数分一期中

1(10) 给出下列命题的 $\varepsilon - N(\varepsilon - \delta)$ 语言描述:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 不收敛; (2) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$.

2(30) 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n \sin^n x}$, 其中 $x \in R$; (2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n$, 其中 $a \geq 0, b \geq 0$.

(3) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$, 其中 $\sin a \neq 0$;

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (a_1^x + \cdots + a_m^x)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a_i > 0$, $(i = 1, \cdots, m)$, $m \in \mathbb{N}_+$ 给定.

(5) 判断数列 $\{\cos n\}$ 的敛散性; (6) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$.

3(10) 设 $p_k > 0$, $(k \in \mathbb{N}_+)$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a.$$

4(20) 回答下列问题 (证明或举反例):

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的任一子列 $\{a_{n_k}\}$ 都存在收敛子列 $\{a_{n_{k_j}}\}$, 则 $\{a_n\}$ 是否一定收敛?

(2) 如果对每个素数 p, 数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{np}\}$ 都收敛于 0. 则 $\{a_n\}$ 是否一定收敛于 0?

(3) 若 $\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists N_k \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \geq N_k : |a_n - a| < \dfrac{1}{k}$, 是否有 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$?

(4)(i) 若 $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$, 则 $\{a_n\}$ 是否一定收敛?

(ii) 若 $\forall p, n \in N_+$, $|a_{n+p} - a_n| \leq \dfrac{p}{n^2}$, 问 $\{a_n\}$ 是否一定收敛?

(5) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, 问数列 $\left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ 是否收敛?

(6)(i) 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 中只有第一类间断点, 问函数 f 是否在 $[a, b]$ 上有界?

(ii) 是否存在 $(0, 1)$ 上的单调函数 f, 使得 f 在任意有理点不连续, 而在任意无理点连续?

5(10) 设 $A > 0$ 且 $a_1 > \sqrt{A}$. 令 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} \left(a_n + \dfrac{A}{a_n} \right)$, 则:

(1) 证明 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{A}$; (2) 是否存在常数 $a > 1, b > 1$ 及 $C > 0$, 使得 $a_n - \sqrt{A} \leq \dfrac{C}{a^{b^n}}$?

6(10) 设 $[0,1]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^{\alpha}\sin\frac{1}{\beta}, & x\in(0,1]\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

7(10) 设数集 S 是非空有下界的集合, 则:

(1) 记 $\alpha=\inf S$, 判断在数集 S 中是否可取出单减的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$?

(2) 设 α 是 S 的一个下界; 且数列 $\{a_n\}\subset A$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$. 证明：$\alpha=\inf A$.