# 数计学院 2013 级第二学期《数学分析》

# 期末考试试题（A 卷）

**《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"**

1. (15 分) 讨论函数列 $S_n(x)=n(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x})$ 在下列区间的一致收敛性,

,   $(i)\ x\in(0,+\infty)$   $(ii)\ x\in(\delta,+\infty),\quad(\delta>0)$

2. （15 分）讨论下列函数项级数在所在区域的一致收敛性（给出解答过程）：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}e^{-nx},\quad x\in R$   (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(1+n)}e^{-\frac{x}{n}},x\in(0,+\infty)$.

3. (15 分)将函数 $f(x)=\sin^2 x$ 展开为麦克劳林级数，并说明收敛区间.

4. (15 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的收敛域.

5. (10 分)应用幂级数的性质求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^n}$ 的和.

6.（15 分）

(i)分别将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 和 $g(x)=\begin{cases}(\pi-1)x,\ 0\le x\le 1\\ \pi-x,\ 1\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 按正弦（Fourier）级数展开.

(ii) 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n}{n})^2$

7. (15 分) 证明:函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续,且有连续的导函数.

附加题（5 分）

1. 设函数 $f,g$ 在 $R$ 上连续，以 $2\pi$ 为周期且有相同的傅里叶级数，求证

$$f(x)=g(x),\qquad\forall x\in R.$$

# 数计学院2013级第二学期《数学分析》期末考试试题（B卷）

**《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”**

1. (15 分) 讨论函数列 $S_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$ 在下列区间的一致收敛性,

,　　$(i)\ x\in(0,\pi)$　　　$(ii)\ x\in[\delta,\pi-\delta],\quad(\delta>0)$

2. (15 分) 讨论下列函数项级数在指定区间的一致收敛性（给出解答过程）：.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，　$x\in[0,1]$，　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$，　$x\in(0,+\infty)$

3.　(15 分)将函数 $f(x)=\arcsin x$ 展开为麦克劳林级数，并说明收敛区间.

4.　(15 分)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2n}$ 的收敛半径与收敛域.

5.　(15 分) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明：函数 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_ne^{-nx}$，$(x\geq 0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可导.

6.　（15 分）设 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期，在 $(-\pi,\pi)$ 内 $f(x)=\pi^2-x^2$，

求 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开式，并讨论其收敛性.

7.　（10 分）应用幂级数的性质求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的和.

附加题（5 分）

1. 设 $f(x)$ 在实数轴 $R$ 上有界且一致连续，$K_n$ 为 $R$ 上一列非负连续函数，满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K_n(t)dt=1,\ \forall n$$

和对任意 $\delta>0$,　$\lim_{n\to\infty}\int_{|t|>\delta}K_n(t)dt=0$，

求证：当 $n\to+\infty$,　$(K_n*f)(x)$ 在 $R$ 上一致收敛于 $f(x)$. 这里，$(K_n*f)(x)$ 定义为

$$(K_n*f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)K_n(t)dt.$$