人工智能
——样例学习 II

饶洋辉

数据科学与计算机学院,

中山大学

raoyangh@mail.sysu.edu.cn

期望 (Expectation)

- 如果 X 是一个离散随机变量，则:

$$E[X] = \sum_i x_i P\{X = x_i\}$$

- 如果 X 是一个服从概率密度函数 f 的连续随机变量

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

期望

- 假设 X 是抛一个六面的骰子朝上的那面的数值，那么：$E[X]$?

$$E[X] = \sum_{x=1}^{6} xp(x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{21}{6}$$

中位数 (Median)

- 对 n 个变量排序
  - $X(1) <= X(2) <= \ldots <= X(n)$
- 如果 n 为奇数
  - $X((n+1)/2)$
- 如果 n 为偶数
  - $(X(n/2)+X(1+n/2))/2$

众数 (Mode)

- 10 5 9 12
- 6 5 9 8 5
- 25 28 28 36 25 42

方差 (Variance)

- $\mathrm{Var}(X) = E[(X\text{-}E[X])^2] = E[X^2]\text{-}(E[X])^2$

X	$E(X)$	$(X\text{-}E(X))^2$	X^2
1	2	1	1
2	2	0	4
3	2	1	9

协方差 (Covariance)

- $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$$= E[XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)]$$

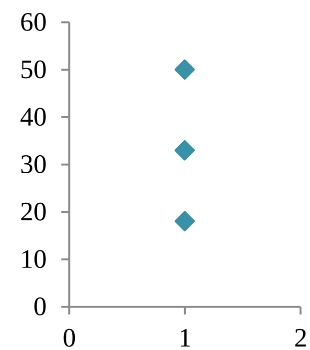
$$= E[XY] - E(X)E[Y] - E[X]E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

相关系数 (Correlation)

- 如果 X 和 Y 是两个独立随机变量，那么 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$

性别	年龄
1	18
1	50
1	33



- 随机变量 X 与 Y 之间的相关系数是:

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

线性回归

- 最小二乘法

$$Q(w_0, w_1) = \min_{w_0, w_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - w_0 - w_1 x_i)^2$$

$$\partial Q(w_0, w_1) / \partial w_0 = 0 \qquad \partial Q(w_0, w_1) / \partial w_1 = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} (y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0 \qquad -2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0$$

线性回归

- 最小二乘法

$$w_0 = \bar{y} - w_1\bar{x}$$

$$w_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

逻辑回归模型

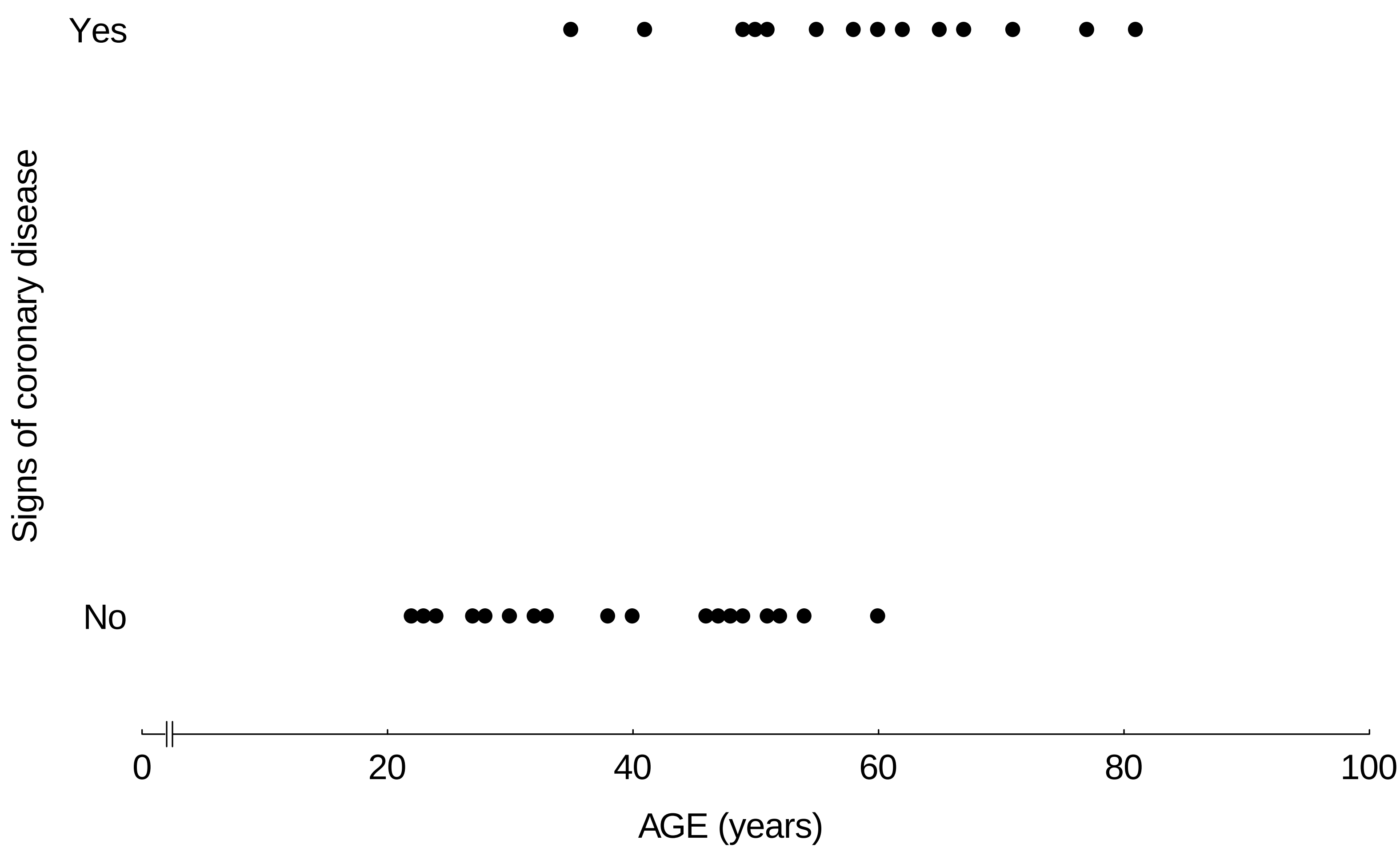
- 如果使用最小二乘法的回归模型来做二分类任务:

$$y = w_0 + \sum_{j=1}^{d} w_j x_j + u$$

$$= \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{X}}$$

- 基于上述模型预测的y值，即样本属于某个类的概率，会超出0到1的范围。

逻辑回归模型



逻辑回归模型

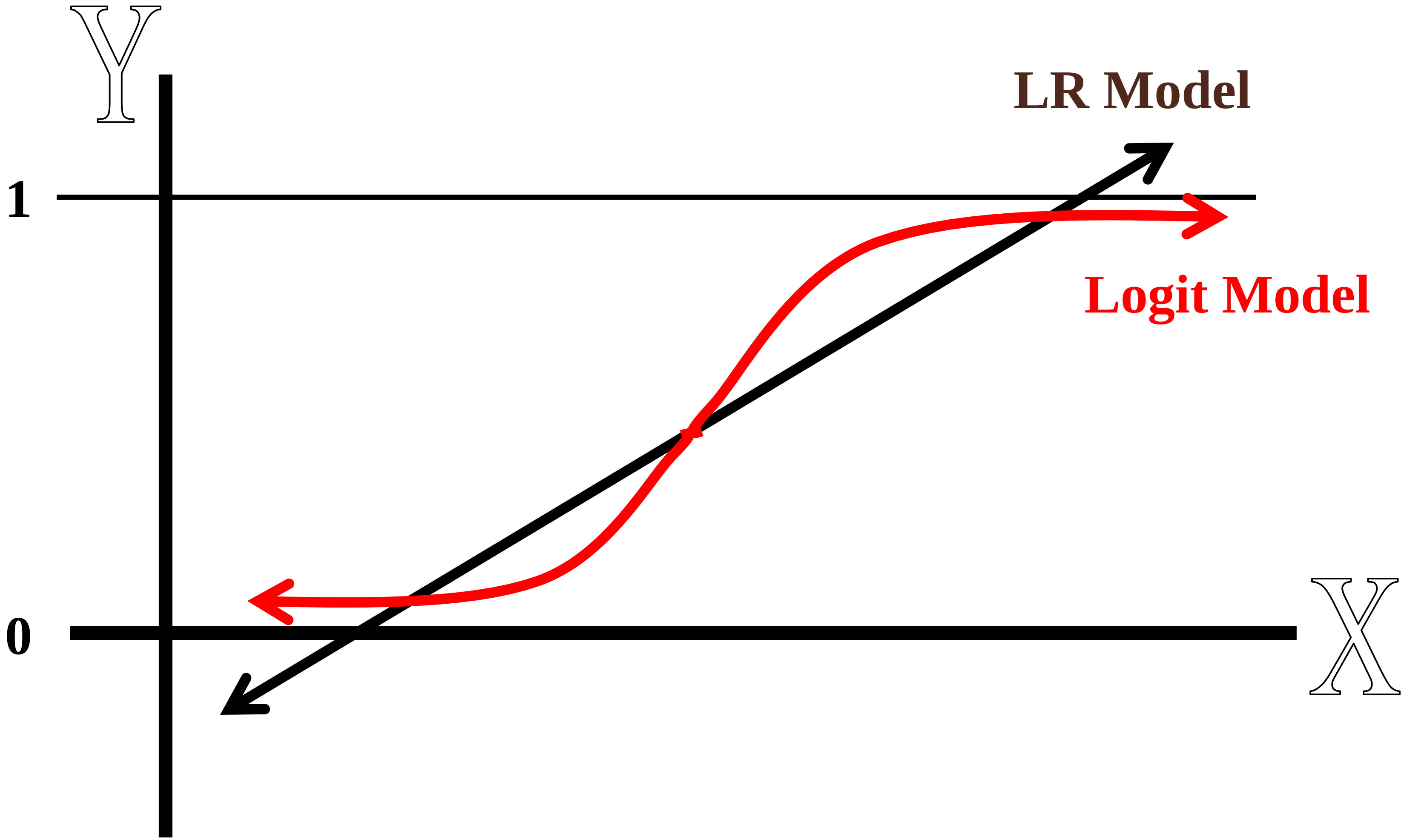
- “logit” 变换可以解决上述问题:

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = w_0 + \sum_{j=1}^{d} w_j x_j + u$$

$$= \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{X}}$$

- p 是事件y发生的概率，比如：p=p(y=1 | **X**)
- p/(1-p) 称为机率比或优势比 (odds ratio)
- log[p/(1-p)] 是机率比的对数, 或称为 "logit"

逻辑回归模型

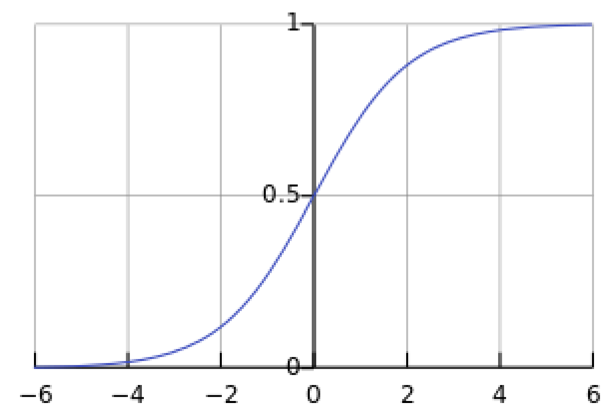


逻辑回归模型

- logistic 函数使得输出的概率值在0到1的范围内.
- 样本 **X** 标签为正的概率 $p(y=1|\mathbf{X})$ 是:

$$p = \frac{1}{1+e^{-w_0-\sum_{j=1}^{d} w_j x_j}} = \frac{e^{w_0+\sum_{j=1}^{d} w_j x_j}}{1+e^{w_0+\sum_{j=1}^{d} w_j x_j}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}}} = \frac{e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}}}{1+e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}}}$$



- 如果 $w_0+\sum_{j=1}^{d} w_j x_j=0$, 那么 $p=0.5$
- 当 $w_0+\sum_{j=1}^{d} w_j x_j$ 很大时, p 趋近于 1
- 当 $w_0+\sum_{j=1}^{d} w_j x_j$ 很小时, p 趋近于 0

逻辑回归模型

- 最小二乘法回归模型，使用了最小二乘的公式，直接得到了最终的模型。
- 对于逻辑回归，可以使用极大似然估计，配合以一种迭代式的方法，计算出最终的模型。
- 算法：
  - 首先，随机初始化权重，并对某个样本进行预测；
  - 接着，计算这个模型在这次预测上的误差，改变权重，以提高模型在这个样本上的似然度；
  - 重复这个过程，直到模型收敛，即当前模型和上一步的模型的表现相差无几。
- 这个想法的本质是：找到一个最有可能产生你观察到的数据的参数。

逻辑回归模型

- 似然函数: $\prod_{i=1}^{n}(p_i)^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}$
- 极大似然法:

$$L(\tilde{\mathbf{W}})=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\log p_i+(1-y_i)\log(1-p_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\log\frac{p_i}{1-p_i}+\log(1-p_i)\right)$$

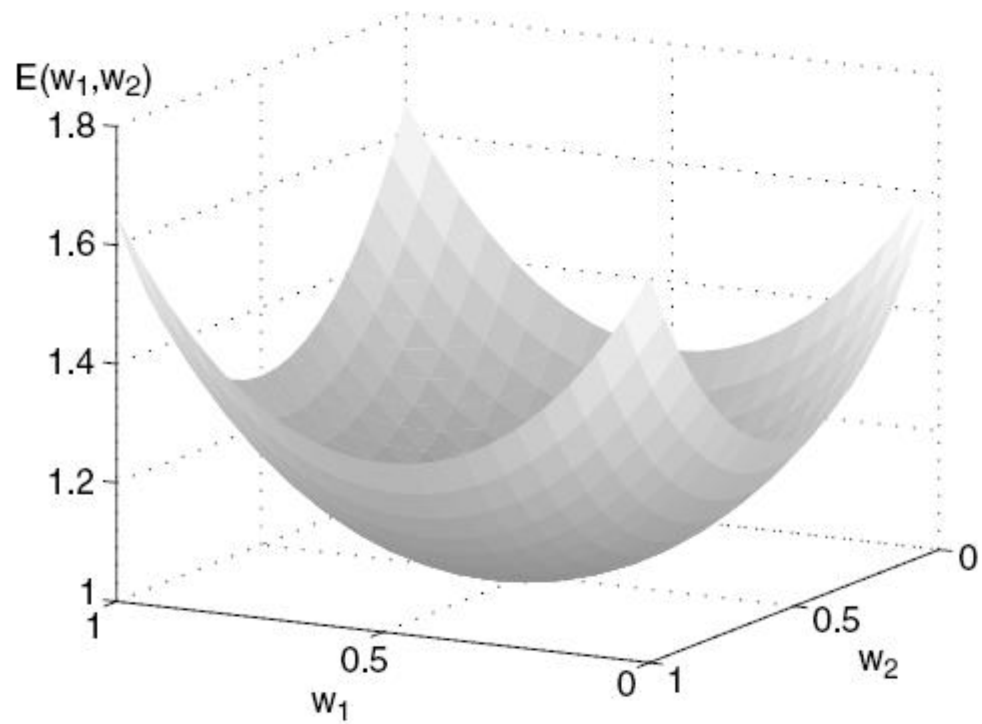
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i-\log(1+e^{\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i})\right)$$

$$\frac{\partial L(\tilde{\mathbf{W}})}{\partial\tilde{\mathbf{W}}}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i-\frac{e^{\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i}}{1+e^{\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i}}\right)\tilde{\mathbf{X}}_i\right]$$

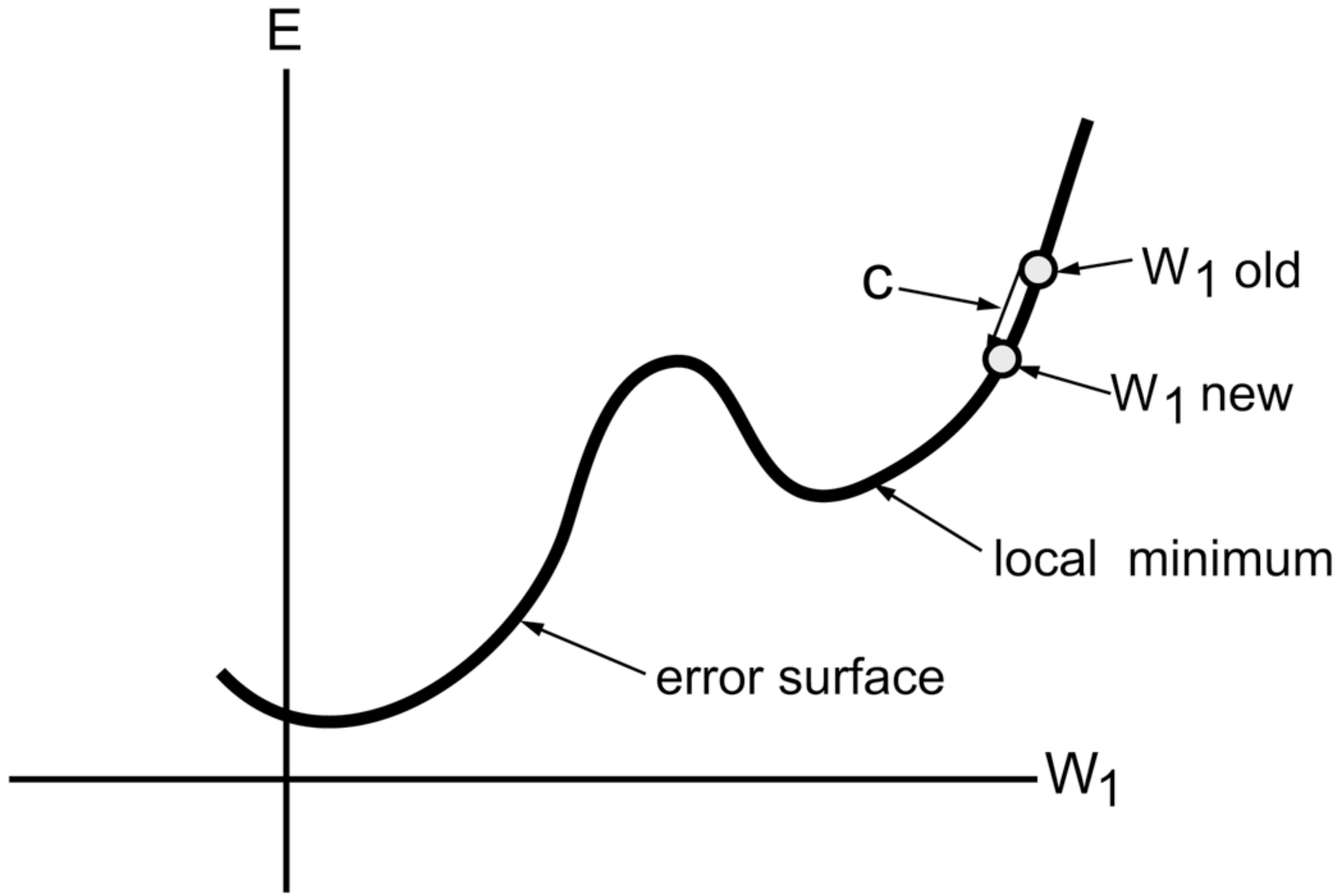
- 等价于最小化代价函数:

$$C(\tilde{\mathbf{W}})=-L(\tilde{\mathbf{W}})=-\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\log p_i+(1-y_i)\log(1-p_i)\right)$$ 交叉熵

梯度下降



梯度下降



逻辑回归模型

- 梯度下降
  - 计算梯度向量
  - 每次用梯度向量的反方向来更新权重
- 重复：

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(j)}_{new} = \tilde{\mathbf{W}}^{(j)} - \eta \frac{\partial C(\tilde{\mathbf{W}})}{\partial \tilde{\mathbf{W}}^{(j)}}$$

$$= \tilde{\mathbf{W}}^{(j)} - \eta \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}}_i}}{1 + e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}}_i}} - y_i \right) \tilde{\mathbf{X}}_i^{(j)} \right]$$

- 直至收敛。