

Математическая модель «хищник–жертва»

Построение с помощью python

Коннова Татьяна Алексеевна

Содержание

1	Аннотация	4
2	Введение	5
3	Методы	6
4	Результаты	7
5	Выводы	12
	Список литературы	13

Список иллюстраций

4.1	Динамика численности популяций по времени	9
4.2	Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями	11

1 Аннотация

В данной работе рассматривается построение математической модели «хищник–жертва» с использованием языка программирования Python. Модель основана на системе дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры и визуализирована с помощью библиотек NumPy и Matplotlib. Исследуется динамика популяций хищников и жертв при различных начальных условиях.

2 Введение

Исследование динамики численности популяций хищников и жертв с течением времени, а также анализ зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с заданными начальными условиями. Проблема взаимодействия хищников и жертв впервые получила математическое описание в работах Альфреда Лотки (1925 г.) и Вито Вольтерры (1926 г.), которые независимо друг от друга разработали систему дифференциальных уравнений, известную сегодня как модель Лотки-Вольтерры. Эти исследования были вызваны необходимостью объяснения колебаний численности рыб в Средиземном море, наблюдавшихся итальянскими биологами после Первой мировой войны.

Модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа «хищник — жертва» называется также моделью Вольтерры — Лотки.

Была впервые получена Альфредом Лоткой в 1925 году (использовал для описания динамики взаимодействующих биологических популяций).

В 1926 году (независимо от Лотки) аналогичные (и более сложные) модели были разработаны итальянским математиком Вито Вольтеррой. Его глубокие исследования в области экологических проблем создали основу математической теории биологических сообществ (математической экологии). Модель Лотки-Вольтерры описывает взаимодействие двух видов в экосистеме [1], [2]:

- **Жертвы:** размножаются с постоянной скоростью, но их численность ограничивается хищниками
- **Хищники:** вымирают без жертв, но увеличивают популяцию за счет поедания жертв

3 Методы

В данной работе используется классическая математическая модель хищник-жертва, основанная на системе дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры. Для описания динамики популяций жертв и хищников применяются две взаимосвязанные функции, отражающие скорость роста популяции жертв при отсутствии хищников и скорость убыли популяции хищников при отсутствии пищи. Модель включает параметры, характеризующие коэффициенты рождаемости, смертности и интенсивность взаимодействия между видами. Решение системы уравнений осуществляется численными методами, такими как метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, что позволяет исследовать поведение системы во времени при различных начальных условиях и параметрах. Анализ устойчивости равновесных точек проводится с помощью линейного приближения и вычисления собственных значений якобиана системы.

Основные уравнения модели [3], [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = cxy - dy, \end{cases}$$

a, d , - коэффициенты смертности b, c , - коэффициенты прироста популяции

4 Результаты

Код для построения графика динамики численности популяций по времени:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Параметры модели
a = 0.2    # коэффициент прироста жертв
b = 0.5    # коэффициент смертности жертв из-за хищников
c = 0.05   # коэффициент прироста хищников из-за жертв
d = 0.02   # коэффициент смертности хищников

# Сист. ур.
def model(populations, t):
    x, y = populations # x - популяция жертв, y - популяция хищников
    dxdt = -a * x + c * x * y # изменение популяции жертв
    dydt = -d * x * y + b * y  # изменение популяции хищников
    return [dxdt, dydt]

# Нач. условия
initial_conditions = [40, 9] # начальные значения (жертвы, хищники)
t = np.linspace(0, 100, 100) # временной интервал
```

```

# Решение дифф. ур.
solution = odeint(model, initial_conditions, t)

# Извлечение значений популяций
x_population = solution[:, 0] # популяция жертв
y_population = solution[:, 1] # популяция хищников

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, x_population, label='Популяция жертв (x)', color='green')
plt.plot(t, y_population, label='Популяция хищников (y)', color='red')
plt.xlabel('Время')
plt.ylabel('Численность')
plt.title('Динамика численности популяций по времени.')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```

Результат:

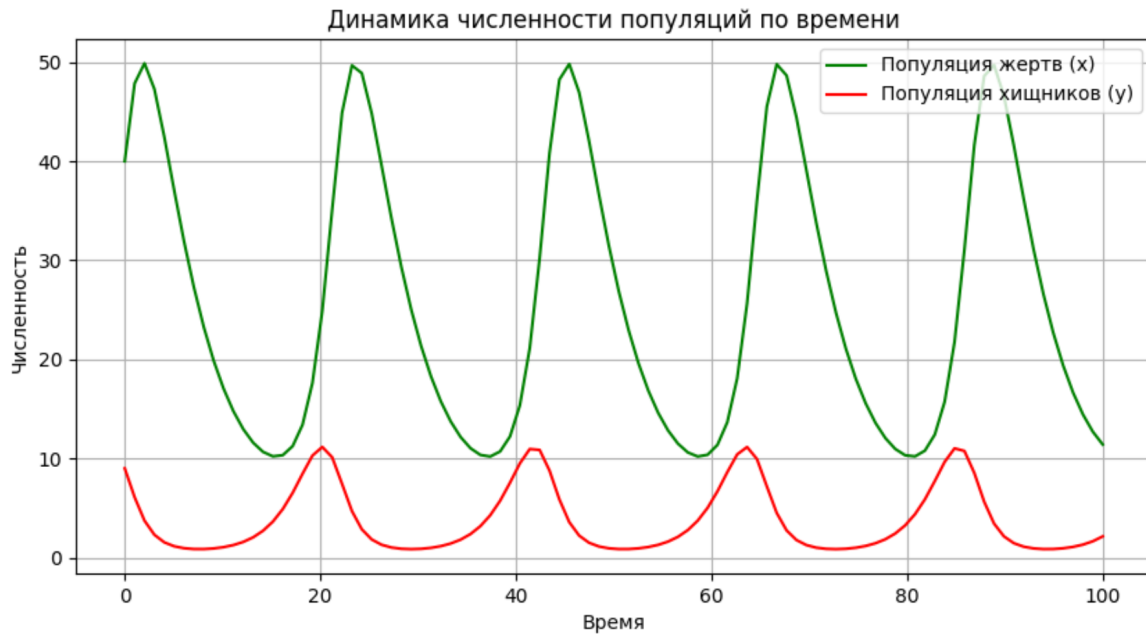


Рис. 4.1: Динамика численности популяций по времени

Далее построим с помощью python график, отражающий зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Параметры модели
a = 0.2 # коэффициент прироста жертв
b = 0.5 # коэффициент смертности жертв из-за хищников
c = 0.05 # коэффициент прироста хищников из-за жертв
d = 0.02 # коэффициент смертности хищников

# Система уравнений
def model(populations, t):
```

```

x, y = populations # x - популяция жертв, y - популяция хищников
dxdt = -a * x + c * x * y # изменение популяции жертв
dydt = -d * x * y + b * y # изменение популяции хищников
return [dxdt, dydt]

# Функция для построения графика
def plot_population_graph(initial_conditions, time_range):
    t = np.linspace(time_range[0], time_range[1], 1000) # временной интервал
    solution = odeint(model, initial_conditions, t)

    x_population = solution[:, 0] # популяция жертв
    y_population = solution[:, 1] # популяция хищников

    # Построение графика
    plt.figure()
    plt.plot(x_population, y_population, label='Зависимости изменения
численности', color='blue')
    plt.xlabel('Популяция жертв (x)')
    plt.ylabel('Популяция хищников (y)')
    plt.title('Зависимости изменения численности хищников
от изменения численности жертв с начальными значениями')
    plt.grid()
    plt.legend()
    plt.show()

# Начальные условия
initial_conditions = [10, 5] # начальные значения (жертвы, хищники)
time_range = (0, 400) # временной диапазон

```

```
# Вызов функции для построения графика
```

```
plot_population_graph(initial_conditions, time_range)
```

Результат:

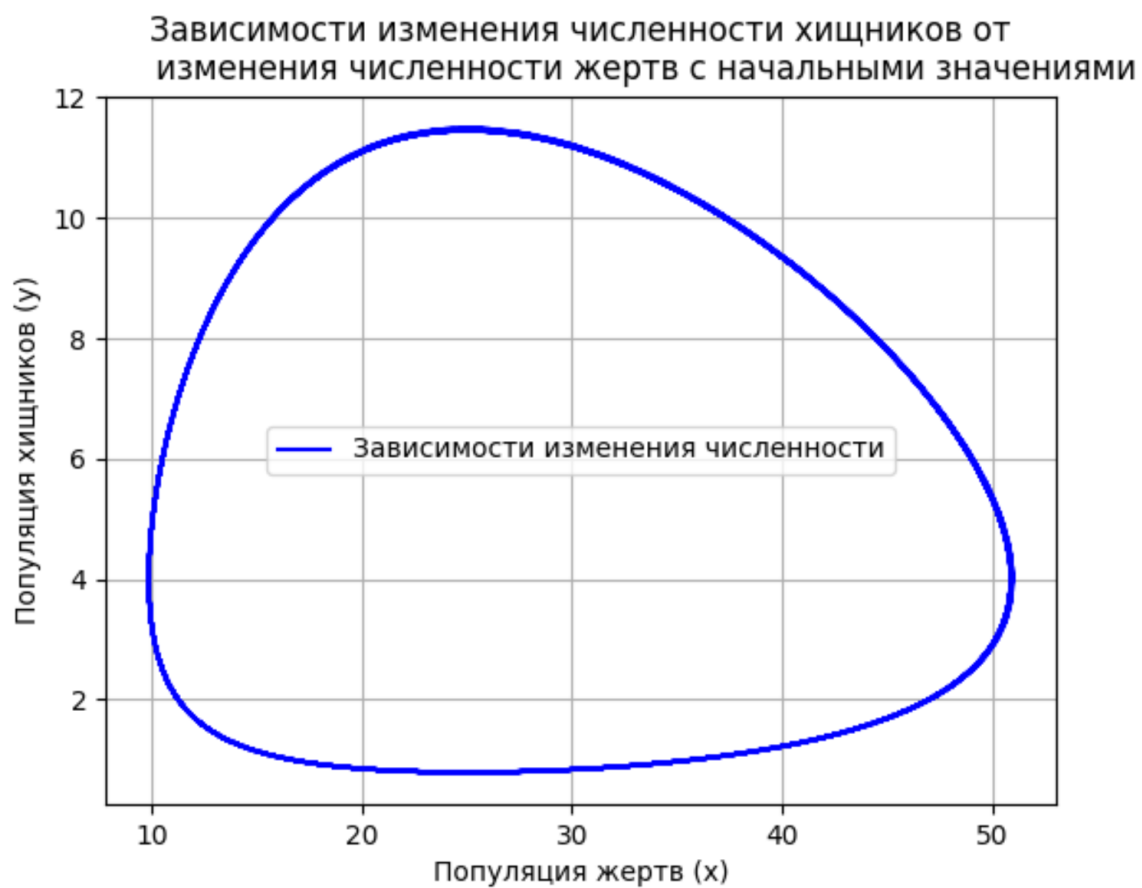


Рис. 4.2: Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной реализована модель “хищник-жертва” в python.

Список литературы

1. Гладких К.А. Математическая модель «ХИЩНИК - ЖЕРТВА». Забайкальский государственный университет, 2015. С. 172.
2. Гасратова (Корж) Н.А. и др. Математическая модель хищник-жертва на линейном ареале // Молодой Ученый. 2014. № 11. С. 1–10.
3. Калинина Е.А. Математическая Модель «Хищник-Жертва». Общество с ограниченной ответственностью «Аэтерна», 2015. С. 6–7.
4. Хамидов А.Н., Михайлов М.Д. Численное решение задачи типа «хищник-жертва» с учетом миграционных процессов. Закрытое акционерное общество Издательство «Красное знамя», 2022. С. 167–174.