

Отчёт по лабораторной работе №4
Компьютерный практикум по
статистическому анализу данных

Линейная алгебра

Выполнила: Коннова Татьяна

Содержание

1	Цель работы	5
2	Выполнение лабораторной работы	6
2.1	Поэлементные операции над многомерными массивами	6
2.2	Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы	8
2.3	Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения . . .	10
2.4	Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение	13
2.5	Факторизация. Специальные матричные структуры	14
2.6	Общая линейная алгебра	21
2.7	Самостоятельная работа	22
3	Вывод	29
4	Список литературы. Библиография	30

Список иллюстраций

2.1	Поэлементные операции сложения и произведения элементов матрицы	7
2.2	Использование возможностей пакета Statistics для работы со средними значениями	8
2.3	Использование библиотеки LinearAlgebra для выполнения определённых операций	9
2.4	Использование библиотеки LinearAlgebra для выполнения определённых операций	10
2.5	Использование LinearAlgebra.norm(x)	11
2.6	Вычисление нормы для двумерной матрицы	12
2.7	Примеры матричного умножения, единичной матрицы и скалярного произведения	13
2.8	Решение систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$. . .	14
2.9	Пример вычисления LU-факторизации и определение составного типа факторизации для его хранения	15
2.10	Пример решения с использованием исходной матрицы и с использованием объекта факторизации	16
2.11	Пример вычисления QR-факторизации и определение составного типа факторизации для его хранения	16
2.12	Примеры собственной декомпозиции матрицы A	17
2.13	Примеры работы с матрицами большой размерности и специальной структуры	18
2.14	Пример добавления шума в симметричную матрицу	19
2.15	Пример явного объявления структуры матрицы	19
2.16	Использование пакета BenchmarkTools	20
2.17	Примеры работы с разреженными матрицами большой размерности	20
2.18	Решение системы линейных уравнений с рациональными элементами без преобразования в типы элементов с плавающей запятой	21
2.19	Решение задания “Произведение векторов”	22
2.20	Решение задания “Системы линейных уравнений”	23
2.21	Решение задания “Системы линейных уравнений”	24
2.22	Решение задания “Операции с матрицами”	25
2.23	Решение задания “Операции с матрицами”	25
2.24	Решение задания “Операции с матрицами”	26
2.25	Решение задания “Операции с матрицами”	26
2.26	Решение задания “Операции с матрицами”	27

2.27 Решение задания “Линейные модели экономики”	28
--	----

1 Цель работы

Основной целью работы является изучение возможностей специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Поэлементные операции над многомерными массивами

Для матрицы 4×3 рассмотрим поэлементные операции сложения и произведения её элементов (рис. 2.1):

Для матрицы 4×3 рассмотрим поэлементные операции сложения и произведения её элементов:

```
[1]: # Массив 4x3 со случайными целыми числами (от 1 до 20):  
a = rand(1:20,(4,3))
```

```
[1]: 4x3 Matrix{Int64}:  
 17  6 18  
 18 16 14  
  5 19 18  
  6  1  5
```

```
[2]: # Поэлементная сумма:  
sum(a)
```

```
[2]: 143
```

```
[3]: # Поэлементная сумма по столбцам:  
sum(a,dims=1)
```

```
[3]: 1x3 Matrix{Int64}:  
 46 42 55
```

```
[4]: # Поэлементная сумма по строкам:  
sum(a,dims=2)
```

```
[4]: 4x1 Matrix{Int64}:  
 41  
 48  
 42  
 12
```

```
[6]: # Поэлементное произведение:  
prod(a)
```

```
[6]: 379761177600
```

```
[7]: # Поэлементное произведение по столбцам:  
prod(a,dims=1)
```

```
[7]: 1x3 Matrix{Int64}:  
 9180 1824 22680
```

```
[8]: # Поэлементное произведение по строкам:  
prod(a,dims=2)
```

```
[8]: 4x1 Matrix{Int64}:  
 1836  
 4032  
 1710  
  30
```

Рис. 2.1: Поэлементные операции сложения и произведения элементов матрицы

Для работы со средними значениями можно воспользоваться возможностями пакета Statistics (рис. 2.2):

Для работы со средними значениями можно воспользоваться возможностями пакета Statistics:

```
[10]: # Подключение пакета Statistics:
      using Statistics

      # Вычисление среднего значения массива:
      mean(a)

[10]: 11.916666666666666

[11]: # Среднее по столбцам:
      mean(a,dims=1)

[11]: 1x3 Matrix{Float64}:
      11.5  10.5  13.75

[12]: # Среднее по строкам:
      mean(a,dims=2)

[12]: 4x1 Matrix{Float64}:
      13.666666666666666
      16.0
      14.0
      4.0
```

Рис. 2.2: Использование возможностей пакета Statistics для работы со средними значениями

2.2 Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

Для выполнения таких операций над матрицами, как транспонирование, диагонализация, определение следа, ранга, определителя матрицы и т.п. можно воспользоваться библиотекой (пакетом) LinearAlgebra (рис. 2.3 - рис. 2.4):

▼ 2. Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

```
[14]: # Подключение пакета LinearAlgebra:  
using LinearAlgebra  
  
# Массив 4x4 со случайными целыми числами (от 1 до 20):  
b = rand(1:20,(4,4))
```

```
[14]: 4x4 Matrix{Int64}:  
  2  20  16  4  
  4  11  10  3  
 10   3  14  6  
 19   8   5 14
```

```
[15]: # Транспонирование:  
transpose(b)
```

```
[15]: 4x4 transpose{::Matrix{Int64}} with eltype Int64:  
  2   4  10  19  
 20  11   3   8  
 16  10  14   5  
  4   3   6  14
```

```
[16]: # След матрицы (сумма диагональных элементов):  
tr(b)
```

```
[16]: 41
```

```
[17]: # Извлечение диагональных элементов как массив:  
diag(b)
```

```
[17]: 4-element Vector{Int64}:  
  2  
 11  
 14  
 14
```

Рис. 2.3: Использование библиотеки LinearAlgebra для выполнения определённых операций

```

[18]: # Ранг матрицы:
      rank(b)

[18]: 4

[19]: # Инверсия матрицы (определение обратной матрицы):
      inv(b)

[19]: 4x4 Matrix{Float64}:
      -0.342422  0.650064 -0.068699 -0.0120223
      -0.052383  0.203521 -0.0888793 0.00944611
      0.0517389 -0.0944611 0.0918849 -0.0339201
      0.47617   -0.964792 0.111207  0.0944611

[20]: # Определитель матрицы:
      det(b)

[20]: -4657.999999999995

[21]: # Псевдобратная функция для прямоугольных матриц:
      pinv(a)

[21]: 3x4 Matrix{Float64}:
      0.00319438  0.0652316 -0.0564106 0.00893
      -0.0643184  0.0614736 0.0222671 -0.0207411
      0.0684769  -0.0828166 0.0473269 0.0149927

```

Рис. 2.4: Использование библиотеки LinearAlgebra для выполнения определённых операций

2.3 Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

Для вычисления нормы используется `LinearAlgebra.norm(x)` (рис. 2.5):

3. Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

```
[22]: # Создание вектора X:  
X = [2, 4, -5]  
  
[22]: 3-element Vector{Int64}:  
      2  
      4  
     -5  
  
[23]: # Вычисление евклидовой нормы:  
norm(X)  
  
[23]: 6.708203932499369  
  
[24]: # Вычисление p-нормы:  
p = 1  
norm(X,p)  
  
[24]: 11.0  
  
[25]: # Расстояние между двумя векторами X и Y:  
X = [2, 4, -5];  
Y = [1, -1, 3];  
norm(X-Y)  
  
[25]: 9.486832980505138  
  
[26]: # Проверка по базовому определению:  
sqrt(sum((X-Y).^2))  
  
[26]: 9.486832980505138  
  
[27]: # Угол между двумя векторами:  
acos((transpose(X)*Y)/(norm(X)*norm(Y)))  
  
[27]: 2.4404307889469252
```

Рис. 2.5: Использование LinearAlgebra.norm(x)

Вычислим нормы для двумерной матрицы (рис. 2.6):

Вычисление нормы для двумерной матрицы:

```
[28]: # Создание матрицы:  
d = [5 -4 2 ; -1 2 3; -2 1 0]
```

```
[28]: 3x3 Matrix{Int64}:  
  5  -4  2  
 -1   2  3  
 -2   1  0
```

```
[29]: # Вычисление Евклидовой нормы:  
opnorm(d)
```

```
[29]: 7.147682841795258
```

```
[30]: # Вычисление p-нормы:  
p=1  
opnorm(d,p)
```

```
[30]: 8.0
```

```
[31]: # Поворот на 180 градусов:  
rot180(d)
```

```
[31]: 3x3 Matrix{Int64}:  
  0   1  -2  
  3   2  -1  
  2  -4   5
```

```
[32]: # Переворачивание строк:  
reverse(d,dims=1)
```

```
[32]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 -2   1  0  
 -1   2  3  
  5  -4  2
```

```
[33]: # Переворачивание столбцов  
reverse(d,dims=2)
```

```
[33]: 3x3 Matrix{Int64}:  
  2  -4   5  
  3   2  -1  
  0   1  -2
```

Рис. 2.6: Вычисление нормы для двумерной матрицы

2.4 Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение

Выполним примеры матричного умножения, единичной матрицы и скалярного произведения (рис. 2.7):

4. Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение

```
[34]: # Матрица 2x3 со случайными целыми значениями от 1 до 10:  
A = rand(1:10,(2,3))
```

```
[34]: 2x3 Matrix{Int64}:  
 2  1  1  
 8  7 10
```

```
[35]: # Матрица 3x4 со случайными целыми значениями от 1 до 10:  
B = rand(1:10,(3,4))
```

```
[35]: 3x4 Matrix{Int64}:  
 3  4 10  8  
 2  6  3  9  
 1  1  2  2
```

```
[36]: # Произведение матриц A и B:  
A*B
```

```
[36]: 2x4 Matrix{Int64}:  
 9 15 25 27  
48 84 121 147
```

```
[37]: # Единичная матрица 3x3:  
Matrix{Int}(I, 3, 3)
```

```
[37]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 1  0  0  
 0  1  0  
 0  0  1
```

```
[38]: # Скалярное произведение векторов X и Y:  
X = [2, 4, -5]  
Y = [1, -1, 3]  
dot(X,Y)
```

```
[38]: -17
```

```
[39]: # тоже скалярное произведение:  
X'*Y
```

```
[39]: -17
```

Рис. 2.7: Примеры матричного умножения, единичной матрицы и скалярного произведения

2.5 Факторизация. Специальные матричные структуры

Рассмотрим несколько примеров. Для работы со специальными матричными структурами потребуется пакет LinearAlgebra.

Решение систем линейный алгебраических уравнений $Ax = b$ (рис. 2.8):

5. Факторизация. Специальные матричные структуры

```
[40]: # Задаём квадратную матрицу 3x3 со случайными значениями:
      A = rand(3, 3)

[40]: 3x3 Matrix{Float64}:
      0.882431  0.943103  0.605134
      0.640795  0.0451344 0.635614
      0.690356  0.246666  0.592887

[41]: # Задаём единичный вектор:
      x = fill(1.0, 3)

[41]: 3-element Vector{Float64}:
      1.0
      1.0
      1.0

[42]: # Задаём вектор b:
      b = A*x

[42]: 3-element Vector{Float64}:
      2.430669297689036
      1.3215433484125134
      1.5299083315262747

[43]: # Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
      # (убеждаемся, что x - единичный вектор):
      A\b

[43]: 3-element Vector{Float64}:
      1.0000000000000069
      0.9999999999999984
      0.9999999999999929
```

Рис. 2.8: Решение систем линейный алгебраических уравнений $Ax = b$

Julia позволяет вычислять LU-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения (рис. 2.9):

Julia позволяет вычислять LU-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения:

```
[44]: # LU-факторизация:
      Alu = lu(A)

[44]: LU{Float64, Matrix{Float64}, Vector{Int64}}
      L factor:
      3×3 Matrix{Float64}:
      1.0      0.0      0.0
      0.726169 1.0      0.0
      0.782334 0.767769 1.0
      U factor:
      3×3 Matrix{Float64}:
      0.882431 0.943103 0.605134
      0.0      -0.639719 0.196184
      0.0      0.0      -0.0311543

[45]: # Матрица перестановок:
      Alu.P

[45]: 3×3 Matrix{Float64}:
      1.0  0.0  0.0
      0.0  1.0  0.0
      0.0  0.0  1.0

[46]: # Вектор перестановок:
      Alu.p

[46]: 3-element Vector{Int64}:
      1
      2
      3

[47]: # Матрица L:
      Alu.L

[47]: 3×3 Matrix{Float64}:
      1.0      0.0      0.0
      0.726169 1.0      0.0
      0.782334 0.767769 1.0

[48]: # Матрица U:
      Alu.U

[48]: 3×3 Matrix{Float64}:
      0.882431 0.943103 0.605134
      0.0      -0.639719 0.196184
      0.0      0.0      -0.0311543
```

Рис. 2.9: Пример вычисления LU-факторизации и определение составного типа факторизации для его хранения

Исходная система уравнений $Ax = b$ может быть решена или с использованием исходной матрицы, или с использованием объекта факторизации (рис. 2.10):

Исходная система уравнений $Ax = b$ может быть решена или с использованием исходной матрицы, или с использованием объекта факторизации:

```
[49]: # Решение СЛАУ через матрицу A:
      A\b

[49]: 3-element Vector{Float64}:
      1.0000000000000009
      0.9999999999999984
      0.9999999999999929

[50]: # Решение СЛАУ через объект факторизации:
      A\b

[50]: 3-element Vector{Float64}:
      1.0000000000000009
      0.9999999999999984
      0.9999999999999929

[51]: # Детерминант матрицы A:
      det(A)

[51]: 0.017586842847094095

[52]: # Детерминант матрицы A через объект факторизации:
      det(A\b)

[52]: 0.017586842847094095
```

Рис. 2.10: Пример решения с использованием исходной матрицы и с использованием объекта факторизации

Julia позволяет вычислять QR-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения (рис. 2.11):

Julia позволяет вычислять QR-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения:

```
[53]: # QR-факторизация:
      Aqr = qr(A)

[53]: LinearAlgebra.QRCompactWY{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
      Q factor: 3x3 LinearAlgebra.QRCompactWY{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
      R factor:
      3x3 Matrix{Float64}:
      -1.2907 -0.79913 -1.04641
      0.0 0.560104 -0.161714
      0.0 0.0 -0.0243274

[54]: # Матрица Q:
      Aqr.Q

[54]: 3x3 LinearAlgebra.QRCompactWY{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}

[55]: # Матрица R:
      Aqr.R

[55]: 3x3 Matrix{Float64}:
      -1.2907 -0.79913 -1.04641
      0.0 0.560104 -0.161714
      0.0 0.0 -0.0243274

[56]: # Проверка, что матрица Q - ортогональная:
      Aqr.Q' * Aqr.Q

[56]: 3x3 Matrix{Float64}:
      1.0 0.0 -5.55112e-17
      1.66533e-16 1.0 0.0
      0.0 2.22045e-16 1.0
```

Рис. 2.11: Пример вычисления QR-факторизации и определение составного типа факторизации для его хранения

Примеры собственной декомпозиции матрицы A (рис. 2.12):

Примеры собственной декомпозиции матрицы A:

```
[57]: # Симметризация матрицы A:
      Asym = A + A'

[57]: 3x3 Matrix{Float64}:
      1.76486  1.5839   1.29549
      1.5839   0.0902688  0.88228
      1.29549  0.88228   1.18577

[58]: # Спектральное разложение симметризованной матрицы:
      AsymEig = eigen(Asym)

[58]: Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
      values:
      3-element Vector{Float64}:
      -0.8695583384409882
      0.21485179692981338
      3.6956119617767946
      vectors:
      3x3 Matrix{Float64}:
      0.491179  -0.488132  -0.721436
      -0.868753  -0.214306  -0.446476
      0.0633308  0.84605   -0.529329

[59]: # Собственные значения:
      AsymEig.values

[59]: 3-element Vector{Float64}:
      -0.8695583384409882
      0.21485179692981338
      3.6956119617767946

[60]: # Собственные векторы:
      AsymEig.vectors

[60]: 3x3 Matrix{Float64}:
      0.491179  -0.488132  -0.721436
      -0.868753  -0.214306  -0.446476
      0.0633308  0.84605   -0.529329

[61]: # Проверяем, что получится единичная матрица:
      inv(AsymEig)*Asym

[61]: 3x3 Matrix{Float64}:
      1.0      -1.9984e-15  -3.10862e-15
      -9.99201e-16  1.0      -1.55431e-15
      4.44089e-15   3.10862e-15  1.0
```

Рис. 2.12: Примеры собственной декомпозиции матрицы A

Далее рассмотрим примеры работы с матрицами большой размерности и специальной структуры (рис. 2.13):

Далее рассмотрим примеры работы с матрицами большой размерности и специальной структуры:

```
[62]: # Матрица 1000 x 1000:
n = 1000
A = randn(n,n)

[62]: 1000x1000 Matrix{Float64}:
 0.189086 -1.53028  0.486299 - 0.758935 -1.11152 -1.37552
-0.61427  0.649888 -0.172458  1.68446  0.8061 -1.04439
 0.845243  1.60924 -0.337591 -0.323535 -0.338181 -0.0884662
 0.252898  0.162762  1.86293  0.50689 -1.07474  1.01221
-0.4357 -0.433722  0.0688926  0.32438  1.3684  0.882943
-1.27788  3.0514 -1.37049 -1.91543  0.137764  0.659376
 0.617412  0.858475  1.93548  0.731247  0.985046  1.90142
 0.809633  0.0857144 -1.23836 -0.119184  0.276476 -0.605794
-2.35817 -1.53724  0.324926  0.0551818 -1.11042 -0.51897
 0.169373 -1.37595  0.121443 -0.897302  0.111827  1.53789
-0.268557 -1.9483  0.703303 -0.844949 -0.105929 -0.973703
-1.14989 -0.4618  1.00879 -1.73328 -0.0458121  0.732366
 1.05188  1.43149  1.16767 -0.430053 -1.23154 -1.30803
 ⋮
 1.85675 -0.692866  1.04126 -0.296344 -1.00001  0.214219
-1.97448  1.2969  0.822812  1.17699 -1.12317  0.702147
-1.12883 -0.170724 -1.36066 -0.855854  0.410456  1.17483
-0.0146883  0.366683  0.253385  0.809336  1.68599 -0.0144126
 0.481541 -1.37168 -1.85985  1.36922 -0.769374  0.431689
-0.00427183 -1.00815  0.547827  0.548881 -0.158676 -1.459
 0.00476204 -1.34654 -0.583644 -1.21564 -1.00342 -1.09884
-0.958769  1.04103  0.743432 -1.23923  0.52895  0.036475
 0.378971  0.674633 -0.542285 -1.10648 -0.242543  0.36251
 0.234844  0.382717 -0.0809377 -0.909557 -0.434977  0.258415
 0.20623 -0.773274  0.971406  2.22529  0.714398 -0.825674
 0.145106  1.97052  1.15124 -0.568779 -1.11365  1.33837

[63]: # Симметризация матрицы:
Asym = A + A'

[63]: 1000x1000 Matrix{Float64}:
 0.378171 -2.14455  1.33154 - 0.524091 -0.905286 -1.23041
-2.14455  1.29978  1.43678  2.06718  0.0328261  0.92613
 1.33154  1.43678 -0.675183 -0.404472  0.633225  1.06277
 1.03899 -0.316458  1.37217 -0.931503 -1.68343 -0.222548
 0.797724  0.288688 -0.00214946  0.609433  2.01135  0.372868
-2.44661  1.72085  0.105528 -2.37402  0.247145  1.3086
-0.608267 -0.0960106  2.9525 -0.70481  0.245804  2.73805
 2.1318 -1.00553 -2.30285  0.978318 -0.347693 -1.17926
-1.81651 -2.6546 -1.11806  0.585098 -0.469279  0.184027
 3.31587 -0.652932 -0.179783 -0.167379 -0.513926  0.147241
 0.651795 -2.31253  2.20225 -0.661855 -2.516  0.863578
-3.80064 -0.106805  0.760797 -1.48799  0.210751  1.2835
 1.1911  1.73589  1.11657  0.779074 -0.269166 -1.24056
 ⋮
-0.432956 -0.99338  1.22839  1.01865 -1.89691 -0.172508
-2.70779 -0.13743  1.24084  0.637531 -1.12259  1.66219
-2.89039  0.447319 -0.982212 -0.537538  0.140869  1.45391
-0.406158  1.4372 -0.212816  2.51235  1.62976  0.579377
-0.820229 -0.0172196 -1.17387  2.54116 -1.03185  0.969346
 0.364596  1.69348  0.268008  0.661939 -1.9942 -2.66392
 1.19641 -0.911753  0.176437 -0.533748 -2.92098 -0.707762
 0.217823 -1.22359  0.666128 -0.0614431 -0.618577 -1.63402
 0.0385428 -0.150121 -0.37511 -0.975737  1.05767  0.0268845
 0.524091  2.06718 -0.404472 -1.81911  1.79032 -0.310364
-0.905286  0.0328261  0.633225  1.79032  1.4288 -1.93932
-1.23041  0.92613  1.06277 -0.310364 -1.93932  2.67675

[64]: # Проверка, является ли матрица симметричной:
issymmetric(Asym)

[64]: true
```

Рис. 2.13: Примеры работы с матрицами большой размерности и специальной структуры

Пример добавления шума в симметричную матрицу (матрица уже не будет симметричной) (рис. 2.14):

Пример добавления шума в симметричную матрицу (матрица уже не будет симметричной):

```
[66]: # Добавление шума:
      Asym_noisy = copy(Asym)
      Asym_noisy[1,2] += 5eps()

[66]: -2.1445519133285655

[67]: # Проверка, является ли матрица симметричной:
      issymmetric(Asym_noisy)

[67]: false
```

Рис. 2.14: Пример добавления шума в симметричную матрицу

В Julia можно объявить структуру матрица явно, например, используя Diagonal, Triangular, Symmetric, Hermitian, Tridiagonal и SymTridiagonal (рис. 2.15):

▼ В Julia можно объявить структуру матрица явно, например, используя Diagonal, Triangular, Symmetric, Hermitian, Tridiagonal и SymTridiagonal:

```
[68]: # Явно указываем, что матрица является симметричной:
      Asym_explicit = Symmetric(Asym_noisy)

[68]: 1000x1000 Symmetric{Float64, Matrix{Float64}}:
      0.378171 -2.14455 1.33154 ... 0.524091 -0.905286 -1.23041
      -2.14455 1.29978 1.43678 2.06718 0.0328261 0.92613
      1.33154 1.43678 -0.675183 -0.404472 0.633225 1.06277
      1.03899 -0.316458 1.37217 -0.931503 -1.68343 -0.222548
      -0.797724 0.288688 -0.00214946 0.609433 2.01135 0.372868
      -2.44661 1.72085 0.105528 -2.37402 0.247145 1.3086
      -0.608267 -0.0960106 2.9525 -0.70481 0.245804 2.73805
      2.1318 -1.00553 -2.30285 0.978318 -0.347693 -1.17926
      -1.81651 -2.6546 -1.11806 0.585098 -0.469279 0.184027
      3.31587 -0.652932 -0.179783 -0.167379 -0.513926 0.147241
      0.651795 -2.31253 2.20225 -0.661855 -2.516 0.863578
      -3.80064 -0.106805 0.760797 -1.48799 0.210751 1.2835
      1.1911 1.73589 1.11657 0.779074 -0.269166 -1.24056
      ⋮
      -0.432956 -0.99338 1.22839 1.01865 -1.89691 -0.172508
      -2.70779 -0.13743 1.24084 0.637531 -1.12259 1.66219
      -2.89039 0.447319 -0.982212 -0.537538 0.140869 1.45391
      -0.406158 1.4372 -0.212816 2.51235 1.62976 0.579377
      -0.820229 -0.0172196 -1.17387 2.54116 -1.03185 0.969346
      0.364596 1.69348 0.268008 0.661939 -1.9942 -2.66392
      1.19641 -0.911753 0.176437 -0.533748 -2.92098 -0.707762
      0.217823 -1.22359 0.666128 -0.0614431 -0.618577 -1.63402
      0.0385428 -0.150121 -0.37511 -0.975737 1.05767 0.0268845
      0.524091 2.06718 -0.404472 -1.81911 1.79032 -0.310364
      -0.905286 0.0328261 0.633225 1.79032 1.4288 -1.93932
      -1.23041 0.92613 1.06277 -0.310364 -1.93932 2.67675
```

Рис. 2.15: Пример явного объявления структуры матрицы

Далее для оценки эффективности выполнения операций над матрицами большой размерности и специальной структуры воспользуемся пакетом BenchmarkTools (рис. 2.16):

```

[2]: using BenchmarkTools
      # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений симметризованной матрицы:
      @btime eigvals(Asym);

      76.595 ms (11 allocations: 7.99 MiB)

[10]: # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений зашумленной матрицы:
      @btime eigvals(Asym_noisy);

      632.210 ms (14 allocations: 7.93 MiB)

[19]: # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений зашумленной матрицы,
      # для которой явно указано, что она симметричная:
      @btime eigvals(Asym_explicit);

      76.560 ms (11 allocations: 7.99 MiB)

```

Использование типов `Tridiagonal` и `SymTridiagonal` для хранения трёхдиагональных матриц позволяет работать с потенциально очень большими трёхдиагональными матрицами (рис. 2.17):

[illegible]

Рис. 2.17: Примеры работы с разреженными матрицами большой размерности

2.6 Общая линейная алгебра

В примере показано, как можно решить систему линейных уравнений с рациональными элементами без преобразования в типы элементов с плавающей запятой (для избежания проблемы с переполнением используем BigInt) (рис. 2.18):

```
6. Общая линейная алгебра

[81]: # Матрица с рациональными элементами:
Arational = Matrix{Rational{BigInt}}(rand(1:10, 3, 3))/10

[81]: 3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 3//5  7//10  7//10
 7//10  9//10  1
 2//5  7//10  3//10

[83]: # Единичный вектор:
x = fill(1, 3)

[83]: 3-element Vector{Int64}:
 1
 1
 1

[84]: # Задаём вектор b:
b = Arational*x

[84]: 3-element Vector{Rational{BigInt}}:
 2
 13//5
 7//5

[85]: # Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
# (убеждаемся, что x - единичный вектор):
Arational\b

[85]: 3-element Vector{Rational{BigInt}}:
 1
 1
 1

[86]: # LU-разложение:
lu(Arational)

[86]: LU{Rational{BigInt}, Matrix{Rational{BigInt}}, Vector{Int64}}
L factor:
3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 1      0      0
 4//7    1      0
 6//7  -5//13    1
U factor:
3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 7//10  9//10  1
 0      13//70 -19//70
 0      0      -17//65
```

Рис. 2.18: Решение системы линейных уравнений с рациональными элементами без преобразования в типы элементов с плавающей запятой

2.7 Самостоятельная работа

Выполнение задания “Произведение векторов” (рис. 2.19):

▼ Произведение векторов

1) Задайте вектор v . Умножьте вектор v скалярно сам на себя и сохраните результат в dot_v :

```
[93]: using LinearAlgebra  
  
# Задаем вектор v  
v = [1, 2, 3]  
  
# Скалярное произведение  
dot_v = dot(v, v)
```

[93]: 14

2) Умножьте v матрично на себя (внешнее произведение), присвоив результат переменной $outer_v$:

```
[94]: # Матричное (внешнее) произведение  
outer_v = v * v'
```

```
[94]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 1  2  3  
 2  4  6  
 3  6  9
```

Рис. 2.19: Решение задания “Произведение векторов”

Выполнение задания “Системы линейных уравнений” (рис. 2.20 - рис. 2.21):

Системы линейных уравнений

1) Решить СЛАУ с двумя неизвестными:

```
[95]: using LinearAlgebra

# Система a
A1 = [1 1; 1 -1]
b1 = [2; 3]
x1 = A1 \ b1
println("Система a: x = $x1")

# Система b
A2 = [1 1; 2 2]
b2 = [2; 4]
try
    x2 = A2 \ b2
    println("Система b: x = $x2")
catch e
    println("Система b: Нет решения (линейно зависимая система)")
end

# Система c
A3 = [1 1; 2 2]
b3 = [2; 5]
try
    x3 = A3 \ b3
    println("Система c: x = $x3")
catch e
    println("Система c: Нет решения (несовместная система)")
end

# Система d
A4 = [1 1; 2 2; 3 3]
b4 = [1; 2; 3]
try
    x4 = A4 \ b4
    println("Система d: x = $x4")
catch e
    println("Система d: Нет решения (линейно зависимая система)")
end

# Система e
A5 = [1 1; 2 1; 1 -1]
b5 = [2; 1; 3]
try
    x5 = A5 \ b5
    println("Система e: x = $x5")
catch e
    println("Система e: Нет решения (несовместная система)")
end

# Система f
A6 = [1 1; 2 1; 3 2]
b6 = [2; 1; 3]
try
    x6 = A6 \ b6
    println("Система f: x = $x6")
catch e
    println("Система f: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)")
end

Система a: x = [2.5, -0.5]
Система b: Нет решения (линейно зависимая система)
Система c: Нет решения (несовместная система)
Система d: x = [0.4999999999999999, 0.5]
Система e: x = [1.5000000000000004, -0.9999999999999997]
Система f: x = [-0.9999999999999999, 2.9999999999999998]
```

Рис. 2.20: Решение задания “Системы линейных уравнений”

2) Решить СЛАУ с тремя неизвестными:

```
[96]: using LinearAlgebra

# Система a
A1 = [1 1 1; 1 -1 -2]
b1 = [2; 3]
try
    x1 = A1 \ b1
    println("Система a: x = $x1")
catch e
    println("Система a: Нет решения (недостаточно уравнений для определения решения)")
end

# Система b
A2 = [1 1 1; 2 2 -3; 3 1 1]
b2 = [2; 4; 1]
try
    x2 = A2 \ b2
    println("Система b: x = $x2")
catch e
    println("Система b: Нет решения")
end

# Система c
A3 = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
b3 = [1; 0; 1]
try
    x3 = A3 \ b3
    println("Система c: x = $x3")
catch e
    println("Система c: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)")
end

# Система d
A4 = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
b4 = [1; 0; 0]
try
    x4 = A4 \ b4
    println("Система d: x = $x4")
catch e
    println("Система d: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)")
end

Система a: x = [2.2142857142857144, 0.35714285714285704, -0.5714285714285712]
Система b: x = [-0.5, 2.5, 0.0]
Система c: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)
Система d: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)
```

Рис. 2.21: Решение задания “Системы линейных уравнений”

Выполнение задания “Операции с матрицами” (рис. 2.22 - рис. 2.26):

Операции с матрицами

1) Приведите приведённые ниже матрицы к диагональному виду:

```
[100]: # a)

A = [1 -2; -2 1]

eigen_A = eigen(A) # Собственные значения и векторы
diag_matrix = Diagonal(eigen_A.values) # Диагональная матрица
```

```
[100]: 2x2 Diagonal{Float64, Vector{Float64}}:
-1.0  .
.    3.0
```

```
[98]: # b)

B = [1 -2; -2 3]

eigen_B = eigen(B) # Собственные значения и векторы
diag_matrix = Diagonal(eigen_B.values) # Диагональная матрица
```

```
[98]: 2x2 Diagonal{Float64, Vector{Float64}}:
-0.236068  .
.          4.23607
```

```
[99]: # c)

C = [1 -2 0; -2 1 2; 0 2 0]

eigen_C = eigen(C) # Собственные значения и векторы
diag_matrix = Diagonal(eigen_C.values) # Диагональная матрица
```

```
[99]: 3x3 Diagonal{Float64, Vector{Float64}}:
-2.14134  .  .
.         0.515138  .
.         .         3.6262
```

Рис. 2.22: Решение задания “Операции с матрицами”

2) Вычислите:

```
[109]: # Исходная матрица (a)
A = [1 -2;
     -2 1]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
P = eigen_decomp.vectors # Матрица собственных векторов
D = Diagonal(eigen_decomp.values) # Диагональная матрица собственных значений

# Возведём диагональную матрицу в 10-ю степень
D_10 = D.^10

# Вычисляем A^10
A_10 = P * D_10 * inv(P)

println("Матрица A^10:")
println(A_10)
```

```
Матрица A^10:
[29525.0 -29524.0; -29524.0 29525.0]
```

Рис. 2.23: Решение задания “Операции с матрицами”

```
[108]: # Исходная матрица (b)
A = [5 -2;
      -2 5]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

# Проверяем, что собственные значения неотрицательные
if all(eigenvalues .>= 0)
    # Диагональная матрица с квадратными корнями собственных значений
    sqrt_D = Diagonal(sqrt.(eigenvalues))

    # Квадратный корень матрицы
    sqrt_A = eigenvectors * sqrt_D * inv(eigenvectors)

    println("Исходная матрица A:")
    println(A)

    println("\nКвадратный корень матрицы sqrt(A):")
    println(sqrt_A)

    # Проверка, что sqrt(A)^2 = A
    println("\nПроверка: sqrt(A)^2:")
    println(sqrt_A * sqrt_A)
else
    println("Матрица A имеет отрицательные собственные значения, квадратный корень не определён.")
end

Исходная матрица A:
[5 -2; -2 5]

Квадратный корень матрицы sqrt(A):
[2.188901059316734 -0.45685025174785676; -0.45685025174785676 2.188901059316734]

Проверка: sqrt(A)^2:
[5.000000000000002 -2.000000000000001; -2.000000000000001 5.000000000000002]
```

Рис. 2.24: Решение задания “Операции с матрицами”

```
[107]: # Исходная матрица (c)
A = [1 -2;
      -2 1]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

# Преобразуем собственные значения в комплексные для вычисления кубического корня
complex_eigenvalues = Complex.(eigenvalues)
cube_root_D = Diagonal(complex_eigenvalues .^ (1/3))

# Кубический корень матрицы
cube_root_A = eigenvectors * cube_root_D * inv(eigenvectors)

println("Исходная матрица A:")
println(A)

println("\nКубический корень матрицы 3√(A):")
println(cube_root_A)

# Проверка: (3√(A))^3 = A
println("\nПроверка: (3√(A))^3:")
println(cube_root_A * cube_root_A * cube_root_A)

Исходная матрица A:
[1 -2; -2 1]

Кубический корень матрицы 3√(A):
ComplexF64[0.971124785153704 + 0.4330127018922193im -0.47112478515370404 + 0.4330127018922193im; -0.47112478515370404 + 0.4330127018922193im 0.971124785153704 + 0.4330127018922193im]

Проверка: (3√(A))^3:
ComplexF64[0.9999999999999991 + 0.0im -1.9999999999999991 + 5.551115123125783e-17im; -1.9999999999999991 + 5.551115123125783e-17im 0.9999999999999991 + 0.0im]
```

Рис. 2.25: Решение задания “Операции с матрицами”

3) Найдите собственные значения матрицы A . Создайте диагональную матрицу из собственных значений матрицы A . Создайте нижнедиагональную матрицу из матрицы A . Оцените эффективность выполняемых операций:

```
[110]: # Исходная матрица A
A = [
    140  97  74 168 131;
    97 186  89 131  36;
    74  89 152 144  71;
    168 131 144  54 142;
    131  36  71 142  36
]

# 1. Нахождение собственных значений и векторов
@time eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

println("Собственные значения матрицы A:")
println(eigenvalues)

# 2. Создание диагональной матрицы из собственных значений
# Прямое создание переменной и вывод без использования @time
diag_matrix = Diagonal(eigenvalues)

println("\nДиагональная матрица из собственных значений:")
println(Matrix{typeof(diag_matrix)}) # Преобразуем в стандартный массив для вывода

# 3. Создание нижнедиагональной матрицы из A
lower_triangular = LowerTriangular(A)

println("\nНижнедиагональная матрица из A:")
println(Matrix{typeof(lower_triangular)})

# 4. Оценка эффективности
println("\nЭффективность выполнения операций:")
@time eigen(A)
@time Diagonal(eigenvalues)
@time LowerTriangular(A)

5.433 μs (11 allocations: 3.00 KiB)
Собственные значения матрицы A:
[-1.0, 3.0]

Диагональная матрица из собственных значений:
[-1.0 0.0; 0.0 3.0]

Нижнедиагональная матрица из A:
[140 0 0 0 0; 97 186 0 0 0; 74 89 152 0 0; 168 131 144 54 0; 131 36 71 142 36]

Эффективность выполнения операций:
5.383 μs (11 allocations: 3.00 KiB)
193.239 ns (1 allocation: 16 bytes)
177.997 ns (1 allocation: 16 bytes)
[110]: 5x5 LowerTriangular{Int64, Matrix{Int64}}:
140  -  -  -  -
97  186  -  -  -
74  89  152  -  -
168 131 144  54  -
131  36  71 142  36
```

Рис. 2.26: Решение задания “Операции с матрицами”

Выполнение задания “Линейные модели экономики” (рис. 2.27):

Линейные модели экономики

- 1) Матрица A называется продуктивной, если решение x системы при любой неотрицательной правой части y имеет только неотрицательные элементы x_i . Используя это определение, проверьте, являются ли матрицы продуктивными
- 2) Критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $(E - A)^{-1}$ являются неотрицательными числами. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными
- 3) Спектральный критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда только тогда, когда все её собственные значения по модулю меньше 1. Используют критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными

```
[112]: # Матрицы
A1 = [1 2; 3 4]
A2 = (1/2) * A1
A3 = (1/10) * A1
A4 = [0.1 0.2 0.3; 0 0.1 0.2; 0 0.1 0.3]

# Функция проверки через (E - A)^(-1)
function check_productivity_via_inverse(A)
    E = I(size(A, 1))
    B = E - A
    try
        B_inv = inv(B)
        all(B_inv .>= 0)
    catch
        false
    end
end

# Функция проверки спектрального критерия
function check_productivity_via_spectrum(A)
    eigenvalues = eigvals(A)
    all(abs.(eigenvalues) .< 1)
end

# Проверка продуктивности для всех матриц
matrices = [A1, A2, A3, A4]
for (i, A) in enumerate(matrices)
    println("Matrix A$i:")
    println(A)
    println("Via (E - A)^(-1): ", check_productivity_via_inverse(A))
    println("Via spectrum: ", check_productivity_via_spectrum(A))
    println("-"*38)
end

Matrix A1:
[1.0 2.0; 3.0 4.0]
Via (E - A)^(-1): false
Via spectrum: false
-----
Matrix A2:
[0.5 1.0; 1.5 2.0]
Via (E - A)^(-1): false
Via spectrum: false
-----
Matrix A3:
[0.1 0.2; 0.30000000000000004 0.4]
Via (E - A)^(-1): true
Via spectrum: true
-----
Matrix A4:
[0.1 0.2 0.3; 0.0 0.1 0.2; 0.0 0.1 0.3]
Via (E - A)^(-1): true
Via spectrum: true
-----
```

Рис. 2.27: Решение задания “Линейные модели экономики”

3 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены возможности специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.

4 Список литературы. Библиография

[1] Julia Documentation: <https://docs.julialang.org/en/v1/>