中山大学 2013 年数学分析期中考试

1.（10 分）用$\varepsilon-\mathrm{N}$ 或 $\varepsilon-\delta$语言证明如下极限：

(1.1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{n^2-3}=2$

(1.2) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+3}=3$

2.（20 分）求下列极限（给出解答过程）：

(2.1)$\lim_{x\to 1}(\frac{3-x}{1+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}}(2.2)\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3}-1)\sin n^2$

(2.3)$\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$ (2.4) $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3})^n$ (a,b,c>0)

3.（20 分）求下列函数的一阶导数$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$：

(3.1) y=arctan(e^x) (3.2) y=$(\sin x)^{\ln x}$

(3.2) y=$\frac{arcsinx\ +x^3}{2^x+\cos\ x}$ (3.3) y=$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ (a$\neq$ 0)

4.（20 分）令

$$\mathrm{f(x)}=\begin{cases}\cos x-1 x\geq 0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} x<0\end{cases}$$

(4.1) 分析 f 在实轴上的连续性.

(4.2)在 f 可导的地方求$f'(x)$的连续性.

5.(20 分)设$x_1=1, x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{2x_n}{2+x_n}$.利用单调有界定理证明x_n收敛，并求出极限。

6.（10 分）设 f(x)和 g(x)皆在x_0连续，利用函数连续性的定义和函数极限的性质证明：f(x)g(x)在x_0连续。

7.（10 分）设 f(0)=0,$f'(0)$存在，令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})$$

求：$\lim_{n\to\infty} x_n$.(提示：可考虑一阶微分线性逼近）

8.（10 分）设 f 在实轴 R 上连续，f(0)$\neq 0$，且对任意 x，y$\in$ R有 f(x+y)=f(x)f(y).求证：存在常熟 C 使得

f(x)=e^{Cx}, $\forall$x $\in$ R.

(提示：可先证明上述等式当 x 为有理数时成立）