中山大学本科生考试答题纸

学院(系)________ 专业________ 级

考试科目________ 成绩评定________

考生姓名________ 教师签名________

学　　号________ 年　月　日

装　订　线

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

作业5：

1. 证明：一个图是2边连通的当且仅当任意两个顶点至少由两条边不重路所连。

证明：若G的任意两个顶点至少被两条边不重的路所连，则显然，G是连通的，并且没有割边，因此G是2边连通的。

反之，假设G是2边连通的。对u和v之间的距离d(u,v)用归纳法证明：任意两个顶点u和v至少被两条边不重的路所连。

首先假设d(u,v)=1。由于G是2边连通的，G-uv中还有一条uv路P，故P和uv是两条边不重的(u,v)路。

现在假设对于距离小于k的任意两个顶点命题成立，并且设d(u,v)=k≥2。考查长为k的一条(u,v)路，并且设w是该路上v前面的那个顶点。因为d(u,w)=k-1，由归纳假设可知：在G中有两条边不重的(u,w)路P和Q。又因为G是2边连通的，所以G-wv连通，并且包含一条(u,v)路P'。设x是在P'中又在P∪Q中的最后一个顶点。由于u在P∪Q中，这样的顶点x是存在的。

不失一般性，可假定x在P中(可能同时在Q中)，于是G有

两条边不重的 (u,v) 路径，一条由 P 的一节（从 u 到 x）和 P' 的一节（由 x 到 v）联接合组成，另一条由 Q 和路径 wv 组成。由引理的方法，有结论成立。

2. 证明：不是块的连通图至少有两个块，每一个恰有一个割点。

证明：构造一个图 H，它的顶点集为 $U\cup V$，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，每一个 u_i 对应 G 中一个割点，$u_1,u_2,\cdots,u_k$ 是 G 中所有不同的割点，每一个 v_j 对应 G 中一个不同的块 B_j。若在 G 中，块 B_j 包含割点 u_i，则在 H 中作一条边 u_iv_j。这样得到的图 H 是一棵树。H 中的叶子 v_k 对应 G 中的一个块 B_j，它仅包含一个割点 u_i。由树的性质知，H 是非平凡树，因此至少有两片叶子。故 G 中有至少两个块（对应 H 中的两个叶子），它们分别仅包含一个割点。

3. 证明：若 G 是 $k\geq 2$ 的 k-连通图，则 G 的任何 k 个顶点都同时包含在某个圈中。

证：因为 G 是 $k\geq 2$ 的 k 连通图，设 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 为 G 中任意给定的 k 个顶点的集合。我们将证明 S 包含在 G 的一个圈中。

因为 G 是 2 连通图，S 中至少两个顶点包含在 G 的一个圈中。设 C 是包含 S 中尽可能多顶点的一个圈。反证法，假设 C 包含 S 中少于 k 个顶点。不失一般性，设 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 包含在 C 中，并且设 $r<k$，$v_{r+1},\cdots,v_k$ 不在 C 中。

现在证，在 G 中加入一个新顶点 u，并且 u 与 G 中 m 个顶点连边，得到图 H，则 H 是 $\min\{k,m\}$ 连通的。这因为任一顶点集 T，并且 $|T|=\min\{k-1,m-1\}$，在 H 中不能构成割集。

现在在 G 中加入一个新顶点 u，u 与 C 上每一个顶点相邻，

则G是 $\min\{k, |V(C)|\}$ 连通的，注意 $|V(C)| \geq r$ 且 $r<k$，故G是 r 连通的。选取圈外一点 v_{r+1}，由Menger定理，v_{r+1} 到 u 有 r 条内部不相交的路径，因而 v_{r+1} 到 C 有 r 条除 v_{r+1} 点外不相交的路径 $P_1, P_2, \cdots, P_r$。设 P_i 起始于 v_{r+1} 终止于 C 上 u_i 点。不失一般性设 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 在 C 上沿顺时针方向依次出现。则必有两条路径 P_i 和 P_j 它们的端点出现在 C 的 $C[v_s, v_{s+1}]$ 节上，不失一般性，设在 C 上沿顺时针方向 v_s, u_i, u_j, v_{s+1} 依次出现。注意到 $C[u_i, u_j]$ 节上不含任何 $v_m \in S$。从而，$C' = C^+[u_j, u_i] + P_i + P_j$ 是一个包含 $\{v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$ 的圈且 C' 在G中。这与 C 是包含 S 中尽可能多顶点的圈的假设矛盾。