

中山大学

2018 年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 254

科目名称: 数学分析

考试时间: 4 月 14 日 下午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 答题要写清题号, 不必抄题。

1. (20 分) 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right]^{\tan \left(\frac{\pi}{2} x \right)}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x^2} - 1}{x \sin 3x}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

2. (10 分) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \arcsin t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

3. (10 分) 当 a 为何值时? $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导, 并求 $f'(0)$, 此时 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续?

4. (10 分) 求函数 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的单调区间、凸凹区间与拐点。

5. (10 分) 证明无穷积分 $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 是条件收敛的。

6. (10 分) 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi, a > 0$ 所围图形的面积。

7. (10 分) 证明级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln \ln n}{n(\ln n)^2}$ 收敛。

8. (10 分) 证明函数列 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, n=1,2,\dots$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 每一点收敛到 $f(x)=0$, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 不一致收敛。

9. (10 分) 利用级数收敛的必要条件, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$ 。

10. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{4^n}$ 的收敛区域。

11. (10 分) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $(-\pi, \pi)$ 内 $f(x) = x$, 求 $f(x)$ 的付里叶级数展开式。

12. (10 分) 设 u, v 为 x, y 的隐函数, 它们由下列方程组所确定
$$\begin{cases} u^2 + v^2 - x^2 - y = 0 \\ u + v - x^2 + y = 0 \end{cases}$$
, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

13. (10 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ 的和.

14. (5 分) 计算积分: $I = \int_0^1 dx \int_x^1 x^2 e^{-y^2} dy$.

15. (5 分) 求第一型曲线积分 $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x = y$ 相交的圆周。