

2012 学年度第一学期《数学分析》期中考试 (2012/11/15, 数计学院 2012 级)

一、(20 分, 每小题 10 分) 叙述

1. 右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的定义, 其中 x_0 和 A 为实数。

2. 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 可导的定义, 其中 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义。

二、(24 分, 共 3 小题, 每小题 8 分) 求极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n^2}{n+1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$$

三、(10 分) 用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$ 。

四、(10 分) 确定参数 a 与 $f(0)$, 使得函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, & x > 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续。

五、(20 分, 共 4 小题, 每小题 5 分) 求导数

$$1. y = x^3 e^x + \frac{1}{x}, x \neq 0 \quad 2. y = x^{5x}, x > 0 \\ 3. y = \arctan \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1 \quad 4. y = \sin^3(2x) \cos^2(3x)$$

六、(10 分) 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, \cdots$ 。证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

七、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调, 讨论 $f(x)$ 在 (a, b) 上可能的间断点的类型, 并证明你的结论。