陶涛

2021-2022第二学期数学分析II–期末考试参考答案

第一题说明：(1)是习题7.3的2.(2); (2)的第二问在讲习题7.3时，我补充过，也是原题(也可见谢惠民上册的323页)。
第二题说明：109页的例11.2.4
第三题说明：第一问是4月8日课上留的练习题，讲义发给大家了；第二问是谢惠民上册的328页。
第四题说明：第二问是习题9.4的第5题；第三问是习题8.2的第16题的变形：无穷积分换成的无穷级数，但解题方法和答案完全相同。
第5题说明：第二问是4月4日课上的例题(我们讲的是一般情形$\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x^\beta)dx$), 第三问是谢惠民上册的391页。
第6题说明：第三问和四问是5月11日课上讲的。

第一题(13分)：(1)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}$.

(2)设$f(x)=\sin\frac{1}{x}, x\in(0,1]; 0, x=0$. (i)证明$f(x)$在$[0,1]$上可积(Riemann可积)；(ii)令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 那么$F(x)$在$[0,1]$上是否可导？如果可导，计算$F'(x)$.
解：(1)由L'Hospital法则知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x e^{-\cos^2 x}}=2e.$$

证明：(i)由于$f(x)$在$[0,1]$上只有一个间断点$x=0$, 所以$f(x)$在$[0,1]$上可积。
(2)由于$f(x)$在$(0,1]$上连续，所以$F(x)$在$(0,1]$上可导且$F'(x)=f(x)$.
又分部积分得$F(x)=O(x^2), x\to 0$, 所以$F(x)$在$x=0$处也可导，而且$F'(0)=0$. 所以$F(x)$在$[0,1]$上可导且$F'(x)=f(x)$.

第二题(7分)：设$f(x,y)=\frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}$, $(x,y)\in R^2$且$(x,y)\neq(0,0)$，那么$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$是否存在？若存在，计算之。若不存在，给出证明。
解：不存在。
由于$\lim\limits_{x=y^2, y\to 0} f(x,y)=0$, $\lim\limits_{x=0, y\to 0} f(x,y)=1$, 所以极限不存在。

第三题(20分)：(1)设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx=0$. 当$f(x)$在$[a,b]$上可积时，上述结论还对吗？
(2)设$f(x)$在$[0,2\pi]$上连续，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$.
证明：第一步：由于$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，所以

$$\int_a^b f(x)\sin nx dx=-\frac{f(x)\cos(nx)}{n}|_a^b+\int_a^b\frac{f'(x)\cos(nx)}{n}dx.$$

记$M=\max_{a\le x\le b}(|f(x)|+|f'(x)|)$, 则$|\int_a^b f(x)\sin nx dx|\le\frac{2M+(b-a)M}{n}$,
所以$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx=0$.
第二步：方法1(逼近法)：由于$f(x)$在$[a,b]$上可积，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的多项式$P_\varepsilon(x)$使得

$$\int_a^b |f(x)-P_\varepsilon(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

又由(i)知， $\lim_{n\to\infty}\int_a^b P_\varepsilon(x)\sin(nx)dx=0$, 所以存在$N=N(\varepsilon)$使得当$n\geq N$ 时, $|\int_a^b P_\varepsilon(x)\sin(nx)dx|<\frac{\varepsilon}{2}$.
这样，对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$N=N(\varepsilon)$使得当$n\geq N$时,

$$\Big|\int_a^b f(x)\sin(nx)dx\Big|\leq\int_a^b|f(x)-P_\varepsilon(x)|dx+\Big|\int_a^b P_\varepsilon(x)\sin(nx)dx\Big|<\varepsilon,$$

所以$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx=0$.

方法2(使用f可积的充要条件)由于$f(x)$在$[a,b]$上可积，所以对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$的划分$P:a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$使得$\sum_{i=1}^m w_i\triangle x_i<\frac{\varepsilon}{2}$. 明显地，有$|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin(nx)dx|\leq\frac{2}{n},i=1,\cdots,m$, 这样

$$\Big|\int_a^b f(x)\sin nxdx\Big|=\Big|\sum_{i=1}^m\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\sin(nx)dx\Big|$$

$$\leq\Big|\sum_{i=1}^m\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)\sin(nx)dx\Big|+\Big|\sum_{i=1}^m\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)\sin(nx)dx\Big|$$

$$\leq\sum_{i=1}^m w_i\triangle x_i+\frac{2Mm}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Mm}{n},$$

其中$M=\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|$.
对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$N=N(\varepsilon)$使得当$n\geq N$时, $\frac{2Mm}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 这样，对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$N=N(\varepsilon)$使得当$n\geq N$时, $|\int_a^b f(x)\sin nxdx|<\varepsilon$, 所以$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nxdx=0$.

(2)证明：由于$f(x)$连续，所以

$$\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}f\Big(\frac{x}{n}\Big)|\sin x|dx$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{2(i-1)\pi}^{2i\pi}f\Big(\frac{x}{n}\Big)|\sin x|dx=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_0^{2\pi}f\Big(\frac{x+2(i-1)\pi}{n}\Big)|\sin x|dx$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\Big(\frac{\xi_i+2(i-1)\pi}{n}\Big)\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\frac{4}{n}\sum_{i=1}^n f\Big(\frac{\xi_i+2(i-1)\pi}{n}\Big)$$

$$=\frac{4}{2\pi}\sum_{i=1}^n f\Big(\frac{\xi_i+2(i-1)\pi}{n}\Big)\frac{2\pi}{n},$$

其中$\xi_i\in[0,2\pi]$.
然后，由定积分的定义知，$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$.

第四题(20分)： (1)讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n^p\Big(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$的敛散性, 其中$p\in R$.
(2)如果级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛且$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$, 那么级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$是否一定收敛?
(3)讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^p+\sin n},p\in R$的敛散性(包括绝对收敛，条件收敛和发散)，其中$p>0$.
解：(1)由于$n^p\Big(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\sim\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}-p}},n\to\infty$, 所以收敛当且仅当$p<\frac{1}{2}$.

(2)反例：$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$.
(3)绝对收敛当且仅当 $p>1$, 条件收敛当且仅当$\frac{1}{2}<p\leq 1$, 发散当且仅当$0<p\leq\frac{1}{2}$. 事实上，由于

$$\frac{\sin n}{n^p+\sin n}=\frac{\sin n}{n^p}-\frac{\sin^2 n}{n^p(n^p+\sin n)}.$$

已知级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^p}$绝对收敛当且仅当 $p>1$, 条件收敛当且仅当$0<p\leq 1$. 又级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^p(n^p+\sin n)}$是正项级数，收敛当且仅当$p>\frac{1}{2}$(因为当$0<p\leq\frac{1}{2}$时，$\frac{\sin^2 n}{n^p(n^p+\sin n)}\geq\frac{\sin^2 x}{2n^p}$, 所以发散).

第五题(20):(1)叙述无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛的Cauchy收敛原理。
(2)讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}x\sin(x^p)dx$的敛散性，包括绝对收敛，条件收敛和发散，其中$p\in R$.
(3)设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$. 任取$0<a<b$, 反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$是否收敛?
解：(1)无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛当且仅当$\forall\varepsilon>0$, 存在$A_0=A_0(\varepsilon)>1$使得$\forall A'>A\geq A_0$都有$|\int_A^{A'}f(x)dx|<\varepsilon$.

(2)当$p>0$时，

$$\int_1^{+\infty}x\sin x^p dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{pt^{1-\frac{2}{p}}}dt.$$

所以当$p>2$时，条件收敛；当$0<p\leq 2$时，发散。
当$p\leq 0$时，由于

$$x\sin x^p\sim x^{p+1},\quad x\to+\infty,$$

所以当$p<-2$时，绝对收敛；当$-2\leq p<0$时，发散。
总结：当$p<-2$时，绝对收敛；当$|p|\leq 2$时，发散；当$p>2$时，条件收敛。

(3)收敛。事实上, 对任意$0<\varepsilon<A<+\infty$, 有

$$\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}dx=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}.$$

第六题(20分)：(1)叙述函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛于和函数$S(x)$的定义。
(2)举例说明$(0,1)$上的连续函数列$f_n(x)$的逐点收敛极限$f(x)$在$(0,1)$上不一定连续。
(3)讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^\alpha e^{-nx}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性,其中$\alpha\in R$.
(4)讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$在$x\in(0,2\pi)$上的一致收敛性,其中$\alpha>0$.
解：(1)略。

(2)取$f_n(x)=\sin^n(2x), x\in(0,1)$. (有很多例子)
(3)当$\alpha>1$时，由于$0\le u_n(x)\le e^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}, x>0$, 所以由Weierstrass判别法致，在$(0,+\infty)$上一致收敛。
另外，由Cauchy收敛原理知，当$\alpha\le 1$时，在$(0,+\infty)$上非一致收敛。
(4) 当$\alpha>1$时，由Weierstrass判别法知，在$(0,2\pi)$绝对一致收敛;
当$0<\alpha<1$时，在$(0,1)$非一致收敛。事实上，对任意的$n\in N_+$, 有

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin(\frac{k\pi}{4n})}{k}\ge\frac{1}{4},$$

所以由Cauchy收敛原理知，在$(0,2\pi)$上非一致收敛。