中山大学本科生考试答题纸

学院(系)　　　　专业　　　　级

考试科目　　　　成绩评定

考生姓名　　　　教师签名

学　　号　　　　年　　月　　日

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

装　订　线

作业6：

1. 证明：若G有$2k>0$个奇点，则G中存在k条边不重的迹 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$，使得 $E(G)=E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k)$。

证明：由推论1.1知，G的奇点有偶数个，不妨设G有2k个奇点 $u_1,u_2,\cdots,u_{2k}$。在G中加上新边 $u_1u_2,u_3u_4,\cdots,u_{2k-1}u_{2k}$，则 $G'=G+\{u_1u_2,u_3u_4,\cdots,u_{2k-1}u_{2k}\}$ 的所有顶点是偶点，由定理4.1，G'有Euler回路(闭迹)Q，$Q-\{u_1u_2,u_3u_4,\cdots,u_{2k-1}u_{2k}\}$ 把闭迹Q分成k段边不重的迹 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$ 且 $E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k)=E(Q)-\{u_1u_2,u_3u_4,\cdots,u_{2k-1}u_{2k}\}=E(G)$。

2. 证明：若G是 $v>2\delta$ 的连通简单图，则G有长至少是 2δ 的路。

证明：设G中最长的路是 $P=v_1v_2\cdots v_k$，其中 $u=v_1$，$v=v_k$ 且 $k\le 2\delta$，即G中最长路长度小于等于 $2\delta-1$。我们证明 证明G中有长度为k的圈。因为P是最长路，u和v只与P上的顶点相邻。令

$S=\{v_i \mid uv_{i+1}\in E\}$，$T=\{v_i \mid v_iv\in E\}$.

由于 $v_k\notin S\cup T$，故有

$$|S\cup T|<k \qquad (1)$$

而且

$$|S\cap T|=0 \qquad (2)$$

因为若 $S\cap T$ 包含某点 v_i，则G中包含长为k的圈：

$v_1 v_2 \cdots v_i v_k v_{k-1} \cdots v_{i+1} v_1$，结论得证。

由(1)和(2)式得到

$$2\delta \le d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < k \le 2\delta$$

矛盾。

故G中有长度为k的圈$C = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$，又因为G是连通图，且$\nu > 2\delta \ge k$，故C外有一个顶点x，不失一般性，设x与$v_1$相邻，则$P' = x v_1 v_2 \cdots v_k$是G中比P更长的路，与P的假设矛盾。

3. 设G是无向连通图，证明：若G中有割边或割点，则G不是Hamilton图。

证明：设G中有割边$e = xy$。若$\nu(G) = 2$，由定理2.3，e不包含在圈中，因而G中无包含G中仅有的两个顶点x，y的Hamilton圈。若$\nu(G) \ge 3$，则x或y是G的割点。我们只需证G中有割点的情形就行了。设G中有割点x。令$S = \{x\}$，由于x是割点，所以 $\omega(G - S) \ge 2 = |S| + 1$

不满足Hamilton图的必要条件（定理4.3），因而G不是Hamilton图。