中 山 大 学

2018年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：354

科目名称：高等代数

考试时间： 4月15日 上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

符号说明： 对于矩阵 A，A^T 表示 A 的转置. I 表示单位矩阵. 如不特别指明，卷中的多项式, 矩阵, 方程组, 线性空间等都是指某个数域 K 上的.

1. (20分) 求下列行列式:

(1) $A=\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$,　　(2) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ & \cdots & & \cdots & \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

2. (15分) 设 $(x-1)^2 \mid ax^4+bx^2+1$，求 a,b.

3. (10分) 判断多项式 $x^4-9x^3+12x^2+6$ 在有理数域上是否可约, 并证明你的结论.

4. (15分) 解方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+4x_3=-1. \end{cases}$

5.(30分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A 的秩, 并给出其列向量组的一个极大线性无关组.

(2) 记 A 的列向量依次为: $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$. 记 V_1 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间，V_2 为向量组 α_4,α_5 生成的子空间. 求 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的一组基和维数.

6. (30 分) 已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

(1) 求一个正交矩阵 P，使 $P^T AP$ 为对角矩阵.

(2) 记 $X=(x_1,x_2,x_3)$，判断实二次型 XAX^T 是否正定，并证明你的结论.

7. (10 分) 设实对称矩阵 A 满足等式 $A^2+6A+8I=0$. 证明 $A+3I$ 为正交矩阵.

8. (10 分)设 σ,τ,ρ 为线性空间 V 上的线性变换，定义 $[\sigma,\tau]=\sigma\tau-\tau\sigma$. 证明:

$$[[\sigma,\tau],\rho]+[[\tau,\rho],\sigma]+[[\rho,\sigma],\tau]=0.$$

9. (10 分) 设 σ 为 n 维欧几里得空间 V 上的线性变换，在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A. 记基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量阵为 $G=\left((\alpha_i,\alpha_j)\right)$. 证明 σ 是对称变换的充分必要条件为 $A^TG=GA$.