

初等数论期中考试

1. 若 $a^2 + b^2 = c^2$, $(a, b, c \in \mathbb{N}^*)$, 证明: $6|ab$.

2.(1) 叙述二次互反律, (2) 判断二次同余方程 $x^2 \equiv 6 \pmod{65}$ 是否有解.

3. 记 Mobius 函数 $\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdots p_r, \text{ 其中 } n \in \mathbb{N}^*, p_1, \cdots, p_r \text{ 是 } r \text{ 个互异素数.} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$ 证明:

(1) $\mu(n)$ 是积性函数.

$$(2) \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}.$$

$$(3) \sum_{1 \leq m \leq n} \mu(m) \left[\frac{n}{m} \right] = 1, \text{ 其中 } [x] \text{ 为不超过 } x \text{ 的最大整数.}$$

4. 证明: 对方程 $x^2 + y^2 = z^2$, $(x, y) = 1, 2|y$ 的任意一组正整数解 x, y, z , 一定存在奇偶性不同的互素正整数 a, b , 使得 $x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$.