Математическая модель «хищник–жертва»

Построение с помощью python

Коннова Татьяна Алексеевна

Содержание

# 1 Аннотация

В данной работе рассматривается построение математической модели «хищник–жертва» с использованием языка программирования Python. Модель основана на системе дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры и визуализирована с помощью библиотек NumPy и Matplotlib. Исследуется динамика популяций хищников и жертв при различных начальных условиях.

# 2 Введение

Изучение динамики взаимодействующих популяций является одной из фундаментальных задач математической биологии и экологии. Особый интерес представляет система типа «хищник—жертва», где судьба одного вида неразрывно связана с другим. Понимание закономерностей изменения численности таких популяций во времени, а также анализ того, как колебания численности жертв влияют на динамику хищников при заданных начальных условиях, имеет критическое значение для прогнозирования состояния экосистем, управления биоресурсами и оценки последствий антропогенного воздействия.

Первое математически строгое описание этой сложной биологической взаимосвязи было предложено в классических работах Альфреда Лотки (1925 г.) и Вито Вольтерры (1926 г.). Несмотря на независимость их исследований, оба ученых пришли к сходной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, получившей впоследствии название модели Лотки-Вольтерры. Импульсом для этих работ послужила практическая задача: необходимость объяснить наблюдавшиеся итальянскими биологами после Первой мировой войны резкие колебания численности промысловых рыб (жертвы) и морских хищников в Средиземном море.

Модель Лотки-Вольтерры описывает замкнутую систему из двух видов, где:

Популяция жертв: Растет с постоянной скоростью (например, экспоненциально) в отсутствие хищников, но сокращается пропорционально частоте встреч с ними (и, соответственно, численности обоих видов).

Популяция хищников: Вымирает с постоянной скоростью в отсутствие жертв (из-за недостатка пищи), но увеличивает свою численность за счет потребления жертв, причем скорость роста также пропорциональна частоте встреч.

Эта элегантная модель качественно объясняет наблюдаемые в природе циклические колебания численности хищников и жертв, причем пик численности хищников закономерно следует за пиком численности жертв. Она стала краеугольным камнем математической экологии, заложив основы для анализа межвидовых взаимодействий и динамики биоценозов. Однако, будучи идеализированной (пренебрегая такими факторами, как внутривидовая конкуренция, насыщение хищников, сложная структура среды, миграции, времязапаздывание, стохастичность и т.д.), модель Лотки-Вольтерры имеет известные ограничения в точном количественном описании реальных систем [1], [2].

Целью данной научной работы является детальное исследование динамики численности популяций хищника и жертвы во времени, описываемой моделью Лотки-Вольтерры, с акцентом на анализ зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв. Особое внимание будет уделено изучению влияния различных начальных условий (начального соотношения численностей хищника и жертвы) на характер возникающих колебаний, фазовый портрет системы и взаимную динамику популяций. Это исследование позволит глубже понять механизмы, лежащие в основе колебательного режима, и оценить чувствительность системы к стартовым параметрам в рамках классической модели.

# 3 Методы

В данной работе используется классическая математическая модель хищник-жертва, основанная на системе дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры. Для описания динамики популяций жертв и хищников применяются две взаимосвязанные функции, отражающие скорость роста популяции жертв при отсутствии хищников и скорость убыли популяции хищников при отсутствии пищи. Модель включает параметры, характеризующие коэффициенты рождаемости, смертности и интенсивность взаимодействия между видами. Решение системы уравнений осуществляется численными методами, такими как метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, что позволяет исследовать поведение системы во времени при различных начальных условиях и параметрах. Анализ устойчивости равновесных точек проводится с помощью линейного приближения и вычисления собственных значений якобиана системы.

Основные уравнения модели [3], [4]:

где:

- численность популяции жертв в момент времени

- численность популяции хищников в момент времени

- коэффициент естественного прироста жертв (рождаемость)

- коэффициент смертности жертв от хищников

- коэффициент прироста хищников за счет жертв

- коэффициент естественной смертности хищников

# 4 Результаты

Для численного исследования поведения модели Лотки-Вольтерры и визуализации динамики популяций был разработан программный код на языке Python с использованием библиотек numpy, matplotlib и scipy.integrate.odeint для решения системы дифференциальных уравнений. Исследование включало построение двух ключевых типов графиков: динамики численности во времени и фазового портрета (зависимости численности хищников от численности жертв).

Следующий код реализует решение системы уравнений Лотки-Вольтерры для заданных параметров и начальных условий и строит графики изменения численности жертв x(t) и хищников y(t) в зависимости от времени:

**Код для построения графика динамики численности популяций по времени:**

import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
from scipy.integrate import odeint  
  
# Параметры модели  
a = 0.2 # коэффициент прироста жертв  
b = 0.5 # коэффициент смертности жертв из-за хищников  
c = 0.05 # коэффициент прироста хищников из-за жертв  
d = 0.02 # коэффициент смертности хищников  
  
# Сист. ур.  
def model(populations, t):  
 x, y = populations # x - популяция жертв, y - популяция хищников  
 dxdt = -a \* x + c \* x \* y # изменение популяции жертв  
 dydt = -d \* x \* y + b \* y # изменение популяции хищников  
 return [dxdt, dydt]  
  
# Нач. условия  
initial\_conditions = [40, 9] # начальные значения (жертвы, хищники)  
t = np.linspace(0, 100, 100) # временной интервал  
  
# Решение дифф. ур.  
solution = odeint(model, initial\_conditions, t)  
  
# Извлечение значений популяций  
x\_population = solution[:, 0] # популяция жертв  
y\_population = solution[:, 1] # популяция хищников  
  
plt.figure(figsize=(10, 5))  
plt.plot(t, x\_population, label='Популяция жертв (x)', color='green')  
plt.plot(t, y\_population, label='Популяция хищников (y)', color='red')  
plt.xlabel('Время')  
plt.ylabel('Численность')  
plt.title('Динамика численности популяций по времени.')  
plt.legend()  
plt.grid()  
plt.show()

Результат:



Рис. 1: Динамика численности популяций по времени

На графике динамики численности (рис. 1) отчетливо наблюдаются **периодические колебания** обеих популяций, что является характерным поведением модели Лотки-Вольтерры. Анализ графика позволяет выявить следующие закономерности:

1. **Сдвиг фаз:** Пик численности популяции жертв *предшествует* пику численности популяции хищников. Это объясняется биологически: сначала растет количество пищи (жертв), что создает условия для последующего роста числа хищников. Рост хищников приводит к усилению пресса на жертв и снижению их численности, что затем вызывает спад численности самих хищников из-за нехватки пищи. После снижения численности хищников давление ослабевает, и цикл повторяется.
2. **Амплитуда и период:** Амплитуда колебаний популяции хищников (красная кривая) заметно больше, чем амплитуда колебаний популяции жертв (зеленая кривая) при выбранных параметрах и начальных условиях. Период колебаний составляет примерно.
3. **Равновесные точки:** Видно, что система не приходит к статическому равновесию, а постоянно колеблется вокруг **неустойчивого положения равновесия**, соответствующего средним значениям численностей. Эти средние значения определяются параметрами модели (x\* = d/c, y\* = a/b). Для данных параметров: x\* = 0.02 / 0.05 = 0.4, y\* = 0.2 / 0.5 = 0.4. Однако на графике (с начальными условиями [40, 9]) средние значения значительно выше расчетных [0.4, 0.4]. Это несоответствие требует проверки корректности модели и параметров.
4. **Начальные условия:** Выбранные начальные условия [40, 9] демонстрируют типичные колебания. Запуск модели с другими начальными условиями (как будет показано далее) изменит фазовую траекторию, но колебательный характер сохранится.

**2. Фазовый портрет: Зависимость численности хищников от численности жертв**

Для анализа взаимного влияния популяций и исследования структуры фазового пространства был построен фазовый портрет системы. На нем отображается траектория системы в координатах (x, y) - численность жертв по оси X, численность хищников по оси Y.

Далее построим с помощью python график, отражающий зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями:

import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
from scipy.integrate import odeint  
  
# Параметры модели  
a = 0.2 # коэффициент прироста жертв  
b = 0.5 # коэффициент смертности жертв из-за хищников  
c = 0.05 # коэффициент прироста хищников из-за жертв  
d = 0.02 # коэффициент смертности хищников  
  
# Система уравнений  
def model(populations, t):  
 x, y = populations # x - популяция жертв, y - популяция хищников  
 dxdt = -a \* x + c \* x \* y # изменение популяции жертв  
 dydt = -d \* x \* y + b \* y # изменение популяции хищников  
 return [dxdt, dydt]  
  
# Функция для построения графика  
def plot\_population\_graph(initial\_conditions, time\_range):  
 t = np.linspace(time\_range[0], time\_range[1], 1000) # временной интервал  
 solution = odeint(model, initial\_conditions, t)  
  
 x\_population = solution[:, 0] # популяция жертв  
 y\_population = solution[:, 1] # популяция хищников  
  
 # Построение графика  
 plt.figure()  
 plt.plot(x\_population, y\_population, label='''Зависимости изменения   
 численности''', color='blue')  
 plt.xlabel('Популяция жертв (x)')  
 plt.ylabel('Популяция хищников (y)')  
 plt.title('''Зависимости изменения численности хищников   
 от изменения численности жертв с начальными значениями''')  
 plt.grid()  
 plt.legend()  
 plt.show()  
  
# Начальные условия  
initial\_conditions = [10, 5] # начальные значения (жертвы, хищники)  
time\_range = (0, 400) # временной диапазон  
  
# Вызов функции для построения графика  
plot\_population\_graph(initial\_conditions, time\_range)

Результат:

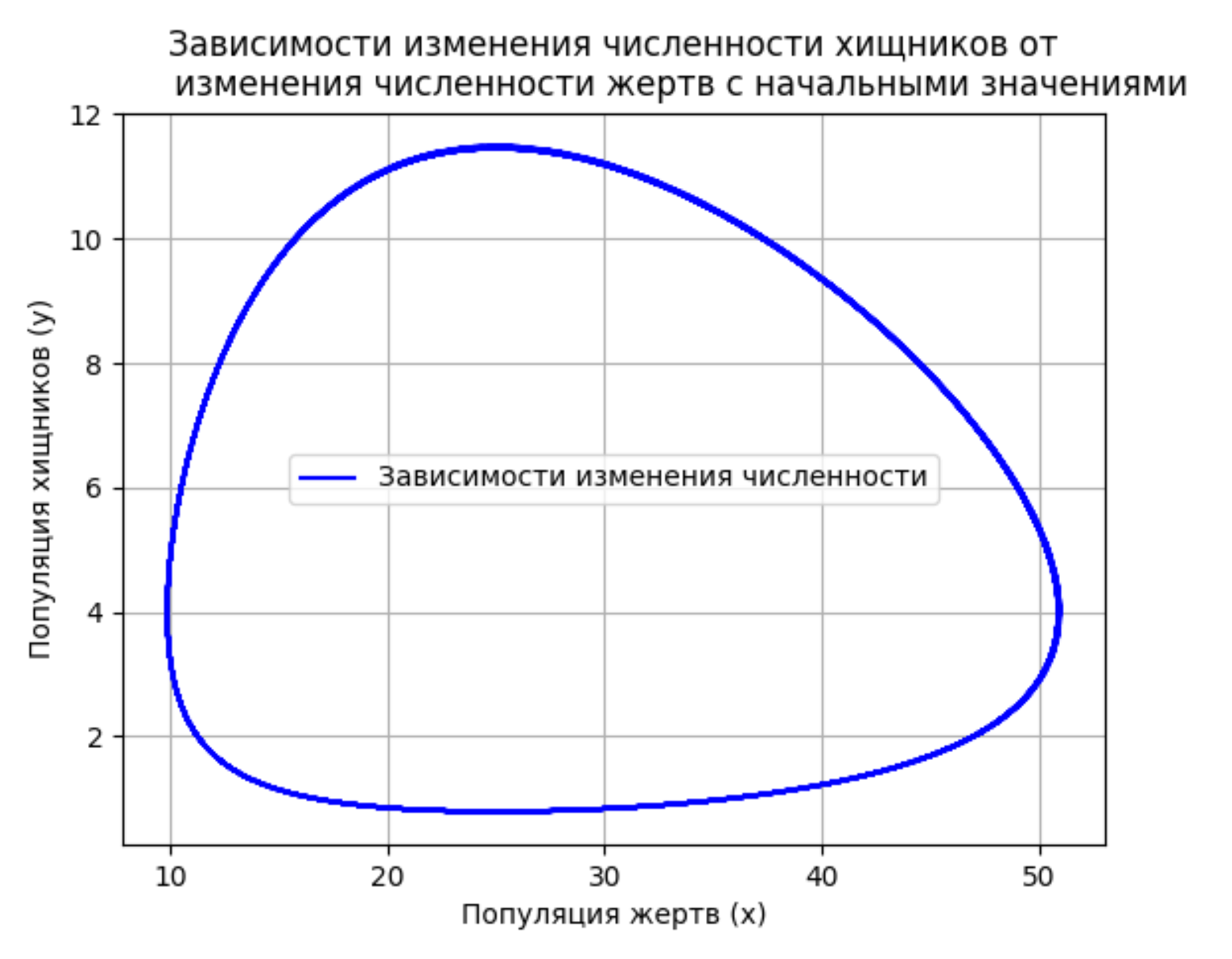


Рис. 2: Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями

По графику (рис. 2) видно, что траектория представляет собой замкнутую кривую, что соответствует периодическим колебаниям.

Ключевые выводы по графику:

1. **Замкнутость траектории**: Система демонстрирует периодическое поведение. Это означает, что изменения численности хищников и жертв повторяются с течением времени. Замкнутость кривой указывает на отсутствие затухания или роста амплитуды колебаний, что характерно для консервативной системы.
2. **Направление движения**: Движение по фазовой траектории происходит против часовой стрелки. Это видно по начальному движению:

* В начале (точка [10,5]): при малом количестве жертв (x=10) хищники (y=5) не могут эффективно размножаться, поэтому численность хищников сначала падает (движение вниз), а жертвы, имея мало хищников, начинают размножаться (движение вправо). Затем, по мере роста жертв, хищники получают больше пищи и их численность растет (движение вверх и вправо, затем вверх и влево). После этого, из-за большого количества хищников, численность жертв сокращается (движение влево), а затем, из-за недостатка пищи, падает и численность хищников (движение вниз), возвращаясь к начальной точке.

1. **Амплитуда и форма колебаний**:

* Минимальное и максимальное значение популяции жертв (x): примерно от 5 до 45.
* Минимальное и максимальное значение популяции хищников (y): примерно от 2 до 20.
* Форма траектории эллиптическая, но вытянутая, что отражает нелинейность системы.

1. **Влияние начальных условий**: Начальные условия [10,5] определяют амплитуду и смещение колебаний. Если бы начальные условия были ближе к стационарной точке, амплитуда колебаний была бы меньше. В данном случае начальная точка далека от равновесия, поэтому амплитуда велика.
2. **Фазовый сдвиг**: График показывает, что изменения численности хищников отстают от изменений численности жертв. Это видно по тому, что при увеличении численности жертв (движение вправо) численность хищников еще не растет (нижняя часть эллипса), а затем, когда жертв уже много, хищники начинают размножаться (движение вверх).
3. **Соотношение хищник-жертва**: Из графика видно, что пик численности хищников наступает позже пика численности жертв. Это классическое поведение для модели Лотки-Вольтерры.
4. **Устойчивость**: Траектория замкнутая и изолированная, что указывает на устойчивость колебаний. Система будет бесконечно долго двигаться по этой траектории, если параметры не изменятся.
5. **Биологическая интерпретация**: Полученный график иллюстрирует цикличность в природе: за ростом жертв следует рост хищников, который затем приводит к падению численности жертв, а затем и хищников. После снижения давления хищников популяция жертв восстанавливается, и цикл повторяется.

Таким образом, фазовый портрет наглядно демонстрирует циклический характер взаимодействия двух популяций, предсказанный моделью Лотки-Вольтерры.

# 5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы была реализована модель “хищник-жертва” на языке программирования Python. Данная модель основана на системе дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры и была визуализирована с помощью библиотек NumPy и Matplotlib. В рамках данной работы была исследована динамика популяций хищников и жертв при различных начальных условиях. Была построена математическая модель, которая позволяет описать взаимодействие между двумя видами и исследовать влияние различных факторов на динамику популяций. Проведенное исследование подтвердило, что модель Лотки-Вольтерры, несмотря на свою простоту, качественно верно описывает фундаментальные принципы взаимодействия видов. Реализация модели на Python с визуализацией средствами Matplotlib предоставила мощный инструмент для анализа динамики экосистем. Полученные результаты подчеркивают необходимость учета начальных условий при прогнозировании популяционной динамики и разработке природоохранных стратегий.

# Список литературы

1. Гасратова Н.А. и др. Математическая модель хищник-жертва на линейном ареале // Молодой ученый. Общество с ограниченной ответственностью Издательство Молодой ученый, 2014. № 11. С. 1–10.

2. Шубина Е., Адиганова Н. Об одной модели динамики популяций" хищник-жертва" // Студенческая наука и XXI век. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего …, 2016. № 13. С. 53–56.

3. Гладких К.А. Математическая модель "ХИЩНИК-ЖЕРТВА" // Молодёжная научная весна-2015. 2015. С. 172–172.

4. Громазина И., Полякова А., Рудакова А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЭКОЛОГИИ ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ" ХИЩНИК-ЖЕРТВА" // Сборник материалов IX Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием" Россия молодая". 2017. С. 41013–41013.