概率论与数理统计

范正平
fanzhp@mail.sysu.edu.cn

中山大学 数据科学与计算机学院

Chapter 2
随机变量及其分布

随机变量的定义

直观上，我们将随机现象的每一种表现，即随机试验的每一个可能观察到的结果叫随机事件.

随机试验的结果本身有两种表达形式：一种是数值型，一种是描述型.

为了全面地研究随机试验的结果，揭示客观存在着的统计规律性，我们可以将**随机试验的结果数量化**，即用一个变量X 来描述试验的结果。

由此产生了随机变量的概念

随机变量的定义

定义 如果所有可能的结果组成的集合S＝{e}，X=X(e)是S上有定义的实值函数，而且对任何实数c, 事件{e: X(e)<=c}是有概率的，则称*X*为随机变量。

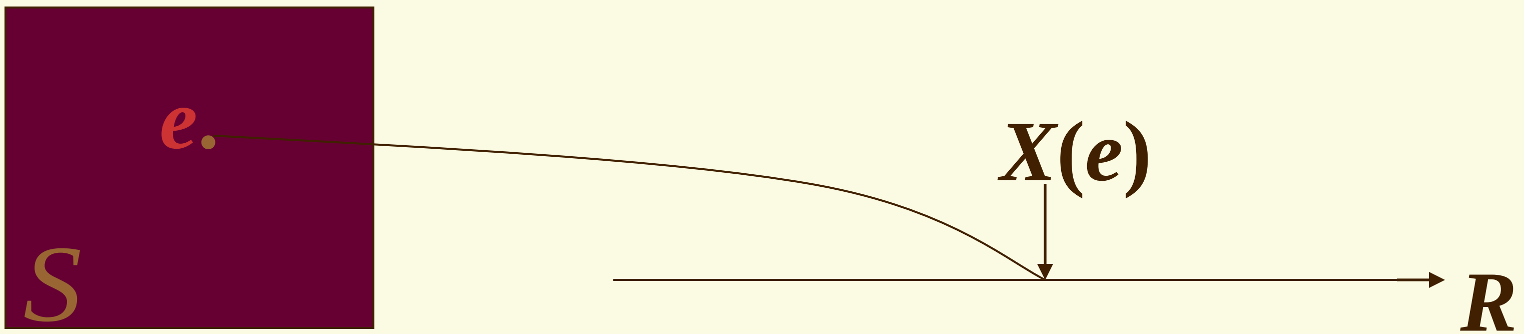
随机变量的定义(Cont.)

随机变量是 $X: S \longrightarrow R$上的映射，这个映射具有如下的特点：

- 定义域 ： S
- 随机性 ： 随机变量X 的可能取值不止一个，试验前只能预知它的可能的取值但不能预知取哪个值.
- 概率特性 ： X 以一定的概率取某个值或某些值.

随机变量的定义(Cont.)

这种对应关系在数学上理解为定义了一种实值、单值函数.



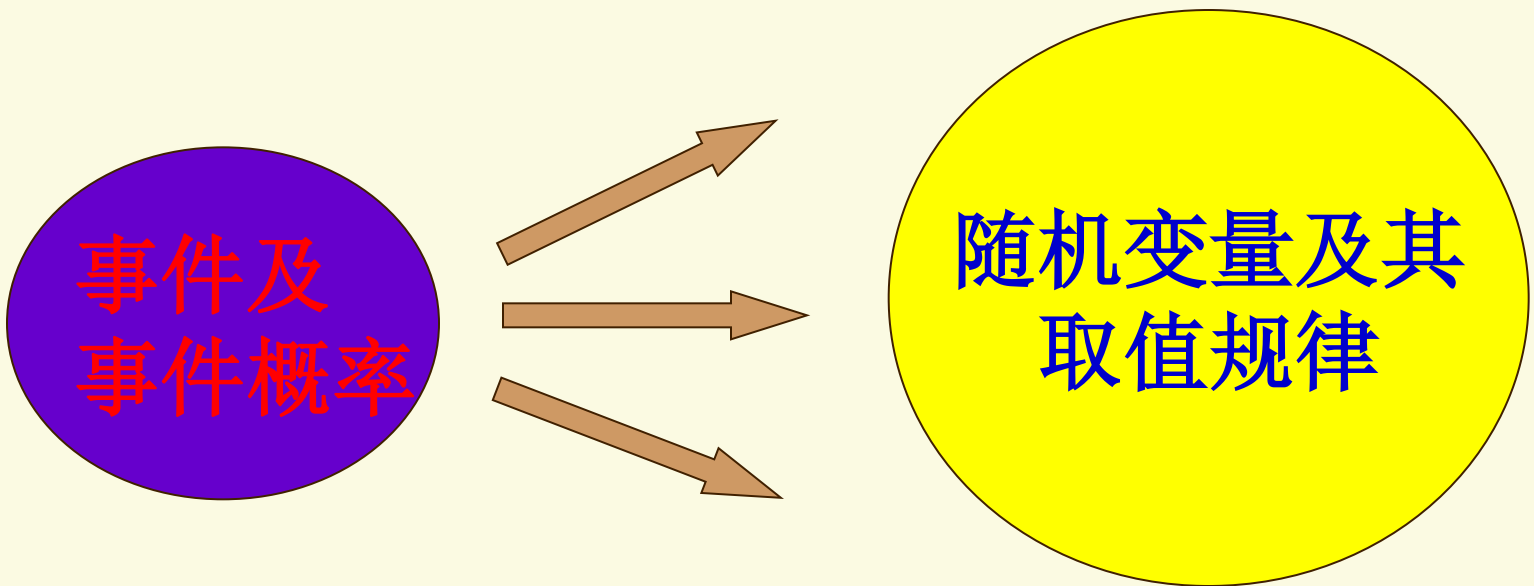
随机变量

随机变量通常用大写字母 X,Y,Z,W,N 等表示

而表示随机变量所取的值时，一般采用小写字母 x, y, z, w, n 等.

随机变量(Cont.)

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件．引入随机变量后，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究扩大为对随机变量及其取值规律的研究.



随机变量(Cont.)

例

袋中有3只黑球，2只白球，从中任意取出3只球，观察取出的3只球中的黑球的个数.

我们将3只黑球分别记作1，2，3号，2只白球分别记作4，5号，则该试验的样本空间为

$$S = \begin{Bmatrix} (1, & 2, & 3) & (1, & 2, & 4) & (1, & 2, & 5) \\ (1, & 3, & 4) & (1, & 3, & 5) & (1, & 4, & 5) \\ (2, & 3, & 4) & (2, & 3, & 5) & (2, & 4, & 5) \\ (3, & 4, & 5) & & & & & & \end{Bmatrix}$$

随机变量(Cont.)

我们记取出的黑球数为 X，则 X 的可能取值为1，2，3.

因此， X 是一个变量.

但是， X 取什么值依赖于试验结果，即 X的取值带有随机性，

所以，我们称 X 为随机变量.

X 的取值情况可由下表给出：

随机变量(Cont.)

样本点	黑球数 X	样本点	黑球数 X
$(1,\quad 2,\quad 3)$	3	$(1,\quad 4,\quad 5)$	1
$(1,\quad 2,\quad 4)$	2	$(2,\quad 3,\quad 4)$	2
$(1,\quad 2,\quad 5)$	2	$(2,\quad 3,\quad 5)$	2
$(1,\quad 3,\quad 4)$	2	$(2,\quad 4,\quad 5)$	1
$(1,\quad 3,\quad 5)$	2	$(3,\quad 4,\quad 5)$	1

随机变量(Cont.)

由上表可以看出，该随机试验的每一个结果都对应着变量 X 的一个确定的取值，因此变量 X 是样本空间上的函数：

$$X = X(e) \qquad (e \in S)$$

我们定义了随机变量后，就可以用随机变量的取值情况来刻划随机事件．例如

$$\{e: X(e)=2\}=\{X=2\}$$

表示取出2个黑球这一事件；

$$\{X \geq 2\}$$

表示至少取出2个黑球这一事件，等等．

随机变量(Cont.)

例

掷一颗骰子，令：

X：出现的点数.

则 X 就是一个随机变量. 它的取值为1，2，3，4，5，6.

$$\{X \leq 4\}$$

表示掷出的点数不超过 4 这一随机事件；

$$\{X\text{ 取偶数}\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件.

随机变量(Cont.)

例 一批产品有 50 件，其中有 8 件次品，42 件正品．现从中取出 6 件，令：

X：取出 6 件产品中的次品数．

则 X 就是一个随机变量．它的取值为 0，1，2，…，6．

$$\{X=0\}$$

表示取出的产品全是正品这一随机事件；

$$\{X\geq 1\}$$

表示取出的产品至少有一件次品这一随机事件．

随机变量(Cont.)

例 上午 8:00～9:00 在某路口观察，令：

Y：该时间间隔内通过的汽车数.

则 Y 就是一个随机变量. 它的取值为 0，1，….

$$\{Y<100\}$$

表示通过的汽车数小于100辆这一随机事件；

$$\{50<Y\le 100\}$$

表示通过的汽车数大于 50 辆但不超过 100 辆这一随机事件.

注意 Y 的取值是可列无穷个！

随机变量(Cont.)

例

观察某生物的寿命（单位：小时），令：

Z：该生物的寿命.

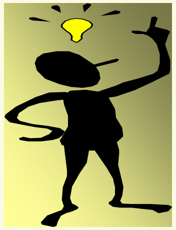
则 Z 就是一个随机变量. 它的取值为所有非负实数.

$$\{Z \le 1500\}$$

表示该生物的寿命不超过1500小时这一随机事件.

$$\{Z > 3000\}$$

表示该生物的寿命大于 3000小时这一随机事件.



注意 Z 的取值是不可列无穷个！

随机变量的分类

我们将研究两类随机变量:

随机变量

离散型随机变量

如“取到次品的个数”,“收到的呼叫数”等.

连续型随机变量

例如,“电视机的寿命”,实际中常遇到的“测量误差”等.

离散型随机变量

定义：某些随机变量X的所有可能取值是有限多个或可列无限多个，这种随机变量称为离散型随机变量．

如果随机变量的取值是有限个或可数个(即能与自然数的集合一一对应），则称该变量为离散型随机变量。

为了描述随机变量 X ，我们不仅需要知道随机变量X的所有可能取值，而且还应知道X 取每个值的概率. 为此我们有以下定义：

离散型随机变量(Cont.)

定义：随机变量 X 所取的一切可能值为 x_k (k=1,2, …)，则称

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$$

为离散型随机变量 X 的概率分布.

其中 p_k (k=1,2, …) 满足:

（1）$p_k \ge 0$, k=1,2, …

（2）$\sum_k p_k = 1$

用这两条性质判断一个函数是否是概率分布

离散型随机变量(Cont.)

例　设随机变量*X*的分布律为：

$$P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad \lambda>0$$

试确定常数*a*.

解: 依据概率分布的性质

$$\begin{cases} P(X=k)\ge 0, \\ \sum_k P(X=k)=1 \end{cases}$$

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

即　$a\ge 0$,　$\sum_{k=0}^{\infty}a\frac{\lambda^k}{k!}=ae^{\lambda}=1$

解得

$$a=e^{-\lambda}$$

离散型随机变量(Cont.)

离散型随机变量表示方法

（1）公式法

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$$

（2）列表法

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

离散型随机变量(Cont.)

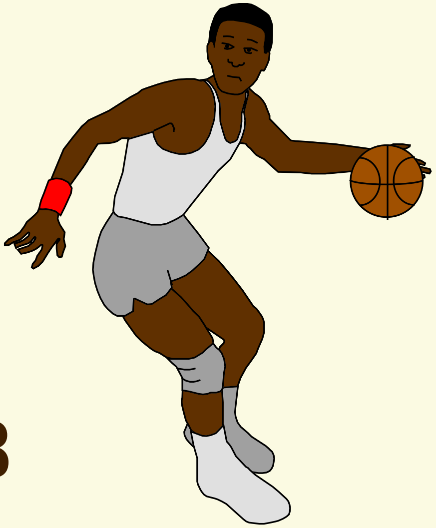
例 某篮球运动员投中篮圈概率是0.9，求他两次独立投篮投中次数X的概率分布.

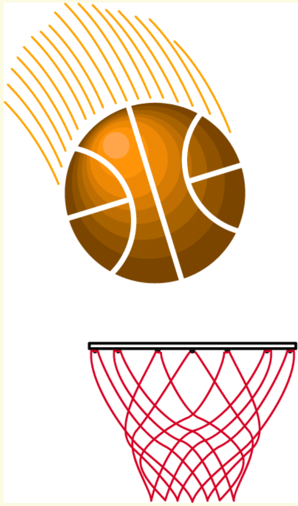
解： X可取值为0,1,2；

$$P\{X=0\}=(0.1)(0.1)=0.01$$

$$P\{X=1\}=2(0.9)(0.1)=0.18$$

$$P\{X=2\}=(0.9)(0.9)=0.81$$





离散型随机变量(Cont.)

常常表示为：

X	0	1	2
p	0.01	0.18	0.81

这就是X的概率分布.

离散型随机变量(Cont.)

例 某射手连续向一目标射击，直到命中为止，已知他每发命中的概率是p，求所需射击发数X的分布律.

解: 显然，X 可能取的值是$1,2,\ldots$,

为计算 $P\{X=k\}$， $k=1,2,\ldots$， 设

$A_k=\{$第k发命中$\}$，$k=1,2,\ldots$,

于是 $P\{X=1\}=P(A_1)=p$,

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2)=(1-p)\cdot p$$

$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=(1-p)^2\cdot p$$

… …

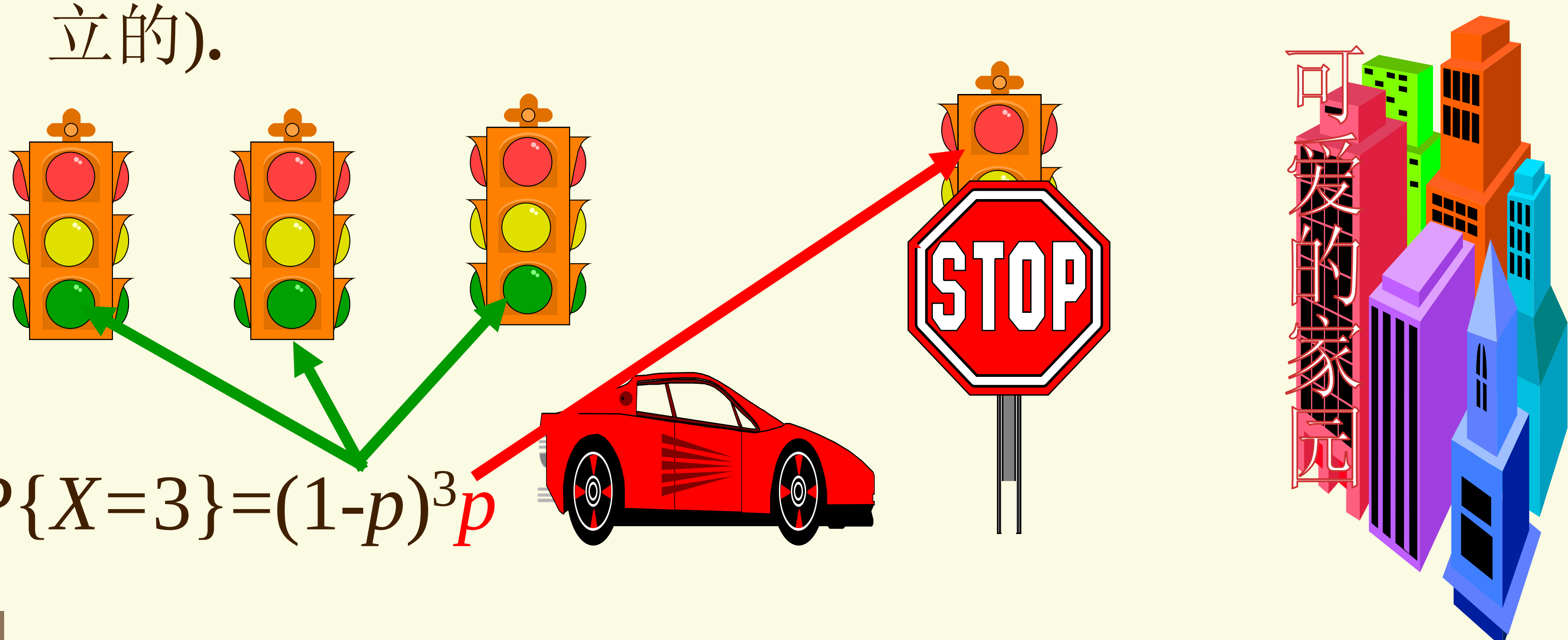
离散型随机变量(Cont.)

可见 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p \qquad k=1,2,\cdots\cdots$

这就是求所需射击发数X的概率分布.

离散型随机变量(Cont.)

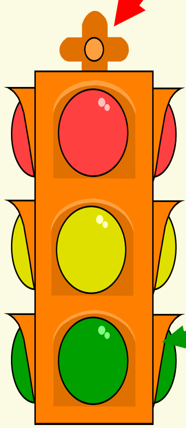
例　设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以 1/2 的概率允许或禁止汽车通过. 以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数，求 X 的分布律. (信号灯的工作是相互独立的).



$$P\{X=3\}=(1-p)^3p$$

离散型随机变量(Cont.)

解： 以 p 表示每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则 X 的分布律为：



X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

或写成 $P\{X=k\}=(1-p)^kp$， $k=0,1,2,3$

$$P\{X=4\}=(1-p)^4$$

离散型随机变量(Cont.)

以 $p = 1/2$ 代入得：

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

常见的概率分布—离散型随机变量

(1) 两点分布(伯努利分布、0 – 1 分布)

$X = x_k$	1	0
P_k	p	$1-p$

应用场合

凡是随机试验只有两个可能的结果，常用0 – 1分布描述，如产品是否格、人口性别统计、系统是否正常、电力消耗是否超负荷等等.

伯努利试验

看一个试验　将一枚均匀骰子抛掷3次.

令X 表示3次中出现“4”点的次数

X的分布律是:

$$P\{X=x_k\}=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k},k=0,1,2,3.$$

伯努利试验(Cont.)

一般地，设在一次试验E中我们只考虑两个互逆的结果：A 或 $\overline{A}$.

掷骰子：“掷出4点”，“未掷出4点”

抽验产品：“是正品”，“是次品”

… … … …

这样的试验E称为伯努利试验 .

伯努利试验(Cont.)

将伯努利试验E独立地重复地进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重伯努利试验.

“重复”是指这 n 次试验中$P(A)=p$保持不变.

“独立”是指各 次试验的结果互不影响.

二项分布　　$B(n,p)$

背景：n 重Bernoulli 试验中，每次试验感兴趣的事件A 在 n 次试验中发生的次数 ——

X是一离散型随机变量

若$P(A)=p$，则

$$P_n(k)=P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

称 X 服从参数为n, p 的二项分布，记作

$$X\sim B(n,p)$$

0 – 1 分布是 $n=1$ 的二项分布.

例 一大批产品的次品率为0.1，现从中取出15件．试求下列事件的概率：

$B=\{$ 取出的15件产品中恰有2件次品 $\}$

$C=\{$ 取出的15件产品中至少有2件次品 $\}$

解：由于从一大批产品中取15件产品，故可近似看作是一15重*Bernoulli*试验．

$A=\{$取出一件产品为次品$\}$，则 $P(A)=0.1.$

所以， $P(B)=C_{15}^{2}\times 0.1^{2}\times 0.9^{13}$

$$P(C)=1-P(\overline{C})$$

$$=1-C_{15}^{0}\times 0.1^{0}\times 0.9^{15}-C_{15}^{1}\times 0.1\times 0.9^{14}$$

例　一个完全不懂英语的人去参加英语考试. 假设此考试有5个选择题，每题有n重选择，其中只有一个答案正确. 试求：他居然能答对3题以上而及格的概率.

解:由于此人完全是瞎懵，所以每一题，每一个答案对于他来说都是一样的，而且他是否正确回答各题也是相互独立的. 这样，他答题的过程就是一个Bernoulli试验.

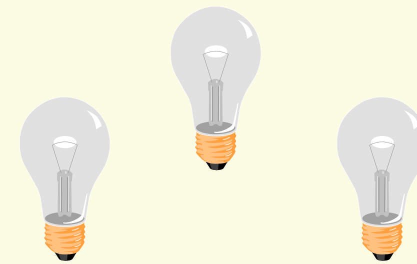
"他答对题数"m这个随机变量$\sim B(5,1/n)$

$$p_k = P(m=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k=0,1,\cdots,5)$$

其中$p=\dfrac{1}{n}$,于是当$n=4$时,此人及格的概率是:

$$p_3+p_4+p_5 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5 \approx 0.10$$

例 某类灯泡使用时数在1000小时以上的概率是0.2，求三个灯泡在使用1000小时以后最多只有一个坏了的概率.



解：设X为三个灯泡在使用1000小时已坏的灯泡数.

$$X \sim B\,(3,\,0.8),$$

$$P(X=k)=C_3^k(0.8)^k(0.2)^{3-k},\ k=0,1,2,3$$

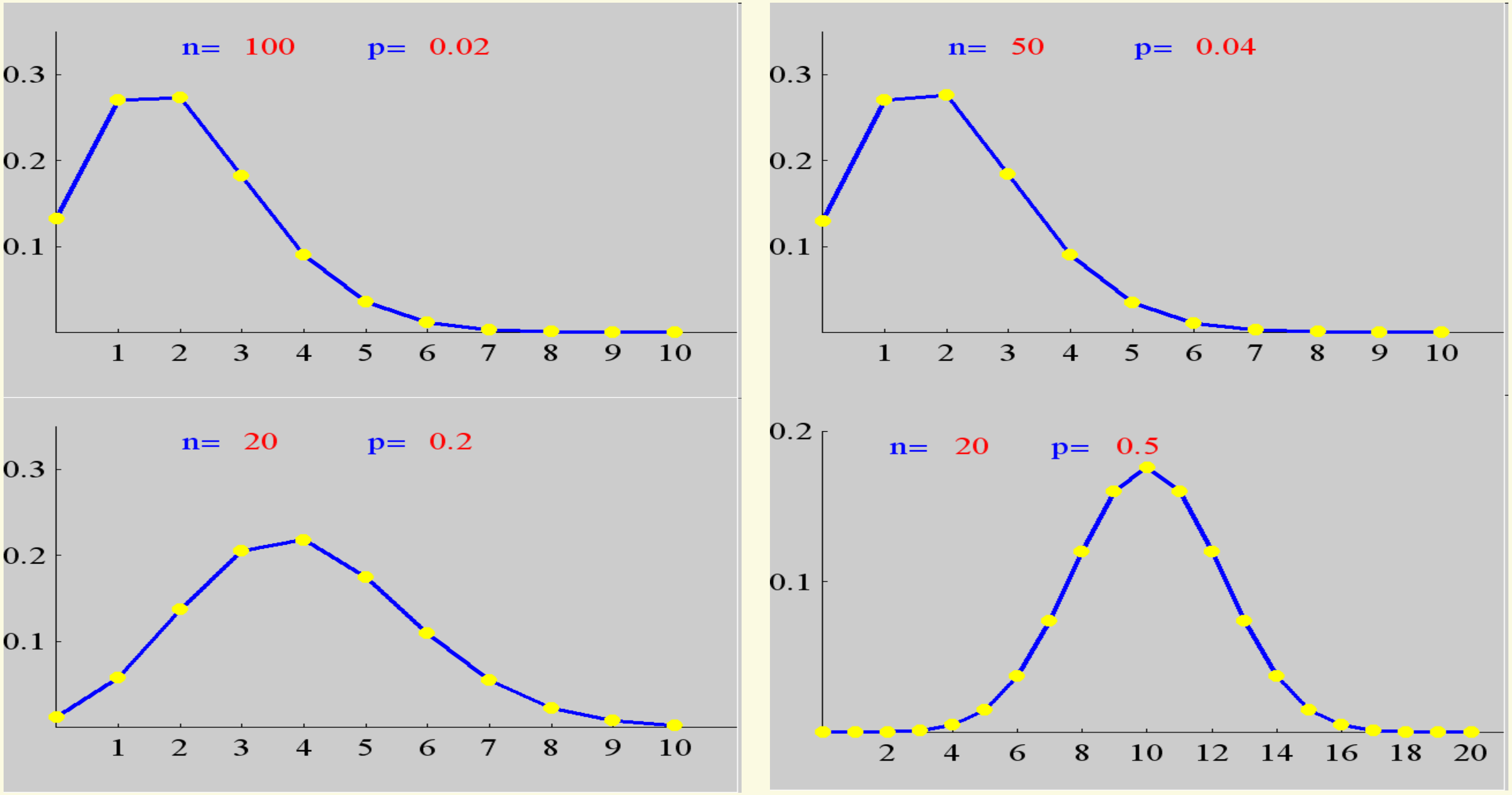
$$P\{X\leq 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}$$

$$=(0.2)^3+3(0.8)(0.2)^2$$

$$=0.104$$

把观察一个灯泡的使用时数看作一次试验，“使用到1000小时已坏”视为事件A.每次试验，A出现的概率为0.8

二项分布的图形



二项分布中最可能出现次数的定义与推导

若 $P(X=k)\geq P(X=j)$，$j=X$ 可取的一切值

则称**k**为最可能出现的次数

记 $p_k=P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$， $k=0,1,\cdots,n$

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_{k-1}}{p_k}&=\frac{(1-p)k}{p(n-k-1)}\leq 1\\ \frac{p_k}{p_{k+1}}&=\frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)}\geq 1\end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow\quad (n+1)p-1\leq k\leq (n+1)p$$

- 当$(n+1)p=$ 整数时,在 $k=(n+1)p$与 $(n+1)p-1$ 处的概率取得最大值

当$(n+1)p\neq$整数时, 在 $k=[(n+1)p]$ 处的概率取得最大值

- 对固定的 n、p, $P(X=k)$ 的取值呈不对称分布

固定 p, 随着 n 的增大，其取值的分布趋于对称

Poisson 分布

定义：设随机变量X的所有可能值是全体非负整数，

若 $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$

其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的Poisson 分布，记作$\pi(\lambda)$ 或 $P(\lambda)$

例 一家商店采用科学管理，由该商店过去的销售记录知道，某种商品每月的销售数可以用参数 $\lambda=5$ 的泊松分布来描述，为了以95%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少应进该种商品多少件？

解：设该商品每月的销售数为X,

已知X服从参数 λ =5的泊松分布.

设商店在月底应进某种商品m件,

求满足 $P\{X \leq m\}>0.95$ 的最小的m.

销售数

进货数

求满足 $P\{X \le m\} > 0.95$ 的最小的m.

也即 $P\{X>m\} \le 0.05$

或 $$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{e^{-5}5^k}{k!} \le 0.05$$

查泊松分布表得

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{e^{-5}5^k}{k!} \approx 0.032, \quad \sum_{k=9}^{\infty} \frac{e^{-5}5^k}{k!} \approx 0.068$$

于是得 **m+1=10,** **m=9件**

例　　如果随机变量X 的分布律为

$$P\{X = k\} = c\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 1,2,\cdots).$$

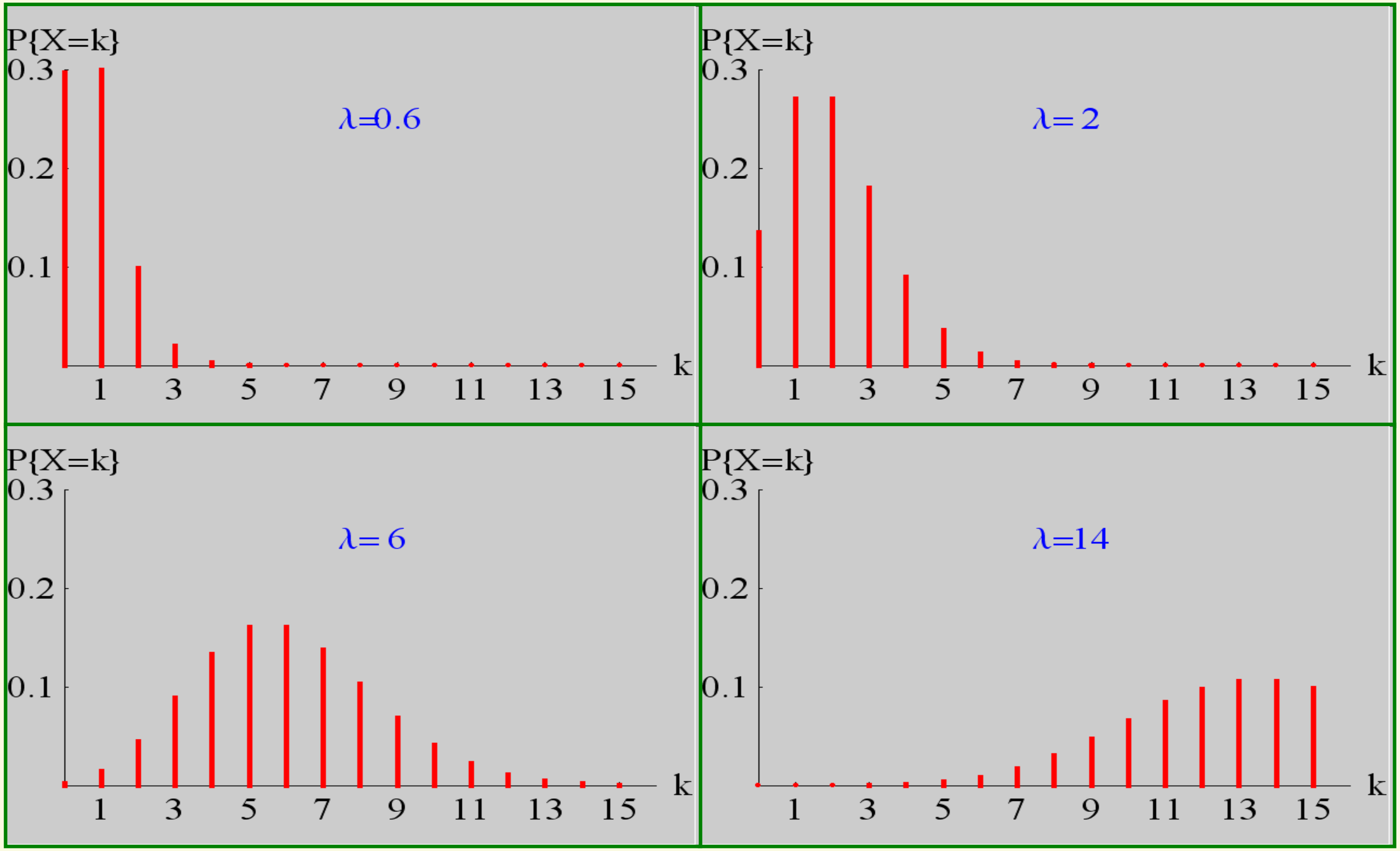
(其中$\lambda > 0$为常数) 试确定未知常数c.

解：由分布率的性质有 $\sum_{k=1}^{\infty} c\frac{\lambda^k}{k!} = c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = 1,$

而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} - 1 = e^{\lambda} - 1$

所以 $c = \dfrac{1}{e^{\lambda} - 1}.$

泊松分布的图形



P{X=k}
0.3
0.2
0.1
λ=0.6
k
1
3
5
7
9
11
13
15
P{X=k}
0.3
0.2
0.1
λ= 2
k
1
3
5
7
9
11
13
15
P{X=k}
0.3
0.2
0.1
λ= 6
k
1
3
5
7
9
11
13
15
P{X=k}
0.3
0.2
0.1
λ=14
k
1
3
5
7
9
11
13
15

泊松定理

泊松定理 设随机变量X服从二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$ k=0, 1, 2, ···, n.

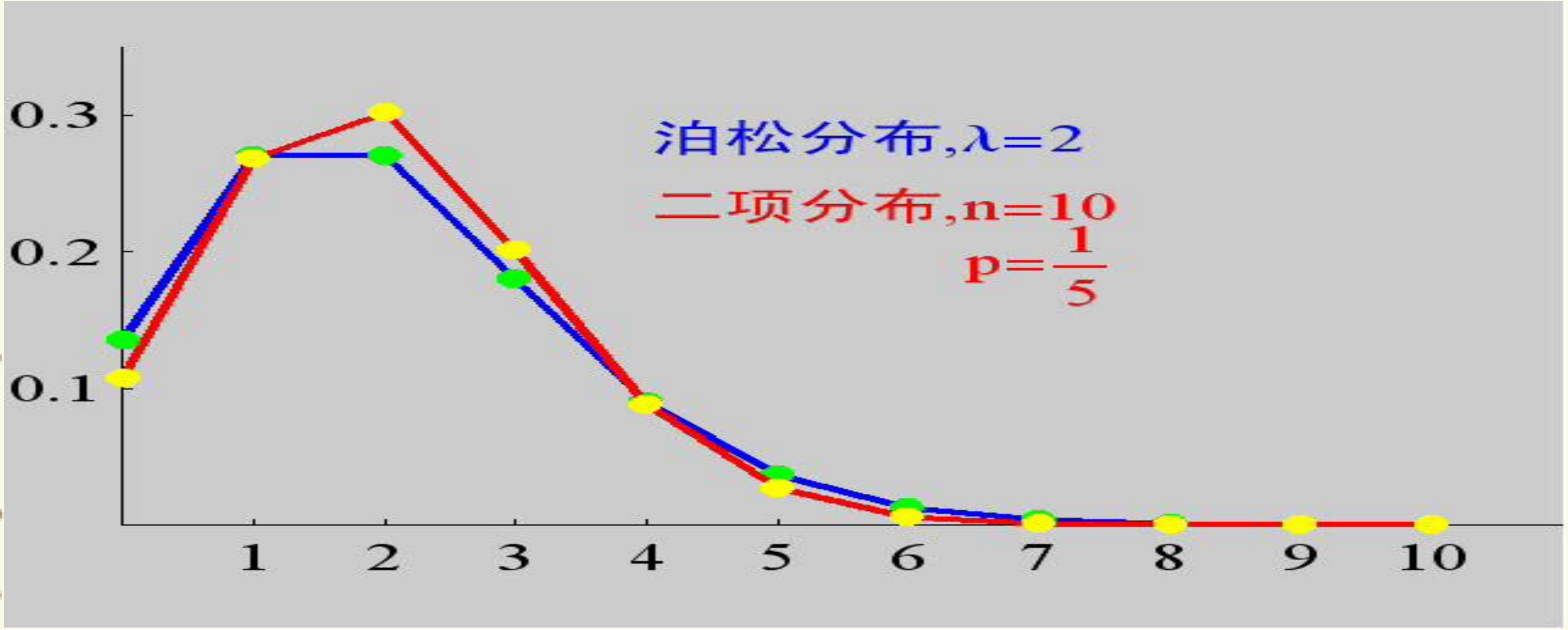
又设$np=\lambda$，（$\lambda>0$是常数），则有

$$\lim_{n\to\infty}P\{X=k\}=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\ldots,n.$$

该定理于1837年由法国数学家泊松引入！

二项分布 $\xrightarrow{np=\lambda(n\to+\infty)}$ 泊松分布



可见，当n充分大,p又很小时,可用泊松分布来近似二项分布！

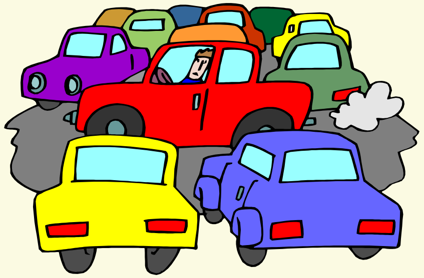
在实际计算中,当 $n \geq 20$, $p \leq 0.05$时, 可用上述公式近似计算; 而当 $n \geq 100$, $np \leq 10$ 时, 精度更好.

k	按二项分布 $n=10$ $p=0.1$	$n=20$ $p=0.05$	$n=40$ $p=0.025$	$n=100$ $p=0.01$	按Possion公式 $\lambda=np=1$
0	0.349	0.358	0.369	0.366	0.368
1	0.305	0.377	0.372	0.370	0.368
2	0.194	0.189	0.186	0.185	0.184
3	0.057	0.060	0.060	0.061	0.061
4	0.011	0.013	0.014	0.015	0.015

例 有一繁忙的汽车站, 每天有大量汽车通过, 设每辆汽车,在一天的某段时间内出事故的概率为0.0001,在每天的该段时间内有1000 辆汽车通过,问出事故的次数不小于2的概率是多少?

解 设1000 辆车通过, 出事故的次数为 X, 则

$X \sim b(1000, 0.0001)$,



所求概率为 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$$

可利用泊松定理计算 $\lambda = 1000 \times 0.0001 = 0.1$,

$$P\{X \geq 2\} \approx 1 - \frac{e^{-0.1}}{0!} - \frac{0.1 \cdot e^{-0.1}}{1!} = 0.0047.$$

超几何分布

设有产品 N件，其中次品 D件，其余为正品，从中随机地抽取 n件。记X 为抽到的的次品件数，求X 的分布律.

此时抽到 k件次品的概率为

$$P(X=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \quad k=0, 1, \ldots, n$$

称X 服从超几何分布.

可以证明超几何分布的极限分布就是二项分布.

几何分布

设用机枪射击一次击落飞机的概率为p，无限次地射击，则首次击落飞机时所需射击的次数 X 服从参数为p 的几何分布. 即

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1,2,\cdots$$

容易验证，若在前 m 次射击中未击落飞机，那么, 在 此条件下，为了等到击落时刻所需要等待时间也服 从同一几何分布，该分布与 m 无关，这就是所谓的 无记忆性.

其它分布

- 负二项分布（Pascal分布）
- 离散均匀分布

连续型随机变量

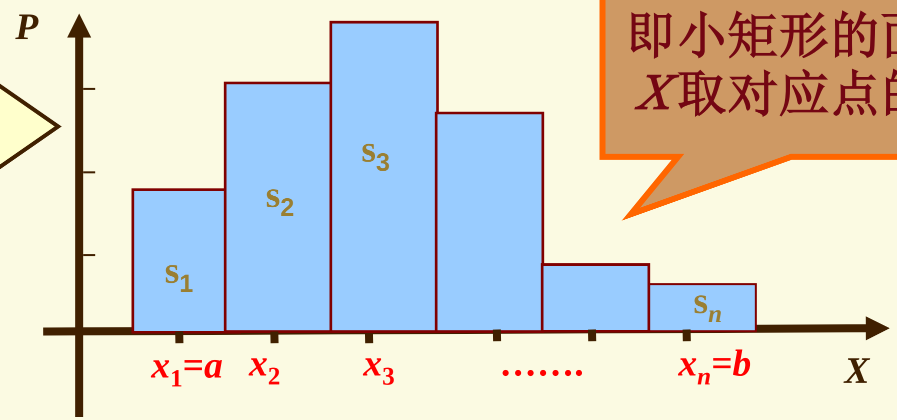
定义的引出

设离散型随机变量X在［a, b］内取n个值: $x_1=a, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n=b.$

$$小矩形高=\frac{概率}{小矩形宽度}$$

即小矩形的面积为X取对应点的概率

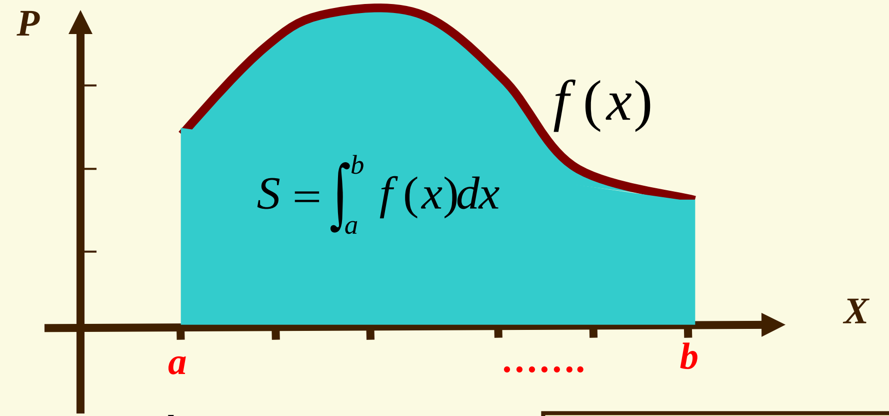
X的概率直方图:



$$P\{a \le X \le b\} = \sum_{i=1}^{n} S_i$$ ＝折线下面积之和！

连续型随机变量(Cont.)

若X为连续型随机变量，由于X在［a, b］内取连续取无穷多个值，折线将变为一条光滑曲线 $f(x)$.



而且：

$f(x)\geq 0$

$$P\{a\leq X\leq b\}=S=\int_a^b f(x)dx$$

$$P\{-\infty\leq X\leq\infty\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

连续型随机变量(Cont.)

连续型随机变量的定义

设X是随机变量，如果存在非负函数$f(x)$，满足：

对于任意的 $\boldsymbol{a}, \mathbf{b}(\boldsymbol{a} \le \mathbf{b}), \boldsymbol{a}$也可为$-\infty$, b也可为$\infty$, 有

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx,$$

则称***X***是连续型随机变量，$f(x)$称为***X***的概率密度函数，简称概率密度.

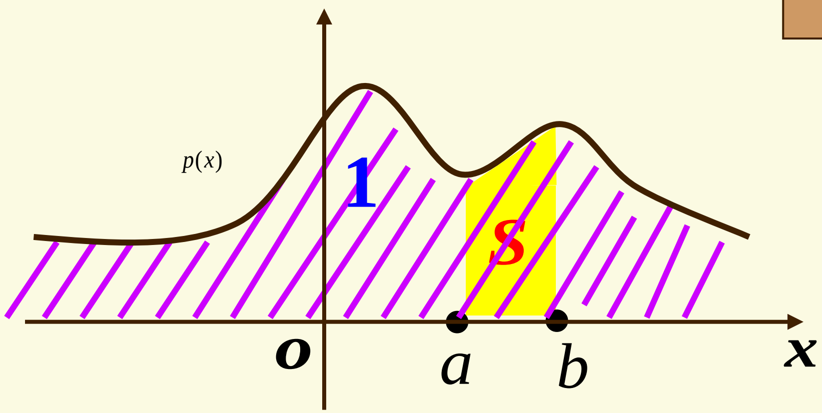
连续型随机变量(Cont.)

概率密度函数的性质

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

这两条性质是判定一个函数 ***f(x)***是否为某个随机变量***X***的概率密度函数的充要条件.



3) X落入区间［a,b］内的概率＝ $\int_a^b f(x)dx$

连续型随机变量(Cont.)

注意　对于任意可能值 a ,连续型随机变量取 a 的概率等于零.即 $P\{X=a\}=0.$

这是因为 $P(X=a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}P(a-\Delta x<X<a+\Delta x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{a-\Delta x}^{a+\Delta x}f(x)dx=\mathbf{0}$$

由此可得

$$\boxed{\begin{aligned}P\{a\le X\le b\}&=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X<b\}\\&=P\{a<X<b\}.\end{aligned}}$$

连续型随机变量取值落在某一区间的概率与区间的开闭无关

连续型随机变量(Cont.)

对 $f(x)$的进一步理解

若x是 $f(x)$的连续点，则：

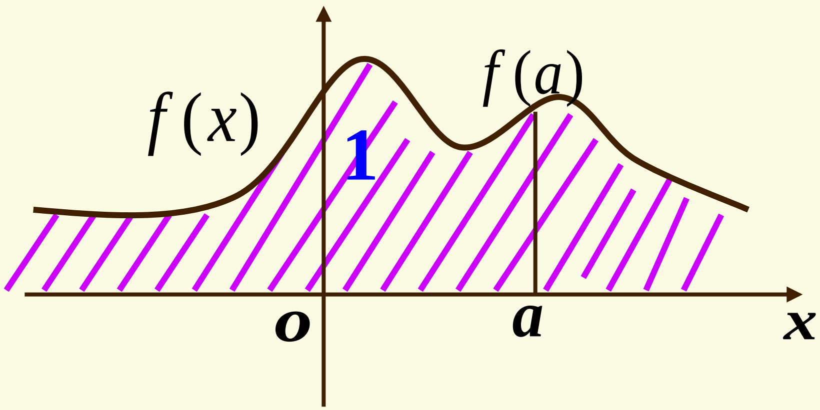
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}$$

$$=f(x)$$

故 X的密度 $f(x)$ 在 x 这一点的值，恰好是X落在区间 $(x,x+\Delta x]$上的概率与区间长度 Δx 之比的极限. 这里，如果把概率理解为质量，$f(x)$相当于线密度.

连续型随机变量(Cont.)

问题1：$f(a)$是 $X=a$的概率吗？



密度函数 $f(x)$在某点处a的高度，并不反映X取值的概率. 但是，这个高度越大，则X取a附近的值的可能性就越大. 也可以说，在某点密度曲线的高度反映了概率集中在该点附近的程度.

连续型随机变量(Cont.)

事实上，若不计高阶无穷小，有：

$$P\{x < X \le x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$$

它表示随机变量 **X** 取值于 $(x, x+\Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$.

$f(x)\Delta x$ 在连续型*随机变量*中所起的作用与 $P\{X = x_k\} = p_k$ 在离散型*随机变量*中所起的作用相类似.

连续型随机变量(Cont.)

问题 2：概率为零的事件一定是不可能事件吗？

$P\{X=a\}=0$　而 $\{X=a\}$ 并非不可能事件.

可见，由 $P(A)=0$，不能推出 $A=\phi$

类似可知，　由 $P(B)=1$，不能推出 $B=S$

连续型随机变量(Cont.)

例 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} C(9-x^2), & -3\le x\le 3, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求常数 C;

(2) 求 $P\{X<0\}, P\{-1<X\le 1\}, P\{X>2\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-3}^{3} C(9-x^2)dx=2C\int_{0}^{3}(9-x^2)dx$$

$$=2C(9x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = 36C$$

连续型随机变量(Cont.)

即有$C = 1/36.$ 于是概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{36}(9-x^2), & -3\le x\le 3,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$(2)P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_{-3}^{0}\frac{1}{36}(9-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{36}\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{0}=-\frac{1}{36}(-27+9)=\frac{1}{2},$$

连续型随机变量(Cont.)

$$P\{-1 \le X \le 1\} = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{36}(9 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{18}\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{13}{27}.$$

$$P\{X > 2\} = \int_{2}^{\infty} f(x)dx = \int_{2}^{3} \frac{1}{36}(9 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{36}\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{2}{27}.$$

常见的连续型随机变量

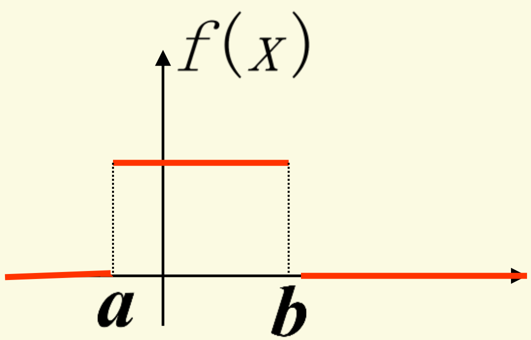
(1) 均匀分布

定义　　设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a, b) 上服从均匀分布,

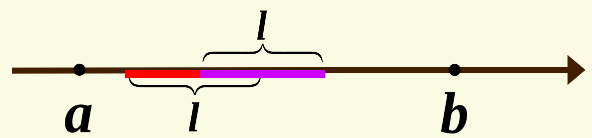
记为　　$X \sim U(a, b)$.



常见的连续型随机变量(Cont.)

均匀分布的意义

在区间(a,b)上服从均匀分布的随机变量X，落在区间(a,b)中任意等长度的子区间内的可能性是相同的.



$$p=\frac{l}{b-a}$$

事实上，若$X\sim U(a,b)$，则对于满足

$a\le c<d\le b$ 的c,d, 总有

$$P\{c\le X\le d\}=\int_c^d f(x)dx=\int_c^d\frac{1}{b-a}dx=\frac{d-c}{b-a}$$

常见的连续型随机变量(Cont.)

均匀分布常见于下列情形：

如在数值计算中，由于四舍五 入，小数点后某一位小数引入的误差，例如对小数点后第一位进行四舍五 入时，那么一般认为误差服从（**-0.5, 0.5**）上的均匀分布。

如公交系统中乘客随机乘车的等车时间.

常见的连续型随机变量(Cont.)

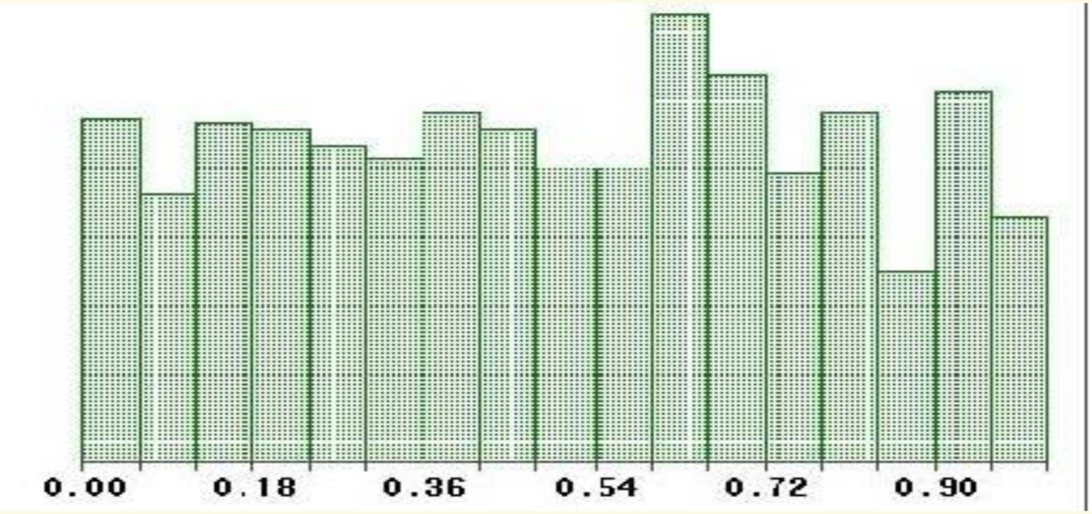
区间(0, 1)上的均匀分布*U*(0,1)在计算机模拟中起着重要的作用.

实用中，用计算机程序可以在短时间内产生大量服从 (0, 1)上均匀分布的随机数. 它是由一种迭代过程产生的.

严格地说，计算机中产生的*U* (0,1) 随机数并非完全随机，但很接近随机，故常称为伪随机数.

常见的连续型随机变量(Cont.)

如取n足够大，独立产生n个$U(0,1)$随机数，则从用这 n 个数字画出的频率直方图就可看出，它很接近于(0, 1)上的均匀分布$U(0,1)$.



常见的连续型随机变量(Cont.)

例（等待时间）公共汽车每10分钟按时通过一车站，一乘客随机到达车站. 求他等车时间不超过3分钟的概率.

解 设X表示他等车时间（以分计），则X是一个随机变量，且X的概率密度为 $X \sim U[0,10)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, & 0 \le x < 10, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

所求概率为 $P\{X < 3\} = \int_0^3 f(x)dx = \dfrac{3}{10},$

常见的连续型随机变量(Cont.)

例 设电阻值 R 是一个随机变量，均匀分布在 $900\,\Omega \sim 1100\,\Omega$．求 R 的概率密度及 R 落在 $950\,\Omega \sim 1050\,\Omega$ 的概率.

解 由题意,R 的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases}1/(1100-900), & 900<r<1100,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故有 $P\{950 \le R \le 1050\}=\int_{950}^{1050}\frac{1}{200}\,\mathrm{d}r=0.5.$

常见的连续型随机变量(Cont.)

例 设随机变量 X 在 [2, 5]上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测 ,试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

设 A 表示 "对 X 的观测值大于 3 ", Y 表示3次独立观测中观测值大于3的次数.

由于 $P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5 \frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$, 则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$.

因而有

$$P\{Y\ge 2\}=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{20}{27}.$$

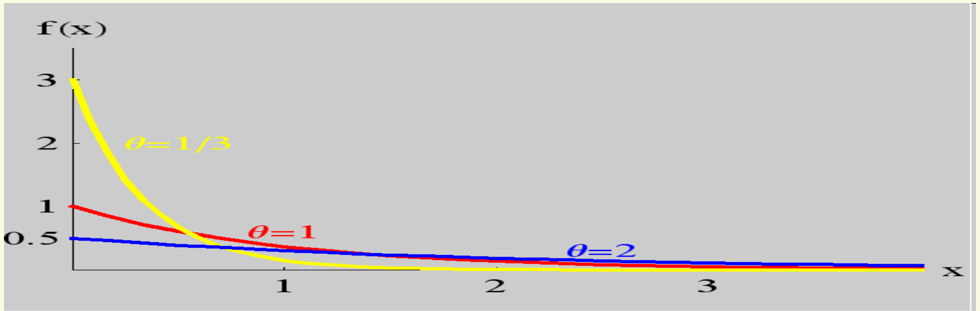
常见的连续型随机变量(Cont.)

(2) 指数分布

定义　　设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布.



常见的连续型随机变量(Cont.)

指数分布的重要性质 :“无记忆性”.

对于任意s, t > 0, 有

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = P\{X > t\}.$$

证明

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = \frac{P\{(X > s+t) \cap (X > s)\}}{P\{X > S\}}$$

$$= \frac{P\{X > s+t)\}}{P\{X > S\}} = \frac{\int_{s+t}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_{s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{-e^{-\lambda x} \Big|_{s+t}^{\infty}}{-e^{-\lambda x} \Big|_{s}^{\infty}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

P(A|B)=P(AB)/P(B)

常见的连续型随机变量(Cont.)

而

$$P\{X>t\}=\int_t^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx\quad=e^{-\lambda t}$$

于是 $P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}.$

指数分布的无记忆性是使其具有广泛应用的重要原因！

常见的连续型随机变量(Cont.)

指数分布在可靠性理论中描绘设备工作的可靠时间.

有些系统的寿命分布也可用指数分布来近似, 当电子产品的失效是偶然失效时,其寿命服从指数分布.

在排队论中它被广泛地用于描绘等待时间,如电话通话时间、各种随机服务系统的服务时间、等待时间等.

常见的连续型随机变量(Cont.)

例 某种电子元件的寿命(以小时计) X 服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}e^{-x/100}, & x>0\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求元件寿命至少为200小时的概率.

(2) 将3只这种元件联接成为一个系统，设系统工作的方式是至少2只元件失效时系统失效，又设3只元件工作相互独立.求系统的寿命至少为200小时的概率.

常见的连续型随机变量(Cont.)

解 (1)元件寿命至少为200小时的概率为

$$P\{X \geq 200\} = \int_{200}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{200}^{\infty} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx$$

$$= -e^{-x/100}\Big|_{200}^{\infty} = e^{-2}$$

(2)以Y记3只元件中寿命小于200小时的元件的只数. 由于各元件的工作相互独立，又由(1)知一元件的寿命小于200小时的概率为$1-e^{-2}$,故有

$$Y \sim B(3, 1-e^{-2}).$$

常见的连续型随机变量(Cont.)

2只及2只以上元件的寿命小于200小时的概率为

$$P\{Y \geq 2\} = \binom{3}{2}(1-e^{-2})^2(e^{-2}) + (1-e^{-2})^3$$

$$= (1-e^{-2})^2(2e^{-2}+1) = 0.950.$$

故系统的寿命至少为200小时的概率为

$$p = 1 - P\{Y \geq 2\} = 1 - 0.950 = 0.050.$$

常见的连续型随机变量(Cont.)

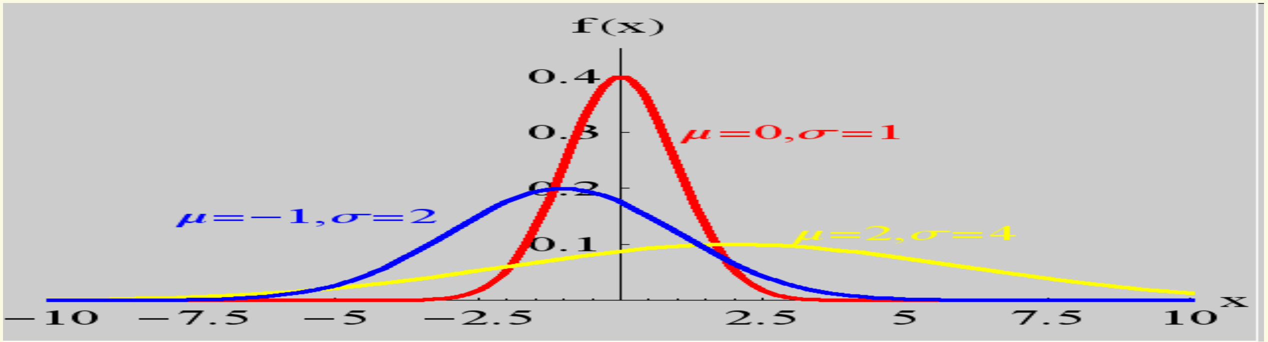
(3) 正态分布(或高斯分布)

定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\mu,\ \sigma(\sigma>0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 $\mu,\ \sigma$ 的正态分布或高斯分布, 记为

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



常见的连续型随机变量(Cont.)

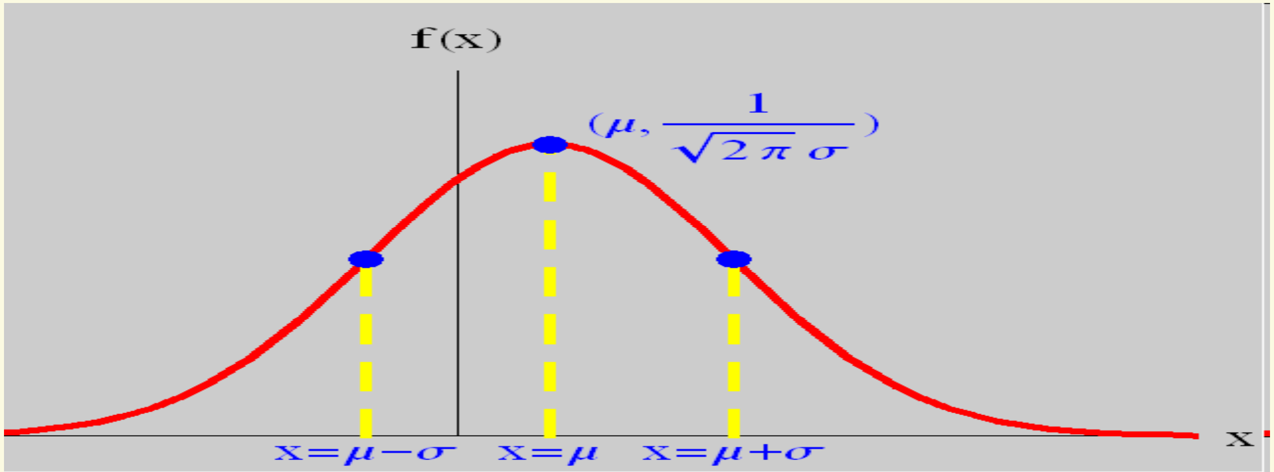
μ— 位置参数

即固定 σ, 对于不同的 μ, 对应的 $f(x)$
的形状不变化，只是位置不同

σ— 形状参数

固定 μ，对于不同的σ，$f(x)$ 的形状不同.

正态概率密度函数的几何特征



(1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称;

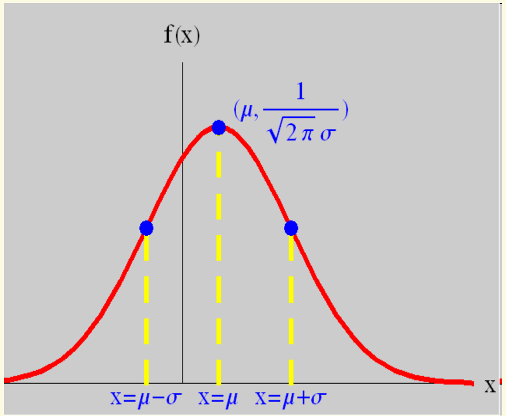
(2) 当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma}$;

(3) 当 $x \to \pm\infty$ 时, $f(x) \to 0$;

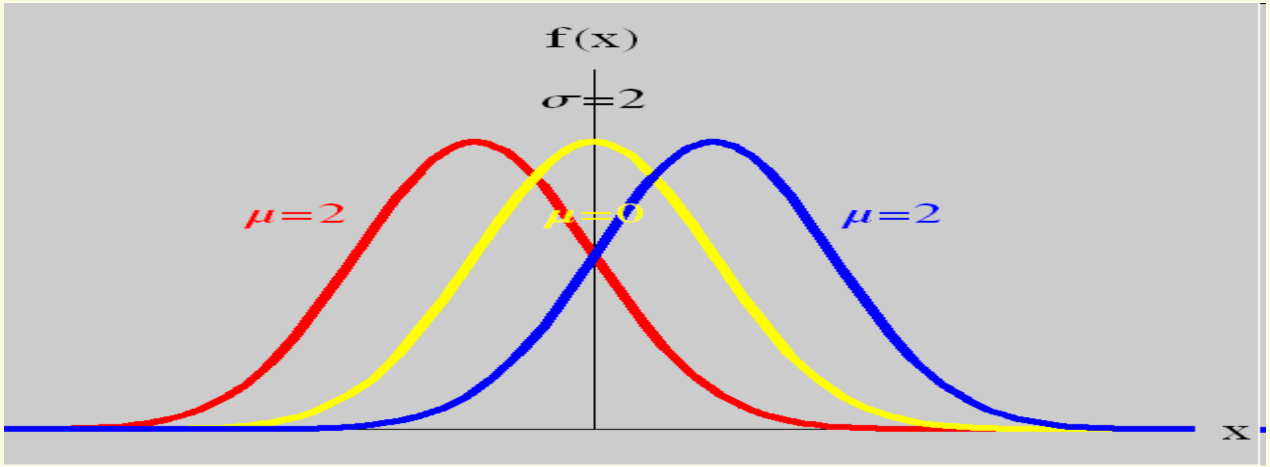
(4) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点;

正态概率密度函数的几何特征(Cont.)

(5) 曲线以 x 轴为渐近线;

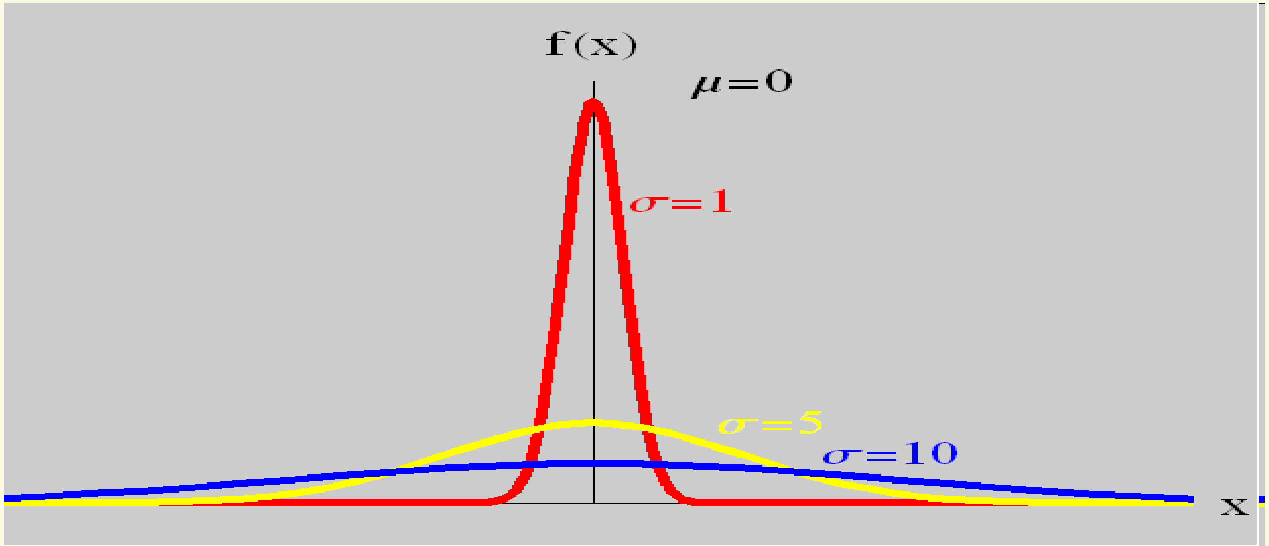


(6) 当固定 σ, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 图形的形状不变, 只是沿着 x 轴作平移变换;



正态概率密度函数的几何特征(Cont.)

(7) 当固定 μ, 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 图形的对称轴不变, 而形状在改变, σ 越小, 图形越高越尖, σ 越大, 图形越低越平缓.



正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布, 例如测量误差，人的生理特征尺寸如身高、体重等 ；正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.

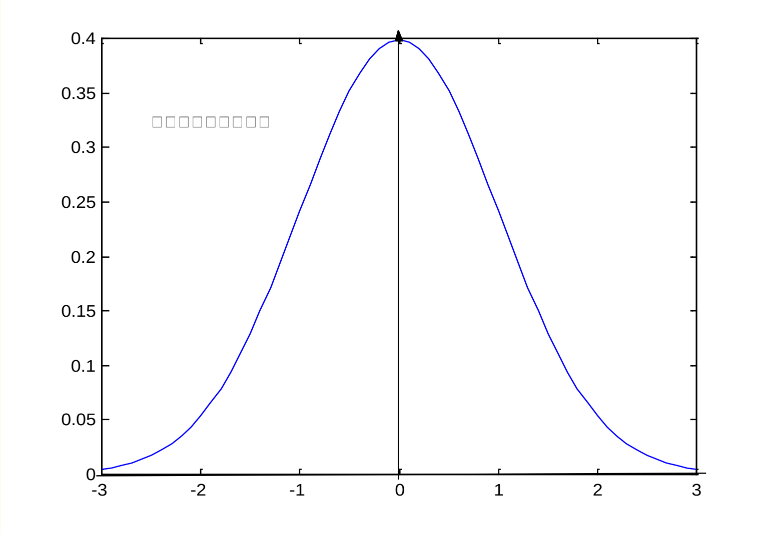
标准正态分布 $X \sim N(0,1)$

密度函数:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

即当μ= 0，σ=1时的正态分布。



其它概率密度函数

- 威布尔分布
- 伽玛分布
- 帕累托分布
- 贝塔分布

随机变量的分布函数

分布函数：

使概率问题转化为实变量的函数形式

随机变量的分布函数(Cont.)

如何入手将概率问题转化为实变量的函数形式？

我们研究的对象是随机事件的概率

我们研究的对象是随机变量的取值或取值范围的概率

$P(X=x)$，$P(X\le x)$，$P(X>x)$，$P(x_1\le X\le x_2)$，…

能否选用一个事件将所有事件都表达出来?

这种选择并不是唯一的

$P(X\le x)$

$P(A) \overset{X(\omega)}{\longleftrightarrow} P(X\le x)$

由此引进了分布函数的概念：

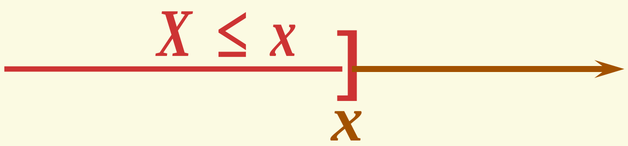
分布函数

分布函数是一个普通的函数，通过它，我们就可以用分析的工具来研究随机变量的取值规律

定义 设 X 是随机变量，称

$$F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

为 X 的分布函数.



将 X 看作数轴上随机点的坐标，分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X 落在区间 $(-\infty, x]$ 的概率.

$F(x)$ 起什么作用？

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a)$$

随机点落在任意区间 $(a, b]$ 的概率

$$P(X>a)=1-P(X\le a)=1-F(a)$$

分布函数是对各类随机变量以及其概率问题的一个统一的描述方法.

例 掷一枚质地均匀的硬币，观察出现的是正面还是反面，

且 $X = \begin{cases} 1, & 出现正面; \\ 0, & 出现反面. \end{cases}$ 求 X 的分布函数 $F(x)$ 和概率 $P(0<X\leq 1)$，$P(X>2)$.

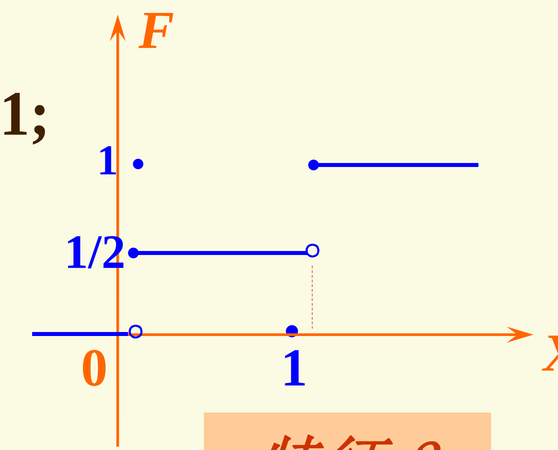
解 注意到 X 的所有可能取值为 0 和 1，

当 $x<0$ 时，$F(x)=P(X\leq x)=P(\Phi)=0$,

当 $0\leq x<1$ 时，$F(x)=P(X\leq x)=P(X=0)=1/2$,

当 $x\geq 1$ 时，$F(x)=P(X\leq x)=P(X=1)+P(X=0)=1$.

故 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1/2, & 0\leq x<1; \\ 1, & x\geq 1. \end{cases}$



$P(0<X\leq 1)=F(1)-F(0)=1/2$;

$P(X>2)=1-F(2)=1-1=0$.

特征？

分布函数的特征性质

非负性 (1) $\because F(x)$ 是事件的概率， $0 \le F(x) \le 1, \quad -\infty < x < \infty$;

单调不减性 (2) $F(x)$ 是 x 的非减函数，即若 $x_1 < x_2$，则 $F(x_1) \le F(x_2)$

规范性 (3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$

右连续性 (4) $F(x)$ 关于 x 右连续， 即对任意的实数 x_0 ，有

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0).$$

如果一个函数具有上述性质，则一定是某个随机变量 X 的分布函数. 也就是说，性质(1)—(4)是鉴别一个函数是否是某随机变量的分布函数的充分必要条件.

离散型随机变量的分布函数

设离散型随机变量X的分布律是

$$P\{X = X_k\} = p_k \qquad k = 1,2,3\cdots$$

则 $$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

$F(x)$是X取$\le x$的诸值x_k的概率之和.

离散型随机变量的分布函数(Cont.)

例　设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数,并求 $P\{X \le \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\}$,

$P\{2 \le X \le 3\}$.

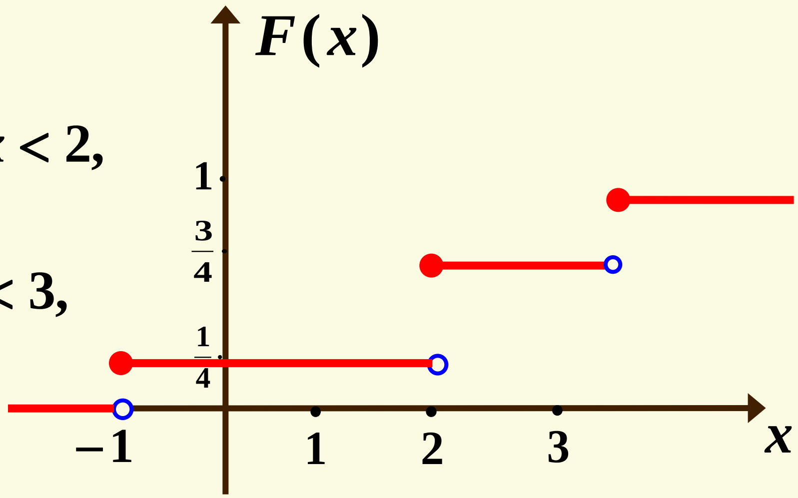
解　由于 X 仅在 $x = -1, 2, 3$ 处概率不为0, 且

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k ,$$

离散型随机变量的分布函数(Cont.)

得 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ P\{X=-1\}, & -1\le x<2,\\ P\{X=-1\}+P\{X=2\}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{4}, & -1\le x<2,\\ \dfrac{3}{4}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$



离散型随机变量的分布函数(Cont.)

由 $F(x) = P\{X \le x\},$

得 $P\{X \le \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \le X \le 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

连续型随机变量的分布函数

定义：设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，如果存在一非负函数 $p(x)$，使对任意实数 x，有

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

由定义可知，连续型随机变量的分布函数是连续函数，是密度函数的可变上限的定积分.

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

利用以上关系可以推得，随机变量 X 落入某有限区间 $(a\ b]$ 内的概率为

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)dx$$

它是以$(a, b]$为底，以曲线 $y = f(x)$为顶的曲边梯形的面积。

类似可得 X 取值落入 $(x, +\infty)$内的概为：

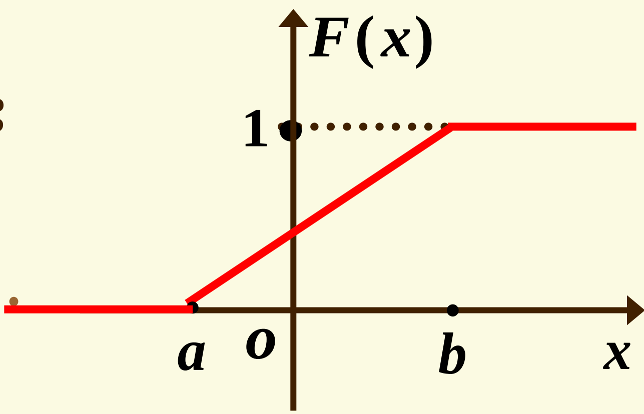
$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

例： 若随机变量**X**服从区间[a b] 上的均匀分布，写出它的分布函数及概率密度函数。

解：均匀分布的概率密度为：

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & 其它 \end{cases}$$



从而，它的分布函数为

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

例 设

$$X \sim f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}，求F(x)。$$

由于f(x)是分段的，求 $F(x)$ 时注意分段求.

解 由定义

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x t\,dt, & 0 \le x < 1 \\ \int_0^1 t\,dt+\int_1^x (2-t)\,dt, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ 2x-1-\dfrac{x^2}{2}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}.$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

例：在线计算机终端的响应时间X（以秒计）服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求X的分布函数$F(x)$.

并求概率$P\{X\le 10\},P\{5\le X\le 10\}$.

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

解： $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x/5}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$

$$P\{X\le 10\}=F(10)=1-e^{-2}=0.865(\text{秒})，$$

$$P\{5\le X\le 10\}=F(10)-F(5)=0.233(\text{秒}).$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

例　设随机变量X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

求X取值在区间(0.3, 0.7)的概率及概率密度。

解： $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)$

$$=0.7^2-0.3^2=0.4$$

$F'(x)$处处存在

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

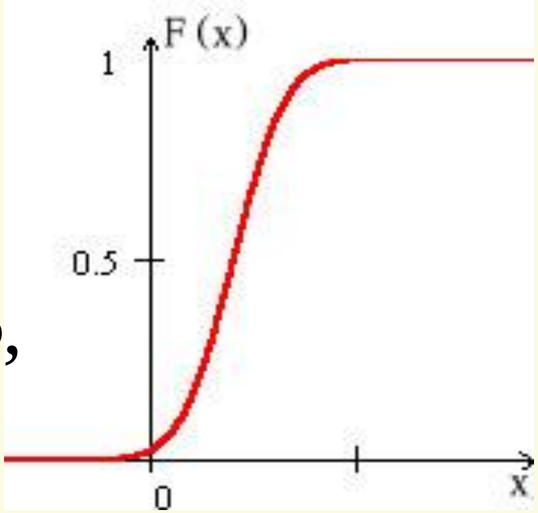
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的分布函数

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， X 的分布函数是

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad, -\infty < x < \infty$$

概率密度:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty,$$



连续型随机变量的分布函数(Cont.)

标准正态分布

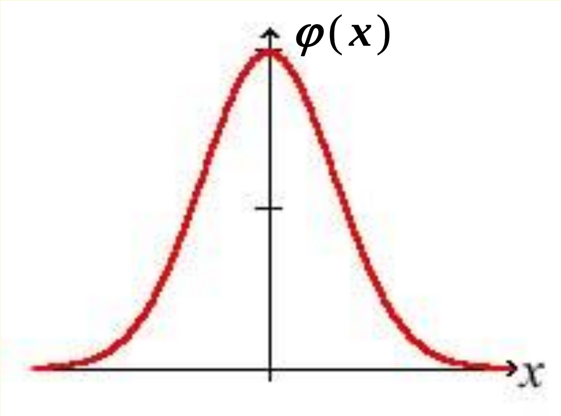
$\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布称为标准正态分布.

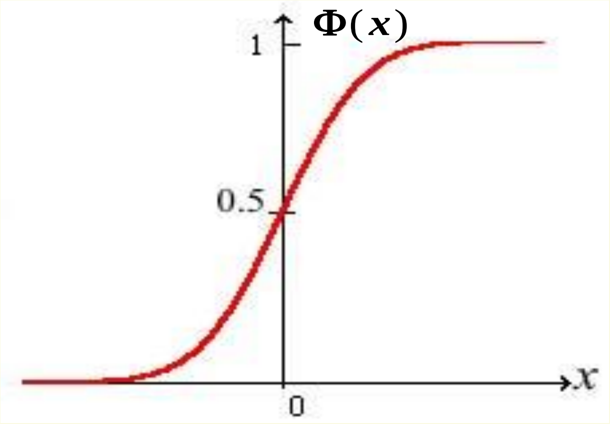
其密度函数和分布函数常用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad ,-\infty<x<\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\quad ,\ -\infty<x<\infty$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)





连续型随机变量的分布函数(Cont.)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ \ (-\infty<x<\infty)$$ 的性质：

(1) $\Phi(0)=\frac{1}{2}$；

$$\left(\ \Phi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}\ \right)$$

(2) $\forall x\in R,\Phi(-x)=1-\Phi(x)$；

事实上，$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

$$\underline{\underline{u=-t}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\Phi(x)$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

正态分布表

书末附有标准正态分布函数数值表，有了它，可以解决一般正态分布的概率计算查表.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

表中给的是 $x>0$ 时, $\Phi(x)$的值.

当 $x<0$ 时， $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

若 $X \sim N(0,1)$,

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

定理 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

定理的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

证　Z 的分布函数为

$$P\{Z \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right\} = P\{X \le \mu + \sigma x\}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

令 $u=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$ ，则有

$$P\{Z\le x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(x)$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

故 $$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

于是

$$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow F(x)=P\{X\le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

连续型随机变量的分布函数(Cont.)

$$P(a < X < b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma})$$

$$= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

3σ 准则

由标准正态分布的查表计算可以求得，

当$X \sim N(0, 1)$时，

$$P(|X| \le 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P(|X| \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

$$P(|X| \le 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

这说明，X的取值几乎全部集中在$[-3,3]$区间内，超出这个范围的可能性仅占不到0.3%.

将上述结论推广到一般的正态分布,

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 时, $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$$P(|Y-\mu|\le\sigma)=0.6826$$

$$P(|Y-\mu|\le 2\sigma)=0.9544$$

$$P(|Y-\mu|\le 3\sigma)=0.9974$$

可以认为，Y 的取值几乎全部集中在

$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 区间内.

这在统计学上称作“3σ 准则”.

应用正态分布的例子:

例 公共汽车车门的高度是按男子与车门顶头碰头机会在 0.01 以下来设计的. 设男子身高$X \sim N(170, 6^2)$, 问车门高度应如何确定?

解 设车门高度为h cm, 按设计要求

$$P(X \geq h) \leq 0.01$$

或 $$P(X < h) \geq 0.99,$$

下面我们来求满足上式的最小的h .

求满足 $P(X<h)\geq 0.99$ 的最小的 h.

因为 $X\sim N(170,6^2)$，所以 $\frac{X-170}{6}\sim N(0,1)$.

故 $P(X<h)=P\left(\frac{X-170}{6}<\frac{h-170}{6}\right)$

$$=\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right)$$

查表得 $\Phi(2.33)=0.9901>0.99$

因而 $\frac{h-170}{6}=2.33,$

即 $h=170+13.98\approx 184$

设计车门高度为184厘米时，可使男子与车门碰头机会不超过0.01.

重要公式

(1) $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$,

(2) $P\{X > a\} = 1 - F(a)$.

(3)设 X 是离散型随机变量，其分布律为

$P\left\{X = x_k\right\} = p_k, k = 1,2,\cdots$ 　　则

1^0 　$F(x) = P\{X \le x\} = \sum\limits_{x_k \le x} p_k$

2^0 　$P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a) + P\{X = a\}$

3^0 　$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) + P\{X = a\} - P\{X = b\}$

4^0 　$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a) - P\{X = b\}$.

重要公式

(4) 设X为连续型随机变量,则

1^0 $F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

2^0 若 $f(x)$ 在点 x 处连续,有 $F'(x) = f(x)$

3^0 $P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\} = P\{a \le X \le b\}$

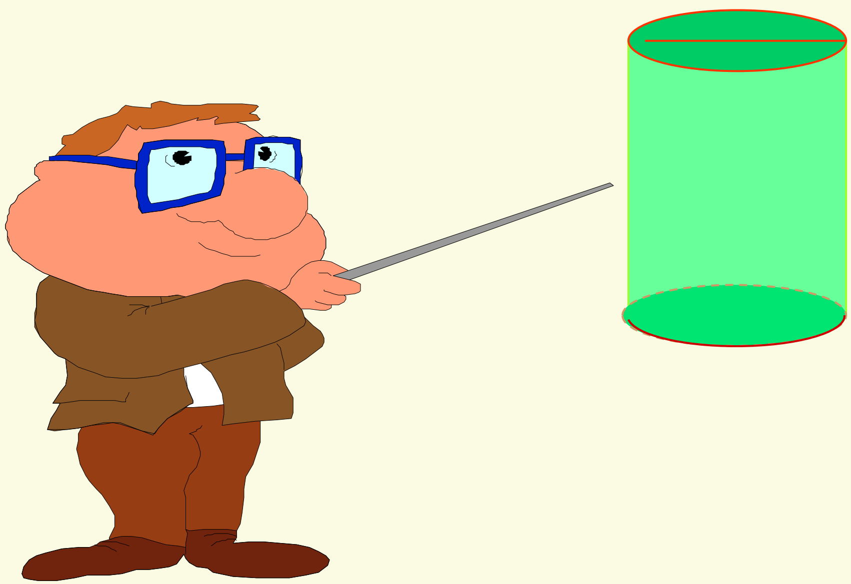
$= P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a),$

随机变量的函数的分布

问题的提出：

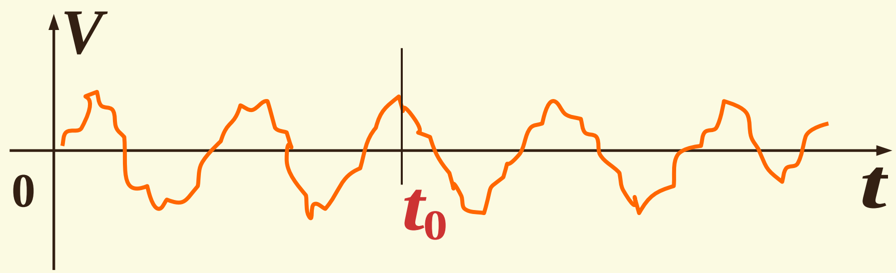
已知圆轴截面直径 d 的分布，

求截面面积 $A=\dfrac{\pi d^2}{4}$ 的分布.



随机变量的函数的分布(Cont.)

再如， 已知$t=t_0$时刻噪声电压V的分布，



求功率 $W=V^2/R$ （R为电阻）的分布.

在实际中，人们常常对随机变量X的函数$Y=g(X)$所表示的随机变量Y更感兴趣

设随机变量X的分布已知，又$Y=g(X)$（设g是连续函数）

如何由X的分布求出Y的分布？

无论在实践中还是在理论上都是重要的

通过实例找方法

离散型随机变量函数的分布

例

X	-2	-1	0	1	2
p_k	1/10	1/5	2/5	1/5	1/10

求$Y=2X+1$, $Y=X^2$的分布列.

解

X 取值分别为 $-2, -1, 0, 1, 2$ 时, $Y=2X+1$ 对应值为$-3, -1, 1, 3, 5$.（ X 取某值与 Y 取其对应值是相同的事件, 两者的概率应相同 ）

$P(Y=-3)=P(X=-2)=1/10;$
$P(Y=-1)=P(X=-1)=1/5;$
$P(Y=1)=P(X=0)=2/5;$

$P(Y=3)=P(X=1)=1/5;$
$P(Y=5)=P(X=2)=1/10;$

$Y=2X+1$	-3	-1	1	3	5
p_k	1/10	1/5	2/5	1/5	1/10

离散型随机变量函数的分布(Cont.)

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y=X^2 \\ -2 & \to & 4 \\ -1 & \to & 1 \\ 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \to & Y=X^2 \\ -2,2 & \to & 4 \\ -1,1 & \to & 1 \\ 0 & \to & 0 \end{array}$$

$$P(Y=0)=P(X=0)=2/5;$$

$$P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=1/5+1/5=2/5;$$

$$P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=1/10+1/10=1/5;$$

$Y=X^2$	0	1	4
p_k	2/5	2/5	1/5

离散型随机变量函数的分布(Cont.)

一般地，离散型随机变量 X 的分布为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

首先将的取值代入函数关系，求出随机变量Y相应的取值 $y_i = g(x_i) \quad (i = 1, 2, \cdots. \ )$

如果 $y_i(i=1,2,\ldots)$的值各不相等，则$Y=g(X)$的概率分布为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

离散型随机变量函数的分布(Cont.)

如果 $y_i = g(x_i) \quad (i = 1, 2, \cdots.\ )$ 中出现**m(≥2)**个相同的函数值，即存在 $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ 使

$$g(x_{k_1}) = g(x_{k_2}) = \cdots = g(x_{k_m}) = \tilde{y}$$

则在***Y***的分布列中，取的概率为

$$P\{Y = \tilde{y}\} = P\left\{X = x_{k_1}\right\} + P\left\{X = x_{k_2}\right\} + \cdots$$

$$+ P\left\{X = x_{k_m}\right\} = \sum_{i=1}^{m} p_{k_i}$$

连续型随机变量函数的分布

例 设 X 具有概率密度 $p(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

求 $Y=-2X+8$ 的概率密度.

解 设Y的分布函数为 $F_Y(y)$,

① 则 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2X+8\le y)$,

$$=P(X\ge\frac{8-y}{2})=\int_{\frac{8-y}{2}}^{+\infty}p(t)dt,$$

于是Y的概率密度为

② $$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{d}{dy}\int_{\frac{8-y}{2}}^{+\infty}p(t)dt$$

$$=-p(\frac{8-y}{2})\cdot(\frac{8-y}{2})'=p(\frac{8-y}{2})\cdot\frac{1}{2}$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

这里用到变限的定积分的求导公式

如果 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt,$

则 $F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x).$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

注意到 $0 < x < 4$ 时，$p(x) \neq 0,$

即 $0 < y < 8$ 时，$p(\frac{8-y}{2}) \neq 0,$

此时 $p(\frac{8-y}{2}) = \frac{8-y}{16},$

$$\therefore p(y) = \begin{cases} \frac{8-y}{32}, & 0 < y < 8; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

例　设 X 具有概率密度 $f_X(x)$，求$Y=X^2$ 的概率密度.

解　设Y和X 的分布函数分别为$F_Y(y)$ 和 $F_X(x)$，

注意到 $Y=X^2\geq 0$，故当 $y\leq 0$时，$F_Y(y)=0$;

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)\overset{①}{=}P(X^2\leq y)$

$$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

求导可得

$$f_Y(y)\overset{②}{=}\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0;\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

若 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty < x < \infty$

则 $Y=X^2$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

从上述两例中可看到，在求$P\{Y\le y\}$的过程中，关键是第一步中：设法从$\{g(X)\le y\}$中解出X，从而得到与$\{g(X)\le y\}$等价的关于X的不等式．

如上两例中,用 $\{X\ge \frac{8-y}{2}\}$ 代替 $\{-2X+8\le y\}$

用$\{-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}\}$代替$\{X^2\le y\}$

即利用已知的X的分布,求出X的函数的分布

求连续型随机变量的函数的分布的常用方法

定理

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

定理

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty < x < \infty$,
又设函数 $g(x)$ 处处可导，且有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$).
则 $Y = g(X)$ 是一个连续型随机变量 Y，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数，$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$,
即 $x = g^{-1}(y) = h(y)$ $\qquad \beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$.

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

定理（续）

若 $f_X(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 以外等于零，则只须假设在 $[a,b]$ 上恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$），此时仍有：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

这里 $\alpha=\min\{g(a),g(b)\}$, $\beta=\max\{g(a),g(b)\}$.

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

证明：

设随机变量$Y=g(X)$的分布函数为$F_Y(y)$，

则有 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$

由题设，不妨假设$g'(x)>0$，则$g(x)$是严格增加的函数.

因此，$F_Y(y)=P\{X\le g^{-1}(y)\}=P\{X\le h(y)\}$

$$=\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

由题设，当随机变量 X 在区间$(-\infty，+\infty)$上变化时，随机变量Y在区间$(\alpha，\beta)$上变化.

其中，

$$\alpha = \min\{g(-\infty), \quad g(+\infty)\}, \quad \beta = \max\{g(-\infty), \quad g(+\infty)\}$$

因此，当$y \in (\alpha，\beta)$时，

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

所以，$f(y) = F_Y'(y) = \dfrac{d}{dy}\left(\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx\right)$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

$$= f_X(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

若 $g'(x) < 0$，则 $g(x)$ 是严格减少的函数.

因此，当 $y \in (\alpha, \beta)$ 时，

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$

$$= P\{X \ge g^{-1}(y)\} = P\{X \ge h(y)\} = \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx$$

所以，$f(y) = F_Y'(y) = \dfrac{d}{dy}\left(\displaystyle\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx\right)$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

$$= -f_X(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

综上所述，得$Y = g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

补充定理：

若g(x)在不相叠的区间 $I_1, I_2, \cdots$ 上逐段严格单调，其反函数分别为 $h_1(y), h_2(y), \cdots$ 均为连续函数，那么Y=g(x)是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X(h_1(y))\left|h_1'(y)\right| + f_X(h_2(y))\left|h_2'(y)\right| + \cdots$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

例 设随机变量 $X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$, $Y = e^X$，试求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

解：

由题设，知 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

因为函数 $y = g(x) = e^x$ 处处可导，且是严格增加的，它的反函数为 $x = h(y) = \ln y$.

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

并且当随机变量 X 在区间 $(-\infty, \ +\infty)$ 上变化时，$Y=e^X$ 在区间 $(0, \ +\infty)$ 上变化．所以，当 $y\in(0, \ +\infty)$ 时，

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\left|(\ln y)'\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\frac{1}{y}$$

由此得随机变量 $Y=e^X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma}\exp\left\{-\dfrac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

例

设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明X的线性函数$Y = aX + b$ $(a \neq 0)$也服从正态分布.

证　X的概率密度为:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$y = g(x) = ax + b, g'(x) = a$,满足定理的条件,

$y = g(x)$的反函数为: $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$,且$h'(y) = \dfrac{1}{a}$.

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

由定理的结论得：$x=h(y)=\dfrac{y-b}{a}$，且$h'(y)=\dfrac{1}{a}$.

$$f_Y(y)=f_X[h(y)]\,|h'(y)|=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}.$$

即有$Y=aX+b\sim N\left(a\mu+b,(a\sigma)^2\right).$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

例

设电压$V = A\sin\Theta$, 其中A是一个已知的正常数,

相角Θ是一个随机变量, 在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上服从

均匀分布，试求电压V的概率密度.

解:

Θ的概率密度为: $$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

$v = g(\theta) = A\sin\theta$, 在（$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$）, $g'(\theta)$处处存在，且有

$g'(\theta) = A\cos\theta > 0$, 且有反函数 $\theta = h(v) = \arcsin\frac{v}{A}$,

以及 $$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$

当θ在（$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$）上变化时,, $v = g(\theta) \in [-A, A]$.

连续型随机变量函数的分布(Cont.)

利用定理的结论：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

得 $V=A\sin\Theta$ 的概率密度为：

$$h'(v)=\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}, & -A<v<A, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

作业

Exes. 4, 9, 13, 15, 20, 24, 26, 34, 35