb{N}_+)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则称这列闭区间形成一个闭区间套.

定理 1 闭区间套定理：若 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 则存在唯一的 $\xi \in \mathbb{R}$ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

定义 5 对数列 $\{x_n\}$ 及一系列严格单增的正整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, 则 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \cdots$ 也形成一个数列, 称为数列 $\{x_n\}$ 的子列, 记为 $\{x_{n_k}\}$; 这里下标 n_k 表示子列中的第 k 项恰好是原数列中的第 n_k 项.

命题 2 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 则其任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a.

推论 对数列 $\{x_n\}$, 若存在两子列 $\{x_{n_{k1}}\}, \{x_{n_{k2}}\}$ 分别收敛于不同的极限, 则数列 $\{x_n\}$ 必发散.

定理 2 Bolzano-Weierstrass 定理：有界数列必有收敛子列.

推论 若数列 $\{x_n\}$ 无上 (下) 界, 则存在其子列为正 (负) 无穷大量.

定义 6 对数列 $\{x_n\}$, 若 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得正整数 $n, m > N$ 时成立 $|x_n - x_m| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是基本列.

定理 3 Cauchy 审敛准则：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 是基本列.

定义 7 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 值域 $R_f \subset [a, b]$, 且 $\exists k \in (0, 1)$, 使得 $\forall x, y \in [a, b]$ 有 $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$ 则称 f 是 $[a, b]$ 上的一个压缩映射,k 称为压缩常数.

定理 4 压缩映射原理：设 f 为 $[a, b]$ 上的一个压缩映射, 则 f 在 $[a, b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$ 且对任意的初始值 $x_0 \in [a, b]$ 与递推公式 $x_{n+1} = f(x_n), (n \in \mathbb{N}_+)$, 迭代数列 $\{x_n\}$ 必收敛于 ξ.

注 对上述数列 $\{x_n\}, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 我们有事后估计式 $|x_n - \xi| \leq \dfrac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$ 与先验估计式 $|x_n - \xi| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

定义 8 若有 $[a,b] \subset \bigcup_\alpha I_\alpha$, 其中每个 I_α 是开区间, 则称 $\{I_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖.

定理 5 有限覆盖定理:若 $\{I_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则存在 $\{I_\alpha\}$ 的有限子集 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 即 $[a,b] \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

推论 加强形式：若 $\{I_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x', x'' \in [a,b]$, 若 $|x' - x''| < \delta$, 则必定存在 $\{I_\alpha\}$ 中的一个开区间覆盖 x', x''. 这个数 δ 称为该开覆盖的 Lebesgue 数.

注 有限覆盖是由局部性质推整体性质, 闭区间套是由整体性质推局部性质. 据这个特点我们可以选择是否使用反证法.

命题 3 实数完备性六大定理：确界原理, 单调有界原理,Bolzano-Weierstrass 定理, 闭区间套定理, 有限覆盖定理,Cauchy 审敛准则. 这六大定理两两等价.

3 函数极限与连续函数

3.1 函数极限

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个去心邻域中有定义, 如果 $\exists A\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时都成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 如果不存在具有上述性质的实数 A, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限不存在.

命题 1 函数在某点处若存在极限, 则该极限唯一.

命题 2 局部保序性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$ 且 $a>b$. 则 $\exists\delta>0$, 使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时成立 $f(x)>g(x)$.

推论 1 局部保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$, 则 $\exists\delta>0$, 使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

推论 2 局部有界性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 则 $\exists\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在去心邻域 $O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 有界.

定理 1 夹逼定理：对三函数 $f(x),g(x),h(x)$, 若 $\exists r>0$, 使得 $0<|x-x_0|<r$ 时成立开始成立 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

命题 3 函数极限的四则运算：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, 则：

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)\pm\beta g(x))=\alpha a\pm\beta b,(\alpha,\beta\in\mathbb{R});\ \lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=ab;\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b},(b\neq 0).$$

定理 2 Heine 定理：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0,(n\in\mathbb{N}_+)$ 的数列 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在 (x_0-r,x_0) 中有定义, 如果 $\exists A\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时都成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)=A$. 右极限的定义类似.

注 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处左右极限存在且相等.

定理 3 单调函数的单侧极限存在定理：设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调, 则 $f(b-)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 一定有意义. 当 $f(x)$ 单增时, 若其在 (a,b) 上有上界, 则 $f(b-)$ 为有限数, 否则 $f(b-)=+\infty$. 对 $f(x)$ 单调减少有类似的结论成立.

定义 3 函数极限定义的扩充：自变量的极限有六种情况, 函数值的极限有四种情况.

定理 4 函数的 Cauchy 审敛准则：$f(x)$ 在 x_0 处极限存在且有限的充要条件是 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使得 $\forall x',x''>X$, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

命题 4 设 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, $\lim\limits_{y\to A}f(y)=B$, 且在点 a 的某邻域上 $g(x)=y$. 如果满足以下条件之一：

(1) 存在点 a 的一个空心邻域, 在其中 $g(x) \neq A$.

(2)$\lim\limits_{y \to A} f(y) = f(A)$.

(3)$A = \infty$, 且 $\lim\limits_{y \to A} f(y)$ 有意义.

则成立 $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y \to A} f(y) = B$.

推论 设 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A, \lim\limits_{y \to A} f(y) = B$, 则 $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = B, \lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(A)$ 或该极限不存在.

3.2 连续函数

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域中有定义, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,x_0 是该函数的连续点.

定义 2 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 左连续. 右连续的定义类似.

定义 3 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上每一点都连续, 则称其在 (a, b) 上连续; 若此时 $f(x)$ 在 a 右连续, 在 b 左连续, 则称其在 $[a, b]$ 上连续.

注 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 其中 I 开闭任意, 若 $\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $x \in I$ 且 $|x - x_0| < \delta$, 都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

命题 1 连续函数的四则运算：有限个在某区间内连续的函数进行有限次四则运算后, 所得到的函数在其定义域 (该区间除去使分母为 0 的点) 上连续.

定义 4 三类间断点：

(1) 第一类 (跳跃间断点)：函数在该点左右极限均存在但不相等.

(2) 第二类 (无穷间断点)：函数在该点左右极限至少有一个不存在.

(3) 第三类 (可去间断点)：函数在该点左右极限存在且相等但不等于该点函数值; 或函数在该点无定义.

定理 1 反函数存在性定理：若函数 $y = f(x), x \in D_f$ 严格单增, 则其反函数 $x = f^{-1}(y), y \in R_f$ 存在且严格单增. 函数严格单减时同理.

定理 2 反函数连续性定理：若函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且严格单增,$f(a) = m$,$f(b) = n$, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[m, n]$ 连续且严格单增. 函数严格单减时同理.

定理 3 复合函数连续性定理：若函数 $u = g(x)$ 在 x_0 连续,$g(x_0) = u_0$; 又 $y = f(u)$ 在点 u_0 连续, 则复合函数 $y = f \circ g(x)$ 在点 x_0 连续.

命题 2 一切初等函数在其定义区间上连续.

定义 5 对于函数 $f(x)$ 及某点 a 处邻域 $O(a,\delta)$, 定义 $f(x)$ 在这个邻域上的振幅为:

$$\omega_f(a,\delta)=\sup_{x\in O(a,\delta)}\{f(x)\}-\inf_{x\in O(a,\delta)}\{f(x)\};$$

类似地, 定义函数 $f(x)$ 在点 a 的振幅为 $\omega_f(a)=\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(a,\delta)$.

注 函数 $f(x)$ 在点 a 连续的充要条件是 $\omega_f(a)=0$.

定理 4 Cauchy 方程：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $f(x)=f(1)x$.

命题 3 单调函数的间断点都是跳跃间断点, 且间断点个数至多有可列个.

3.3 无穷小量与无穷大量的阶

定义 1 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, 则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量.

定义 2 若 $u(x),v(x)$ 在 $x\to x_0$ 时都是无穷小量,

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$, 则称 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 对 $v(x)$ 是高阶无穷小量, 记作 $u(x)=o(v(x))\,,(x\to x_0)$.

(2) 若 $\exists A>0$, 当 x 在 x_0 的某个去心邻域中时都成立 $\dfrac{u(x)}{v(x)}\le A$, 则称 $x\to x_0$ 时 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量, 记为 $u(x)=O(v(x))\,,(x\to x_0)$. 若该比值不为 0, 则称 $x\to x_0$ 时 $u(x),v(x)$ 是同阶无穷小量.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=1$, 则称 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 对 $v(x)$ 是等价无穷小量, 记作 $u(x)\sim v(x)\,,(x\to x_0)$.

注 通常用 $u(x)=o(1)\,,(x\to x_0)$ 表示 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 是无穷小量, 用 $u(x)=O(1)\,,(x\to x_0)$ 表示 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 是有界量.

定义 3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷大量.

定义 4 若 $u(x),v(x)$ 在 $x\to x_0$ 时都是无穷大量,

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\infty$, 则称 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 对 $v(x)$ 是高阶无穷大, 记作 $u(x)=o(v(x))\,,(x\to x_0)$.

(2) 若 $\exists A>0$, 当 x 在 x_0 的某个去心邻域中时都成立 $\dfrac{u(x)}{v(x)}\le A$, 则称 $x\to x_0$ 时 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量, 记为 $u(x)=O(v(x))\,,(x\to x_0)$. 若该比值不为 0, 则称 $x\to x_0$ 时 $u(x),v(x)$ 是同阶无穷大量.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=1$, 则称 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 对 $v(x)$ 是等价无穷大量, 记作 $u(x)\sim v(x)\,,(x\to x_0)$.

命题 1 设 $u(x),v(x)$ 和 $w(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 U 上有定义, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{v(x)}{w(x)}=1$ (即 $v(x)\sim w(x)\,(x\to x_0)$), 那么:

(1) 当 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)w(x)=A$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)v(x)=A$.

(2) 当 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{w(x)}=A$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)}=A$.

定义 5 设已知 $f(x)=o(1)(x\to a)$, 若 $\exists\alpha>0$, 使得 $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{f(x)}{(x-a)^\alpha}\right|=l>0$, 则称 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时是 α 阶的无穷小量. 无穷大量的阶可类似定义.

注 无穷小量和无穷大量的阶不一定存在.

定义 6 将有 o,O 和 $\sim$ 的等式称为渐近等式, 并将 $f(x)\sim g(x)(x\to a)$ 说成是函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x\to a$ 时具有相同的渐近性态.

定理 1 Stirling 公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

定理 2 Dirichlet 函数的解析形式：$D(x)=\lim\limits_{m\to+\infty}\left[\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}(\pi m!x)\right]$.

3.4 闭区间上的连续函数

定理 1 有界性定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则它在 $[a,b]$ 上有界.

定理 2 最值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在 $[a,b]$ 上必能取到最大值与最小值, 即 $\exists\xi,\eta\in[a,b]$,$\forall x\in[a,b]$, 成立 $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$.

定理 3 零点存在定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

定理 4 中间值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则它一定能取到最大 $M=\max\{f(x)\mid x\in[ab]\}$ 和最小值 $m=\min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 之间的任何一个值.

推论 值域定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 该区间上函数最大值是 M, 最小值是 m, 则 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的值域为 $[m,M]$.

命题 1 对 $[a,b]$ 上有定义的函数 $f(x)$, 若 $\forall x_0\in[a,b], f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义, 若对于 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\,\delta>0$, 只要 $x',x''\in X$ 满足 $|x'-x''<\delta$, 就成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续.

命题 2 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义, 则 $f(x)$ 在 X 上一致连续的充分必要条件是: 对任何点列 $\{x'_n\}(x'_n\in X)$ 和 $\{x''_n\}(x''_n\in X)$, 只要满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n-x''_n)=0$, 就成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x'_n)-f(x''_n))=0$.

定理 5 Cantor 定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在 $[a,b]$ 上一致连续.

命题 3 若函数 f 在区间 I 上一致连续, 则 f 必在区间 I 上连续.

推论 有界区间 (开闭不论) 上的一致连续函数必定有界.

命题 4 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 则它在 (a,b) 上一致连续的充要条件是单侧极限 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 均存在且有限.

命题 5 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则 $\exists\, a,b \geq 0$, 满足 $|f(x)| \leq a|x| + b$ 恒成立.

命题 6 f 在 I 上一致连续的充要条件是 f 将 Cauchy 列映为 Cauchy 列.

定义 2 Lipschitz 条件:若 f 正在区间 I 上定义, 且 $\exists L > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in I$ 成立 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, 则称 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件.

注 若将上式的 $|x_1 - x_2|$ 改为 $|x_1 - x_2|^{\alpha}$, 则称 f 在 I 上满足 α 次 Lipschitz 条件.

命题 7 在 I 上满足 Lipschitz 条件的函数必定一致连续; 其中, 若 $\alpha > 1$, 则 $f(x)$ 是常值函数.

推论 在 $[a, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件的函数 f 满足 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 这里 $a > 0$.

命题 8 若函数 f, g 在区间 I 上一致连续, 则它们的线性组合 $mf + ng$ 在 I 上一致连续.

定义 3 递推公式 $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}_+$ 在动力系统理论中称之为一维迭代动力系统 (或一维离散动力系统); 从初值 x_0 出发由迭代生成一个数列 $\{x_n\}$, 称为由初值 x_0 确定的轨道.

如果 $x_1 = f(x_0) = x_0$, 则对所有 $n \geq 0$ 有 $x_{n+1} = x_n$. 这时称点 x_0, 也就是由它确定的轨道, 为系统的不动点; 若对某一轨道 $\{x_n\}$,$\exists p \in \mathbb{N}_+$, 使 $x_{n+p} = x_n$ 对一切 $n \geq 0$ 成立, 就称这个轨道是以 p 为周期的周期轨. 周期轨中的点称为周期点. 显然, 不动点就是周期为 1 的周期轨. 对周期轨来说, 具有以上性质的最小 p 称为轨的最小周期.

命题 9 设 f 在有界闭区间 I 上连续, 若满足 $I \subset f(I)$, 则 f 在 I 中有不动点.

命题 10 设 f 是在有界闭区间 $I_0, \cdots, I_{n-1}$ 上有定义的连续函数, 且满足 $I_k \subset f(I_{k-1})$, 则 $\exists x_0 \in I_0$, 使得 $f^n(x_0) = x_0$, 且满足 $f^k(x_0) \in I_k, i = 0, \cdots, n-1$.

定理 6 Li-Yorke 第一定理：设 f 在区间 I 上连续且满足 $I \subset f(I)$. 设 $a, b, c, d \in I$ 并且满足条件 $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = d, d \leq a < b < c$, 则 f 具有最小正周期为每个正整数的所有周期轨.

定理 7 Li-Yorke 第二定理：设 f 在区间 I 上连续且满足 $I \subset f(I)$. 在区间 I 中存在一个不可列集 S, 使得 $\forall x \neq y \in S$ 为初值的迭代生成数列 $\{f^n(x)\}$ 和 $\{f^n(y)\}$ 具有以下三个性质:

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$, (2) $\liminf\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$, (3) $\limsup\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0$.

其中 p 是 f 的任何一个周期点.

定义 4 设 f 在区间 I 上连续且满足 $I \subset f(I)$. 若 f 的周期点的最小周期无上界且存在 I 的不可列子集 S,$\forall x \neq y \in S$, 均有 $\limsup\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$, 且 $\liminf\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$, 则称由 f 迭代生成的动力系统为混沌.

4 微分

4.1 微分与导数

定义 1 对函数 $y=f(x)$ 的一点 x_0, 若存在一个只与 x_0 有关, 与 Δx 无关的数 $g(x_0)$, 使得当 $\Delta x \to 0$ 时有 $\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微. 此时 $g(x)\Delta x$ 称为 Δy 的线性主要部分.

于是, 当 $f(x)$ 在 x 处可微且 $\Delta x \to 0$ 时, 我们将 Δx 称为自变量的微分, 记作 $\mathrm{d}x$; 将 Δy 的线性主要部分 $g(x)\,\mathrm{d}x$ 称为因变量的微分, 记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$, 满足 $\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$.

定义 2 若函数 $y=f(x)$ 在其定义域中的一点 x_0 处极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 并称这个极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$. 若 $f(x)$ 在某一区间的任一点上都可导, 则称 $f(x)$ 在该区间上可导. 这样的导数值组成的函数称为 $f(x)$ 的导函数.

命题 1 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是它在 x_0 处可微.

4.2 导数的意义和性质

命题 1 在曲线上某点 x_0 的导数值就是曲线在该点处切线的斜率.

定义 1 单侧导数：定义 $f(x)$ 在 x_0 处的

左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, 右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

4.3 导数四则运算和反函数求导法则

命题 1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某一区间 I 上都可导, 则：

(1) 对 $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 它们的线性组合也在 I 上可导, 且满足 $(c_1f(x)+c_2g(x))'=c_1f'(x)+c_2g'(x)$.

(2) 它们的积函数也在 I 上可导, 且满足 $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

(3) 若 $g(x)\neq 0$, 它们的商函数也在 I 上可导, 且满足 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

推广 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 都在某一区间上可导,

(1) 对 $\forall c_1,\cdots c_n\in\mathbb{R}$, $\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c_if_i(x)\right]'=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}cf_i'(x)$.

(2) $\left[\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_j'(x)\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f_i(x)\right]$.

定理 1 反函数求导定理：若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 可导且严格单调. 若 $f'(x)\neq 0$, 记 $\alpha=\min\{f(a+),f(b-)\},\beta=\max\{f(a+),f(b-)\}$, 则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 上可导, 且：

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}.$$

4.4 复合函数求导法则及其应用

定理 1 复合函数求导法则：设函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 可导, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 可导, 且有 $[f(g(x))]'_{x=x_0}=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$.

复合函数的求导法则也可以写作 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 我们将其称作链式法则.

命题 1 一阶微分的形式不变性：不管 u 是自变量还是中间变量, 函数 $y=f(u)$ 的微分形式都是

$$\mathrm{d}[f(u)] = f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

命题 2 隐函数求导：通过对方程两边同时对自变量求导解方程得到.

命题 3 参数方程求导：$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 的导数满足 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

4.5 高阶导数和高阶微分

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x),(n=2,3,\cdots)$ 仍可导, 则它的导数 $\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$ 被称为 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记为 $f^{(n)}(x)$, 并称 $f(x)\,n$ 阶可导.

命题 1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均 n 阶可导, 则对 $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 它们的线性组合 $c_1f(x)+c_2g(x)$ 也 n 阶可导, 且满足 $[c_1f(x)+c_2g(x)]^{(n)}=c_1f^{(n)}(x)+c_2g^{(n)}(x)$.

推广 对 $\forall c_1,\cdots c_n\in\mathbb{R}$, $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i(x)\right]^{(n)}=\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i^{(n)}(x)$.

定理 1 Leibniz 公式：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均 n 阶可导, 则它们的积函数也 n 阶可导, 且满足

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

这里 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 是组合系数.

5 微分中值定理及其应用

5.1 微分中值定理

定义 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_0 \in I$, 若 $\exists x_0$ 的邻域 $O(x_0, \delta) \subset I$, 使得 $f(x) \leq f(x_0), x \in O(x_0, \delta)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点,$f(x_0)$ 为相应极大值. 极小值点和极小值同理, 统称极值点和极值.

定理 1 Fermat 引理：设 x_0 是 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

定理 2 Rolle 中值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

推广 广义 Rolle 中值定理：设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导, 且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = A$, 其中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $-\infty \leq A \leq +\infty$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

定理 3 Lagrange 中值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. 其几何意义为, 存在 $[a, b]$ 上一点处的切线与两端点连线平行.

推论 有限增量公式：相同条件下, $\begin{cases} \exists \xi \in (a, b) & f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a) \\ \exists \theta \in (0, 1) & f(b) = f(a) + f'(a + \theta(b - a))(b - a) \\ \exists \theta \in (0, 1) & \Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \end{cases}$.

命题 1 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导且 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上为常数函数. 若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 D 上均可导且 $f'(x) = g'(x)$, 则 $f(x) = g(x) + C$ 在 D 上成立.

命题 2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在 I 上单增等价于 $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$; $f(x)$ 在 I 上严格单增等价于集合 $S = \{x \in I | f'(x) = 0\}$ 中不包含任何长度大于 0 的区间 (测度为 0), 且 $f'(x) > 0, (x \in I \setminus S)$. 严格单减同理.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$, 都有 $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数; 若不等号严格成立, 则称 $f(x)$ 是 I 上的严格下凸函数. 上凸函数和严格上凸函数同理.

注 开区间上的凸函数必是连续函数.

命题 3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 则 $f(x)$ 在 I 上为下凸函数等价于 $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$; $f(x)$ 在 I 上为严格下凸函数等价于集合 $S = \{x \in I | f'(x) = 0\}$ 中不包含任何长度大于 0 的区间 (测度为 0), 且 $f''(x) > 0, (x \in I \setminus S)$. 严格上凸函数同理.

定义 2 曲线上凸与下凸的分界点称为曲线的拐点.

命题 4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$. 若 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上二阶可导且 $(x_0, f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$; 若 $f(x)$ 在 x_0 处二阶导不存在, 则 $(x_0, f(x_0))$ 不一定不是 $f(x)$ 的拐点.

定理 4 加权 Jensen 不等式：若 $f(x)$ 在区间 I 上下凸, 对于任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ 的一组正实数 λ_i,$\forall x \in I$, 成立：

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

特别地, 若取 $\lambda_i = \dfrac{1}{n}(i=1,\cdots,n)$, 有 $f\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right) \le \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$. 若 $f(x)$ 在 I 上上凸, 不等号反向.

定理 5 Cauchy 中值定理：设函数 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 且 $\forall x \in (a,b), g(a) \neq g(b), f'(x), g'(x)$ 不同时为 0(或 $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$), 则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

其几何意义为, 对参数方程 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$, 至少存在一个参数 $\xi \in (a,b)$, 使其在曲线上对应的点 $g(\xi), f(\xi)$ 处的曲线与两端点连线平行.

定理 6 Darboux 定理：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f'(x)$ 具有介值性. 即：对所有区间 I 内满足 $a<b, f'(a)<f'(b)$ 的 a,b,$\forall \xi \in (f'(a),f'(b)), \exists c \in (a,b)$, 使得 $f'(c)=\xi$.

定理 7 单侧导数极限定理：设区间 $[a,b)$ 上的函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导且在 a 点右连续. 若 $f'(x)$ 在 a 处存在右极限 $f'(a^+)=A$, 则 $f(x)$ 在 a 点存在右侧导数 $f'_+(a)=f'(a^+)=A$, 即 $f'(x)$ 在 a 点右连续. 这里的 A 可以为有限数或 $\pm\infty$.

推论 导数极限定理：设函数 $f(x)$ 在 a 的某邻域 $O(a)$ 上连续, 在去心邻域 $O(a)\setminus\{a\}$ 上可导. 若 $f'(x)$ 在 a 处有极限, 则 $f(x)$ 在 a 点可导, 且 $f'(x)$ 在 a 点连续.

5.2 L'Hospital 法则

定理 1 L'Hospital 法则：设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(a,a+d]$ 上可导,$d>0$ 且 $g'(x)\neq 0$. 若此时有 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则成立 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理 2 Landau 不等式: 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导, 且记 $M_0 = \sup\{|f(x)|\big|x\in(0,+\infty)\}, M_2 = \sup\{|f''(x)|\big|x\in(0,+\infty)\}$. 若 M_0, M_2 均为有限数, 则 $M_1 = \sup\{|f'(x)|\big|x\in(0,+\infty)\}$ 也是有限数, 且满足不等式 $M_1 \le 2\sqrt{M_0M_2}$.

推广 在上式中, 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 则不等式可加强为 $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$.

5.3 Taylor 公式和插值多项式

定理 1 带 Peano 余项的 Taylor 公式：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域中的任一点 x, 成立：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中 Peano 余项 $r_n(x)$ 满足 $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$.

该公式称为 $f(x)$ 在 x_0 处的带 Peano 余项的 n 次 Taylor 展开式, 它的前 $n+1$ 项组成的多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式.

定理 2 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数, 且在区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶连续导数. 设 $x_0\in[a,b]$ 为一定点, 对于任一 $x\in[a,b]$, 成立：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中在 x 和 x_0 之间存在 ξ, 使得 Lagrange 余项 $r_n(x)$ 满足：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

定理 3 带 Cauchy 余项的 Taylor 公式：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 上 $n+1$ 阶可导, 则对任意满足 $x\neq x_0$ 的 $x\in O(x_0)$, 在 x 和 x_0 之间存在 η, 使得：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中 Cauchy 余项 $r_n(x)$ 满足：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\eta)^n(x-x_0).$$

定理 4 带 Schlomilch-Roche 余项的 Taylor 公式：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 上 $n+1$ 阶可导, 则对任意满足 $x\neq x_0$ 的 $x\in O(x_0)$, $\forall p>0,\exists\theta\in(0,1)$, 使得：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n)!p}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}.$$

注 $p=n+1$ 时为 Lagrange 余项的形式;$p=1$ 时为 Cauchy 余项的形式.

定义 1 设已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $m+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 上的函数值和若干阶导数值 $f^{(j)}(x_i),(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n-1)$, 这里 $n=\sum\limits_{i=0}^{m}n_i$. 若存在一个 n 次多项式 $p_n(x)$, 满足如下的插值条件 $p_n^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i),(i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n-1)$, 则称 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于插值节点 (简称节点)$x_0,x_1,\cdots,x_m$ 的 n 次插值多项式, 而 $r_n(x)=f(x)-p_n(x)$ 称为插值余项.

命题 1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 在 $[a,b]$ 上有 l_0 个点满足 $g(x)=0$, 且在其中的 l_1 个点有 $g'(x)=0$, 则 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 l_0+l_1-1 个不同的零点.

定理 5 插值多项式的余项定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数, 在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数, 且已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $m+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 上的函数值和若干阶导数值 $f^{(j)}(x_i),(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n-1)$, 这里 $n=\sum\limits_{i=0}^{m}n_i$. 于是对于任意 $x\in[a,b]$, 上述插值问题有余项估计：

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{m}(x-x_i)^{n_i},$$

这里 ξ 为任一位于 $x_{\min}=\min\{x_0,x_1,\cdots,x_m,x\}$ 和 $x_{\max}=\max\{x_0,x_1,\cdots,x_m,x\}$ 之间的一个数 (一般依赖于 x). 满足上述插值条件的插值多项式唯一.

定义 2 Lagrange 插值多项式：Lagrange 插值多项式为 $f(x)$ 的 n 次插值多项式：

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right).$$

5.4 函数的 Taylor 公式及其应用

定义 1 Euler 数：$E_0=1$; 对 $n\in\mathbb{N}_+,\sum\limits_{i=0}^{n}C_{2n}^{2i}E_{2i}=0.E_{2n}$ 称为 Euler 数.

n 为偶时 E_{2n} 为正奇数且个位数字为 5(除了 E_0),n 为奇时 E_{2n} 为负奇数且最右一位数字为 1.

注 也有文章将 $E_n'=(-1)^nE_{2n}$ 称为 Euler 数的.

定义 2 Bernoulli 数：$B_0=1,B_1=-\dfrac{1}{2}$; 对 $n\in\mathbb{N}_+,\sum\limits_{i=0}^{n-1}C_n^iB_i=0.B_n$ 称为 Bernoulli 数.

n 为大于 1 的奇数时 $B_n=0$.

注 也有文章将 $B_n'=(-1)^{n+1}B_{2n}$ 称为 Bernoulli 数的.

定理 1 Maclaurin 公式：指 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),$$

其中 $r_n(x)$ 表示为：

$$r_n(x) = o(x^n) \text{ 或 } r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \theta \in (0,1).$$

命题 1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内 $n+2$ 阶可导, 则它的 $n+1$ 阶 Taylor 多项式的导数恰为 $f'(x)$ 的 n 阶 Taylor 多项式.

定义 3 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0, \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \infty$, 则称直线 $y=ax+b(x=c)$ 是函数 $f(x)$ 的渐近线. 渐近线可分为水平渐近线, 垂直渐近线, 斜渐近线. 若直线 $y=ax+b$ 是函数 $f(x)$ 的 $+\infty$ 方向上的渐近线, 则：

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax).$$

5.5 应用举例

定理 1 极值点判定定理：高中知识.

5.6 方程的近似求解

了解即可

命题 1 解析方法与数值方法.

命题 2 二分法.

命题 3 Newton 迭代法 (切线法).

命题 4 割线法 (弦割法).

6 不定积分

6.1 不定积分的概念和运算法则

定义 1 若在某个区间上, 函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 成立关系 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}(F(x))=f(x)\,\mathrm{d}x$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在这个区间上的一个原函数.

定义 2 函数 $f(x)$ 的原函数全体称为这个函数的不定积分, 记作 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 这里 $\displaystyle\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, x 称为积分变量.

命题 1 线性性质：若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数均存在, 且 $\forall\, k_1,k_2\in\mathbb{R}$, 函数 $k_1f(x)+k_2g(x)$ 的原函数也存在, 则：

$$\int[k_1f(x)+k_2g(x)]\,\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\,\mathrm{d}x+k_2\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6.2 换元积分法和分部积分法

定理 1 凑微分法：若能够找出等价变换 $f(x)=g(h(x))h'(x)$ 且 $g(x)$ 的原函数 $G(x)$ 可以求出, 则：

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(h(x))h'(x)\,\mathrm{d}x=\int g(h(x))\,\mathrm{d}h(x)=G(h(x))+C.$$

定理 2 第二类换元积分法：作变量代换 $x=\varphi(t)$ 且 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在, 且 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数 $G(x)$ 可以求出, 则：

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=G(t)+C.$$

定理 3 分部积分法：若函数 $u(x),v(x)$ 可导, 则：

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

推广 若函数 $u(x),v(x)$ 均 $n+1$ 阶可导, 则：

$$\int uv^{(n+1)}\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iu^{(i)}v^{(n-i)}+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,\mathrm{d}x.$$

命题 1 基本积分表：我们略去积分常数 C, 则有如下积分：

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1},\ \int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|,\ \int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}.$$

$$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x,\ \int-\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x.$$

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x,\ \int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|.$$

$$\int -\csc^2 x\,\mathrm{d}x = \cot x,\ \int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|.$$

$$\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x,\ \int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|.$$

$$\int -\csc x\cot x\,\mathrm{d}x = \csc x,\ \int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x-\cot x|.$$

在默认 $a>0$ 时：

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} = -\arccos\frac{x}{a}, \int \arcsin\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} = -\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{x}{a}, \int \arctan\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right).$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right).$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|.$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}.$$

$$\int \sqrt{c+bx-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}.$$

命题 2 三角替代法：

(1) 利用直角三角形的勾股定理：被积式具有 $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ 形式时适用.

(2) 利用万能公式换元：记 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 则有 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

(3) 利用辅角公式换元：$x\in(a,b)$ 时, 可令 $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$.

(4) 利用棣莫弗公式换元：$2\cos nx=y^n+\dfrac{1}{y^n}$, $2\mathrm{i}\sin nx=y^n-\dfrac{1}{y^n}$.

定理 4 Euler 换元法：

(1)$a>0$ 时, 作换元 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$.

(2)$c>0$ 时, 作换元 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$.

(3)$ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)$ 时, 作换元 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-m)$.

注 Euler 换元多用于根式在分母上的情况.

6.3 有理函数的不定积分及其应用

定义 1 形如 $\dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$ 的函数称为有理函数，其中 $p_m(x),q_n(x)$ 分别是 m,n 次多项式.

命题 1 设有理函数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 是真分式, $q(x)$ 有 k 重实根 α $\left(q(x)=(x-\alpha)^k q_1(x), q_1(\alpha)\neq 0\right)$, 则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 与多项式 $p_1(x)$, 使得

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\lambda}{(x-\alpha)^k}+\frac{p_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}q_1(x)},$$

这里 $\dfrac{p_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}q_1(x)}$ 是真分式.

命题 2 设有理函数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 是真分式, $q(x)$ 有 l 重共轭复根

$$z_{12}=\beta\pm \mathrm{i}\gamma\left(q(x)=(x^2+2\xi x+\eta^2)^l q_1(x),\, q_1(z_{12})\neq 0\right),$$

其中 $\xi=-\beta$, $\eta^2=\beta^2+\gamma^2$, $\xi^2<\eta^2$. 则存在 $u,v\in\mathbb{R}$ 与多项式 $p_1(x)$, 使得：

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\mu x+\nu}{\left(x^2+2\xi x+\eta^2\right)^l}+\frac{p_1(x)}{\left(x^2+2\xi x+\eta^2\right)^{l-1}q_1(x)},$$

这里 $\dfrac{p_1(x)}{\left(x^2+2\xi x+\eta^2\right)^{l-1}q_1(x)}$ 是真分式.

命题 3 据有理系数函数的因式分解定理,

$$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=\frac{p_m(x)}{\prod\limits_{k=1}^{i}(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot\prod\limits_{k=1}^{j}\left(x^2+2\xi_k x+\eta_k^2\right)^{n_k}}=\sum_{k=1}^{i}\sum_{r=1}^{m_k}\frac{\lambda_{kr}}{\left(x-\alpha_k\right)^r}+\sum_{k=1}^{j}\sum_{r=1}^{n_k}\frac{\mu_{kr}x+\nu_{kr}}{\left(x^2+2\xi_k x+\eta_k^2\right)^r},$$

其中 $\lambda_{kr},\mu_{kr},\nu_{kr}$ 可以待定系数得到.

由不定积分的线性性质, 有

$$\int\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{i}\sum_{r=1}^{m_k}\lambda_{kr}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\alpha_k\right)^r}+\sum_{k=1}^{j}\sum_{r=1}^{n_k}\int\frac{\mu_{kr}x+\nu_{kr}}{\left(x^2+2\xi_k x+\eta_k^2\right)^r}\,\mathrm{d}x,$$

后式可化作

$$\int \frac{\mu x+\nu}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{\mu}{2}\int \frac{2x+2\xi}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\,\mathrm{d}x+(\nu-\mu\xi)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}.$$

命题 4 有理函数的不定积分一定是初等函数.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n}=\begin{cases}\ln|x-\alpha|+C, & n=1\\ -\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}+C, & n\geq 2\end{cases}.$$

$$\int \frac{2x+2\xi}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln|x^2+2\xi x+\eta^2|+C, & n=1\\ \dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^{n-1}}+C, & n\geq 2\end{cases}.$$

$$I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\arctan\dfrac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}+C, & n=1\\ \dfrac{1}{2\left(\eta^2-\xi^2\right)(n-1)}\left[(2n-3)I_{n-1}+\dfrac{x+\xi}{\left(x^2+2\xi x+\eta^2\right)^{n-1}}\right], & n\geq 2\end{cases}.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, & b^2<4ac\\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C, & b^2>4ac\end{cases}.$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|-\frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}+C.$$

命题 5 $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}\right)$, , $R\left(\sin x,\cos x\right)$ 类的不定积分可化为有理函数的不定积分计算, 这里 $R(u,v)=\dfrac{p(u,v)}{q(u,v)}$, $p(u,v)$, $q(u,v)$ 为关于 u,v 的二元多项式.

(1)$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}\right)$ 类的积分作换元：$\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}=t$.

(2)$R\left(\sin x,\cos x\right)$ 类的积分用万能公式换元：$\tan\dfrac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

命题 6 其他三角函数有理式的积分：

(1) 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则作换元 $t=\cos x$.

(2) 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则作换元 $t=\sin x$.

(3) 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, 则作换元 $t=\tan x$.

定理 1 设 $f(x),g(x)$ 都是有理函数, 若 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则 $\exists\, h(x)$ 是有理函数, 使得

$$\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\,\mathrm{d}x=h(x)\mathrm{e}^{g(x)}+C.$$

7 定积分

7.1 定积分的概念和可积条件

定义 1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 有定义且有界, 称满足条件 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 的点集 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一个分划.

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},(i=1,\cdots,n)$, 并称 $\|P\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ 为分划 P 的细度. 如果 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n},(i=1,\cdots,n)$, 则称 P 为等距分划.

定义 2 设 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为区间 $[a,b]$ 的一个分划. 对每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$, 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 则称 $\xi=\{\xi_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为从属于 P 的一个介点集或值点序列, 和式

$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\ \left(\sum_{P}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right)$$

称为 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个 Riemann(积分) 和.

定义 3 设 $I\in\mathbb{R}$ 且 $\lim\limits_{\|P\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=I$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对 $\|P\|<\delta$ 的每个分划 P 以及对从属于 P 的每个介点集 ξ, 成立:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 记为 $f\in R[a,b]$.

此时, I 称作 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分或定积分, 记为 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I$, a 称作积分的下限, b 称作积分的上限, f 称为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式.

注 在上述定义中, 默认积分下限 a 小于积分上限 b. 若 $a\ge b$, 规定 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

定义 4 设 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为区间 $[a,b]$ 的一个分划, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上确界和下确界分别为 M 和 m, 则有 $m\le f(x)\le M$; 记 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的上确界和下确界分别为 M_i 和 $m_i,(i=1,2,\cdots,n)$, 定义和式 $\overline{S}(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ 为分划 P 的 Darboux 大和, $\underline{S}(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ 为分划 P 的 Darboux 小和. 此时显然有:

$$\underline{S}(P)\le\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\le\overline{S}(P).$$

注 对 $i=1,2,\cdots,n$, 定义 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅 $\omega_i=M_i-m_i$.

定义 5 记 $\overline{S}$ 是一切可能的分划所得到 Darboux 大和的集合, 下确界为 $L=\inf\{\overline{S}(P)|\overline{S}(P)\in\overline{S}\}$; $\underline{S}$ 是一切可能的分划所得到 Darboux 小和的集合, 上确界为 $l=\sup\{\underline{S}(P)|\underline{S}(P)\in\underline{S}\}$.

命题 1 若在原来的分划 P 中加入分点形成新的分划, 则 Darboux 大和不增, Darboux 小和不减.

推论 $\forall \overline{S}(P_1) \in \overline{S}$, $\underline{S}(P_2) \in \underline{S}$, 记 M 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上下确界, 恒有：

$$m(b-a) \leq \underline{S}(P_2) \leq l \leq L \leq \overline{S}(P_1) \leq M(b-a).$$

定理 1 Darboux 定理：对定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$, 必有 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P) = L$, $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P) = l$.

命题 2 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 有定义且有界, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是：

(1)$L = l$, 即对任意分划 P, $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P) = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P)$.

(2) 对任意分划 P, $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$.

(3)$\forall \varepsilon > 0$, 存在一个分划 P, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

(4)$\forall \varepsilon, \eta > 0$, 存在一个分划 P, 使振幅 ω_i 不小于 η 的所有子区间长度之和小于 ε.

(5)Lebesgue 定理：f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

注 若一个点集可以用总长度任意小的至多可列个开区间覆盖, 则称这个点集的测度为 0. 若某种性质在零测集之外成立, 则称这个性质几乎处处成立.

命题 3 闭区间上的连续函数必定 Riemann 可积, 闭区间上的单调函数必定 Riemann 可积.

定义 6 Cauchy 积分：对 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$, 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $[a,b]$ 上满足 $\|P\| < \delta$ 的任意分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 都有：

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

成立, 则 $f(x)$ 在 $[a.b]$ 上可积且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

注 对于有界函数, Cauchy 积分与 Riemann 积分是一致的.

7.2 定积分的基本性质

命题 1 线性性质：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, 则函数 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且有：

$$\int_a^b \left[k_1 f(x) + k_2 g(x)\right] \mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 只在有限个点上与 $f(x)$ 的取值不相同, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 2 乘积可积性：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 则函数 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

命题 3 保序性：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 且 $[a,b]$ 上恒有 $f(x) \geq g(x)$ 成立, 则成立：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, 则存在子区间 $[c,d] \subset [a,b]$ 和 $\mu > 0$, 使得在区间 $[c,d]$ 上 $f(x) \geq \mu$ 恒成立.

命题 4 绝对可积性：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且成立：

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

命题 5 区间可加性：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则对任意点 $c \in [a,b]$, $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积; 反过来, 若 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 此时成立：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1 积分第一中值定理：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上符号一定, 记 M 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上下确界，则 $\exists \eta \in [m,M]$, 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 事实上, 条件 $\exists \xi \in [a,b]$ 可加强作 $\exists \xi \in (a,b)$.

定理 2 积分第二中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 条件可加强为：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且符号一定.

推论 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,

(1) 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增且 $g(x)\geq 0$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$, 使 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单减且 $g(x)\geq 0$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$, 使 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$.

命题 6 积分与极限问题：一般通过定积分的分拆, 将积分拆作若干任意小区间内的积分与另一积分之和, 分别进行放缩后分别取极限.

命题 7 函数的最值：对 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{f(x)\big|x\in[a,b]\}.$$

定理 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则：

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x = 0, \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x = 0.$$

推广 Riemann 定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 是以 T 为周期的函数且在 $[0,T]$ 上可积, 则：

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.3 微积分基本定理

命题 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 作函数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $(x\in[a,b])$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 若 $f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且：

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

定理 1 Newton-Leibniz 公式：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则成立：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

命题 2 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上可积且在 $a,b\in(A,B)$ 两点连续, 则：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

命题 3 分部积分法：设 $u(x),v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导数, 则：

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 4　换元积分法：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$) 上有连续导数, 其值域包含于 $[a,b]$, 且满足 $\varphi(\alpha)=a$ 和 $\varphi(\beta)=b$, 则：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

注　上述换元积分法中, 换元后的积分上下限与换元前相对应, 而不需考虑 α,β 之间的大小关系.

定义 1　设 $g_i(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一列函数 $(i=0,1,2,\cdots)$, 若 $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $g_m(x)\cdot g_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且有

$$\int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \displaystyle\int_a^b g_n^2(x)\,\mathrm{d}x>0, & m=n\end{cases},$$

则称 $\{g_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的正交函数列. 特别地, 当 $g_i(x)$ 是 i 次多项式时, 称 $\{g_n(x)\}$ 是正交多项式列.

命题 5　奇偶性：设 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a]$ 上可积,

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则成立 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则成立 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

推广　设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $f(x)+f(a-x)=g(x)$, 则成立：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 6　周期性：设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可积函数, 则：

$$\forall a\in\mathbb{R},\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 7　对称性：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则成立：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 8　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则变上限积分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 与变下限积分 $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数; 取 $x\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

推广　若此时有 $u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $a\le u,\ v\le b$, 则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x).$$

命题 9 连续性：设 $f(x)$ 在 $[a-\delta,b+\delta]$ 上可积, $\delta>0$, 则有：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

7.4 定积分在几何计算中的应用

命题 1 若 $y=f(x)$ 的参数形式为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $,t\in[T_1,T_2]$ 且 $x(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上具有连续导数, $x'(t)\neq 0$. 则曲线与 x 轴围成的面积 $S=\displaystyle\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|\,\mathrm{d}t$.

命题 2 设曲线的极坐标方程 $r=r(\theta)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, $\beta-\alpha\le 2\pi$, 则两条极径 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 与 $r=r(\theta)$ 围成的图形面积 $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

定义 1 若 $x(t)$,$y(t)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 上均有连续的导函数, 且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$, 则由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $,t\in[T_1,T_2]$ 确定的曲线称为光滑曲线. 光滑曲线上的切线是连续变动的.

命题 3 光滑曲线的弧长公式：

(1) 对由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $,\ t\in[T_1,T_2]$ 确定的光滑曲线, 弧长 $l=\displaystyle\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

(2) 对由显式方程 $y=f(x),\quad x\in[a,b]$ 确定的光滑曲线, 弧长 $l=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

(3) 对由极坐标方程 $r=r(\theta),\quad \theta\in[\alpha,\beta]$ 确定的光滑曲线, 弧长 $l=\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$.

推论 对光滑空间曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $,\ t\in[T_1,T_2]$, 弧长 $l=\displaystyle\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

命题 4 旋转体的体积公式及旋转曲面的面积公式：

(1) 对由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $,t\in[T_1,T_2]$ 确定的曲线绕 x 轴旋转而成的旋转体,

$$\text{体积}\,V=\pi\int_{T_1}^{T_2}y^2(t)|x'(t)|\,\mathrm{d}t,\ \text{面积}\,S=2\pi\int_{T_1}^{T_2}|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) 对由显式方程 $y=f(x),\quad x\in[a,b]$ 确定的光滑曲线绕 x 轴旋转而成的旋转体,

$$\text{体积}\, V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x,\ \text{面积}\, S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

(3) 对由极坐标方程 $r=r(\theta),\quad \theta\in[\alpha,\beta]$ 确定的光滑曲线绕 x 轴旋转而成的旋转体,

$$\text{体积}\, V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \text{面积}\, S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

命题 5 一般几何体的体积公式：对夹于 $x=a,\, x=b$ 之间的三维几何体, 记 $A(x)$ 为几何体截面面积所构成的连续函数, 则体积 $V=\displaystyle\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$.

命题 6 对由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 确定的光滑曲线, 某点处曲率定义为：

$$K=\frac{|x'(t)+y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[(x'(t)]^2+[y'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

特别地, 对二阶可导的曲线 $y=f(x)$, 某点处曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

命题 7 质心公式：对密度均匀的平面图形 $F(x,y),\,(x\in[a,b],y\in[c,d])$, 设直线 $X=x$ 和 $Y=y$ 的截线段长度为 $s(x)$ 和 $t(y)$, 则其质心的横纵坐标为：

$$x_c=\frac{\displaystyle\int_a^b xs(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x},\quad y_c=\frac{\displaystyle\int_c^d yt(y)\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_c^d t(y)\,\mathrm{d}y}.$$

另外地, 对密度均匀的分段光滑曲线 $y=f(x),\,(x\in[a,b])$, 则其质心的横坐标和纵坐标分别为：

$$x_c=\frac{\displaystyle\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x},\quad y_c=\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}.$$

定理 1 Guldin 第一定理：设平面曲线的质心坐标为 (x_c,y_c), 且曲线位于右半平面内, 则曲线绕 y 轴旋转一周所产生的旋转曲面的面积等于质心绕 y 轴一周所经过的路程乘曲线弧长, 即 $S_y=2\pi x_c l$.

定理 2 Guldin 第二定理：设平面图形的质心坐标为 (x_c,y_c), 且图形位于右半平面内, 则图形绕 y 轴旋转一周所产生的旋转立体的体积等于质心绕 y 轴一周所经过的路程乘图形面积, 即 $V_y=2\pi x_c S$.

7.5 微积分应用实际举例

命题 1 Dirichlet 积分：$\displaystyle\int_0^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 其中 $D_n(x)=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\cos ix$.

推广 $\sin x$ 的求和：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sin ix=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

命题 2 Fejer 积分：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}$.

命题 3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$.

推广 对 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\leq 1$ 的连续函数 $f(x)$, 若 $|f(x)|=1$ 仅在有限多点处成立, 则：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

命题 4 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\end{cases}.$

定理 1 Hadamard 不等式：对 (a,b) 上的下凸函数 $f(x)$, $\forall a<x_1<x_2<b$, 均成立不等式：

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

注 左右两式都是函数下凸的充要条件; 若其中任意一个不等号取等, 则 $f(x)$ 必然是线性函数.

定理 2 Jensen 不等式：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $m\leq f(x)\leq M$, $g(x)$ 非负且 $\displaystyle\int_a^b g(x)>0$, 则当 φ 是 $[m,M]$ 上的下凸函数时, 成立不等式：

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\right)\leq\frac{\int_a^b g(x)\varphi(f(x))\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

推论 (1) 取 $g(x)\equiv 1$, 便成立不等式：

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

(2) 取 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=1$, 据 e^x 的下凸性与 $\ln x$ 的上凸性, 成立不等式：

$$\exp\left(\int_a^b g(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x\right)\leq\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x\leq\ln\left(\int_a^b g(x)\mathrm{exp}f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

(3) 若 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的上凸函数, 则 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 成立不等式：

$$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \le f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

定理 3　Schwarz 不等式：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

注　Schwarz 不等式可看作 Cauchy 不等式的积分形式, 故也被称作 Cauchy-Schwarz 不等式.

定理 4　Kantorovich 不等式：设 $f(x)$ 在 $[0.1]$ 上可积, $f(x)>0$ 且上下确界分别为 m,M, 则：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

注　Kantorovich 不等式事实上可以看作 Schwarz 不等式的反向不等式.

定理 5　Young 不等式：设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导且严格单增, $f(0)=0$, $a,b>0$, 记 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则有：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \ge ab.$$

定理 6　Holder 不等式：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, p,q 为满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 的一对正实数, 则：

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\right) \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 7　Minkowski 不等式：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $1\le p<+\infty$, 则：

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

注　当 $0<p<1$ 时不等号反向成立.

定理 8　Chebyshev 不等式：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $f(x)>0$ 且单减, 则：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b xf^2(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 5　积分不等式的证明方法：为了得到与离散不等式对应的积分不等式, 我们通常采取用与离散不等式类似的方法证明; 或从对应的离散不等式运用定积分定义取极限之后得到.

7.6 定积分的数值计算

定理 1 Newton-Cotes 数值积分公式：将积分区间 $[a,b]$ 以步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$ 分作 n 等份, 对分点作 Lagrange 插值多项式 $f(x)\approx p_n(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left[\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right]f(x_i)$, 之后对等式在 $[a,b]$ 上积分, 得：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\sum_{i=0}^{n}C_i^{(n)}f(x_i),$$

这里 $C_i^{(n)}=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t$ 被称作 Cotes 系数.

定理 2 Newton-Cotes 公式误差估计定理：设 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则用 Newton-Cotes 公式计算 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的误差 $R_n(f)$ 满足

$$|R_n(f)|\leq\frac{M_f h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n\left|\prod_{j=0}^{n}(t-j)\right|\mathrm{d}t,$$

其中 $M_f=\displaystyle\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

定理 3 Euler-Maclaurin 求和公式：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $2m+2$ 阶连续可导, $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, $(i=0,1,\cdots,n)$, 则：

$$\begin{aligned}&\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]+\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a),\end{aligned}$$

其中 $\xi\in[a,b]$, B_{2k}, $(k=1,2,\cdots,m+1)$ 是 Bernoulli 数.

命题 1 万能公式：若 $p(x)$ 是不超过 3 次的多项式, 则有：

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left[p(a)+4p\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)+p(b)\right](b-a).$$

注 这个公式事实上给出了一种通过某立体图形的顶截面, 中截面和底截面的面积求解该立体的体积的方法.

8 反常积分

8.1 反常积分的概念和计算

定义 1 计算 Riemann 积分时, 积分区间无限或被积函数无界的积分称作反常积分或广义积分.

定义 2 对任一区间 I 及一定义在 I 上的函数 f, 若在任意有限区间 $[a,b]\subset I$ 上 f 均可积, 则称 f 在 I 上内闭可积.

定义 3 若 $b=+\infty$ 或 f 在 b 左侧邻近无界, 则称 b 为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的奇点.

定义 4 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上内闭可积且此时 b 为 $[a,b)$ 上的奇点, 则定义反常积分：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若右侧极限值存在且有限, 则称反常积分存在或 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上广义可积; 否则称反常积分发散或 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上广义不可积.

这时, 若 $b=+\infty$, 则称 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为无穷积分; 若 b 为有限数, 则称 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为瑕积分, 此时奇点 b 被称为瑕点.

命题 1 p-积分：

(1) 广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 在 $p>1$ 时收敛于 $\dfrac{1}{p-1}$, 在 $p\leq 1$ 时发散.

(2) 广义积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 在 $p<1$ 时收敛于 $\dfrac{1}{1-p}$, 在 $p\geq 1$ 时发散.

定义 5 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积, 定义广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 Cauchy 主值为：

$$(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于瑕积分, 设 f 在区间 $[a,b]$ 中内闭可积且只有一个瑕点 c, $a<c<b$, 则定义广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 Cauchy 主值为：

$$(\mathrm{cpv})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

注 仅当右式的极限存在时有 Cauchy 主值的定义. 若广义积分收敛, 则其主值等于广义积分的值; 但广义积分发散时, 它的主值仍然可能存在.

命题 2 Euler 积分：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

命题 3 Froullani 积分：对在 $[0,+\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 对 $0<a<b$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=(f(0)-A)\ln\frac{b}{a}.$$

命题 4 Dirichlet 积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

命题 5 Euler-Poisson 积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.2 反常积分的收敛判别法

定义 1 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积, b 为奇点且 $\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛或 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上绝对广义可积; 若一广义积分收敛但不绝对收敛, 则称其为条件收敛.

命题 1 Cauchy 审敛原理：

(1) $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\forall\varepsilon>0,\ \exists A_0\geq a$, 使得 $\forall A,A'\geq A_0$, 有 $\left|\displaystyle\int_A^{A'}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

(2) $\displaystyle\int_a^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 使得 $\forall\eta,\eta'\in(0,\delta)$, 有 $\left|\displaystyle\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

命题 2 比较判别法：设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上恒有 $0\leq f(x)\leq Kg(x)$, $(K>0)$, 则：

(1) $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

推广 极限形式：设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 则：

(1) 若 $0\leq l<+\infty$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2) 若 $0<l\leq+\infty$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

这说明 $0<l<+\infty$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

命题 3 Cauchy 判别法：设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\geq 0, a, K>0$, 则：

(1) 若 $f(x)\leq\dfrac{K}{x^p}$ 且 $p>1$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $f(x) \geq \dfrac{K}{x^p}$ 且 $p \leq 1$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推广 极限形式：设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, $a>0$ 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)\,\mathrm{d}x = l$, 则：

(1) 若 $0 \leq l < +\infty$ 且 $p>1$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $0 < l \leq +\infty$ 且 $p \leq 1$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

命题 4 瑕积分的 Cauchy 判别法：设 $[a,b)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, 若 $x \in [b-\eta_0, b)$ 时, $\exists K>0$, 使得：

(1)$f(x) \leq \dfrac{K}{(b-x)^p}$ 且 $p<1$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2)$f(x) \geq \dfrac{K}{(b-x)^p}$ 且 $p \geq 1$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推广 极限形式：设在 $[a,b)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$ 且 $\displaystyle\lim_{x\to b-} (b-x)^p f(x) = l$, 则：

(1) 若 $0 \leq l < +\infty$ 且 $p<1$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $0 < l \leq +\infty$ 且 $p \geq 1$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

命题 5 A-D 判别法：若下列两个条件之一满足, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛：

(1)Abel 判别法：$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界;

(2)Dirichlet 判别法：$\displaystyle\int_a^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

命题 6 瑕积分的 A-D 判别法：若下列两个条件之一满足, 则瑕积分 $\displaystyle\int_a^{b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛：

(1)Abel 判别法：$\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界;

(2)Dirichlet 判别法：$F(\eta) = \displaystyle\int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,b-a]$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调, $\displaystyle\lim_{x\to b-} g(x) = 0$.

9 数项级数

9.1 数项级数的收敛性

定义 1 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是无穷可列个实数, 我们称它们的和 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ 为无穷数项级数, 简称级数, 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, 其中 x_n 称为级数的通项或一般项. 此时, 称满足 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ 的数列 $\{S_n\}$ 称为该级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列.

定义 2 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限数 S, 则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 记其和为 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

命题 1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}, (p > 0)$ 称为 p 级数, 它在 $p > 1$ 时收敛,$0 < p \leq 1$ 时发散到正无穷大.

注 $p = 1$ 时又称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 为调和级数.

定义 3 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = S$ 收敛时, 称满足

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots = S - S_n$$

的数列 $\{r_n\}$ 为该级数的余和数列, 显然有 $\{r_n\}$ 收敛于 0.

命题 2 级数收敛的必要条件：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则通项数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

命题 3 线性性：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$.

命题 4 加法结合律：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛, 且其和不变.

注 添加括号之后收敛无法保证原级数收敛, 发散的级数不满足加法结合律.

9.2 上极限与下极限

定义 1 极限点：数列的极限点就是数列的收敛子列的极限, 即 ξ 是 $\{x_n\}$ 的极限点等价于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\{x_n\}$ 中的无穷多项属于邻域 $O(\xi,\varepsilon)$.

约定若存在正 (负) 无穷大量的子列, 则将 $+\infty(-\infty)$ 也作为极限点. 因此一个无上 (下) 界数列的极限点中一定有 $+\infty(-\infty)$. 为区别起见, 称收敛子列的极限为有限极限点, 而将 $\pm\infty$ 称为无限极限点.

定义 2 数列的上极限是数列的最大极限点, 记作 $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$; 数列的下极限是数列的最小极限点, 记作 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. 这里在比较大小时将 $+\infty$ 和 $-\infty$ 都作为数来对待.

注 任意数列都有极限点, 都存在上极限与下极限, 且上下极限唯一.

定理 1 数列 $\{x_n\}$ 收敛或为定号无穷大量的充要条件是数列的上下极限相等, 且此时

$$\limsup_{n\to\infty} x_n=\liminf_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

命题 1 对有界数列 $\{x_n\}$, 有限数 H,h,

(1)H 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0$, 邻域 $O(H,\varepsilon)$ 内都有数列的无限多项; 同时 $\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N, x_n<H+\varepsilon$ 恒成立.

(2)h 是数列 $\{x_n\}$ 的下极限的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0$, 邻域 $O(h,\varepsilon)$ 内都有数列的无限多项; 同时 $\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N, x_n>h-\varepsilon$ 恒成立.

命题 2 在其中和式有意义时, 恒有不等式：

$$\liminf_{n\to\infty} x_n+\liminf_{n\to\infty} y_n\le\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\liminf_{n\to\infty} x_n+\limsup_{n\to\infty} y_n\le\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\limsup_{n\to\infty} x_n+\limsup_{n\to\infty} y_n.$$

推论 若对数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$,$\{y_n\}$ 收敛或为定号无穷大量, 则在其中和式有意义时, 恒有不等式：

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\liminf_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} y_n\ ,\ \limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\limsup_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} y_n.$$

命题 3 对满足 $x_n\ge0, y_n\ge0$ 的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 成立不等式：

$$\limsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\le\limsup_{n\to\infty} x_n\cdot\limsup_{n\to\infty} y_n\ ,\ \liminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\ge\liminf_{n\to\infty} x_n\cdot\liminf_{n\to\infty} y_n;$$

特殊地, 当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $(0<x<+\infty)$ 时, 有：

$$\limsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\limsup_{n\to\infty} y_n\ ,\ \liminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\liminf_{n\to\infty} y_n.$$

定义 3 上下极限的第二定义：对数列 $\{x_n\}$, 定义 $b_n=\sup\limits_{k>n}\{x_k\}, a_n=\inf\limits_{k>n}\{x_k\}$, 记：

$$H=\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k>n}\{x_k\}, h=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k>n}\{x_k\}.$$

此外, 当 $\{x_n\}$ 无上 (下) 界时, 记 $H=+\infty,(h=-\infty)$, 则 H,h 分别为该数列的上下极限.

9.3 正项级数

定义 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的各项都是非负实数, 即 $x_n \geq 0, (n \in \mathbb{N}_+)$, 则称此级数为正项级数. 显然正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 单增, 即 $S_n \leq S_{n+1}$.

命题 1 正项级数的收敛原理：正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有上界; 若其部分和数列无上界, 则其必发散到 $+\infty$.

定理 1 比较判别法：对两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, 若 $\exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $x_n \leq Ay_n$, 则：

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散.

注 该命题的条件可放宽为：$\exists N \in \mathbb{N}_+$, $A > 0$, 使得 $x_n \leq Ay_n$ 在 $\forall n > N$ 时成立.

推广 极限形式：对两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$, $(0 \leq l \leq +\infty)$, 则：

(1) 若 $0 \leq l < +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛;

(2) 若 $0 < l \leq +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也发散.

这说明,$0 < l < +\infty$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 的敛散性相同.

定理 2 Cauchy 判别法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数,$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, 则：

(1) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散;

(3) 当 $r = 1$ 时, 级数的敛散性不确定, 如 p 级数.

命题 2 对正项数列 $\{x_n\}$, 恒有 $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

定理 3 d'Alembert 判别法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $(x_n \neq 0)$ 是正项级数, 则：

(1) 当 $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \overline{r} < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) 当 $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散;

(3) 当 $\overline{r} \geq 1$ 或 $\underline{r} \leq 1$ 时, 级数的敛散性不确定, 如 p 级数.

注 Cauchy 判别法的适用范围比 d'Alembert 判别法广, 如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

能用 Cauchy 判别法判断出其收敛, 而 d'Alembert 判别法失效.

定理 4 Raabe 判别法：对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $(x_n \neq 0)$, $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = r$, 则：

(1) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散;

(3) 当 $r = 1$ 时, 级数的敛散性不确定, 如 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n}$.

定理 5 Bertrand 判别法：对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $(x_n \neq 0)$, $\lim_{n\to\infty} (\ln n)\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = r$, 则：

(1) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散;

(3) 当 $r = 1$ 时, 级数的敛散性不确定.

定理 6 积分判别法：设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义且非负, 且 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a, A]$ 上 Riemann 可积. 取任一严格单增至 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a = a_1$, 记 $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$, 此时：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 敛散性相同, 且满足 } \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 特别地,$f(x)$ 单减时, 取 $a_n = n$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\sum_{n=[a]+1}^{\infty} f(n)$ 敛散性相同.

定理 7 Gauss 判别法：对正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $(x_n \neq 0)$, $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = 1 + \dfrac{\mu}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, $(\varepsilon > 0)$, 则：

(1) 当 $\mu > 1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) 当 $\mu \leq 1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散;

注 除比较判别法外, 上述判别法中只有 Cauchy 判别法是根式判别法, 其他四种都是比值判别法, 它们要求 n 充分大时数列必须单调. 所以 Cauchy 根式判别法具有一定的特殊性.

如级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 只能有由 Cauchy 判别法判断出其收敛, 其他比值判别法全部失效.

定理 8 Sapagof 判别法：对单减正数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 的充要条件是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ 发散.

推论 等价形式：对单增的正数列 $\{x_n\}$, 它与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 敛散性相同.

定理 9 Kummer 判别法：对正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

(1) 其收敛的充要条件是存在正数列 $\{y_n\}$ 和 $\delta > 0$, 使得 n 充分大时有 $b_n \cdot \dfrac{x_n}{x_{n+1}} - y_{n+1} \geq \delta$.

(2) 其发散的充要条件是存在发散的正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n}$, 使得 n 充分大时有 $b_n \cdot \dfrac{x_n}{x_{n+1}} - y_{n+1} \leq 0$.

定理 10 (1)Du Bois-Reymond 定理：对一给定的收敛正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 一定存在收敛正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

(2)Abel 定理：对一给定的发散正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 一定存在发散正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = 0$.

注 这实际上说明了对于比较判别法, 不可能存在万能的比较级数.

命题 3 若正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ 收敛, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ 也收敛.

定理 11 Carleman 不等式：对收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, 成立如下不等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

且不等式右侧的系数 e 为最优.

推广 Hardy 不等式：对收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, 若 $p>1$, 成立如下不等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{p}} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

命题 4 对收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, 若 $\{x_n\}$ 单减, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 0$.

9.4 任意项级数

定理 1 Cauchy 审敛原理：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得：

$$\forall m > n > N, \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon.$$

定义 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, $(u_n > 0)$, 则称此级数为交错级数.

此外, 若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, $(u_n > 0)$ 满足 $\{u_n\}$ 单减且收敛于 0, 则称其为 Leibniz 级数.

定理 2 Leibniz 判别法：Leibniz 级数必定收敛.

推论 对于 Leibniz 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 及其余和 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$, 成立：

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \leq u_1, \quad |r_n| \leq u_{n+1}.$$

定理 3 Abel 分部求和公式：对两数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 记 $B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$, $(k \in \mathbb{N}_+)$, 则：

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

推论 Abel 引理：对单调数列 $\{a_k\}$ 及数列 $\{b_n\}$, 记 $B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i$, $(k\in\mathbb{N}_+)$, 若 $|B_k|\le M$, 则：

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \le M\left(|a_1|+2|a_p|\right).$$

定理 4 级数的 A-D 判别法：若下列两个条件之一满足, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛：

(1)Abel 判别法：$\{a_n\}$ 单调有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;

(2)Dirichlet 判别法：$\{a_n\}$ 单调趋于 0, $\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i\right\}$ 有界.

注 事实上, 交错级数的 Leibniz 判别法和 Abel 判别法均可以看成是 Dirichlet 判别法的特例.

定义 2 对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为绝对收敛级数;

(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为条件收敛级数.

注 一般由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散无法得到 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, 但是若用 Cauchy 判别法或 d'Alembert 判别法判断出 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散, 则也可得到 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

定义 3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数, 定义

$$x_n^+=\frac{|x_n|+x_n}{2}=\begin{cases} x_n, & x_n>0, \\ 0, & x_n\le 0, \end{cases}\quad x_n^-=\frac{|x_n|-x_n}{2}=\begin{cases} -x_n, & x_n<0, \\ 0, & x_n\ge 0, \end{cases}, (n\in\mathbb{N}_+).$$

此时, $x_n^+\ge 0$, $x_n^-\ge 0$, $x_n^+-x_n^-=x_n, x_n^++x_n^-=|x_n|$.

命题 1 对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

定义 4 将一收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的项任意重新排列, 得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数.

命题 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛, 则它的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 也绝对收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

定理 5 Riemann 重排定理：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛, 则 $\forall a$, $(-\infty \le a \le +\infty)$, 必定存在 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = a$.

推广 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛, 则 $\forall -\infty \le A \le B \le +\infty$, 必定存在 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$, 使得其部分和序列 $\{S_n(x)'\}$ 满足：

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x)' = A, \limsup_{n\to\infty} S_n(x)' = B.$$

定义 5 记 $c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1).$$

命题 3 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则将 $a_i b_j (i, j \in \mathbb{N}_+)$ 按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛, 且其和等于 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

定理 6 Mertens 定理：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛且至少有一个级数绝对收敛, 则它们的 Cauchy 乘积收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

9.5 无穷乘积

定义 1 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots, (p_n \neq 0)$ 是无穷可列个实数, 称它们的积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 为无穷乘积, 其中 p_n 称为无穷乘积的通项或一般项.

此时, 称满足 $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$ 的数列 $\{P_n\}$ 为该无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的部分积数列.

定义 2 若部分积数列 $\{P_n\}$ 收敛于非零有限数 P, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 记为 $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$.

若部分积数列 $\{P_n\}$ 发散或收敛于 0, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散.

命题 1 如果无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 则通项 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=1$, 且余积 $\lim\limits_{m\to\infty}\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} p_n=1$.

定理 1 Wallis 公式：$\dfrac{\pi}{2}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$.

定理 2 Viete 公式：$\dfrac{2}{\pi}=\prod\limits_{n=2}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^n}=\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}\cdots$.

定理 3 $\sin x$ 的无穷乘积展开：$\sin x=x\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

命题 2 若 $p_n>0$, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛.

命题 3 若 $a_n>0$(或 $a_n<0$), 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

推论 若 a_n 的符号不一定但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

定义 3 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 绝对收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln p_n|$ 收敛时, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 绝对收敛.

命题 4 设 $a_n>-1$, $(n\in\mathbb{N}_+)$, 则以下三个命题两两等价：

(1)$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛;

(2)$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛;

(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

10 函数项级数

10.1 函数项级数的一致收敛性

定义 1 设函数 $u_n(x)$, $(n \in \mathbb{N}_+)$ 具有公共定义域 E, 将它们的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 称为函数项级数.

定义 2 对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若 $\exists x_0 \in E$, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点的集合 D 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域, 且显然 $D \subset E$.

定义 3 函数项级数给出了 D 上的函数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 将其称作该函数项级数的和函数. 此时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上点态收敛于 $S(x)$.

定义 4 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in D$ 是函数项级数, 则 $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$ 称作其部分和函数, $\{S_n(x)\}$ 称为其部分和函数序列.

推论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上收敛于 $S(x)$ 的充要条件是 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上收敛于 $S(x)$.

定义 5 对函数序列 $\{S_n(x)\}$, $x \in D$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 使得 $\forall n > N$, $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ 对 $\forall x \in D$ 成立, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in D$ 的部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$, 则称该函数项级数在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

注 一般函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 被记作 $S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$.

定义 6 若 $\forall [a,b] \subset D$, 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上都一致收敛于 $S(x)$, 则称其在 D 上内闭一致收敛于 $S(x)$.

定义 7 定义 D 上函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的距离为 $d(f,g) = \sup\limits_{x \in D} |f(x) - g(x)|$.

命题 1 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n \to \infty} d(S_n, S) = 0$.

命题 2 若 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上点态收敛于 $S(x)$, 则其在 D 上一致收敛的充要条件是对任意 D 上的数列 $\{x_n\}$, 成立 $\lim\limits_{n \to \infty} (S_n(x_n) - S(x_n)) = 0$.

注 该命题一般用于否定函数序列的一致收敛性.

10.2 一致收敛级数的判别与性质

定理 1 Cauchy 收敛原理：对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 它在 D 上一致收敛的充要条件是：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall m > n > N, \forall x \in D : |S_m(x) - S_n(x)| = |\sum_{i=n+1}^{m} u_i(x)| < \varepsilon.$$

定理 2 Weierstrass 判别法：对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x \in D, |u_n(x)| \le a_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

推论 此时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 也一致收敛.

定理 3 A-D 判别法：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x), (x \in D)$ 满足下面两条件之一, 则它在 D 上一致收敛：

(1)Abel 判别法: $\{a_n(x)\}$ 对任一固定的 $x \in D$ 关于 n 单调且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致有界; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

(2)Dirichlet 判别法：$\{a_n(x)\}$ 对任一固定的 $x \in D$ 关于 n 单调且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列在 D 上一致有界.

注 这其中, 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致有界指的是 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x \in D, \exists M \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \le M$.

命题 1 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上一致收敛, 则其在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 4 连续性定理：若 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且此时 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$.

推论 级数形式：若 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a.b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且此时 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)$.

定理 5 逐项可积定理：若 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且此时 $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x$.

推论 级数形式：若 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a.b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在

$[a,b]$ 上可积, 且此时 $\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 6 逐项求导定理：若 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数, $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, $\{S_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且此时 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=S'(x)=\sigma(x)$.

推论 级数形式：若 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a.b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a.b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且此时 $\displaystyle S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)=\sigma(x)$.

注 此时, $\{S_n(x)\}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上事实上为一致收敛于 $S(x)$.

命题 2 若 $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ 在 D 上分别一致收敛, 且 $f_n(x)$, $g_n(x)$, $(n\in\mathbb{N}_+)$ 在 D 上均有界, 则 $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛.

命题 3 若 $u_n(x)$ 在 $x=a$ 处连续, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 处发散, 则 $\forall\delta>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $O(a,\delta)$ 上非一致收敛.

定理 7 Dini 定理：设 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 若：

(1)$S_n(x), S(x)$ 在 $[a,b]$ 上均连续;

(2) 对于固定的 $x\in[a,b]$, $\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调;

则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

推论 级数形式：设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 若：

(1)$u_n(x), S(x)$ 在 $[a,b]$ 上均连续;

(2) 对于固定的 $x\in[a,b]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是正项级数或负项级数;

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

注 连续性定理, 逐项积分定理和逐项求导定理都是充分非必要条件.

定理 8 Bendixon 判别法：设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, $u_n(x)$ 可导且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 的部分和 $\{S_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定义 1 若 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$, 且 $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists N' > N$, 使得对 $\forall x \in [a,b]$ 均存在正整数 $n_x \in [N, N']$,$|S_{n_x}(x) - S(x)| < \varepsilon$, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上准一致收敛于 $S(x)$.

定理 9 Arzela-Borel 定理：设 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\{S_n(x)\}$ 收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的充要条件是 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上准一致收敛.

定理 10 Arzela 控制收敛定理：对 $[a,b]$ 上的函数 $f_n(x)$, 若 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$，$f_n(x)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界, 则：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.3 幂级数

定义 1 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 称作幂级数, 它的部分和函数 $S_n(x)$ 是 $n-1$ 次多项式.

定义 2 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 设 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, 定义该幂级数的收敛半径 R 为：

$$R = \begin{cases} +\infty, & A = 0 \\ \dfrac{1}{A}, & A \in (0,+\infty) \\ 0, & A = +\infty \end{cases}.$$

定理 1 Cauchy-Hadamard 定理：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < R$ 时绝对收敛, 在 $|x| > R$ 时发散.

推论 $R = +\infty$ 时, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; $R = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当且仅当 $x = 0$ 收敛.

定理 2 d'Alembert 判别法：对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$, 则其收敛半径 $R = \dfrac{1}{A}$.

定理 3 Abel 第二定理：设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则：

(1)$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛;

(2) 若幂级数在 $x = R$ 收敛, 则它在 $\forall [a,R] \subset (-R,R]$ 上一致收敛.

推论 简而言之, 幂级数在包含于它的收敛域中的任意闭区间上一致收敛.

命题 1 和函数连续性：幂级数在其收敛域上连续, 在端点处单侧连续.

命题 2 逐项可积性：幂级数在包含于其收敛域中的任意闭区间上逐项可积.

推论 特别地, $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, 且二者具有相同的收敛半径.

命题 3 逐项可导性：幂级数在它的收敛域内部可以逐项求导.

推论 特别地, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, 且二者具有相同的收敛半径.

定理 4 Tauber 定理：若在 $(-1,1)$ 上 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ 且 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x)$.

10.4 函数的幂级数展开

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $O(x_0, r)$ 上任意阶可导, 定义 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 系数为：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ (n \in \mathbb{N}).$$

此时, 称如下的幂级数为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

命题 1 唯一性：若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 上能展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, 则该展开式唯一, 且它就是 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数.

定理 1 积分余项 Taylor 公式：设 $f(x)$ 在邻域 $O(x_0, r)$ 上 $n+1$ 阶连续可导,$\forall x \in O(x_0, r)$, 有：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + r_n(x),$$

其中积分余项 $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t$.

命题 2 一些常见函数的 Taylor 级数公式：

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \ (x \in (-\infty, +\infty))$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \ (x \in (-\infty, +\infty))$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \ (x \in (-\infty, +\infty))$$

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots$$

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots$$

$$\csc x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ (x \in (-\infty, +\infty))$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ (x \in (-\infty, +\infty))$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \cdots, \ (x \in (-1, 1])$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{(n+1)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \ (x \in [-1, 1])$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n-1)!!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{((2n-1)!!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \ (x \in [-1, 1])$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \cdots, \ \left(\begin{cases} x \in (-1, 1), & \alpha \le -1 \\ x \in (-1, 1], & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], & \alpha > 0 \end{cases} \right)$$

注 广义组合数：对 $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{R}$, 定义广义组合数：

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod\limits_{i=\alpha-n+1}^{\alpha} i}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

命题 3 设 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 它们的收敛半径分别为 R_1, R_2, 则:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \ c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \ (|x| < \min\{R_1, R_2\})$$

注 这说明幂级数的乘积等于其系数作 Cauchy 乘积.

10.5 用多项式逼近连续函数

定理 1 Weierstrass 第一逼近定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$，使其在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

定义 1 对 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x)$，定义 $f(x)$ 的 n 次 Bernstein 多项式为：

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

注 $B_n(a,x)=a$, $(f(t)=a\in\mathbb{R})$, $B_n(t,x)=x$, $(f(t)=t)$.

11 Euclid 空间上的极限和连续

11.1 Euclid 空间上的基本定理

定义 1 设 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)$, 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的内积 $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$, 则此时 $\mathbb{R}^n$ 成为 Euclid 空间.

定义 2 $\mathbb{R}^n$ 中, 称 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$ 为 $\vec{x}$ 的 Euclid 范数.

命题 1 内积的性质：

(1) 正定性：$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\geq 0$, 而 $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0$ 当且仅当 $\vec{x}=0$;

(2) 对称性：$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$;

(3) 线性性：$\langle\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{z}\rangle=\lambda\langle\vec{x},\vec{z}\rangle e+\mu\langle\vec{y},\vec{z}\rangle$;

(4) Schwarz 不等式：$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2\leq\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\langle\vec{y},\vec{y}\rangle$.

定义 3 定义 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ 的距离 $|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

命题 2 距离的性质：

(1) 正定性：$|\vec{x}-\vec{y}|\geq 0$, 等号成立当且仅当 $\vec{x}=\vec{y}$.

(2) 对称性：$|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{y}-\vec{x}|$;

(3) 三角不等式：$|\vec{x}-\vec{z}|\leq|\vec{x}-\vec{y}|+|\vec{y}-\vec{z}|$.

定义 4 设 $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, $\delta>0$, 则点集 $O(\vec{a},\delta)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\big||\vec{x}-\vec{a}|<\delta\}$ 称作 $\vec{a}$ 的 δ-邻域.

定义 5 设 $\{\vec{x_k}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点列, 若 $\exists\,\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,K>0$, $\forall k>K$, $|\vec{x_k}-\vec{a}|<\varepsilon$, 则称 $\{\vec{x_k}\}$ 收敛于 $\vec{a}$, 记作 $\lim\limits_{k\to\infty}\vec{x_k}=\vec{a}$.

定理 1 $\lim\limits_{k\to\infty}\vec{x_k}=\vec{a}$ 的充要条件是 $\forall i=1,\cdots,n$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{i,k}=a_i$.

定义 6 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 若 $\exists M>0$, 使得 $\forall\vec{x}\in S$, $\|\vec{x}\|\leq M$, 则称 S 为有界集.

定义 7 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 则 $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$：

(1) 若 $\exists\delta>0$, 使得 $O(\vec{x},\delta)\subset S$, 则称 $\vec{x}$ 是 S 的内点. S 的全体内点称作 S 的内部, 记作 S^o.

(2) 若 $\exists\delta>0$, 使得 $O(\vec{x},\delta)\subset S^C$, 即该邻域完全不落在 S 中, 则称 $\vec{x}$ 是 S 的外点.

(3) 若 $\forall\delta>0$, $O(\vec{x},\delta)\subset S$ 中均包含若干 S 与 S^C 中的点, 则称 $\vec{x}$ 是 S 的边界点. S 的全体边界

点称作 S 的边界, 记作 ∂S.

(4) 若 $\exists\delta>0$, $O(\vec{x},\delta)$ 中只有 $\vec{x}\in S$, 则称 $\vec{x}$ 是 S 的孤立点.

(5) 若 $\forall\delta>0$, $O(\vec{x},\delta)$ 中均有 S 中的无穷多个点, 则称 $\vec{x}$ 是 S 的聚点. S 的聚点全体称为 S 的导集, 记作 S'.

注 孤立点一定是边界点.

推论 $\vec{x}$ 是 S 的聚点的充要条件是 $\forall\delta>0$, $O(\vec{x},\delta)$ 中均含 S 中非 $\vec{x}$ 的至少一个点.

定理 2 $\vec{x}$ 是 S 的聚点的充要条件是 $\exists\{\vec{x_k}\}$, $\vec{x_k}\in S$ 且 $\vec{x_k}\neq\vec{x}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\vec{x_k}=\vec{x}$.

定义 8 若 S 中每个点都是其内点, 则称 S 为开集; 若 S 中包含它所有聚点, 则称 S 为闭集.

S 与它的导集 S' 之并称为 S 的闭包, 记为 $\overline{S}=S\cup S'$.

定义 9 如下两个开集

$$\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \big| a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots,n\},\ \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \big| \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2<r^2, i=1,2,\cdots,n\}$$

分别称为 n 维开矩和 n 维开球; 其中若不等式的等号可取到, 则这两个闭集称为 n 维闭矩和 n 维闭球.

定理 3 $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 为闭集的充要条件是它的补 S^C 是开集.

命题 3 (1) 任意一组开集 $\{S_\alpha\}$ 的并 $\bigcup\limits_{\alpha}S_\alpha$ 是开集;

(2) 有限个开集 $S_1,\cdots,S_k$ 的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}S_i$ 是开集;

(3) 任意一组闭集 $\{T_\alpha\}$ 的交 $\bigcap\limits_{\alpha}T_\alpha$ 是闭集;

(4) 有限个闭集 $T_1,\cdots,T_k$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}T_i$ 是闭集.

定理 4 闭矩形套定理：设 $\Delta_k=[a_k,b_k]\times[c_k,d_k]$, $(k\in\mathbb{N}_+)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一列闭矩形, 若：

(1) $\Delta_{k+1}\subset\Delta_k$, 即 $\forall k\in\mathbb{N}_+, a_k\leq a_{k+1}<b_{k+1}\leq b_k, c_k\leq c_{k+1}<d_{k+1}\leq d_k$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{(b_k-a_k)^2+(d_k-c_k)^2}=0$,

则存在唯一点 $\vec{a}=(\xi,\eta)\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$, $\lim\limits_{k\to\infty}c_k=\lim\limits_{k\to\infty}d_k=\eta$.

推广 Cantor 闭区域套定理：设 $\{S_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一列非空闭集, 若：

(1) $S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_k\supset S_{k+1}\supset\cdots$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{diam} S_k = 0$,

则存在唯一点 $\vec{x_0} \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_k$. 这里 S 的直径 $\mathrm{diam} S = \sup\{|\vec{x}-\vec{y}| \big| \vec{x}, \vec{y} \in S\}$.

定理 5 Bolzano-Weierstrass 定理：$\mathbb{R}^n$ 上有界点列必有收敛子列.

推论 $\mathbb{R}^n$ 上的有界无限点集至少有一个聚点. 这里, 点集的无限性由聚点要求的点列无限性约束.

定义 10 若 $\mathbb{R}^n$ 上的点列 $\{x_k\}$ 满足:$\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}_+$, $\forall k, l > K$, 成立 $|\vec{x_l} - \vec{x_k}| < \varepsilon$, 则称 $\{\vec{x_k}\}$ 为基本点列或 Cauchy 点列.

定理 6 Cauchy 收敛原理：$\mathbb{R}^n$ 上点列 $\{\vec{x_k}\}$ 收敛的充要条件是它是 Cauchy 列.

定义 11 对 $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 及一组开集 $\{U_\alpha\}$, 若它们满足 $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha \supset S$, 则称其为 S 的开覆盖.

若 S 的任一开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 总有有限子覆盖, 则称 S 为紧集. 这里, 有限子覆盖指 $\{U_\alpha\}$ 中的有限开集 $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{p}$, 使得 $S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}$.

定理 7 Heine-Borel 定理：$\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 是紧集的充要条件为它是有界闭集.

推论 $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 是紧集的充要条件也为 S 的任一无限子集在 S 中均有聚点.

11.2 多元连续函数

定义 1 对 $\mathbb{R}^n$ 上的点集 D, 称映射 $f: D \to \mathbb{R}$ $\vec{x} \mapsto z$ 为 n 元函数, 记为 $z = f(\vec{x})$. 称 D 为 f 的定义域, $f(D) = \{z \in \mathbb{R} \big| z = f(\vec{x}), \vec{x} \in D\}$ 为值域, $\Gamma = \{(\vec{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| z = f(\vec{x}), \vec{x} \in D\}$ 为图像.

定义 2 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, $\vec{x_0} = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$ 为一定点, $z = f(\vec{x})$ 是定义在 $D \setminus \{x_0\}$ 上的 n 元函数, $A \in \mathbb{R}$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, 成立 $|f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$, 则称 $\vec{x}$ 在 $\vec{x_0}$ 处极限为 A, 记为 $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = A$.

注 在上述定义中, $\vec{x} \in O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 可替换为 $|x_i - x_i^0| < \delta$, $(i = 1, \cdots, n)$, $\vec{x} \neq \vec{x_0}$.

定义 3 二次极限：设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 上开集, $(x_0, y_0) \in D$, $z = f(x, y)$ 定义在 $D \setminus \{x_0\}$ 上, 若 $\forall y \neq y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ 均存在, 则称该极限为函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处先 x 后 y 的二次极限.

注 同理可定义先 y 后 x 的二次极限, 以及 $\mathbb{R}^n$ 上的累次极限.

定理 1 对二元函数 $f(x, y)$, 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ 且 $x \neq x_0$ 时 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ 存在, 则

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

推论 若 $f(x,y)$ 的两个二次极限及二重极限均存在, 则三者相等, 即此时极限运算可换顺序,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

定义 4 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, $\vec{x_0}\in D$, $z=f(\vec{x})$ 定义在 D 上. 若 $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x})=f(\vec{x_0})$, 则称 $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x_0}$ 处连续. 若 f 在 D 上任一点都连续, 则称 $f(\vec{x})$ 在 D 上连续.

注 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x\in O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$, 成立 $|f(\vec{x})-f(\vec{x_0})|<\varepsilon$, 则称 $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x}_0$ 处连续.

定理 2 多元初等函数也在其定义域上连续.

定义 5 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 映射 $\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m\quad \vec{x}\mapsto\vec{z}$ 称为 n 元 m 维向量值函数, 记为 $\vec{z}=\vec{f}(\vec{x})$. 其中, 称 D 为 $\vec{f}$ 的定义域, $\vec{f}(D)=\{\vec{z}\in\mathbb{R}^m\big|\vec{z}=\vec{f}(\vec{x}),\ \vec{x}\in D\}$ 称为 $\vec{f}$ 的值域.

注 $\vec{z}=\vec{f}(\vec{x})$ 也可表为分量形式 $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$, $z_i=f_i(\vec{x})=f_i(x_1,\cdots,x_n)$.

定义 6 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, $\vec{x_0}\in D$, 对 $\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m$, 若 $\vec{f}$ 定义在 $D\setminus\{\vec{x_0}\}$ 上, $\vec{A}\in\mathbb{R}^m$. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall\vec{x}$ 满足 $0<|\vec{x}-\vec{x_0}|<\delta$, 有 $|\vec{f}(\vec{x})-\vec{A}|<\varepsilon$, 则称 $\vec{f}$ 在 $\vec{x}$ 处极限为 $\vec{A}$, 记为 $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x_0}}\vec{f}(\vec{x})=\vec{A}$.

定义 7 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, $\vec{x_0}\in D$, $\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m$, 若 $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x_0}}\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{x_0})$, 则称 $\vec{f}$ 在 $\vec{x_0}$ 处连续.

命题 1 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, $\vec{x_0}\in D$, $\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m$, $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$, 则 $\vec{f}$ 在 $\vec{x_0}$ 连续的充要条件是 $f_1,\cdots,f_m$ 在 $\vec{x_0}$ 处均连续.

定义 8 设 D,Ω 分别是 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$ 上的开集, 对 $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $\vec{g}:D\to\mathbb{R}^k$, 若 $\vec{g}(D)\subset\Omega$, 则定义

$$\vec{f}\circ\vec{g}:D\to\mathbb{R}^m\quad \vec{u}\mapsto\vec{f}(\vec{g}(\vec{n})).$$

命题 2 若 $\vec{g}$ 在 D 上连续, $\vec{f}$ 在 Ω 上连续, 则 $\vec{f}\circ\vec{g}$ 在 D 上连续.

11.3 连续函数的性质

定义 1 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, $\vec{f}:K\to\mathbb{R}^m$, $\vec{x_0}\in K$. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall\vec{x}\in O(\vec{x_0},\delta)\bigcap K$, 成立 $|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{x_0})|<\varepsilon$, 则称 $\vec{f}$ 在 K 上连续. 若 $\vec{f}$ 在 K 上每一点均连续, 则称 $\vec{f}$ 在 K 上连续.

定理 1 连续映射将紧集映为紧集.

定理 2 有界性定理：紧集上的连续函数有界.

定理 3 最值定理: 紧集上的连续函数能取到最大值和最小值. 即对 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集 K 和 $f:K\to\mathbb{R}$, 则 $\exists\vec{\xi_1},\vec{\xi_2}\in K$, 使得 $\forall\vec{x}\in K$, $f(\vec{\xi_1})\le f(\vec{x})\le f(\vec{\xi_1})$.

定义 2 对 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集 K 和 $f:K\to\mathbb{R}^m$, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall\vec{x'},\vec{x''}\in K$, 若 $|\vec{x'}-\vec{x''}|<\delta$, $||<\varepsilon$, 则称 $\vec{f}$ 在 K 上一致连续.

定理 4 一致连续性定理：设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 对连续映射 $\vec{f}: K \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f}$ 在 K 上一致连续.

定义 3 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点集, 若连续映射 $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 的值域 $\gamma([0,1]) \subset S$, 则称 γ 为 S 中的道路, $\gamma(0)$ 与 $\gamma(1)$ 分别称为道路的起点与终点.

若 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S$, 都存在 S 中以 $\vec{x}$ 为起点, $\vec{y}$ 为终点的道路, 则称 S 道路连通, 也称 S 为连通集.

定义 4 连通的开集称为开区域, 开区域的闭包称作闭区域.

定理 5 连通映射将连通集映为连通集.

推论 连续函数将连通紧集映为闭区间.

注 $\mathbb{R}$ 上的连通子集为区间, 它是紧集的充要条件是它是闭区间.

定理 6 中间值定理：设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 上的连通紧集, 对 K 上的连续函数 f, 它在 K 上能取到最大值 M 和最小值 m 中间的一切值, 即 f 的值域为闭区间 $[m, M]$.

12 多元函数的微分学

12.1 偏导数与全微分

注 本节中在未说明时默认 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, $z = f(x,y)$ 定义在 D 上, $(x_0, y_0) \in D$ 为一定点.

定义 1 若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称 f 在点 (x_0, y_0) 关于 x 可偏导, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \left(f_x(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right).$$

注 求偏导即将函数其他变量固定对某一特殊变量进行求导.

推广 可类似定义 n 元函数的偏导.

定义 2 若 $y = f(\vec{x})$ 在 D 上每一点关于每一分量都可偏导, 则称 y 在 D 上可偏导.

命题 1 对于多元函数来说, 可偏导不一定连续.

定义 3 对方向 $\vec{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, 极限

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

称为 f 在 $\vec{x^0}$ 处沿 $\vec{v}$ 方向的方向导数, 记作 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$.

推广 可类似定义 n 元方向导数.

定义 4 若对函数 $f(x,y)$, 存在只与点 (x_0, y_0) 有关而与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的实数 A, B, 使得

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

则称函数 f 在 (x_0, y_0) 处可微, 并称其线性主要部分 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 f 在 (x_0, y_0) 处的全微分, 记为

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y.$$

命题 2 对于多元函数, 可微一定连续, 可微一定可导, 且此时有全微分公式

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y.$$

命题 3 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微时, 成立无穷小增量公式：

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

定理 1 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微, 则对方向 $\vec{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, f 在 (x_0,y_0) 处沿 $\vec{v}$ 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

推广 对 n 元函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$, 若它可微, 则 $y=\sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}\,\mathrm{d}x_i$.

此时对于方向 $\vec{v}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)$, 成立 $\dfrac{\partial y}{\partial \vec{v}}=\sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}\cos\theta_i$.

例 1 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点连续可导, 所有方向导数存在但在此处不可微.

定理 2 若 f_x, f_y 在 (x_0,y_0) 处均存在且连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

例 2 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续, 偏导数有界但不可微.

例 3 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在全平面处处连续, 但在 $(0,0)$ 处两个一阶偏导均不存在.

例 4 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可微, 但一阶偏导均不连续.

定义 5 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导, 则称向量 $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ 为 f 在点 (x_0,y_0) 的梯度, 记为 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$.

命题 4 若 f 在 (x_0,y_0) 点可微, 则 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\mathrm{grad}f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}=\|\mathrm{grad}f\|\cdot\cos\langle\mathrm{grad}f,\vec{v}\rangle$.

这反映了函数沿梯度方向增加最快, 逆梯度方向减少最快。

命题 5 梯度的基本性质：

(1) 若 $f=c$ 为常值函数, 则 $\mathrm{grad}f=0$;

(2) 若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则 $\mathrm{grad}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathrm{grad}f+\beta\mathrm{grad}g$;

(3) $\mathrm{grad}(f\cdot g)=f\cdot\mathrm{grad}g+g\cdot\mathrm{grad}f$;

(4) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\cdot\mathrm{grad}f-f\cdot\mathrm{grad}g}{g^2}$, $(g\neq0)$.

定义 6 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为区域, 若 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 均可导, 则得到的 f 的二阶偏导 (四种)：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{yx}(x,y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{xy}(x,y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 被称为混合偏导数.

定理 3 若混合二阶偏导 $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 均连续, 则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

例 5 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 二阶混合偏导相等但不连续.

例 6 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处二阶混合偏导不相等, 但该函数可微.

定义 7 设 $z=f(x,y)$ 在 D 上可微, 则二阶微分

$$\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f,$$

这里 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

推广 高阶微分公式 $\mathrm{d}^nz=\left(\mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n f$, $(n\in\mathbb{N}_+)$.

例 7 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{x^{-2}y^{-2}}}{\mathrm{e}^{x^{-4}}+\mathrm{e}^{y^{-4}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 任意阶偏导均存在, 但在 $(0,0)$ 处间断.

定义 8 对区域 D 上的 n 元 m 值的向量值函数 $\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m$, $\vec{x}\mapsto\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$, 对 $\vec{x^0}\in D$, 则:

(1) 若每个分量函数在 $\vec{x^0}$ 可导, 则称 f 在 $\vec{x^0}$ 可导, 并称矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x^0})\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x^0}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x^0}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x^0})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x^0}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x^0}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x^0})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x^0}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x^0}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x^0})\end{pmatrix}$$

为 $\vec{f}$ 在 $\vec{x^0}$ 的导数或 Jacobi 矩阵, 记为 $\vec{f}'(\vec{x^0})$ 或 $D\vec{f}(\vec{x^0})$. 若 $\vec{f}$ 在 D 上每一点都可导, 则称 $\vec{f}$ 在 D 上可导, 记为 $\vec{f}'(\vec{x})$ 或 $D\vec{f}(\vec{x})$.

(2) 若 $\vec{f}$ 的每个分量函数的偏导数都在 $\vec{x^0}$ 连续, 则称 $\vec{f}$ 在 $\vec{x^0}$ 连续.

(3) 若存在只与 $\vec{x^0}$ 有关, 与 Δx 无关的矩阵 $A_{m\times n}$, 使得

$$\Delta\vec{y}=\vec{f}(\vec{x^0}+\Delta\vec{x})-\vec{f}(\vec{x^0})=A\Delta\vec{x}+o(\Delta\vec{x}),$$

则称 $\vec{f}$ 在 $\vec{x^0}$ 可微, 并称 $A\Delta\vec{x}$ 为 $\vec{f}$ 为 $\vec{x^0}$ 处的微分, 记为 $\mathrm{d}\vec{y}=A\,\mathrm{d}\vec{x}$.

其中, $\Delta\vec{x}$, $o(\Delta\vec{x})$, $\mathrm{d}\vec{x}$ 均表示 n 个分量组成的列向量.

注 特殊地, $m=1$ 时, 导数 $\vec{f}'(\vec{x^0})=\mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x^0})$ 是 $\vec{f}$ 在 $\vec{x^0}$ 处的梯度.

定理 4 $\vec{f}$ 在 $\vec{x^0}$ 处可微的充要条件是它的每个分量函数 $f_i(\vec{x})$ 在 $\vec{x^0}$ 均可微.

12.2 多元复合函数的求导法则

定义 1 设 $D_f\subset\mathbb{R}^2$ 是区域, $f(x,y)$ 定义在 D_f 上, 对 $\vec{g}:D_g\to\mathbb{R}^2$, $u,v\mapsto(x(u,v),y(u,v))$, 若 $\vec{g}(D_g)\subset D_f$, 则称函数 $z=f\circ\vec{g}=f(x(u,v),y(u,v))$ 为 f 和 $\vec{g}$ 的复合函数.

定理 1 若 $\vec{g}$ 在 (u_0,v_0) 可导, f 在 (x_0,y_0) 可微, 则有:

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0).$$

推广 设 $h=f(y_1,\cdots,y_m)$, $\vec{g}:D_g\to\mathbb{R}^m$, $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(y_1,\cdots,y_m)$, $z=f\circ\vec{g}$, 若 $\vec{g}$ 在 $\vec{x^0}\in D_g$ 点可导, 即 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 在 $\vec{x^0}$ 点可偏导, 且 f 在 $y^0=g(\vec{x^0})$ 点可微, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(\vec{x^0})=\frac{\partial z}{\partial y_1}(\vec{y^0})\frac{\partial y_1}{\partial x_i}(\vec{x^0})+\frac{\partial z}{\partial y_2}(\vec{y^0})\frac{\partial y_2}{\partial x_i}(\vec{x^0})+\cdots+\frac{\partial z}{\partial y_m}(\vec{y^0})\frac{\partial y_m}{\partial x_i}(\vec{x^0}),i=1,2,\cdots,n,$$

即 $(f\circ\vec{g})'(\vec{x^0})=f'(\vec{y^0})\cdot\vec{g}'(\vec{x^0})$.

定理 2 设 $D_f\subset\mathbb{R}^k$ 是区域, $\vec{f}:D_f\to\mathbb{R}^m$, $\vec{g}\to\mathbb{R}^k$ 分别是多元向量值函数, 且分别在 D_f, D_g 上具有连续导数, 且 $\vec{g}(D_g)\subset D_f$, 则复合的向量值函数 $\vec{f}\circ\vec{g}$ 在 D_g 上有连续导数, 且

$$(\vec{f}\circ\vec{g})'(\vec{x})=\vec{f}'(\vec{u})\cdot\vec{g}'(\vec{x})=\vec{f}'(\vec{g}(\vec{x}))\cdot\vec{g}'(\vec{x}),$$

其中导数代表对应的 Jacobi 矩阵.

定理 3 一阶全微分的形式不变性：对 $z=f(x,y)$, 不论 x,y 是自变量或中间变量, 都有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

注 形式不变性在高阶全微分时不成立.

定理 4 拟微分平均值定理：设凸区域 $D\subset\mathbb{R}^n$, f 在 D 上可微, 则 $\forall\vec{a},\vec{b}\in D$, $\exists\theta\in(0,1)$, 使得

$$|f(\vec{b})-f(\vec{a})|\le\|f'(\vec{a}+\theta(\vec{b}-\vec{a}))\|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|,$$

其中 $\|A\|=\max\limits_{|x|=1}|Ax|$ 表示矩阵的模, $f'(\vec{x})$ 为 f 在 $\vec{x}$ 点的 Jacobi 矩阵.

12.3 中值定理和 Taylor 公式

定义 1 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是区域, 若 $\forall\vec{x},\vec{y}\in D$, 连接 $\vec{x},\vec{y}$ 的线段都完全属于 D, 即 $\forall\lambda\in[0,1]$, 恒有 $\vec{x}+\lambda(\vec{y}-\vec{x})\in D$, 则称 D 为凸区域.

定理 1 中值定理：设二元函数 $f(x,y)$ 在凸区域上可微, 则 $\forall(x_0,y_0)$, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, 均 $\exists \theta \in (0,1)$, 使得：

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y.$$

推论 若函数 $f(x,y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的偏导数恒为零, 则它在 D 上是常值函数.

定理 2 Taylor 公式：设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域 $O((x_0,y_0),r)$ 上具有 $k+1$ 阶连续偏导数, 则 $\forall(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, 都成立

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_0,y_0) + R_k,$$

其中 Lagrange 余项 $R_k = \dfrac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x} + \Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$, $(0<\theta<1)$.

注 可类似得到 n 元函数的中值定理和 Taylor 公式, 这里不赘述.

12.4 隐函数

定理 1 一元隐函数存在定理：对 $(x_0,y_0) \in D$, 设 $F(x,y)$ 在闭矩形 $D = \{(x,y) \big| |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$ 上连续且具有连续偏导. 若 $F(x_0,y_0)=0$ 且 $F_y(x_0,y_0) \neq 0$, 则 $\exists \rho>0$, $O(x_0,\rho)$ 上唯一确定隐函数 $y=f(x)$, 它满足：

(1) $F(x,f(x))=0$, $y_0=f(x_0)$;

(2) $y=f(x)$ 在 $O(x_0,\rho)$ 上连续且具有连续导数 $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

定理 2 n 元隐函数存在定理：设 $F(\vec{x},y)$ 在 $D = \{(\vec{x},y) \big| |y-y_0| \le b, |x_i-x_i^0| \le a_i,\ i=1,\cdots,n\}$ 上连续且具有一阶连续偏导. 若 $F(\vec{x^0},y_0)=0$ 且 $F_y(\vec{x^0},y_0) \neq 0$, 则 $\exists \rho>0$, $O((\vec{x^0},y_0),\rho)$ 上唯一确定隐函数 $y=f(\vec{x})$, 它满足：

(1) $F(\vec{x},f(\vec{x}))=0$, $y_0=f(\vec{x^0})$;

(2) $y=f(\vec{x})$ 在 $O((\vec{x^0},y_0),\rho)$ 上连续且具有连续偏导 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = -\dfrac{F_{x_i}(\vec{x},y)}{F_y(\vec{x},y)}$.

定理 3 多元向量值函数隐函数存在定理：设函数 $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 在

$$D = \{(x,y,u,v) \big| |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b, |u-u_0| \le c, |v-v_0| \le d\}$$

上连续且具有连续偏导, 对点 $\vec{x^0} = (x_0,y_0,u_0,v_0)$, 若 $F(\vec{x^0})=0$, $G(\vec{x^0})=0$ 且行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

则：(1) 在点 $(\vec{x^0})$ 附近可以从函数方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 唯一确定向量值隐函数

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix},\ (x,y) \in O\left(\left(x_0,y_0\right),\rho\right),$$

它满足 $\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \end{cases}$, $u_0=f\left(x_0,y_0\right), v_0=g\left(x_0,y_0\right)$;

(2) 该向量值隐函数在 $O\left(\left(x_0,y_0\right),\rho\right)$ 上连续且具有连续的导数, 且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}.$$

推论 此时, 导数公式：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

注 类似地, 能得到多个向量值函数的隐函数存在定理及求导公式.

定理 4 逆映射定理：设 $P_0=(u_0,v_0)\in D$, $x_0=x\left(u_0,v_0\right), y_0=y\left(u_0,v_0\right), P_0'=(x_0,y_0)$, 且 $\vec{f}$ 在 D 上具有连续导数. 如果在 P_0 点处 $\vec{f}$ 的 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$, 则 $\exists\rho>0$, $O\left(P_0',\rho\right)$ 上存在 $\vec{f}$ 的具有连续导数的逆映射

$$\vec{g}: \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases},(x,y)\in O\left(P_0',\rho\right).$$

满足：(1) $u_0=u\left(x_0,y_0\right)$, $v_0=v\left(x_0,y_0\right)$;

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$

定理 5 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是开集, 且 $\vec{f}: D\to\mathbb{R}^2$ 在 D 上具有连续导数. 若 $\vec{f}$ 的 Jacobi 行列式在 D 上恒不为零, 则 D 的像集 $\vec{f}(D)$ 是开集.

12.5 偏导数在几何中的应用

定义 1 对空间曲线 $F(x,y,z)$, 称 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ 为空间曲线的参数方程.

注 一般记 $\vec{r}(t)$ 所表示的曲线为 Γ.

定义 2 若 $\vec{r}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$ 在 $[a.b]$ 上连续且 $\forall t\in[a,b]$, $\vec{r}'(t)\neq 0$. 则称它所确定的曲线为光滑曲线.

命题 1 曲线 Γ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

定义 3 $\vec{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ 称作 Γ 在点 P_0 处的切向量, 一般用 τ 表示.

定义 4 过 P_0 点且与切向量垂直的平面称作 Γ 在 P_0 点的法平面, 写作

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

定理 1 曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 P_0 点的法平面是由梯度向量 $\operatorname{grad}F(P_0)$ 张成的过 P_0 的平面.

定义 5 对曲面 $S:F(x,y,z)=0$ 及曲面上一点 P_0, S 上任意一条过 P_0 的光滑曲线在 P_0 处的切线共面, 这个平面 π 称作 S 在 P_0 处的切平面, 它的法向量 $\vec{n}$ 称作 S 在 P_0 点的法向量. 过 P_0 且与 π 垂直的直线称作 S 在 P_0 点的法线.

命题 2 S 在 P_0 处的切平面方程为 $F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$, 法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

推论 法线以梯度向量 $\operatorname{grad}F(P_0)$ 为方向.

定义 6 若曲面 S 具有连续变动的切平面, 即切平面位置随切点在曲面上的位置变动而连续变动, 则称该曲面为光滑曲面.

定理 2 对 $S:F(x,y,z)=0$, 若 F_x,F_y,F_z 均在 D 上连续且三者不全为零, 则 S 是光滑曲面.

命题 3 对光滑曲面 $S:F(x,y,z)=0$, 若它可以显式表示为 $z=f(x,y)$, $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, 则:

(1) S 在 P_0 处的切平面方程为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$.

(2) S 在 P_0 处的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

定义 7 夹角的概念：两条曲线在交点处的夹角指这两条曲线在交点处的切向量之间的夹角; 两张曲面在交线上一点的夹角指这两张曲面在该点的法向量之间的夹角; 如果两张曲面在交线上每一点正交, 即夹角为直角, 就称这两张曲面正交.

12.6 无条件极值

定义 1 对开区域 $D\in\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(\vec{x})$, $\vec{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$. 若存在邻域 $O(\vec{x}_0,r)$, 使得

$$f(\vec{x}_0)\geq f(\vec{x})\,(f(\vec{x}_0)\leq f(\vec{x})),\quad \forall\vec{x}\in O(\vec{x}_0,r),$$

则称 $\vec{x}_0$ 为 f 的极大 (小) 值点, 统称为极值点; $f(\vec{x}_0)$ 为相应的极大 (小) 值, 统称为极值.

命题 1 必要条件：设 $\vec{x}_0$ 为函数 f 的极值点且 f 在 $\vec{x}_0$ 可偏导, 则 f 在 $\vec{x}_0$ 点的各个一阶偏导都为零, 即 $f_{x_1}(\vec{x}_0) = f_{x_2}(\vec{x}_0) = \cdots = f_{x_n}(\vec{x}_0) = 0$.

定义 2 使 f 的各个一阶偏导数同时为 0 的点称作 f 的驻点. 驻点不一定是极值点.

定理 1 设 f 在驻点 (x_0, y_0) 附近具有二阶连续偏导数, 记

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0), H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

则：(1) 若 $H > 0$, $A > 0$ 时 $f(x_0, y_0)$ 为极小值; $H > 0$, $A < 0$ 时 $f(x_0, y_0)$ 为极大值;

(2) 若 $H < 0$, 则 $f(x_0, y_0)$ 不是极值;

(3) 若 $H = 0$, 则是否是极值需要另行判断.

推广 设 n 元函数 $f(\vec{x})$ 在其驻点 $\vec{x}_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 附近具二阶连续偏导, 考虑二次型

$$g(\zeta) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\vec{x}_0) \zeta_i \zeta_j,$$

则当其正定时, $f(\vec{x}_0)$ 为极小值; 当其负定时, $f(\vec{x}_0)$ 为极大值; 当其不定时, $f(\vec{x}_0)$ 不是极值.

定义 3 记 $a_{ij} = f_{x_i x_j}(\vec{x}_0)$, 并记

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

它称为 f 的 k 阶 Hessian 矩阵或 Hesse 矩阵.

推论 若 $|A_k| > 0$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则二次型 $g(\xi)$ 正定, 此时 $f(\vec{x}_0)$ 为极小值; 若 $(-1)^k |A_k| > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$, 则二次型 $g(\xi)$ 负定, 此时 $f(\vec{x}_0)$ 为极大值.

命题 2 求二元函数极值的一般化方法：

(1) 先通过方程组 $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ 解出驻点坐标;

(2) 再求二阶偏导数, 对每个驻点求出上述定理 1 中的 A, B, C, H;

(3) 对于 $H = 0$ 的情况, 一般在驻点附近通过偏导进行讨论.

12.7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法

定义 1 三元函数的条件极值：求目标函数 $f(x, y, z)$ 在约束条件 $\begin{cases} G(x, y, z) = 0 \\ H(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的极值.

注 在本节中, 假定 f, G, H 具有连续偏导数, 且 Jacobi 矩阵 $J=\begin{pmatrix} G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}$ 在满足约束条件的点处是满秩的, 即 $\operatorname{rank} J=2$.

定理 1 Lagrange 乘数法：对求目标函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\begin{cases} G(x,y,z)=0 \\ H(x,y,z)=0 \end{cases}$ 下的极值问题, 则通过 Lagrange 乘数 λ, μ 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda G(x,y,z)-\mu H(x,y,z),$$

此时条件极值点 (x_0,y_0,z_0) 包含在方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x-\lambda G_x-\mu H_x=0 \\ L_y=f_y-\lambda G_y-\mu H_y=0 \\ L_z=f_z-\lambda G_z-\mu H_z=0 \\ G(x,y,z)=0 \\ H(x,y,z)=0 \end{cases}$$

的解 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ 中. 这种方法称作 Lagrange 乘数法.

定理 2 考虑目标函数 $f(\vec{x})=0$, $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $m<n$ 个约束条件 $g(\vec{x})=0$, $(i=1,\cdots,m)$ 下的极值问题, 这里默认 Jacobi 矩阵 $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{m\times n}$ 满秩, 则构造 Lagrange 函数

$$L(\vec{x},\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(\vec{x})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\vec{x}),$$

则条件极值点 $\vec{x}_0$ 包含在方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k}=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}-\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}=0,\ (k=1,\cdots,n) \\ g_l=0,\ (l=1,\cdots,m) \end{cases}$$

的所有解中.

命题 1 充分条件：设 $\vec{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 满足定理 2 中的方程组, 则当矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_l}(\vec{x}_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\right)_{n\times n}$$

正定 (负定) 时, $\vec{x}_0$ 为此时的极小 (大) 值点, $f(\vec{x}_0)$ 为极小 (大) 值.

命题 2 必要条件：设 $\vec{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 且 $\vec{x}_0$ 为条件约束下的极值点, 则 $\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}$, 使得

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\operatorname{grad} g_i.$$

13 重积分

13.1 有界闭区域上的重积分

定义 1 对 $\mathbb{R}^2$ 上的有界子集 D 及包含 D 的闭矩形 $U=[a,b]\times[c,d]$, 通过分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$$

将 U 分成小矩形 $U_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $(i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m)$, 这称作 U 的一个划分.

定义 2 在上述划分中, 记矩形面积之和

$$S_A=\{S_{ij}\big|U_{ij}\subset D\},\ S_B=\{S_{ij}\big|U_{ij}\bigcap D\neq\varnothing\},$$

则类似 Darboux 求和增加分点后, 记 $\sup\limits_{k\to\infty}\{S_{A_k}\}=S_{D_1}$, $\inf\limits_{k\to\infty}\{S_{B_k}\}=S_{D_2}$, 若 $S_{D_1}=S_{D_2}$, 则称该值为 D 的面积, 记作 S_D 或 mD.

定义 3 记号不变, 则称 $S_B-S_A=S_{\partial D}$ 为边界 ∂D 的面积. 若 $S_{\partial D}=0$, 则称其为零边界区域.

命题 1 有界点集 D 可求面积的充要条件是它是零边界区域.

命题 2 若有界区域 D 的边界是由有限条光滑曲线组成的分段光滑曲线, 则它可求面积.

例 1 $S=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,\ 0\le y\le D(x)\}$ 不可求面积, 这里 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数.

定义 4 二重积分：对 $\mathbb{R}$ 上的零边界闭区域 D 及在 D 上有界的函数 $f=z(x,y)$, 将 D 用曲线网划分为 n 个小区域 $\Delta D_1,\cdots,\Delta D_n$, 记

$$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\mathrm{diam}\Delta D_i\},$$

于是 $\forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$, 记 $\Delta\sigma_i=S_{\Delta D_i}$, 若 λ 趋于 0 时和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 极限存在且与划分 (ξ_i,η_i) 的选取无关, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 称此极限为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分, 记为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, D 称作积分区域, x,y 称作积分变量, $\mathrm{d}\sigma$ 称作面积元素.

定义 5 类似一元情况, 设 $M_i.m_i$ 分别为 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的上下确界, 则定义 Darboux 大小和

$$S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i,\quad s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i.$$

命题 3 Darboux 和的性质：

(1) 若在已有划分上添加有限条曲线作进一步划分, 则 Darboux 大和不增, Darboux 小和不减.

(2) 任一 Darboux 小和都不大于任一 Darboux 大和, 即 $\sup s \leq \inf S$.

(3) $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i = 0$, 这里 $\omega_i = M_i - m_i$ 是 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的振幅. 此时成立

$$\lim_{\lambda\to 0} s = \lim_{\lambda\to 0} S = \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

定理 1 若 $f(x,y)$ 在零边界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上可积.

定义 6 设 $S \subset \mathbb{R}^2$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 均存在可列个矩形 $\Delta_1, \cdots, \Delta_n, \cdots$, 使得

(1) 矩形族 $\{\Delta_i \big| i \in \mathbb{N}_+\}$ 覆盖 S, 即 $S \subset \sum\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_n$;

(2) 面积和式趋于 0, 即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} S_{\Delta_n} < \varepsilon$,

则称 S 是 $\mathbb{R}^2$ 上的零测度集.

注 零面积集必定测度为零, 但零测度集的面积不一定为零.

定理 2 Lebesgue 定理：对 $\mathbb{R}^2$ 上零边界闭区域 D 及 D 上的有界函数 f, 则 f 在 D 上可积的充要条件是 f 在 D 上所有不连续点组成的集合的测度为零.

定义 7 $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$ 上边界体积为零的有界区域称作零边界区域.

命题 4 有界点集 Ω 可求体积的充要条件是它是零边界区域.

定义 8 n 重积分：对 $\mathbb{R}^n$ 上的零边界闭区域 Ω 及在 Ω 上有界的函数 $u = f(\vec{x})$, 将 Ω 用曲线网划分为 n 个小区域 $\Delta\Omega_1, \cdots, \Delta\Omega_n$, 记

$$\lambda = \max_{1\leq i\leq n}\{\mathrm{diam}\Delta\Omega_i\},$$

于是 $\forall \vec{x}_i \in \Delta\Omega_i$, 记 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积, 若 λ 趋于 0 时和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\vec{x}_i)\Delta V_i$ 极限存在且与划分 $\vec{x}_i$ 的选取无关, 则称 $f(\vec{x})$ 在 Ω 上可积, 称此极限为 $f(\vec{x})$ 在 Ω 上的 n 重积分, 记为

$$\int_{\Omega} f\,\mathrm{d}V = \int\cdots\int\limits_{\Omega} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\vec{x}_i)\Delta V_i,$$

其中 $f(\vec{x})$ 称为被积函数, Ω 称作积分区域, $\vec{x}$ 称作积分变量, $\mathrm{d}V$ 称作体积元素.

定理 3 若 $f(\vec{x})$ 在零边界闭区域 Ω 上连续, 则它在 Ω 上可积.

定义 9 将实轴上的闭区间映满平面上的一个二维区域 (通过该二维区域的每个点) 的连续映射所对应的曲线被称为 Peano 曲线.

13.2 重积分的性质与计算

注 无特殊情况下, 本节中考虑的区域均为 $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$ 上的零边界闭区域.

命题 1 线性性：设 f 和 g 都在区域 Ω 上可积, α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 Ω 上也可积, 且

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}V = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}V + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}V.$$

命题 2 区域可加性：设区域 Ω 被分成两个内点不相交的区域 Ω_1 和 Ω_2, 则 f 在 Ω 上可积的充要条件是 f 在 Ω_1, Ω_2 上都可积, 且此时成立

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega_1} f\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_2} f\,\mathrm{d}V.$$

命题 3 保序性：设 f, g 都在区域 Ω 上可积, 且 $f \leq g$, 则成立不等式

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}V \leq \int_\Omega g\,\mathrm{d}v.$$

推论 设 f 在区域 Ω 上可积, M, m 分别为 f 在 Ω 上的上下确界, 则对 Ω 的体积 V, 有

$$mV \leqslant \int_\Omega f\,\mathrm{d}V \leqslant MV.$$

命题 4 绝对可积性：设 f 在区域 Ω 上可积, 则 $|f|$ 也在 Ω 上可积, 且成立

$$\left|\int_\Omega f\,\mathrm{d}V\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}V.$$

命题 5 乘积可积性：设 f, g 都在区域 Ω 上可积, 则 $f \cdot g$ 也在 Ω 上可积.

定理 1 积分中值定理：设 f, g 都在区域 Ω 上可积, 且 g 在 Ω 上不变号. 设 M, m 分别为 f 在 Ω 上的上下确界, 则 $\exists \mu \in [m, M]$, 使得

$$\int_\Omega f \cdot g\,\mathrm{d}V = \mu \int_\Omega g\,\mathrm{d}V.$$

特别地, 如果 f 在 Ω 上连续, 则存在 $\xi \in \Omega$, 使得

$$\int_\Omega f \cdot g\,\mathrm{d}V = f(\xi) \int_\Omega g\,\mathrm{d}V.$$

定理 2 累次积分：设二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积. 若 $\forall x \in [a, b]$, 存在积分 $h(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$, 则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并成立等式

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

这里, $\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 代表先对 y 再对 x 的累次积分, 代表 $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$.

注 类似地, 先 x 后 y 的累次积分 $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 也存在, 且成立

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

推论 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则成立

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y.$$

定理 3 矩形上的重积分：设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 n 维闭矩形 $\Omega=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上可积, 记 $\Omega_*=[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. 若 $\forall x_1\in[a_1,b_1]$, 积分

$$h\left(x_1\right)=\int_{\Omega_*} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

存在, 则 $h(x_1)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上可积, 并成立

$$\int_\Omega f\left(x_1,\cdots,x_n\right)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1} h(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x_1 \int_{\Omega_*} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

推论 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 n 维闭矩形 $\Omega=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上连续, 则有

$$\int_\Omega f\left(x_1,\cdots,x_n\right)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_{a_n}^{b_n} f\left(x_1,\cdots,x_n\right)\,\mathrm{d}x_n.$$

注 类似二重积分, n 重积分也能化作先对某个变量定积分, 再对其余 $n-1$ 个变量累次积分.

定理 4 一般区域上的重积分：设 f 是区域 D 上的可积函数, 且 D 可以表示为 x 型区域:

$$D=\{(x,y)\big|y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\},$$

若 $\forall x\in[a,b]$, 积分 $\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 f 在 D 上的二重积分可化为先 y 后 x 的积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

类似地, 如果区域 D 可以表示为 y 型区域 $D=\{(x,y)\big|x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$ 且 $\forall y\in[a,b]$, 积分 $\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则 $\psi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 且有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

注 对于一般区域, 若它可分成若干个不相交的 x 型区域和 y 型区域的并, 则可先分别计算这些区域上积分的值, 然后通过积分的区域可加性求原积分的值.

命题 6 当 $f(x,y)$ 中含有 x^2+y^2 项或 D 的边界表达式中有 x^2+y^2 项, 则可利用

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

先化为极坐标下的二重积分, 然后化为关于 r 和 θ 的二次积分去求解.

13.3 重积分的变量代换

定义 1 设 U 为 uv 平面上的开集, V 是 xy 平面上的开集, 映射

$$T:U\to V\quad x=x(u,v),\,y=y(u,v)$$

是 U 到 V 的双射, 它的逆变换记为 $T^{-1}:u=u(x,y),v=v(x,y)$. 于是, 称 (u,v) 为 $P(x,y)$ 的曲线坐标, 称 T 为坐标变换.

例 1 形如 $T_x:x=u,\,y=y(u,v)$ 或 $T_y:x=x(u,v),\,y=v$ 的映射称为本原映射.

引理 1 设 T 为本原映射, 则对于每个属于 B_n 的小矩形 R, 等式

$$S_{T(R)}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u},\tilde{v})}S_R$$

成立, 这里 B_n 为与 ∂D 交集非空的小矩形组成的多边形; $(\tilde{u},\tilde{v})$ 为 R 上某一点.

引理 2 设 T 为本原映射, 二元函数 $f(x,y)$ 在 $T(D)$ 上连续, 则

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

引理 3 对满足定义 1 假设的映射 T, 则对于任意 $Q_0=(u_0,v_0)\in U$, T 在 Q_0 附近可以表示成两个具有连续导数的本原双射的复合.

定理 1 二重积分变量代换：设开集 U, V 和映射 T 如定义 1 所设, 则对 U 中具有分段光滑边界的有界闭区域 D, 若 $f(x,y)$ 在像 $T(D)$ 上连续, 则

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

特殊地, 当 $f(x,y)\equiv 1$ 时, 由以上定理得 $T(D)$ 的面积公式

$$S_{T(D)}=\iint\limits_D\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

注 Jacobi 行列式 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 的几何意义为该变量代换下面积的比例系数.

定理 2 映射 T 和区域 Ω 类似假设. 如果 $f\left(y_1,\cdots,y_n\right)$ 是 $T(\Omega)$ 上的连续函数, 则变量代换公式

$$\int_{T(\Omega)} f\left(y_1,\cdots,y_n\right)\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n=\int_{\Omega} f\left(y_1(\vec{x}),\cdots,y_n(\vec{x})\right)\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

成立, 其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 它称作 n 重积分的变量代换公式.

例 2 柱面坐标变换：$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$.

例 3 球面坐标变换：$x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\cos\theta$, $z=r\cos\theta$, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$.

13.4 反常重积分

13.5 微分形式

14 曲线积分、曲面积分与场论

14.1 第一类曲线积分与第一类曲面积分

14.2 第二类曲线积分与第二类曲面积分

14.3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

14.4 微分形式的外微分

14.5 场论初步

15 含参变量积分

15.1 含参变量的常义积分

15.2 含参变量的反常积分

15.3 Euler 积分

16 Fourier 级数

16.1 函数的 Fourier 级数展开

16.2 Fourier 级数的收敛判别法

16.3 Fourier 级数的性质

16.4 Fourier 变换和 Fourier 积分

16.5 快速 Fourier 变换