中 山 大 学 本 科 生 考 试 答 题 纸

学院(系) 专业 级

考试科目 成绩评定

考生姓名 教师签名

学 号 年 月 日

作业13：

1. 证明：若G是围长(最短圈长) $k\geq 3$ 的连通平面图，则

$$\varepsilon \leq k(\nu-2)/(k-2).$$

证明：设G是平图，围长 $k\geq 3$。由定理10.6，有

$$k\phi \leq \sum_{f\in F} d(f) = 2\varepsilon.$$

$$\therefore \phi \leq \frac{2}{k}\varepsilon$$

代入欧拉公式：$\nu-\varepsilon+\frac{2}{k}\varepsilon \geq 2.$

整理得 $\varepsilon \leq k(\nu-2)/(k-2).$

2. 每个面的度都是3的平图称为平面三角剖分图(或极大平面图)。证明：每个简单平图都是某个简单平面三角剖分图($\nu\geq 3$)的生成子图。

证明：设G是 $\nu\geq 3$ 的平图，我们构造一个平面三角剖分图H，使得G是H的生成子图。构造方法如下：

对于G的每一个度大于等于4的面f，找到f的边界上两个不相邻的顶点u和v，在f中加入一条连接u和v的边 $e=uv$。反复地按以上方法加边，直到该平图中再也没有度大于等于4的面(即所有的面度都是3)，这样得到的图H显然是平面三角剖分图，并且G是它的生成子图.

3. 设G是$v\geq 4$的简单平面三角剖分图。证明：G^*是简单2边连通3正则平面图。

证明：由简单平面三角剖分图的性质，G中任意两个面不会有多于一条公共边界，故G^*不会有重边。又由对偶图的性质，因为G无割边，故G^*无环。所以G^*是简单图。又因为G无环，故G^*无割边，故G^*是2边连通图。又因为G的每个面f的度为$d_G(f)=3$，由对偶图的性质，G^*对应f的顶点f^*有 $d_{G^*}(f^*)=d_G(f)=3$。故G^*是3-正则平面图。故结论得证。