

# 中山大学

## 2017年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 261

科目名称: 数学分析

考试时间: 4月8日下午

考生须知

全部答案一律写在答题  
纸上, 答在试题纸上的不计  
分! 答

1. (20分) 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt}{x^2}$$

2. (10分) 求函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的左右导数。

3. (10分) 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 t|x-t| dt$$

$$(2) \int x^2 e^x dx.$$

4. (10分) 求函数  $y = xe^{-5x}$  的单调区间以及凹凸区间。

5. (10分) 判别广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$  的收敛性。

6. (10分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$  的收敛域。

7. (10分) 求函数  $f(x) = x \sin x$  ( $-\pi < x < \pi$ ) 的 Fourier 级数。

8. (10分) 求空间曲线  $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$  在点  $(-1, 1, -1)$  的切线方程和法平面方程。

9. (10分) 求二重积分  $I = \int_0^1 dx \int_x^1 x^2 e^{-y^2} dy$ 。

10. (10分) 用格林公式计算积分  $I = \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$ ,

其中  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 取逆时针方向。

11. (10分) 利用高斯公式求  $I = \iiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ ,

其中  $S$  为球  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外表面。

12. (10 分) 计算  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2}$ 。

13. (10 分) 求锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2y$  所截部分的面积。

14. (5 分) 设  $f(x)$  连续。 证明:  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ 。

15. (5 分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(1/2) = 1$ 。

证明: (1) 存在一点  $c \in (1/2, 1)$ , 使得  $f(c) = c$ ;

(2) 存在一点  $d \in (0, c)$ , 使得  $f'(d) = 1$ 。