第3章 模糊控制的理论基础

Chapter 3 Fundamentals of Fuzzy Control

内容提要

3.1 概述

3.2 模糊集合

3.3 隶属函数

3.4 模糊关系及其运算

3.5 模糊推理

3.1 概述

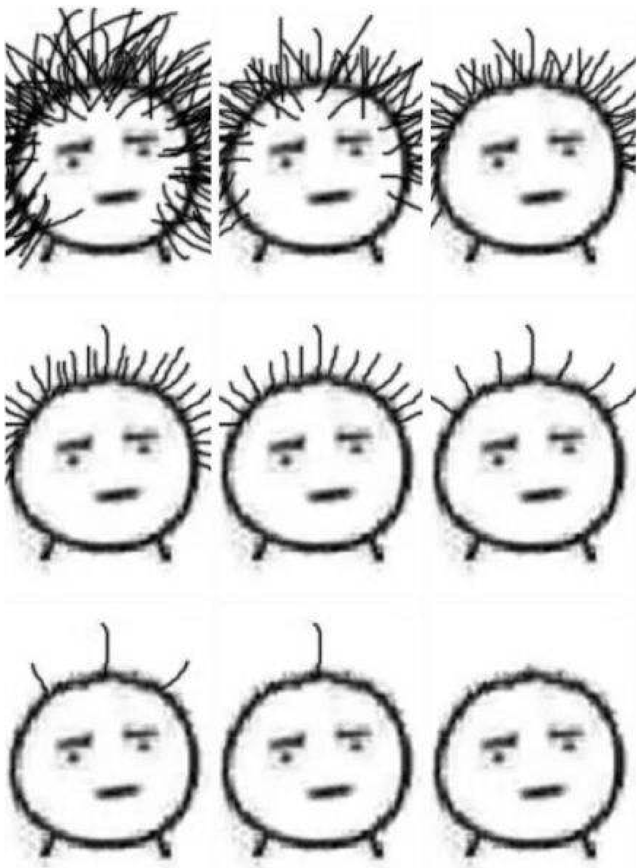
谷堆悖论

谷堆不存在：

- 一粒谷子不构成谷堆，并且
- 如果 n 粒谷子不构成谷堆，那么 n+1 粒谷子也不构成谷堆。

3.1 概述

秃子悖论



如果一个有N根头发的人被称为秃子，
那么，有N+1根头发的人也是秃子。
所以，(N+1)+1根头发的还是秃子。

以此类推，无论你有几根头发都是秃子。

3.1 概述

（一）模糊控制的提出

扎德（Zadeh，L.A.；1921~2017）

- 美国自动控制专家，美国工程科学学院院士。1921年2月生于苏联巴库。 1949年获哥伦比亚大学电机工程博士。
- 曾任加利福尼亚大学伯克利分校电机工程与计算机科学系教授。
- 因发展模糊集理论的先驱性工作而获电气与电子工程师学会(IEEE)的教育勋章。

3.1 概述

HALL OF FAME

Lotfi Zadeh

Lotfi Zadeh is a mathematician, electrical engineer, computer scientist, professor of computer science, and the director of the Berkeley Initiative in Soft Computing (BISC) at the University of California, Berkeley. He received an MS in electrical engineering from the Massachusetts Institute of Technology and a PhD in electrical engineering from Columbia University. He published his seminal work on fuzzy sets in 1965, in which he detailed the mathematics of fuzzy set theory. In 1973, he proposed his theory of fuzzy logic. Zadeh is also credited, along with John R. Ragazzini, with having pioneered the development of the z-transform method in discrete time signal processing and analysis in 1952. These methods are now standard in digital signal processing, digital control, and other discrete-time systems used in industry and research. In 1991, Zadeh introduced the concept of soft computing, which highlights the emergence of computing methodologies in which the accent is on exploiting the tolerance for imprecision and uncertainty to achieve tractability, robustness, and low solution cost. He has received the Benjamin Franklin Medal, IEEE Richard W. Hamming Medal, ACM Allen Newell Award, and AIM Information Science Award. He is also a member of the National Academy of Engineering and a foreign member of the Russian Academy of Natural Sciences.

Fuzzy Logic and Computational Intelligence

By Derong Liu

As an indispensable constituent of AI, fuzzy logic is a superset of conventional (Boolean) logic that has been extended to handle the concept of partial truth, where the truth value can

corresponding rules for consistent mathematical operations (fuzzy arithmetic). In addition, Zadeh is credited, along with John R. Ragazzini, in 1952, with having pioneered the development of the z-transform method in discrete time signal processing

AI's Hall of Fame[J]. Intelligent Systems IEEE, 2011, 26(4):5-15.

3.1 概述

（一）模糊控制的提出

- 以往的各种传统控制方法均是建立在被控对象精确数学模型基础上的。然而，随着系统复杂程度的提高，将难以建立系统的精确数学模型。
- 在工程实践中人们发现，一个复杂的控制系统可由一个操作人员凭着丰富的实践经验得到满意的控制效果。这说明，如果通过模拟人脑的思维方法设计控制器，可实现复杂系统的控制，由此产生了模糊控制。

3.1 概述

■ 模糊控制是建立在人工经验基础之上的。

比如：对于一个熟练的操作人员，他往往凭借丰富的实践经验，采取适当的对策来巧妙地控制一个复杂过程。若能将这些熟练操作员的实践经验加以总结和描述，并用语言表达出来，就会得到一种定性的、不精确的控制规则。

■ 如果用模糊数学将其定量化，就转化为模糊控制算法，形成模糊控制理论。

3.1 概述

（二）模糊控制的定义

- “以模糊集合理论、模糊语言变量及模糊推理为基础的一类控制方法。”

- “采用模糊集合理论和模糊逻辑，并同传统的控制理论相结合，模拟人的思维方式，对难以建立数学模型的对象实施的一种控制方法。”

3.1 概述

（三）模糊控制的特点

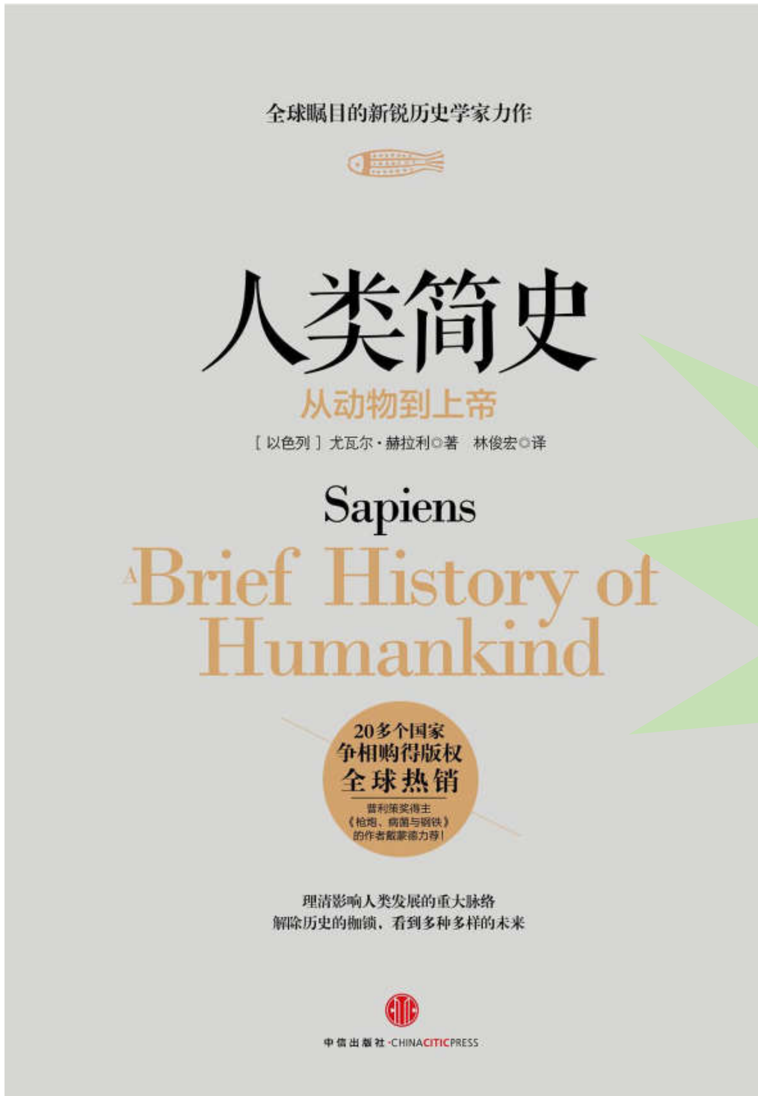
（1）模糊控制简化系统设计

模糊控制是以人对被控对象的控制经验为依据而设计的控制器，故无需知道被控对象的数学模型。简化系统设计的复杂性，特别适用于非线性、时变、滞后、模型不完全系统的控制。

（2）模糊控制是一种反映人类智慧的智能控制方法

模糊控制采用人类思维中的模糊量，如“高”、“中”、“低”、“大”、“小”等，控制量由模糊推理导出。<u>这些模糊量和模糊推理是人类智能活动的体现</u>。

3.1 概述



全球瞩目的新锐历史学家力作
人类简史
从动物到上帝
[以色列] 尤瓦尔·赫拉利◎著 林俊宏◎译
Sapiens
A Brief History of Humankind
20多个国家
争相购得版权
全球热销
普利策奖得主
《枪炮、病菌与钢铁》
的作者戴蒙德力荐！
理清影响人类发展的重大脉络
解除历史的枷锁，看到多种多样的未来
中信出版社·CHINACITICPRESS

虚构的概念！

3.1 概述

（3）模糊控制易于被人们接受

模糊控制的核心是控制规则，模糊规则是用语言来表示的，如“今天气温高，则今天天气暖和”，易于被一般人所接受。

（4）构造容易

模糊控制规则易于软件实现。

（5）鲁棒性、适应性、容错性好

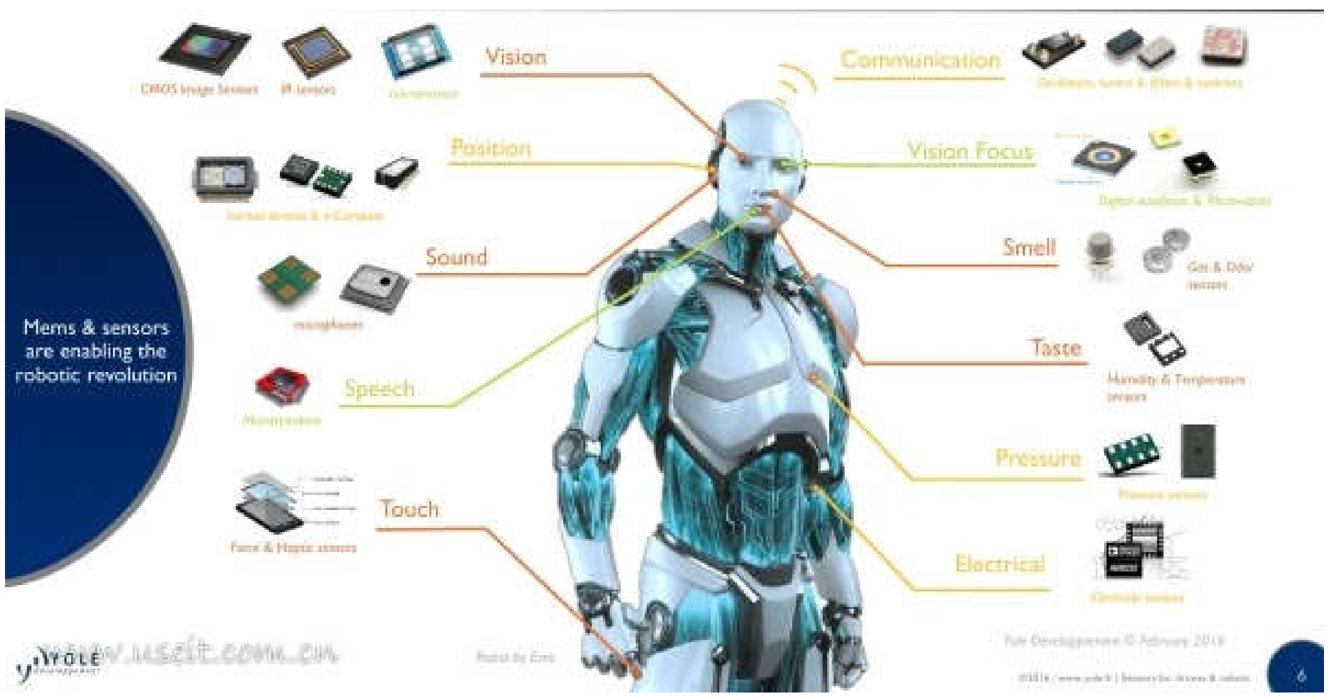
通过专家经验设计的模糊规则可以对复杂的对象进行有效的控制。

3.2 模糊集合

（一）模糊集合的概念

对大多数应用系统而言，其主要且重要的信息来源有两种，即来自**传感器**的**数据信息**和来自**专家**的**语言信息**。

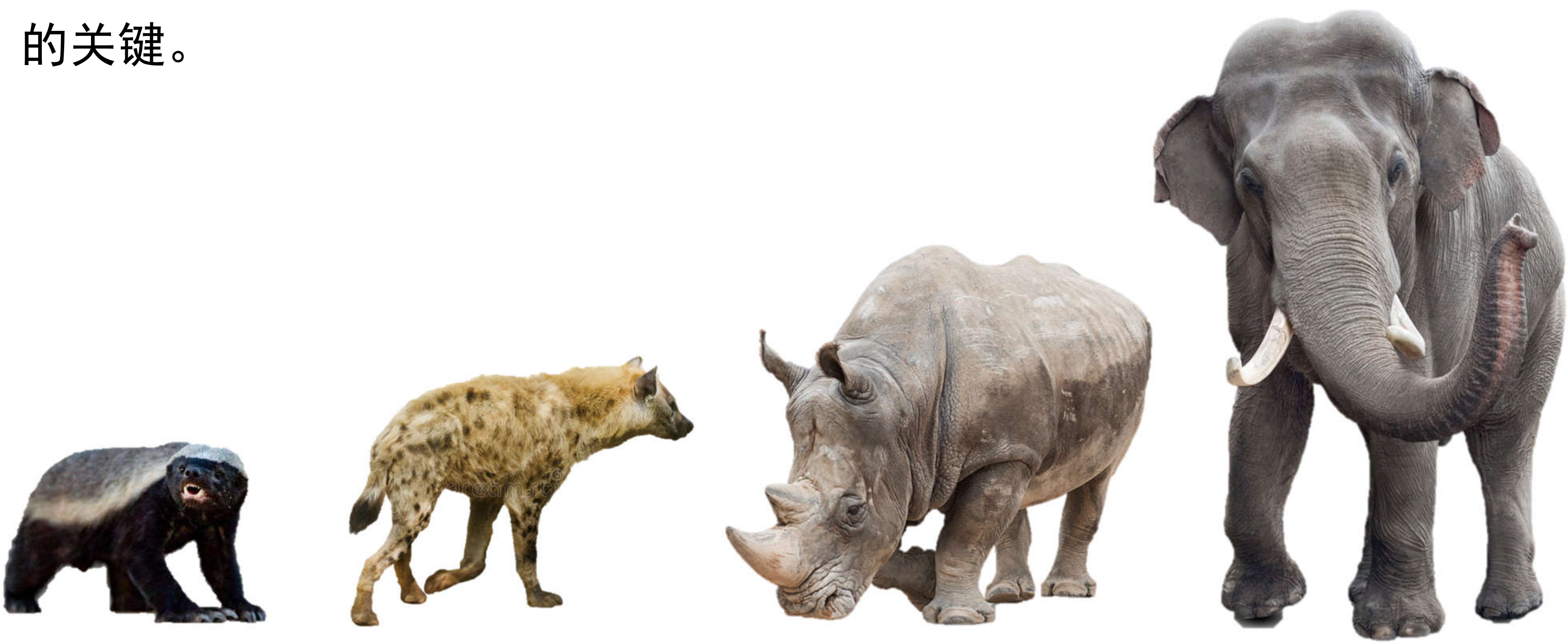
a）数据信息常用0.5，2，3，4.5等数字来表示；



3.2 模糊集合

b）而语言信息则用诸如“大”、“小”、“中等”、“非常小”等文字来表示。

传统的工程设计方法只能用数据信息而无法使用语言信息，而人类解决问题时所使用的大量知识是经验性的，它们通常是用语言信息来描述。语言信息通常呈经验性，是模糊的。因此，如何描述模糊语言信息成为解决问题的关键。



3.2 模糊集合

风量的大小

富裕和贫穷

美丑

胖瘦

3.2 模糊集合

（1）特征函数和隶属函数

在数学上经常用到集合的概念。

例如：集合A由4个离散值$x1$，$x2$，$x3$，$x4$组成。

$$A=\{x1,x2,x3,x4\}$$

例如：集合A由0到1之间的连续实数值组成。

$$A=\{x,x\in R,1.0\le x\le 1.0\}$$

以上两个集合是完全不模糊的！

3.2 模糊集合

设U为所讨论对象的集合，称为论域，可以是连续的或离散的；x表示的U元素，记作$U=\{x\}$。

对任意元素x，只有两种可能：属于A，不属于$\underline{A}$。这种特性可以用特征函数$\mu_A(x)$来描述：

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

3.2 模糊集合

为了表示模糊概念，需要引入模糊集合和隶属函数的概念：

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ (0,1) & x\text{属于}A\text{的程度} \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

其中A称为模糊集合，由0, 1及$\mu_A(x)$ 构成。

$\mu_A(x)$为隶属函数（或隶属度函数，Membership Function），表示元素x属于模糊集合A的程度，取值范围为[0, 1]，称$\mu_A(x)$为x属于模糊集合A的隶属度。

3.2 模糊集合

（2）模糊集合的表示

① 模糊集合A由离散元素构成，表示为：

<Zadeh表示法> $A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + \cdots + \mu_i / x_i + \cdots$

<序偶表示法> $A = \{(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), \cdots, (x_i, \mu_i), \cdots\}$

或简化为 $A = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_i, \cdots\}$

✓ 符号"/"不是表示"分数"，而是表示离散论域U上元素x与其隶属度μ之间的对应关系；

✓ 符号"+"不是表示"加法"，而是表示模糊集合在离散论域U上的整体。

3.2 模糊集合

② 模糊集合A由连续函数构成，此时A表示为：

$$A = \int \mu_A(x) / x$$

✓ 符号“∫”不是表示积分，而是表示连续论域U上的元素x与其隶属度μ之间一一对应关系的总体集合；

3.2 模糊集合

在模糊集合的表达中，符号“/”、“+”和“∫”不代表数学意义上的除号、加号和积分，它们是模糊集合的一种表示方式，表示“**构成**”或“**属于**”。

模糊集合是以隶属函数来描述的，隶属度的概念是模糊集合理论的基石！

3.2 模糊集合

【例3. 1】设论域U={张三，李四，王五}，评语为“学习好”。设三个人学习成绩总评分是张三得95分，李四得90分，王五得85分，三人都学习好，但又有差异。

若采用普通集合的观点，选取特征函数

$$C_A(u)=\begin{cases}1 & \text{学习好} \in A \\ 0 & \text{学习差} \in A\end{cases}$$

此时特征函数分别为C_A(张三)=1，C_A(李四)=1，C_A(王五)=1。这样，在论域层面就反映不出三者的成绩差异。

3.2 模糊集合

假若采用模糊子集的概念，选取[0，1]区间上的隶属度来表示它们属于“学习好”模糊子集A的程度，就能够反映出三人的差异。

采用隶属函数 $\mu_A(x) = x/100$ ，由三人的成绩可知三人“学习好”的隶属度为μ_A(张三)=0.95，μ_A(李四)=0.90，μ_A(王五)=0.85。用“学习好”这一模糊子集A可表示为：

$$A = \frac{0.95}{\text{张三}} + \frac{0.90}{\text{李四}} + \frac{0.85}{\text{王五}} \quad \text{或} \quad A = \{(\text{张三}, 0.95), (\text{李四}, 0.90), (\text{王五}, 0.85)\}$$

其含义为张三、李四、王五属于“学习好”的程度分别是0.95，0.90，0.85。

3.2 模糊集合

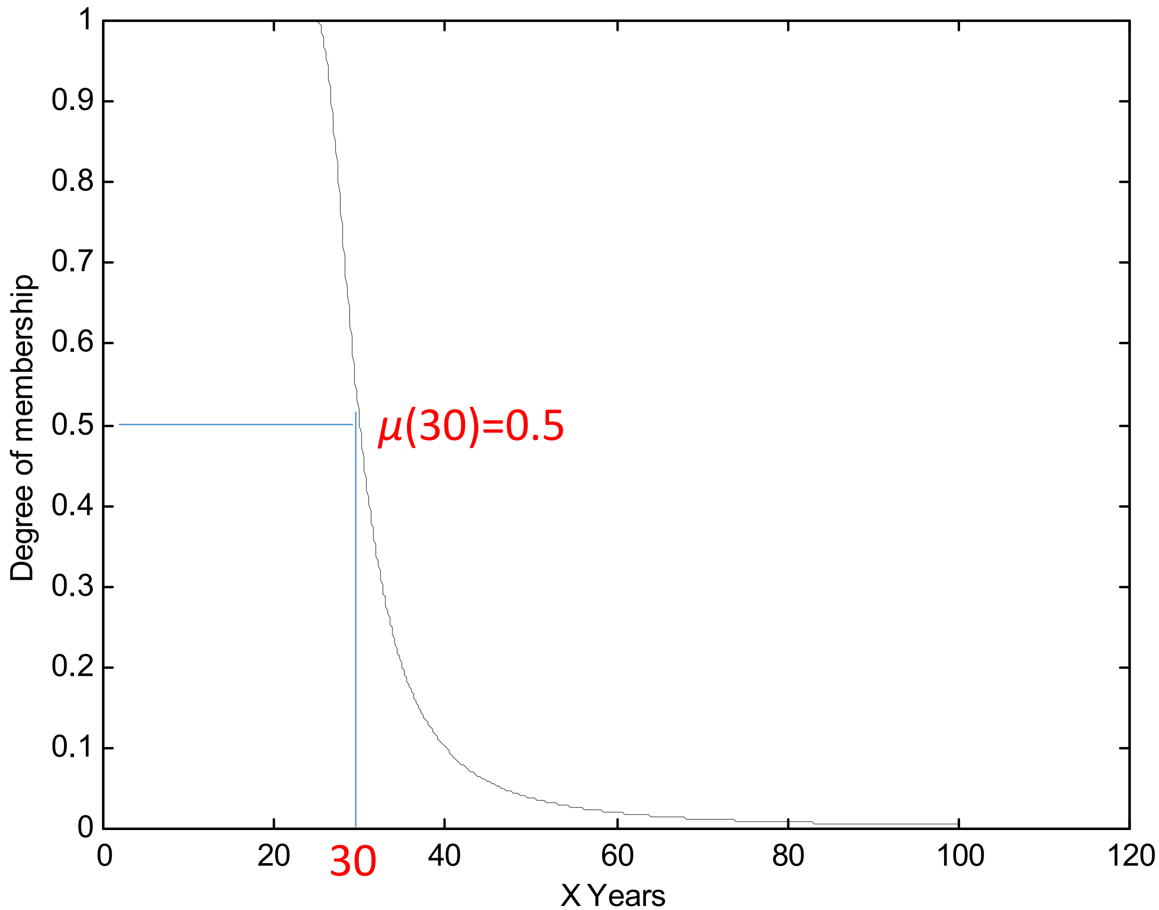
【例3.2】以年龄为论域，取 $X=[0,100]$ 。Zadeh给出了“年轻”的模糊集Y，其隶属函数为

<函数表示法>

$$Y(x)=\begin{cases}1.0 & 0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25< x\le 100\end{cases}$$

通过Matlab仿真对上述隶属函数作图，隶属函数曲线如图所示。

3.2 模糊集合



“年轻”的隶属函数曲线

3.2 模糊集合

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_i}{x_i} + \cdots$$

Zadeh表示法

模糊集合表示方法

序偶表示法

函数表示法

$$Y(x) = \begin{cases} 1.0 & 0 \le x \le 25 \\ \left[1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25 < x \le 100 \end{cases}$$

$$A = \{(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), \cdots, (x_i, \mu_i), \cdots\}$$

3.2 模糊集合

（二）模糊集合的运算

1 模糊集合的基本运算

由于模糊集是用隶属函数来表征的，因此两个子集之间的运算实际上就是逐点对隶属度作相应的运算。

（1）空集

模糊集合的空集为普通集，它的隶属度为0，即

$$A = \phi \Leftrightarrow \mu_A(u) = 0$$

3.2 模糊集合

（2）全集

模糊集合的全集为普通集，它的隶属度为1，即

$$A = U \Leftrightarrow \mu_A(u) = 1$$

（3）等集

两个模糊集A和B，若对所有元素u，它们的隶属函数相等，则A和B也相等。即

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(u) = \mu_B(u)$$

3.2 模糊集合

（4）补集

若 $\overline{A}$ 为A的补集，则

$$\overline{A} \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

例如，设A为“成绩好”的模糊集，某学生 u_0 属于“成绩好”的隶属度为：

$$\mu_A(u_0) = 0.8$$

则 u_0 属于“成绩差”的隶属度为：

$$\mu_{\overline{A}}(u_0) = 1 - 0.8 = 0.2$$

3.2 模糊集合

（5）子集

若B为A的子集，则

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \mu_B(u) \leq \mu_A(u)$$

（6）并集

若C为A和B的并集，则

C=A∪B

一般地，

$$\begin{aligned} A \cup B &= \mu_{A \cup B}(u) \\ &= \max(\mu_A(u), \mu_B(u)) \\ &= \mu_A(u) \vee \mu_B(u) \end{aligned}$$

<Zadeh算子>

3.2 模糊集合

（7）交集

若C为A和B的交集，则

$$C=A\cap B$$

一般地，

$$
\begin{aligned}
& A \bigcap B \\
&= \mu_{A\bigcap B}(u) \\
&= \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) \\
&= \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)
\end{aligned}
$$

<Zadeh算子>

3.2 模糊集合

（8）模糊运算的基本性质

模糊集合除具有上述基本运算性质外，还具有下表所示的运算性质。

模糊集合运算法则

（a）幂等律

$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

（b）交换律

$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（c）结合律

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3.2 模糊集合

（d）吸收律

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

（e）分配律

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

（f）复原律

$$\overline{\overline{A}} = A$$

3.2 模糊集合

（g）对偶律（德·摩根律，DeMorgan）

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

（h）两极律（同一律）

A∪U=U，A∩U=A

A∪ ∅ =A，A∩ ∅ = ∅

3.2 模糊集合

【例3.3】设 $A=\frac{0.9}{u_1}+\frac{0.2}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}+\frac{0.5}{u_4}$

$B=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0.4}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}$

求A∪B，A∩B

则

$$A\bigcup B=\frac{0.9}{u_1}+\frac{0.2}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}$$

$$A\bigcap B=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0.4}{u_3}+\frac{0.5}{u_4}$$

3.2 模糊集合

【例3.4】试证普通集合中的互补律在模糊集合中不成立，即

$$\mu_A(u) \vee \mu_{\overline{A}}(u) \neq 1$$

$$\mu_A(u) \wedge \mu_{\overline{A}}(u) \neq 0$$

证：设 $\mu_A(u) = 0.4$，则

$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\mu_A(u) \vee \mu_{\overline{A}}(u) = 0.4 \vee 0.6 = 0.6 \neq 1$$

$$\mu_A(u) \wedge \mu_{\overline{A}}(u) = 0.4 \wedge 0.6 = 0.4 \neq 0$$

3.2 模糊集合

（i）不满足互补律，即

$$A \cap \bar{A} \neq \phi$$

$$A \cup \bar{A} \neq U$$

这是由于模糊集合A没有明确的外延，因此其补集也没有明确的外延，从而A与$\bar{A}$存在重叠的区域，则有交集不为空集∅，并集也不为全集U。

3.2 模糊集合

模糊语言算子

语言算子是指表示否定等联结词和表示模糊修饰的词如“大概”、“差不多”、“有点”等算子，它们与所修饰的词语构成的派生词为一新的模糊子集，且可以进行模糊程度的定量描述。

设A为论域U上的一个模糊子集，常用语言算子的隶属函数计算方法如下：

极：$\mu_{极A}=\mu_A{}^4$

比较：$\mu_{比较A}=\mu_A{}^{0.75}$

非常：$\mu_{非常A}=\mu_A{}^2$

略：$\mu_{略A}=\mu_A{}^{0.5}$

相当：$\mu_{相当A}=\mu_A{}^{1.25}$

稍微：$\mu_{稍微A}=\mu_A{}^{0.25}$

3.2 模糊集合

【例】已知在温度论域

T={t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7}={10, 20, 30, 40, 50, 60, 70}

上定义的模糊语言变量值分别为

$$\text{温度高} = \frac{\boxed{0.3}}{40} + \frac{0.6}{50} + \frac{0.9}{60} + \frac{1.0}{70}$$

$$\text{温度低} = \frac{1.0}{20} + \frac{\boxed{0.8}}{30} + \frac{0.3}{40} + \frac{0.1}{50}$$

则不同的语言算子作用下构成新语言值

$$\boxed{0.3^2 = 0.09}$$

$$\text{非常高} = \frac{\boxed{0.09}}{40} + \frac{0.36}{50} + \frac{0.81}{60} + \frac{1.0}{70}$$

$$\boxed{0.8^{0.75} = 0.85}$$

$$\text{比较低} = \frac{1.0}{20} + \frac{\boxed{0.85}}{30} + \frac{0.41}{40} + \frac{0.18}{50}$$

3.2 模糊集合

不高也不低

$= \overline{高} \cap \overline{低}$

$$= \left(\frac{1.0}{20} + \boxed{\frac{1.0}{30} + \frac{0.7}{40} + \frac{0.4}{50} + \frac{0.1}{60}}\right) \cap \left(\boxed{\frac{0.2}{30} + \frac{0.7}{40} + \frac{0.9}{50} + \frac{1.0}{60}} + \frac{1.0}{70}\right)$$

$$= \frac{0.2}{30} + \frac{0.7}{40} + \frac{0.4}{50} + \frac{0.1}{60}$$

3.2 模糊集合

2 模糊算子（模糊集合运算）

模糊集合的逻辑运算实质上就是隶属函数的运算过程。采用隶属函数的取大（MAX）-取小（MIN）进行模糊集合的并、交逻辑运算是目前最常用的方法。但还有其它公式，这些公式统称为“**模糊算子**”。

设有模糊集合A、B和C，常用的模糊算子如下：

3.2 模糊集合

（1）Zadeh算子

设C=A∩B

① 交算子（Zadeh算子∧）

$$\mu_c(x) = Min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

设C=A∪B

② 并算子（Zadeh算子∨）

$$\mu_c(x) = Max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

3.2 模糊集合

模糊集的Zadeh运算满足除互补律外的所有定律，和经典集合运算十分相似：

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

德摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

两极律　$A\cup U=U$，$A\cap U=A$　　$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

吸收率　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$

3.2 模糊集合

（2）代数算子

设C=A·B

① 代数积算子

$$\mu_c(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$$

设C=A+B

② 代数和算子

$$\mu_c(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$$

3.2 模糊集合

模糊集的代数运算仍然满足

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

德摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

两极律　$A\cup U=U$，$A\cap U=A$　　$A\cup\emptyset=A$，$A\cap\emptyset=\emptyset$

不满足

幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

吸收率　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$

3.2 模糊集合

（3）有界算子

设C=A⊗B

① 有界积算子

$$\mu_c(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \vee 0$$
$$= Max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$

设C=A⊕B

② 有界和算子

$$\mu_c(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x)) \wedge 1$$
$$= Min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

设C=A⊖B

③ 有界差算子

$$\mu_c(x) = (\mu_A(x) - \mu_B(x)) \vee 0$$
$$= Max\{0, \mu_A(x) - \mu_B(x)\}$$

3.2 模糊集合

模糊集的有界运算仍然满足

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

德摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

两极律 $A\cup U=U$，$A\cap U=A$ $A\cup\emptyset=A$，$A\cap\emptyset=\emptyset$

不满足

幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

吸收率 $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$

3.2 模糊集合

（4）平衡算子

当隶属函数取大、取小运算时，不可避免地要丢失部分信息，采用一种平衡算子，即“算子”可起到补偿作用。

设A和B经过平衡运算得到C，则

$$\mu_c(x)=\left[\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right]^{1-\gamma}\cdot\left[1-(1-\mu_A(x))\cdot(1-\mu_B(x))\right]^{\gamma}$$

其中γ取值为[0，1]。

- 当γ=0时，$\mu_c(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$，相当于A∩B时的算子。
- 当γ=1，$\mu_c(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$，相当于A∪B时的代数和算子。平衡算子目前已经应用于德国Inform公司研制的著名模糊控制软件Fuzzy-Tech中。

3.2 模糊集合

结论：

- 这4组模糊算子各有长短。
- 在模糊信息的表达和处理中究竟选用那一组要根据实际的要求，通过实践的检验加以确定。

3.3 隶属函数

（一）几种典型的隶属函数

在Matlab中已经开发出了11种隶属函数，即双S形隶属函数（dsigmf）、联合高斯型隶属函数（gauss2mf）、高斯型隶属函数（gaussmf）、广义钟形隶属函数（gbellmf）、II型隶属函数(pimf)、双S形乘积隶属函数（psigmf）、S状隶属函数（smf）、S形隶属函数（sigmf）、梯形隶属函数（trapmf）、三角形隶属函数（trimf）、Z形隶属函数（zmf）。

在模糊控制中，应用较多的隶属函数有6种

3.3 隶属函数

【例3.5】隶属函数的设计：针对上述描述的6种隶属函数进行设计。M为隶属函数的类型，其中

- M=1为高斯型隶属函数，
- M=2为广义钟形隶属函数，
- M=3为S形隶属函数，
- M=4为梯形隶属函数，
- M=5为三角形隶属函数，
- M=6为Z形隶属函数。

如图所示。

3.3 隶属函数

（1）高斯型隶属函数

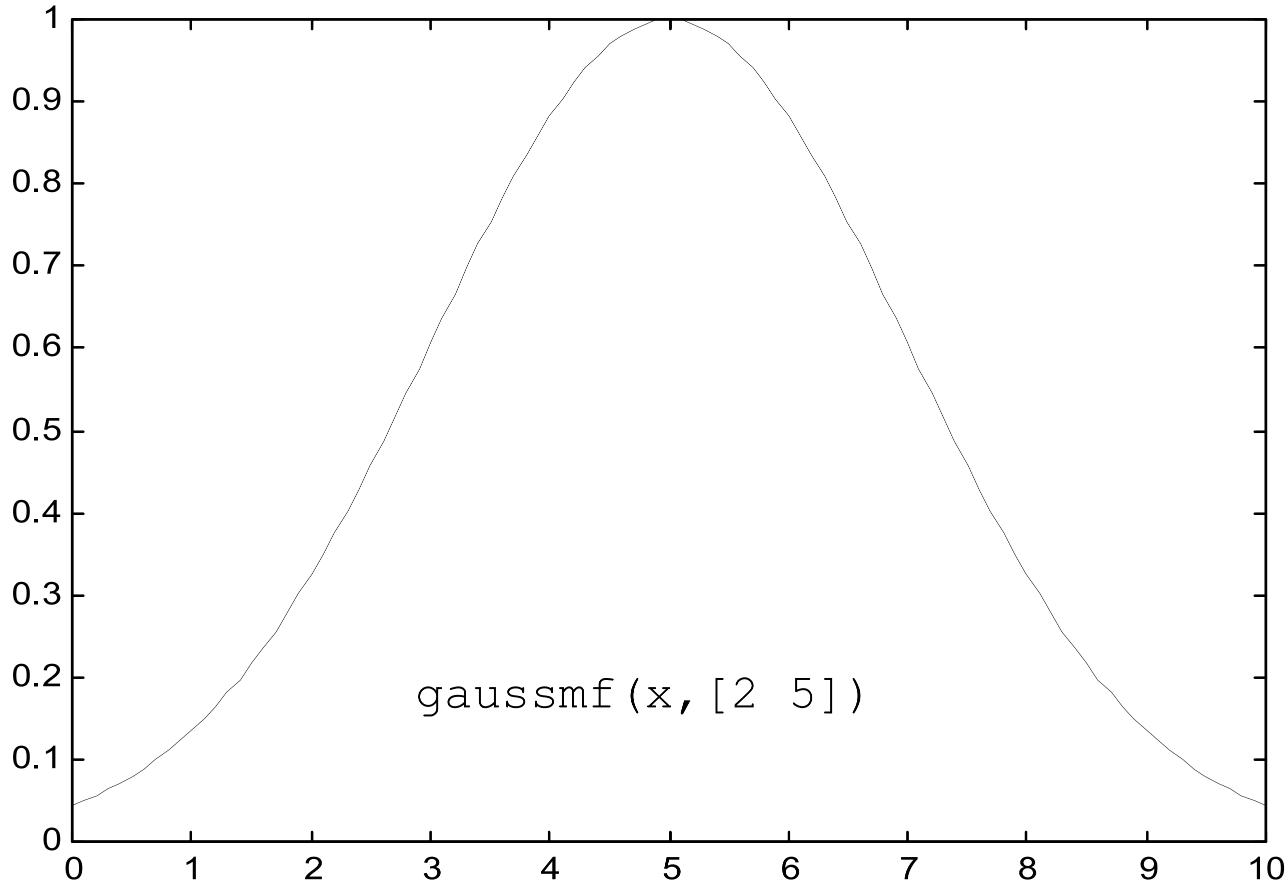
高斯型隶属函数由两个参数σ和c确定，即

$$f(x,\sigma,c)=e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

其中，参数σ通常为正数，参数c用于确定曲线的中心。Matlab表示为

gaussmf(x, [σ , c])

3.3 隶属函数



高斯型隶属函数（M=1）

3.3 隶属函数

（2）广义钟型隶属函数

广义钟型隶属函数由三个参数a，b，c确定：

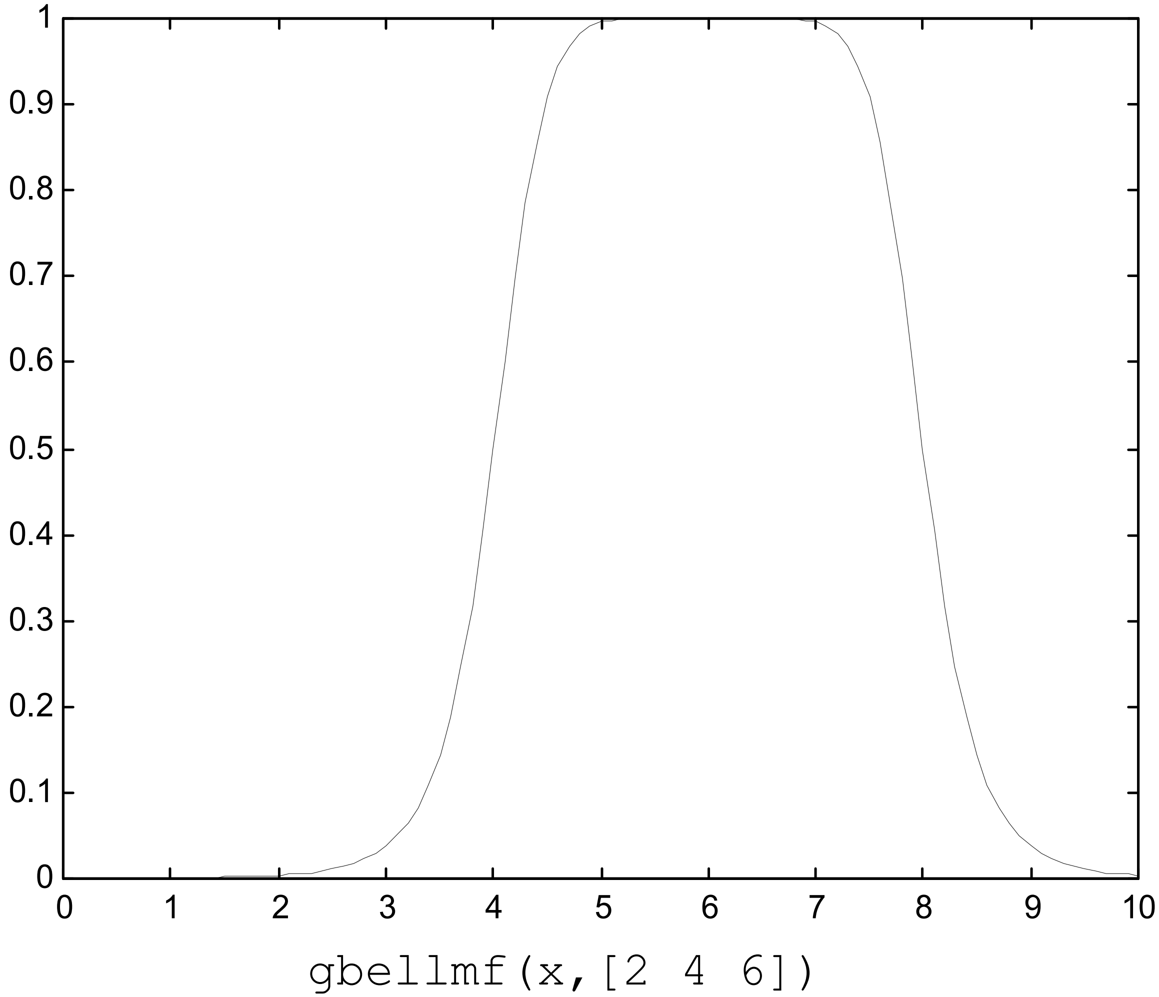
$$f(x,a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

其中参数a和b通常为正，参数c用于确定曲线的中心。

Matlab表示为

$$\text{gbellmf}(x,[a,b,c])$$

3.3 隶属函数



广义钟形隶属函数（M=2）

3.3 隶属函数

（3）S形隶属函数

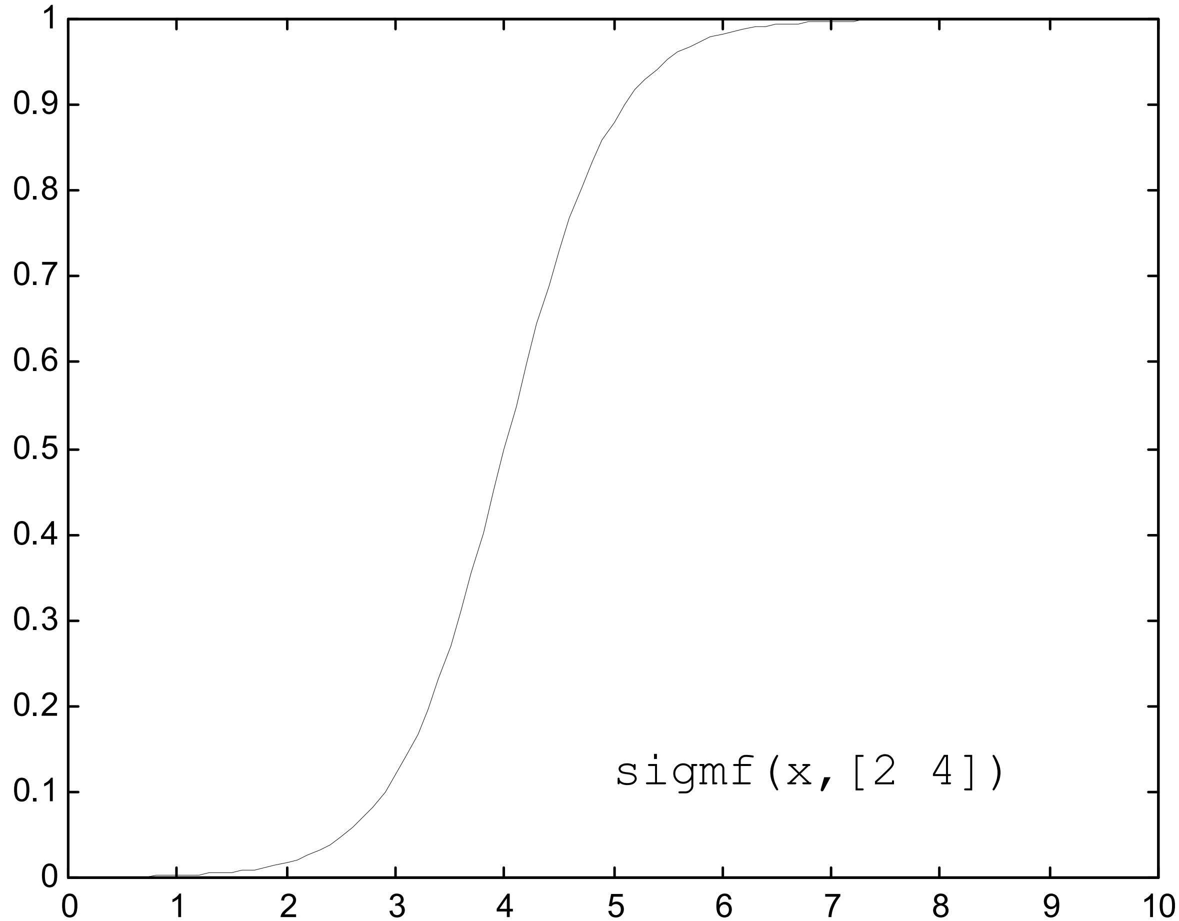
S形函数sigmf(x,[a c])由参数a和c决定：

$$f(x,a,c)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

其中参数a的正负符号决定了S形隶属函数的开口朝左或朝右，用来表示“正大”或“负大”的概念。Matlab表示为

sigmf(x,[a,c])

3.3 隶属函数



S形隶属函数（M=3）

3.3 隶属函数

（4）梯形隶属函数

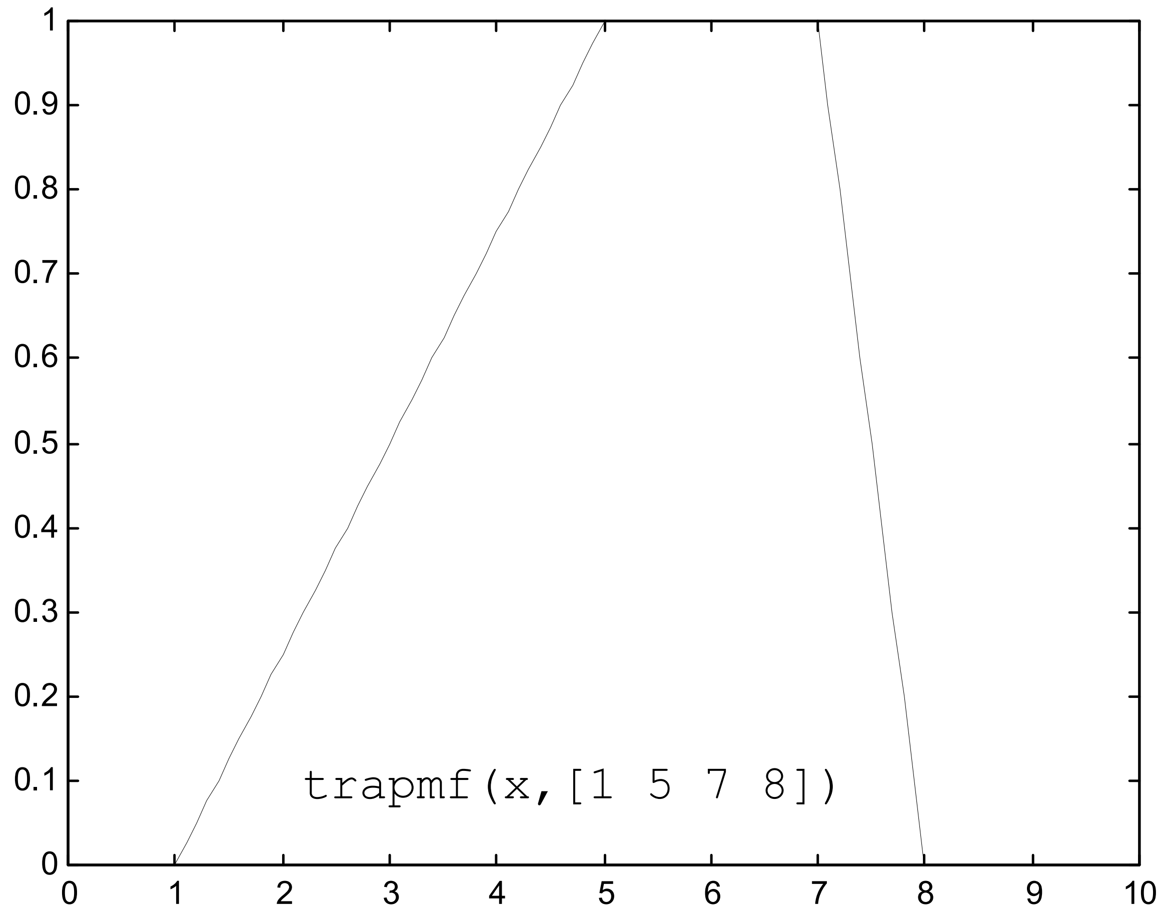
梯形曲线可由四个参数a，b，c，d确定：

$$f(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & c\le x\le d\\ 0 & x\ge d\end{cases}$$

其中参数a和d确定梯形的“脚”，而参数b和c确定梯形的“肩膀”。Matlab表示为：

trapmf(x,[a, b, c, d])

3.3 隶属函数



梯形隶属函数（M=4）

3.3 隶属函数

(5) 三角形隶属函数

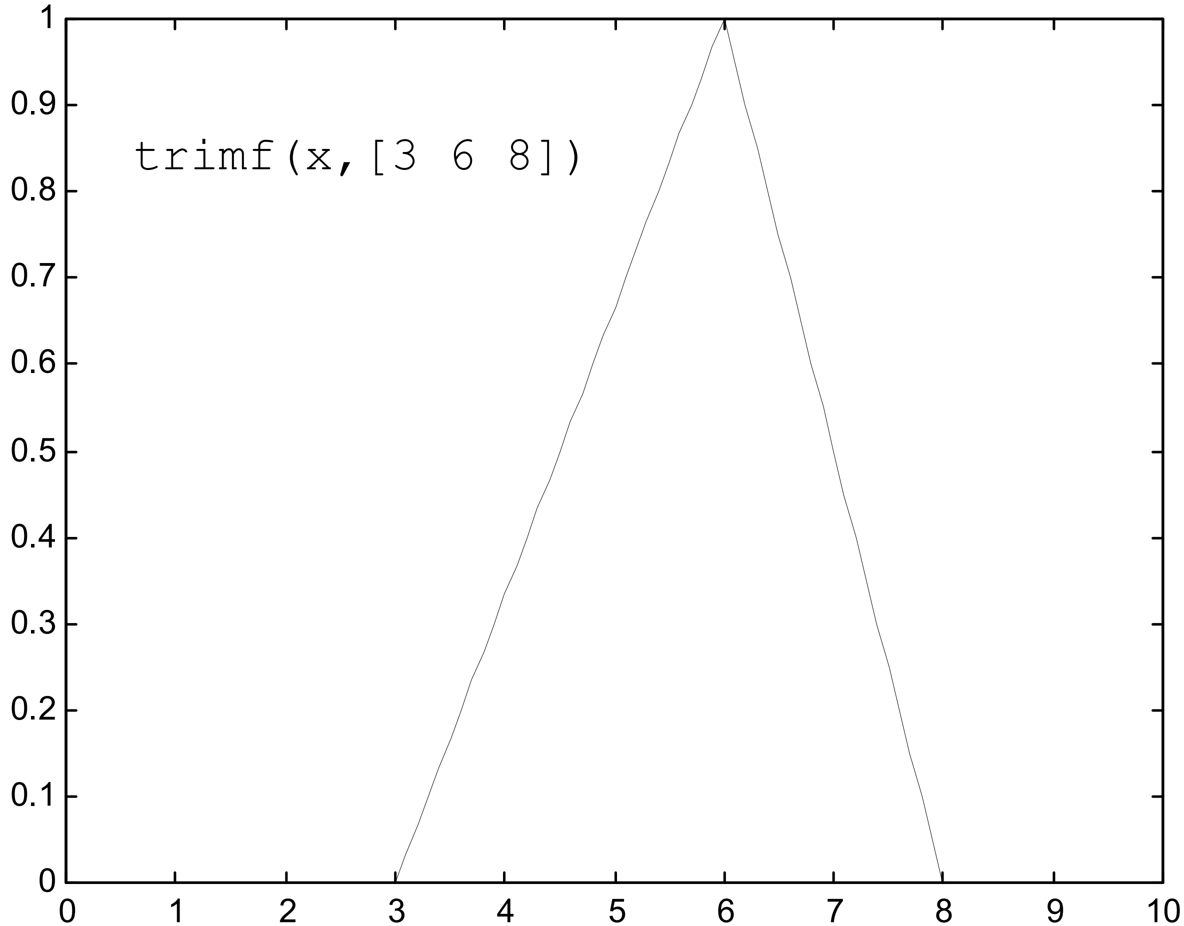
三角形曲线的形状由三个参数*a*，*b*，*c* 确定：

$$f(x,a,b,c)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & b\le x\le c\\ 0 & x\ge c\end{cases}$$

其中参数*a*和*c*确定三角形的“脚”，而参数*b*确定三角形的“峰”。 Matlab表示为

trimf(x, [a, b, c])

3.3 隶属函数



三角形隶属函数（M=5）

3.3 隶属函数

（6）Z形隶属函数

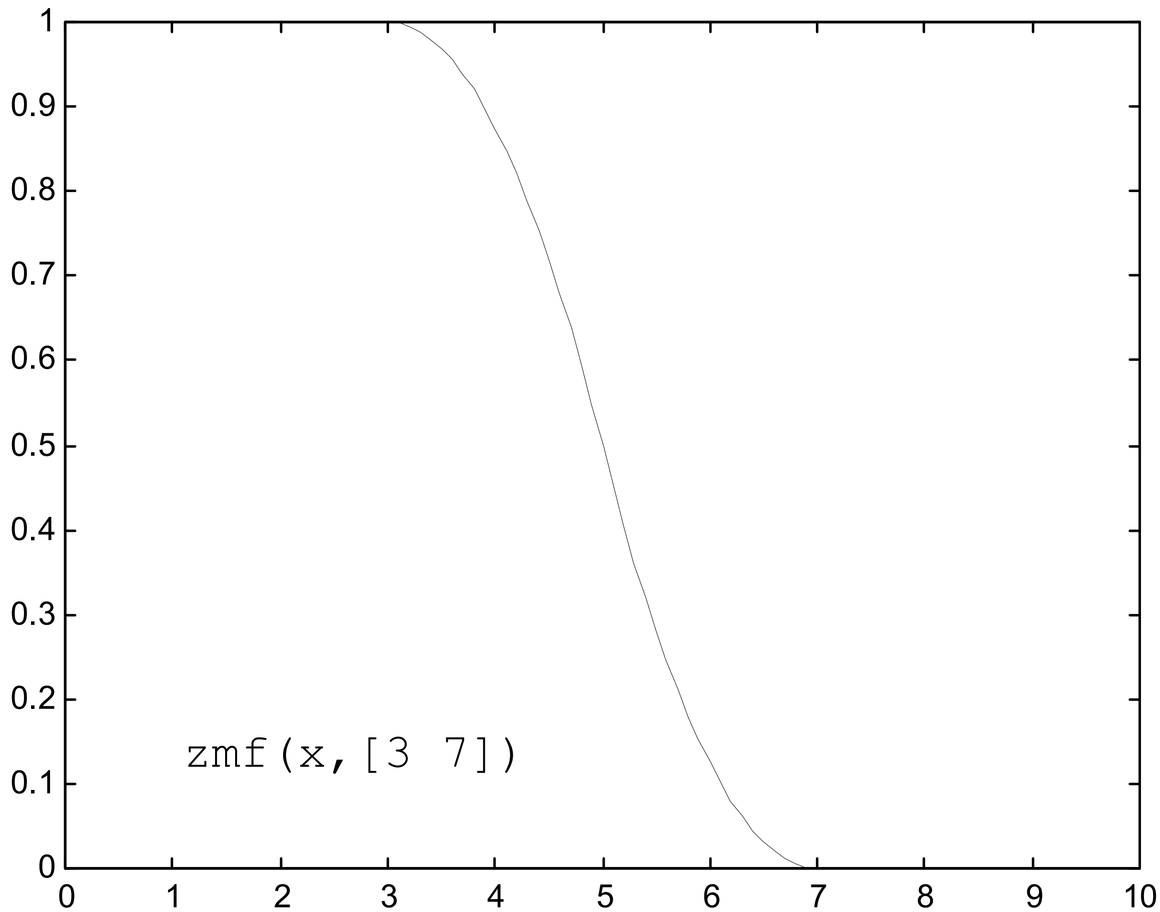
这是基于样条函数的曲线，因其呈现Z形状而得名。参数a和b确定了曲线的形状。Matlab表示为

$$\mathrm{zmf}(x,[a,b])$$

有关隶属函数的MATLAB设计，见著作：

楼顺天，胡昌华，张伟，基于MATLAB的系统分析与设计-模糊系统，西安：西安电子科技大学出版社，2001

3.3 隶属函数



Z形隶属函数（M=6）

3.3 隶属函数

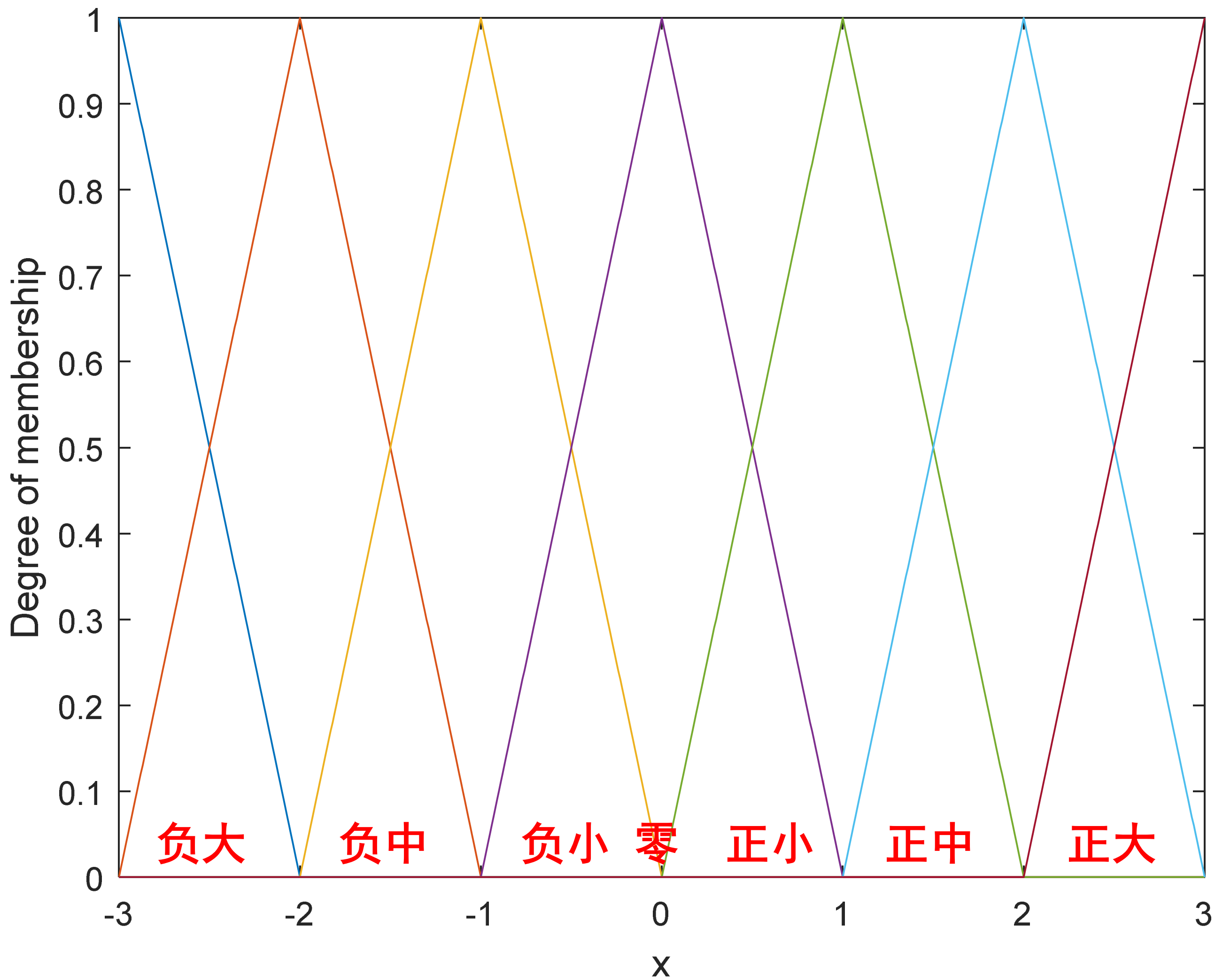
3 模糊系统的设计

【例】设计一个三角形隶属函数，按[-3，3]范围七个等级，建立一个模糊系统，用来表示{负大，负中，负小，零，正小，正中，正大}。

```
N=6;
x=-3:0.01:3;
for i=1:N+1
   f(i)=-3+6/N*(i-1);
end
u=trimf(x,[f(1),f(1),f(2)]);
```

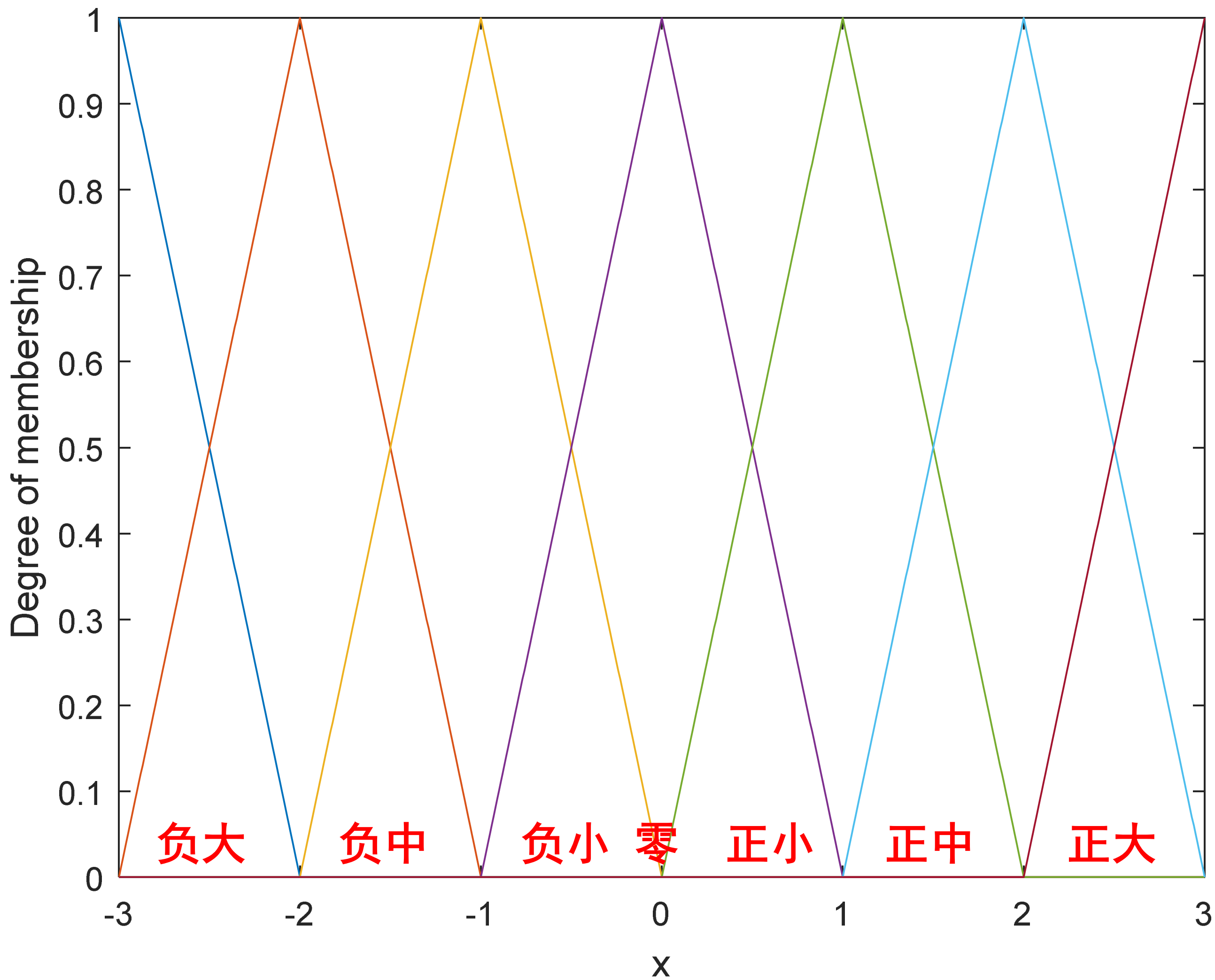
仿真结果如图所示。

3.3 隶属函数



三角形隶属函数曲线

3.3 隶属函数



三角形隶属函数曲线

3.3 隶属函数

4 隶属函数的确定方法

隶属函数是模糊控制的应用基础。目前还没有成熟的方法来确定隶属函数，主要还停留在经验和实验的基础上。通常的方法是初步确定粗略的隶属函数，然后通过“学习”和实践来不断地调整和完善。

遵照这一原则的隶属函数选择方法有以下几种。

3.3 隶属函数

（1）模糊统计法

根据所提出的模糊概念进行调查统计，提出与之对应的模糊集A，通过统计实验，确定不同元素隶属于A的程度。

$$u_0\text{对模糊集}A\text{的隶属度} = \frac{u_0 \in A\text{的次数}}{\text{试验总次数}N}$$

3.3 隶属函数

（2）主观经验法

当论域为离散论域时，可根据主观认识，结合个人经验，经过分析和推理，直接给出隶属度。这种确定隶属函数的方法已经被广泛应用。

a) 专家评分法

综合多数专家的评分来确定隶属函数的方法，广泛应用与经济和管理领域；

b) 因素加权综合法

若模糊概念是由若干因素相互作用而成，而每个因素本身又是模糊的，则可综合考虑各因素的重要程度来选择隶属函数；

c) 二元排序法

通过对多个实物之间两两对比来确定某种特征下的顺序，由此来决定这些事物对该特征的隶属函数大致形状。

3.3 隶属函数

（3）神经网络法

利用神经网络的学习功能，由神经网络自动生成隶属函数，并通过网络的学习自动调整隶属函数的值。

基于 RBF 神经网络的隶属度函数学习算法

李延新[1]，李光宇[1]，李　文[2]

（1. 大连交通大学 软件学院，辽宁 大连 116052；2. 大连交通大学 电气信息学院，辽宁 大连 116028）

摘　要：模糊规则的提取和模糊隶属度函数的学习是模糊系统设计中重要而困难的问题. 针对当前开发模糊控制系统的一个难点——发现最优的隶属函数和模糊规则，研究了利用 RBF 神经网络的学习能力，从历史数据中发现隶属度函数，在一定程度上减轻了系统开发工作量，克服了由于缺乏经验而可能造成的偏差. 文中探讨了一种用于提取模糊规则的 RBF 神经网络结构，提出了基于此网路结构的模糊

（4）分析推理法

当论域连续时，根据问题的性质，应用一定的分析与推理，决定选用某些典型函数作为隶属函数，比如三角形函数、梯形函数等。

3.4 模糊关系及其运算

- 描述客观事物间联系的数学模型称为关系。
- 集合论中的关系精确地描述了元素之间是否相关，而模糊集合论中的模糊关系则描述元素之间相关的程度。
- 普通二元关系是用简单的“有”或“无”来衡量事物之间的关系，因此无法用来衡量事物之间关系的程度。
- 模糊关系是指多个模糊集合的元素间所具有关系的程度。模糊关系在概念是普通关系的推广，普通关系则是模糊关系的特例。

3.4 模糊关系及其运算

笛卡尔乘积是指在数学中，两个集合X和Y的笛卡尔积（Cartesian product），又称直积，表示为$X \times Y$，第一个对象是X的成员而第二个对象是Y的所有可能有序对的其中一个成员。

【例】假设集合A={a, b}，集合B={0, 1, 2}，则两个集合的笛卡尔积为{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)}。

【例】如果A表示某学校学生的集合，B表示该学校所有课程的集合，则A与B的笛卡尔积表示所有可能的选课情况。A表示所有声母的集合，B表示所有韵母的集合，那么A和B的笛卡尔积就为所有可能的汉字全拼。

3.4 模糊关系及其运算

【定义】两个非空集合U与V之间的直积（笛卡尔积）

$$U \times V = \{\langle u, v\rangle | u \in U, v \in V\}$$

中的一个模糊子集R被称为U到V的模糊关系，又称二元模糊关系。其特性可以由以下的隶属函数来描述

$$\mu_R: \ U \times V \to [0,1]$$

隶属函数$\mu_R(u,v)$表示序偶$\langle u, v\rangle$的隶属程度，也描述(u,v)间具有关系R的量级。

3.4 模糊关系及其运算

（一）模糊矩阵

模糊关系可以用模糊矩阵、模糊图和模糊集表示法等三种形式来表示。

【定义】当 $A=\{a_i|i=1,2,\dots,m\}$，$B=\{b_i|i=1,2,\dots,n\}$是有限集合时，则$A\times B$的模糊关系R可用下列$m\times n$阶矩阵来表示：

3.4 模糊关系及其运算

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r_{ij} = \mu_R(a_i, b_j) \in [0,1]$$

当$m=n$，R为n阶模糊方阵；当rij全为0，R为零矩阵；当rij全为1，R为全矩阵；当rij只在$\{0,1\}$中取值时，R为布尔矩阵，对应一个普通关系。

3.4 模糊关系及其运算

【例3.6】设有一组同学X，X={张三，李四，王五}，他们的功课为Y，Y={英语，数学，物理，化学}。他们的考试成绩如下表：

功课 姓名	英语	数学	物理	化学
张三	70	90	80	65
李四	90	85	76	70
王五	50	95	85	80

3.4 模糊关系及其运算

取隶属函数 $\mu(u)=\dfrac{u}{100}$，其中u为成绩。如果将他们的成绩转化为隶属度，则构成一个$x\times y$上的一个模糊关系R，见下表。

功课 / 姓名	英语	数学	物理	化学
张三	0.70	0.90	0.80	0.65
李四	0.90	0.85	0.76	0.70
王五	0.50	0.95	0.85	0.80

3.4 模糊关系及其运算

将上表写成矩阵形式，得：

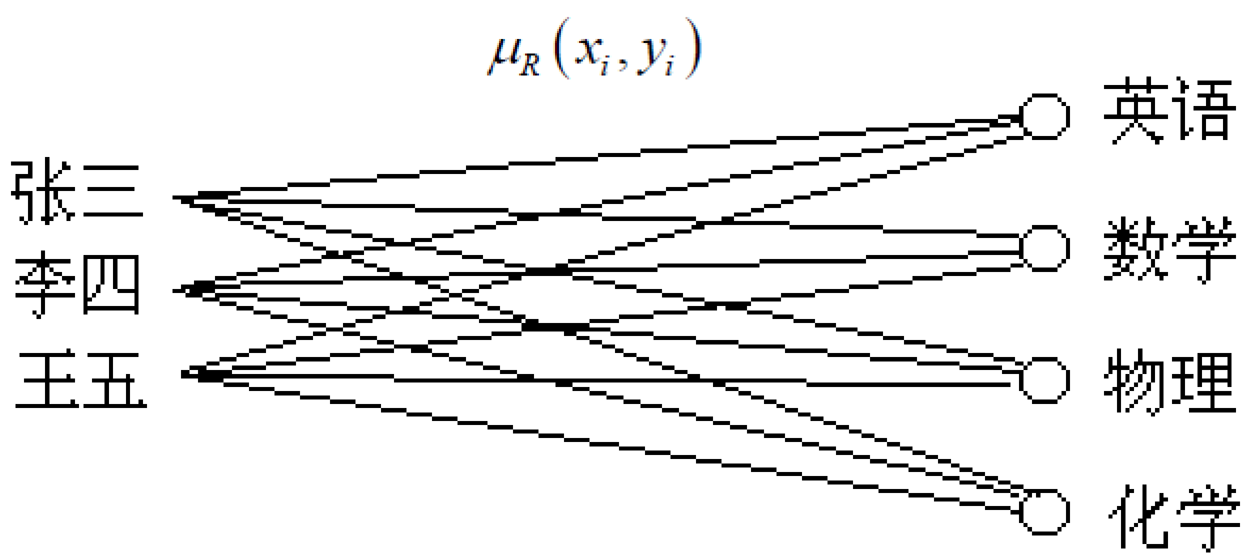
$$R=\begin{bmatrix}0.70 & 0.90 & 0.80 & 0.65\\0.90 & 0.85 & 0.76 & 0.70\\0.50 & 0.95 & 0.85 & 0.80\end{bmatrix}$$

该矩阵称作**模糊矩阵**，其中各个元素必须在[0，1]闭环区间上取值。

3.4 模糊关系及其运算

- 模糊图
  - 将 x_i, y_i 作为节点，在 x_i 到 y_i 的连线上标上 $\mu_R(x_i, y_i)$ 的值

矩阵R也可以用模糊图来表示，如下图所示：



模糊矩阵R对应的模糊图

3.4 模糊关系及其运算

（二）模糊矩阵运算与模糊关系

设有n阶模糊矩阵A和B, $A=(a_{ij})$ ，$B=(b_{ij})$，且 $i,j=1,2,\cdots,n$ 。则定义如下几种模糊矩阵运算方式：

（1）相等

若 $a_{ij}=b_{ij}$ ，则 A=B。

（2）包含

若 $a_{ij}\le b_{ij}$ ，则 A$\subseteq$B。

3.4 模糊关系及其运算

（3）并运算

若 $c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$，则 $C=(c_{ij})$ 为 A 和 B 的并，记为 C=A∪B。

（4）交运算

若 $c_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$，则 $C=(c_{ij})$ 为 A 和 B 的交，记为 C=A∩B。

（5）补运算

若 $c_{ij}=1-a_{ij}$，则 $C=(c_{ij})$ 为 A 的补，记为 C=$\overline{A}$。

3.4 模糊关系及其运算

【例3. 7】设 $A=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1\\0.3 & 0.9\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$

则

$$A\cup B=\begin{bmatrix}0.7\vee 0.4 & 0.1\vee 0.9\\0.3\vee 0.2 & 0.9\vee 0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.9\\0.3 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$A\cap B=\begin{bmatrix}0.7\wedge 0.4 & 0.1\wedge 0.9\\0.3\wedge 0.2 & 0.9\wedge 0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.1\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1-0.7 & 1-0.1\\1-0.3 & 1-0.9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\0.7 & 0.1\end{bmatrix}$$

3.4 模糊关系及其运算

（三）模糊矩阵的合成

所谓合成，即由两个或两个以上的关系构成一个新的关系。模糊关系也存在合成运算，是通过模糊矩阵的合成进行的。

R 和 S 分别为 $U\times V$ 和 $V\times W$ 上的模糊关系，而 R 和 S 的合成是 $U\times W$ 上的模糊关系，记为 $R\circ S$，其隶属函数为

$$\boxed{\begin{aligned}&\mu_{R\circ S}(u,w)\\&=\bigvee_{v\in V}\{\mu_R(u,v)\wedge\mu_S(v,w)\},u\in U,w\in W\end{aligned}}$$

此为Max-Min合成（最大-最小合成），为最常用的合成方法。

3.4 模糊关系及其运算

在日常生活中，两个单纯关系的组合可以构成一种新的合成关系。例如，有u，v，w三个人，若v是u的妹妹，而u又是w的丈夫，则v与w就是一种新的关系，即姑嫂关系。用关系式表示为：

$$姑嫂=兄妹\circ夫妻$$

模糊关系和普通关系一样，两种模糊关系可以组合成一种合成关系。

3.4 模糊关系及其运算

【例3.8】设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

则A和B的合成为：

$$C = A \circ B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$c_{11} = (a_{11} \wedge b_{11}) \vee (a_{12} \wedge b_{21})$$
$$c_{12} = (a_{11} \wedge b_{12}) \vee (a_{12} \wedge b_{22})$$
$$c_{21} = (a_{21} \wedge b_{11}) \vee (a_{22} \wedge b_{21})$$
$$c_{22} = (a_{21} \wedge b_{12}) \vee (a_{22} \wedge b_{22})$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_{11} &= (a_{11} \cdot b_{11}) + (a_{12} \cdot b_{21}) \\ c_{12} &= (a_{11} \cdot b_{12}) + (a_{12} \cdot b_{22}) \\ c_{21} &= (a_{21} \cdot b_{11}) + (a_{22} \cdot b_{21}) \\ c_{22} &= (a_{21} \cdot b_{12}) + (a_{22} \cdot b_{22}) \end{aligned}}$$

3.4 模糊关系及其运算

当$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.9\end{bmatrix}$时，有

$$A\circ B=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$B\circ A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.6\end{bmatrix}$$

可见，$A\circ B\neq B\circ A$。

3.4 模糊关系及其运算

$$A_{\text{子女-父母}}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\0.5 & 0.3\end{bmatrix}\qquad B_{\text{父母-祖父母}}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\0.6 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$R_{\text{子女-祖父母}}=A_{\text{子女-父母}}\circ B_{\text{父母-祖父母}}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

〈子女与祖父母的相似度关系〉

$$B_{\text{祖父母-父母}}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.6\\0.4 & 0.9\end{bmatrix}\qquad A_{\text{父母-子女}}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5\\0.7 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$R_{\text{祖父母-子女}}=B_{\text{祖父母-父母}}\circ A_{\text{父母-子女}}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.3\\0.7 & 0.4\end{bmatrix}$$

〈祖父母与子女的相似度关系〉

等价！

3.4 模糊关系及其运算

【例3. 9】某家中子女和父母的长相“相似关系”R 为模糊关系，可表示为

	父	母
子	0.2	0.8
女	0.6	0.1

用模糊矩阵R表示为

$$R=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

3.4 模糊关系及其运算

该家中，父母与祖父的“相似关系” S也是模糊关系，可表示为

	祖父	祖母
父	0.5	0.7
母	0.1	0

用模糊矩阵 S表示为

$$S=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 模糊关系及其运算

那么在该家中，孙子、孙女与祖父、祖母的相似程度应该如何呢？

模糊关系的合成运算就是为了解决诸如此类的问题而提出来的。针对此例，模糊关系的合成运算为

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (0.2 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.1) & (0.2 \wedge 0.7) \vee (0.8 \wedge 0) \\ (0.6 \wedge 0.5) \vee (0.1 \wedge 0.1) & (0.6 \wedge 0.7) \vee (0.1 \wedge 0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$$

该结果表明，孙子与祖父、祖母的相似程度分别为0. 2和0. 2，而孙女与祖父、祖母的相似程度分别为0. 5和0. 6。

3.5 模糊推理

（一）模糊语句

将含有模糊概念的、按给定语法规则所构成的语句称为模糊语句。根据其语义和构成的语法规则不同，可分为以下几种类型：

（1）模糊陈述句：

语句本身具有模糊性，又称为模糊命题。

如：“今天天气很热”、“今天空气湿度有点大”、“这座城市空气污染比较严重”

3.5 模糊推理

（2）**模糊判断句**：

模糊逻辑中最基本的语句。

语句形式：“x是a”，记作（a），且a所表示的概念是模糊的。

如“张三是好学生”。

（3）**模糊推理句**：

语句形式：若x是a，则x是b。则（a）→（b）为模糊推理语句。

如“今天是晴天，则今天暖和”。

3.5 模糊推理

（二）模糊推理

含有模糊或具有一定模糊性的陈述句称为模糊命题（Fuzzy Proposition）。

推理是根据已知的命题，按一定的规则，推断出另外一个新的命题的过程。

模糊推理就是根据一些已知的模糊命题，按照一定的模糊控制规则，推出一个新的模糊命题的形式，其运算范围不是二值逻辑中的0,1，而是隶属度[0,1]，也称为模糊命题的真值，其中模糊规则实质上是模糊蕴涵关系。

3.5 模糊推理

模糊系统是一种基于知识或规则的系统。其核心部分就是由一些列的所谓IF-THEN规则所组成的规则库构成。

一个模糊的IF-THEN规则就是一个条件陈述句，可以表示为：

IF <模糊命题> THEN <模糊命题>

3.5 模糊推理

常用的模糊推理规则表达形式有以下几种：

① 如A则B。（if A then B）表示为 A→B

② 如A则B否则C。（if A then B else C）表示为
（A→B）∨（$\bar{A} \rightarrow C$）

③ 如A且B则C。（if A and B then C）表示为
（A×B）→ B

④ 如A且B且C则D。（if A and B and C then D）表示为（A×B×C）→ D

3.5 模糊推理

⑤ 如A且B则C否则D。（if A and B then C else D）表示为（（A×B）→C）∨（$\overline{A\times B}\rightarrow D$）

⑥ 如A或B则C或D。（if A or B then C or D）表示为（A∪B）→（C∪D）

⑦ 如A且B则C且D。（if A and B then C and D）表示为（A×B）→（C×D）

3.5 模糊推理

最常用的有两种模糊推理语句：

- **If** A **then** B **else** C；
- **If** A **and** B **then** C

下面以第二种推理语句为例进行探讨。

3.5 模糊推理

利用该语句可构成一个简单的模糊控制器，如图所示：

二输入单输出模糊控制器

其中A，B，C分别为论域U上的模糊集合。

例如：A为误差信号上的模糊子集，B为误差变化率上的模糊子集，C为控制器输出上的模糊子集。

3.5 模糊推理

常用的模糊推理方法有两种：Zadeh法和Mamdani法。**Mamdani推理法**是模糊控制中普遍使用的方法，其本质是一种合成推理方法。

模糊推理语句“**If** A **and** B **then** C”蕴涵的关系为（$A \wedge B \rightarrow C$），根据Mamdani模糊推理方法，A ∈U, A ∈U, A ∈U是三元模糊关系，其关系矩阵R为

$$\mathbf{R=(A\times B)^{T1}\circ C}$$

其中$(A\times B)^{T1}$为模糊关系矩阵$(A\times B)_{(m\times n)}$构成的m×n列向量，<u>T1为列向量转换</u>，n和m分别为A和B论域元素的个数。

3.5 模糊推理

基于Mamdani模糊推理规则，根据模糊关系R，可求得给定输入A_1和B_1对应的输出C_1：

$$C_1=(A_1\times B_1)^{T2}\circ R$$

式中，

$(A_1\times B_1)^{T2}$ 为模糊关系矩阵 $(A_1\times B_1)_{(m\times n)}$ 构成的m×n行向量，T2为行向量转换。

3.5 模糊推理

【例3.10】设论域x={a_1， a_2， a_3}， y={b_1， b_2， b_3}，z={c_1， c_2， c_3}， 已知 $A=\frac{0.5}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{0.1}{a_3}$， $B=\frac{0.1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{0.6}{a_3}$，$C=\frac{0.4}{c_1}+\frac{1}{c_2}$。

试确定“If A and B then C”所决定的模糊关系R，以及输入为 $A_1=\frac{1.0}{a_1}+\frac{0.5}{a_2}+\frac{0.1}{a_3}$，$B_1=\frac{0.1}{b_1}+\frac{0.5}{b_2}+\frac{1}{b_3}$ ，时的输出C_1。

3.5 模糊推理

【解】：采用模糊交算子$\mu_c(x) = Min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$来实现A与B的“与”关系，则

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=A^{\mathrm{T}}\wedge B=\begin{bmatrix}0.5\\1\\0.1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0.1 & 1 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.5\\0.1 & 1.0 & 0.6\\0.1 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

将A×B矩阵扩展成如下列向量：

$$\mathrm{R}=(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^{\mathrm{T1}}\times\mathrm{C}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 1.0 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\circ\begin{bmatrix}0.4 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

3.5 模糊推理

当输入为A_1和B_1时，有：

$$(A_1 \times B_1) = A_1^{\mathrm{T}} \times B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

将$A_1 \times B_1$矩阵扩展成如下行向量：

$$(A \times B)^{\mathrm{T}2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 1 & 0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

最后得：

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 1 & 0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

即：

$$C_1 = \frac{0.4}{c_1} + \frac{0.5}{c_2}$$

3.5 模糊推理

【补充例子】if A and B and C then D.（A×B×C）→ D

设A,B,C,D分别是论域x,y,z,w上的模糊子集，则这类模糊条件语句所决定的是一个反映三输入单输出的四元模糊关系R，即 $R=(A\times B\times C)^{T1}\times D$

根据模糊关系R和给定输入模糊集合进行模糊推理，设给定A_1,B_1,C_1,则对应的输出D1为

$$D=(A_1\times B_1\times C_1)^{T2}\times R$$

3.5 模糊推理

【例】设有论域X，Y，Z，W上的模糊子集为

$$A = [1 \quad 0.5 \quad 0.1], A \in X$$
$$B = [0.1 \quad 1 \quad 0.1], B \in Y$$
$$C = [0.1 \quad 0.5 \quad 1], C \in Z$$
$$D = [0.4 \quad 1], D \in W$$

试确定“if A and B and C then D”所决定的模糊关系R，以及输入

$$A_1 = [1 \quad 0.5 \quad 0.1], A_1 \in X$$
$$B_1 = [0.1 \quad 1 \quad 0.1], B_1 \in Y$$
$$C_1 = [0.1 \quad 0.5 \quad 1], C_1 \in Z$$

情况下决定的输出D_1。

3.5 模糊推理

【解】$A \times B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \circ [0.1 \quad 1 \quad 0.1] = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

$$\underline{(A \times B)^{T1} \times C} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \circ [0.1 \quad 0.5 \quad 1] = M_{9\times3}$$

$$R = \underline{(A \times B \times C)}^{T1} \times D$$

$$= M^{T1} \times D$$

$$= M^{T1} \circ [0.4 \quad 1] = N_{27\times2}$$

3.5 模糊推理

$$A_1 \times B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \circ [0.1 \quad 1 \quad 0.1] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\left(A_1 \times B_1\right)^{\mathrm{T1}} \times C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \circ \left[0.1 \quad 0.5 \quad 1\right] = M'_{9\times 3}$$

$$D_1 = \left(A_1 \times B_1 \times C_1\right)^{\mathrm{T2}} \times R$$

$$= M'^{\mathrm{T2}} \times R$$

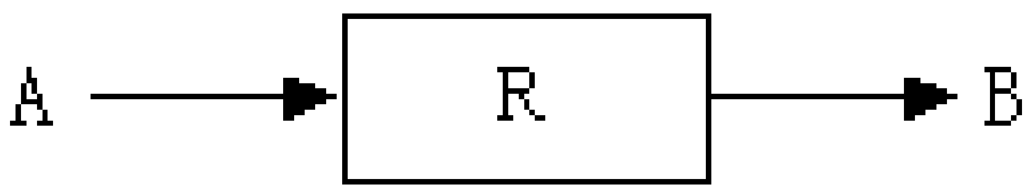
$$= \left[0.4 \quad 0.5\right]$$

3.5 模糊推理

（三）模糊关系方程

（1）模糊关系方程概念

将模糊关系R看成一个模糊变换器。当A为输入时，B为输出，模糊变换器如图所示。



3.5 模糊推理

可分为两种情况讨论：

（a）已知输入A和模糊关系R，求输出B，这是综合评判，即模糊变换问题。

（b）已知输入A和输出B，求模糊关系R，或已知模糊关系R和输出B，求输入A，这是模糊综合评判的逆问题，需要求解模糊关系方程。

3.5 模糊推理

（2）模糊关系方程的解

近似试探法是目前实际应用中较为常用的方法之一。

【例3.11】解方程

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.4$$

3.5 模糊推理

【解】： 由方程得

$$(0.6 \wedge x_1) \vee (0.2 \wedge x_2) \vee (0.4 \wedge x_3) = 0.4$$

显然三个括弧内的值都不可能超过0. 4。由于 $(0.2 \wedge x_2) < 0.4$ 是显然的，因此x_2可以取[0, 1]的任意值，即x_2=[0, 1]。

现在只考虑：

$$(0.6 \wedge x_1) \vee (0.4 \wedge x_3) = 0.4$$

这两个括弧内的值可以是：其中一个等于0. 4，另一个不超过0. 4。

3.5 模糊推理

因此，分两种情况讨论：

（a）设$0.6 \wedge x1 = 0.4$，$0.4 \wedge x3 \leqslant 0.4$，则

$$x_1 = 0.4 \qquad x_3 = [0,1]$$

即方程的解为

$$x_1 = 0.4, x_2 = [0,1], x_3 = [0,1]$$

（b）设$0.6 \wedge x1 \leqslant 0.4$，$0.4 \wedge x3 = 0.4$，

则 $x_1 = [0,0.4]$，$x_3 = [0.4,1]$

即方程的解为：

$$x_1 = [0,0.4], x_2 = [0,1], x_3 = [0.4,1]$$

3.5 模糊推理

【例】某艺术学院招收新生，需考察的考生素质包括{歌舞，表演，外型}。对各种素质的评语划分为4个等级{好，较好，一般，差}。某学生表演完毕后，评委对其的评语见下表：

	好	较好	一般	差
歌舞	30%	30%	20%	20%
表演	10%	20%	50%	20%
外型	40%	40%	10%	10%

如果要考察该生培养为电影演员的潜质，那么对其表演素质要求应该更高，对其他要求相对低点。定义加权模糊集为：A={0. 25，0. 5，0. 25}。

3.5 模糊推理

根据模糊变换得到评委对该生培养为电影演员的最终结论。

【解】依据模糊变换得到评委对该生培养为电影演员的决策集

$$B = A \circ R = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & \boxed{0.5} & 0.2 \end{bmatrix}$$

综合评判结论：选取隶属度最大的元素作为最终的评语，评委的评语为“一般”。

3.5 模糊推理

结论：

至今，各国学者提出的模糊推理有十多种，但还没有一种方法能在各方面都表现出最大的合理性。