中山大学本科生考试答题纸

学院(系)　　　　专业　　　　级

考试科目　　　　　　成绩评定

考生姓名　　　　　　教师签名

学　　号　　　　　　　　年　　月　　日

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

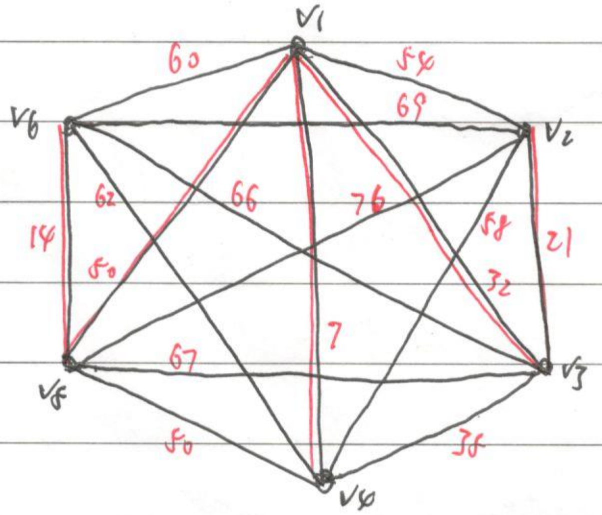
装订线

作业4:

1. 给定一个赋权图的邻接矩阵如下，求该图的最小生成树.

$$\begin{bmatrix} 0 & 54 & 32 & 7 & 50 & 60 \\ 54 & 0 & 21 & 58 & 76 & 69 \\ 32 & 21 & 0 & 35 & 67 & 66 \\ 7 & 58 & 35 & 0 & 50 & 62 \\ 50 & 76 & 67 & 50 & 0 & 14 \\ 60 & 69 & 66 & 62 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 解:



2. (2) 证明：若G是k边连通的，且k>0，又E'是G的k条边的集，则$\omega(G-E')\le 2$.

(b) 对 $k>0$，找出一个 k 连通图 G 以及 G 的 k 个顶点的集 V'，使得 $\omega(G-V')>2$。

证：(a)：设 $E'\subseteq E$ 且 $|E'|=k$，若 E' 不是 G 的边割，则 $\omega(G-E')=1\leq 2$。若 E' 是 G 的边割，则有 $\omega(G-E')\geq 2$。我们证 $\omega(G-E')=2$。假设 $\omega(G-E')\geq 3$，那么存在 $E_1\subset E'$，E_1 是 G 的键。从而 $\omega(G-E_1)=2$，而 $|E_1|<|E'|=k$，这与 G 是 k-边连通的假设矛盾。

(b) 例子如下：作图 $G_1=K_k$，另外 3 个顶点 v_1, v_2, v_3 与 G_1 中所有顶点相邻。则所得图 G 是 k-连通图，且令 $V'=V(G_1)$，则 $\omega(G-V')=3$。

3. (a) 证明：若 G 是简单图且 $\delta\geq \nu/2$，则 $k'=\delta$。

(b) 找出一个简单图 G，使得 $\delta=\lfloor(\nu/2)-1\rfloor$ 且 $k'<\delta$。

证：(a) 设 v 为最小度点，令 $G_1=K_{\nu-1}$，令 v 与 G_1 中 δ 个顶点相邻，得到图 G，则 $S=[\{v\}, V(G_1)]$ 是最小边割，且 $|S|=\delta$。其余边割的边数都大于等于 δ。X

(b) 构造例子如下，作两个完全图 G_1 和 G_2，$|V(G_1)|=\lfloor\nu/2\rfloor$，$|V(G_2)|=\lceil(\nu/2)\rceil$，再作一条边连接 G_1 和 G_2。得到图 G，则 $\delta(G)=\lfloor(\nu/2)-1\rfloor$，但 $k'(G)=1<\delta$。

3 (a). 证明：设 $E'=(S,\bar{S})$ 是 G 的一个最小边割，有 $|E'|=k'$。那么或者 $|S|\leq\nu/2$ 或者 $|\bar{S}|\leq\frac{\nu}{2}$。不失一般性，设 $\delta\geq\frac{\nu}{2}\geq|S|=l$。那么有 $\delta(l-1)\geq l(l-1)$，故 $\delta\cdot l-l(l-1)\geq\delta$，从而有 $[\delta-(l-1)]l\geq\delta$。因为 δ 是 G 中顶点的最小度，$G[S]$ 中每个顶点至少发 $\delta-(l-1)$ 条边到 $\bar{S}$ 中，从而 $G[S]$ 发出至少为 $[\delta-(l-1)]l\geq\delta$ 条边到 $\bar{S}$ 中。所以 $|E'|=k'\geq\delta$。又因为 $k\leq k'\leq\delta$，所以 $k'=\delta$。