概率论与数理统计

范正平
fanzhp@mail.sysu.edu.cn

中山大学 数据科学与计算机学院

Chapter 3
多维随机变量及其分布

多维随机变量的描述

到现在为止，我们只讨论了一维*随机变量*及其分布．但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

多维随机变量定义

一般地，我们称n个随机变量的整体$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为$n$维随机变量或随机向量.

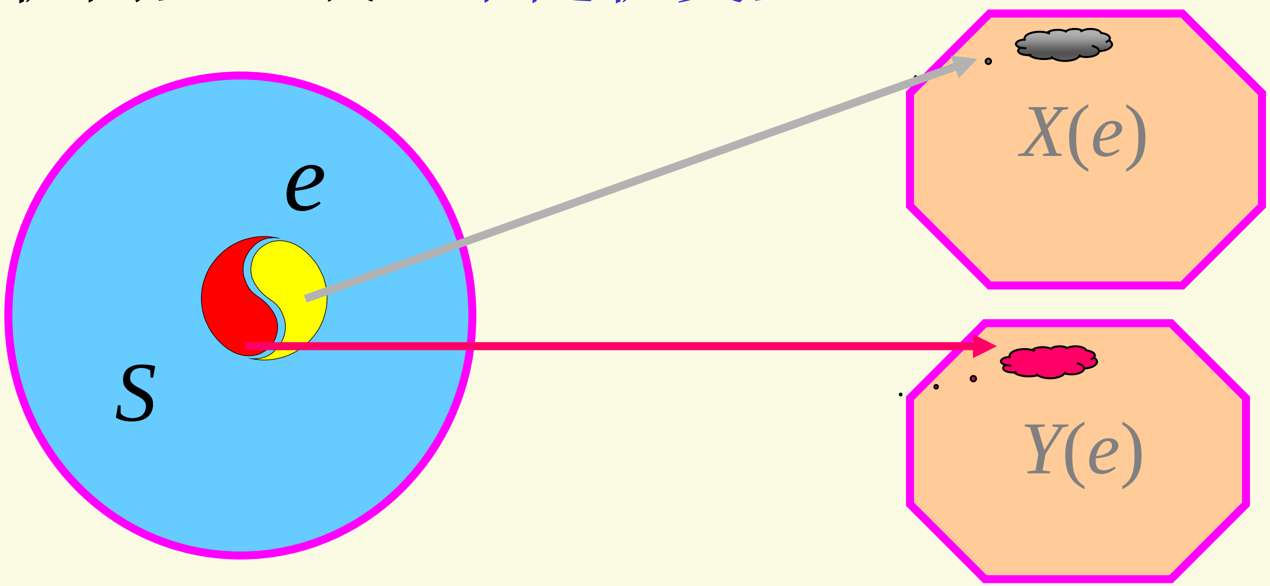
由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，我们重点讨论二维随机变量 .

多维随机变量定义(Cont.)

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $=\{e\}$，

S设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在*空间*上的随机变量。

由它们构成的一个向量 (X, Y)，叫做二维随机向量，或二维随机变量。



二维离散型随机变量

定义 如果二维随机变量 (X,Y) 全部可能取到的不相同的值是有限对或可列无限多对，

则 (X,Y) 是离散型随机变量.

二维离散型随机变量 (Cont.)

设二维离散型随机变量

(X,Y)可能取的值是(x_i,y_j),

$i,j=1,2,\cdots$,记

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},$$
$$i,j=1,2,\cdots$$

称之为二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布,

或随机变量X和Y的联合分布.

一维随机变量X

离散型

X 的分布律

$$P(X=x_k)=p_k,$$
$$k=1,2,\ldots$$

$$\begin{cases} p_k\geq 0, & k=1,2,\ldots \\ \sum_k p_k=1 \end{cases}$$

二维离散型随机变量 (Cont.)

二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布具有性质

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0, i, j = 1,2,\cdots \\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{cases}$$

也可用表格来表示随机变量X和Y的联合分布.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	

例　把一枚均匀硬币抛掷三次，设X为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X, Y) 的分布律.

解　(X, Y) 可取值 $(0,3)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,3)$

$$P\{X=0, Y=3\}=(1/2)^3=1/8$$

$$P\{X=1, Y=1\}=\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3/8$$

$$P\{X=2, Y=1\}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=3/8$$

$$P\{X=3, Y=0\}=(1/2)^3=1/8.$$

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

离散型随机变量的边缘分布

二维联合分布全面地反映了二维随机变量(X,Y)的取值及其概率规律. 而单个随机变量X,Y也具有自己的概率分布. 即：X或Y 的边缘（概率）分布

如何由联合分布来确定两个边缘分布?

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

我们常将边缘概率函数写在联合概率函数表格的边缘上，由此得出边缘分布这个名词.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$P\{Y=y_j\}$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\cdots$	$p_{.j}$	$\cdots$	1

$$p_{i.}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\qquad p_{.j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

$(i=1,2,\ldots)$　　　　$(j=1,2,\ldots)$

例如 $p_{1.}=P\{X=x_1\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{1j},\quad p_{.2}=P\{Y=y_2\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{i2}$

离散型随机变量的边缘分布(Cont.)

设 (X, Y) 的联合分布列为 $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$, 则 (X, Y) 的边缘分布列为

$$p_{i.}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$(i=1,2,\ldots)$

$$p_{.j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

$(j=1,2,\ldots)$

即

X	x_1	x_2	$\cdots x_i$	$\cdots$
$p_{i.}$	$p_{1.}$	$p_{2.}$	$\cdots p_{i.}$	$\cdots$

Y	y_1	y_2	$\cdots y_j$	$\cdots$
$p_{.j}$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\cdots p_{.j}$	$\cdots$

例 已知随机向量（X，Y）的联合分布如下表，求关于X 和Y 的边缘分布。

$X \backslash Y$	-1	0	2
0	0. 1	0. 2	0
1	0. 3	0. 05	0. 1
2	0. 15	0	0. 1

$X \backslash Y$	-1	0	2	$p_{i.}$
0	0. 1	0. 2	0	0. 3
1	0. 3	0. 05	0. 1	0. 45
2	0. 15	0	0. 1	0. 25
$p_{.j}$	0. 55	0. 25	0. 2	

边缘分布$p_{i.}$和$p_{.j}$分别是联合分布表中第i行和第j列各联合概率之和.

由联合分布可以确定边缘分布;

但由边缘分布一般不能确定联合分布.

二维连续型随机变量

定义　设(X, Y)是二维随机变量，如果存在定义在平面上的函数$f(x, y)$，满足条件

(1) $f(x, y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$

(3) 设 G 是 xoy 平面上的一个区域，点 (X, Y) 落在 G 内的概率为 $P\{(X, Y) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

则称(X, Y)是连续型随机变量，而$f(x, y)$称为二维随机变量(X, Y)的**概率密度函数**或称为随机变量X和Y的**联合概率密度函数**.

二维连续型随机变量(Cont.)

说明

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

表示介于 $f(x, y)$和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$P\{(X, Y) \in G\}$的值等于以G为底, 以曲面$z = f(x, y)$为顶面的柱体体积.

二维连续型随机变量(Cont.)

二维随机变量

(1) $f(x,y)\geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$

一维随机变量*X*

连续型

*X*的概率密度函数 $f(x)$

$f(x)\geq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

例、 设(X,Y)~$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x\ge 0, y\ge 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

试求:(1)常数 A； (2)P{ X<2, Y<1};

(3)P{(X,Y)∈D},其中D为 2x+3y≤6.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(2x+3y)}dxdy$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-2x}e^{-3y}dxdy$$

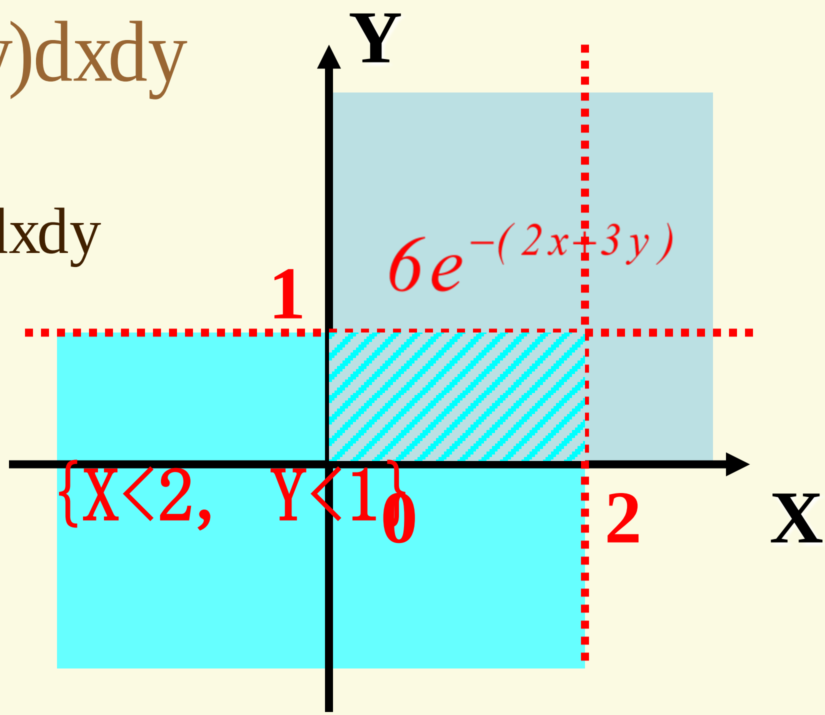
$$\boxed{\text{据}\int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)dy = \int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy\text{得}}$$

$$= A\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy = A(-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^{+\infty}(-\frac{1}{3}e^{-3y})\Big|_0^{+\infty}$$

$=\dfrac{A}{6}=1$ 所以, A=6

$$(2)\ P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$$

所以, P{ X<2,Y<1}= $\iint\limits_{\{X<2,Y<1\}} f(x,y)\,dxdy$

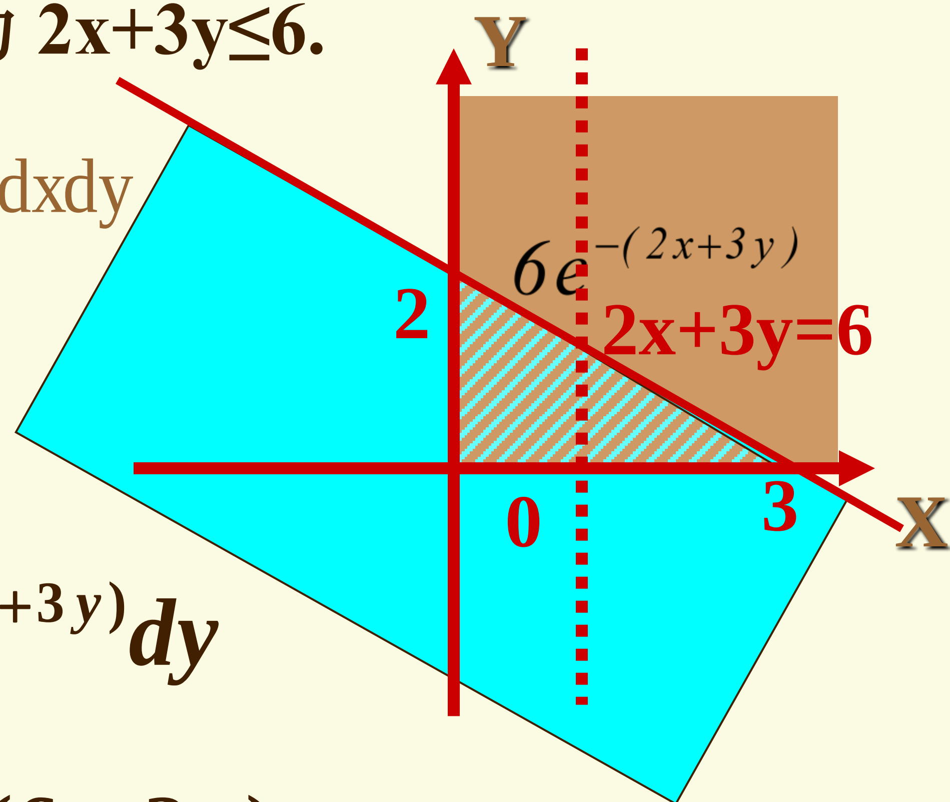


$$=\int_0^2 dx\int_0^1 6e^{-(2x+3y)}dy$$

$$=6\int_0^2 e^{-2x}dx\int_0^1 e^{-3y}dy$$

$$=6\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^2\left(-\frac{1}{3}e^{-3y}\right)\Big|_0^1=(1-e^{-4})(1-e^{-3})$$

(3)P{(X,Y)∈D},其中D为 $2x+3y\le 6$.



$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint_{2x+3y\le 6} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} 6e^{-(2x+3y)}dy$$

$$=6\int_0^3 e^{-2x}\left(-\frac{1}{3}e^{-3y}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}(6-2x)}dx$$

$$=2\int_0^3 (e^{-2x}-e^{-6})dx=1-7e^{-6}$$

例 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cx, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值；

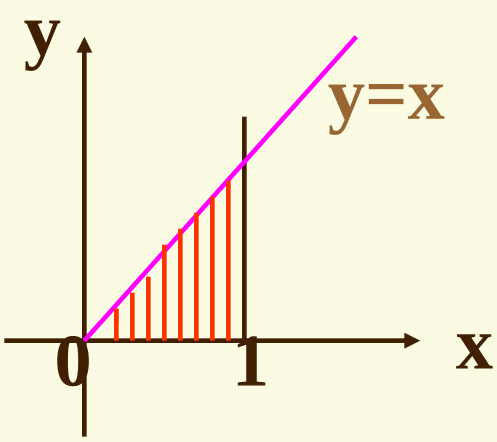
由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$ 确定C

解：(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$

$$= \int_0^1 [\int_0^x cxdy]dx$$

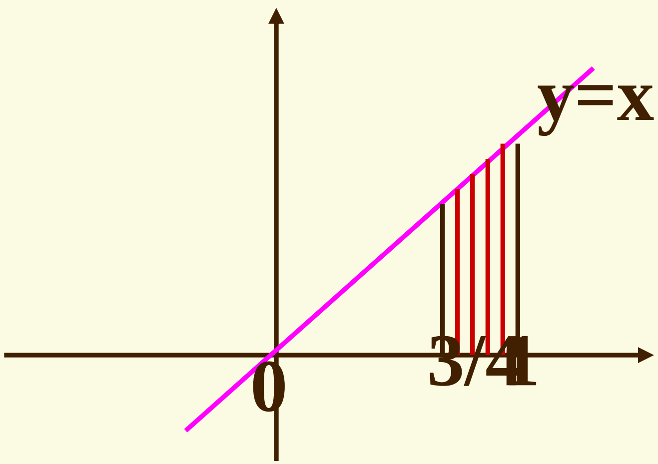
$$= c\int_0^1 x^2 dx = c/3 = 1,$$

$\Longrightarrow$ c =3



求 (2) P(X>3/4),

解: (2) $P(X > \frac{3}{4}) = \int_{3/4}^{1} [\int_{0}^{x} 3x dy] dx$ =37/64



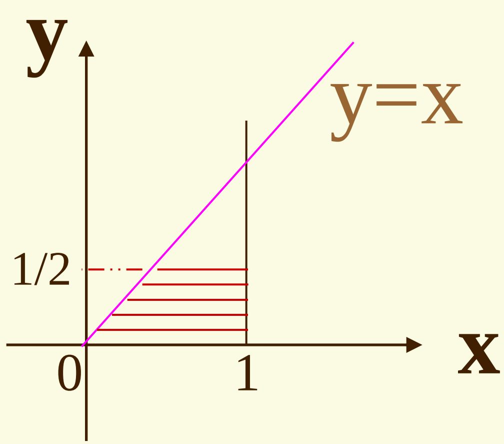
注意积分限

求 (3) P(Y<1/2)

解: (3) $P(Y<\frac{1}{2})=\int_0^{1/2}[\int_y^1 3x\,dx]dy$

=11/16

注意积分限



两个常见的二维分布

1. 均匀分布

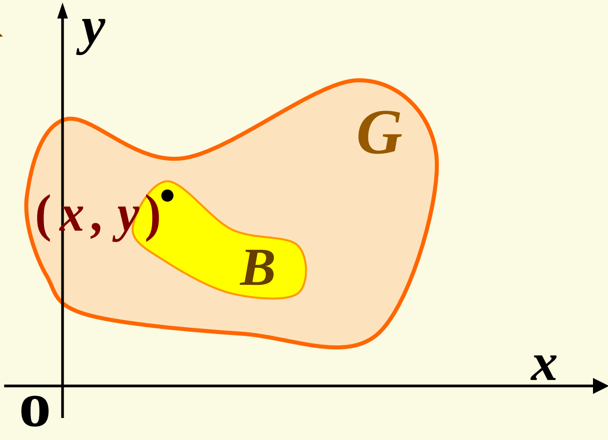
设 G 是平面上的有界区域, 其面积为S. 若二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in G;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在G上服从均匀分布.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

向平面上有界区域 G 内任投一质点, 若质点落在 G 内任一小区域 B 的概率与小区域的面积成正比，而与B的形状及位置无关. 则质点的坐标 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.



两个常见的二维分布(Cont.)

2. 正态分布　若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot$$

$$[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且 $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $|\rho|<1$,

则称(X,Y)服从参数为

$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布.

记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

连续型随机变量的边缘分布

对连续型*随机变量*(X,Y)，

X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$

则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad (-\infty<x<\infty)$$

(X,Y)关于Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad (-\infty<y<\infty)$$

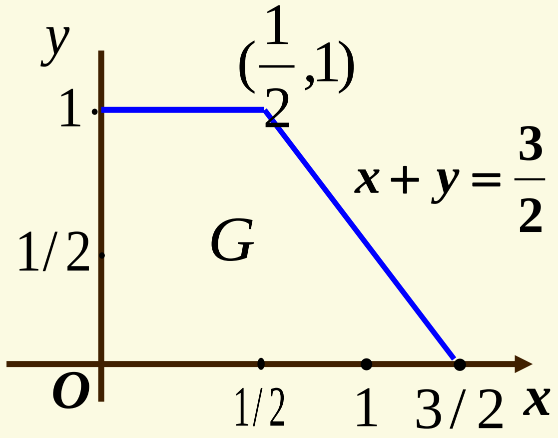
例 设(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{13}x, (x,y)\in G\\ 0, 其它.\end{cases}$$

其中区域**G**如右图所示，求**(X,Y)**关于**X**和**Y**的边缘概率密度 $f_X(x)$和$f_Y(y)$.

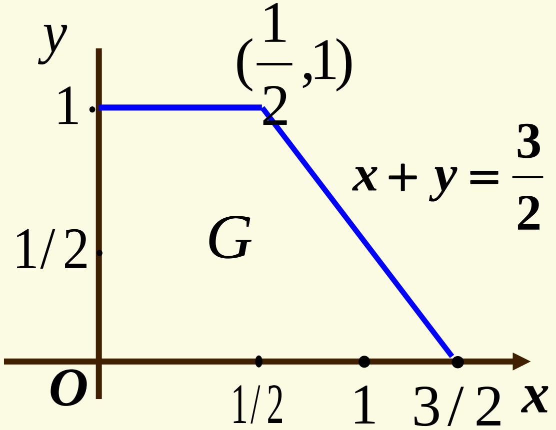
解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^1 \frac{24}{13}xdy, & 0<x<1/2,\\ \int_0^{\frac{3}{2}-x}\frac{24}{13}xdy, & 1/2\le x<3/2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$



即

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{24}{13}x, & 0<x<\frac{1}{2},\\ \frac{24}{13}x(\frac{3}{2}-x), & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{3}{2}-y}\frac{24}{13}x\,dx=\frac{12}{13}(\frac{3}{2}-y)^2, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例 试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

因为 $$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^1}$$

所以

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} dy$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$，则有

$$p_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\quad(-\infty<x<\infty)$$

同理

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty<y<\infty)$$

可见

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且不依赖于参数 ρ .

也就是说,对于给定的 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,$ 不同的 ρ 对应不同的二维正态分布,但它们的边缘分布却都是一样的

例 设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+xy)\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

求(X,Y)关于X,Y的边缘概率密度.

解

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+xy)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(xy)dy\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}ydy\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

即

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理可得

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

X,Y的边缘概率密度为一维正态分布.

所以,边缘概率密度为一维正态分布的二维随机向量不一定是二维正态分布.

二维正态分布的边缘分布是一维正态分布，这是二维正态分布(X,Y)的特征，其它分布未必成立.

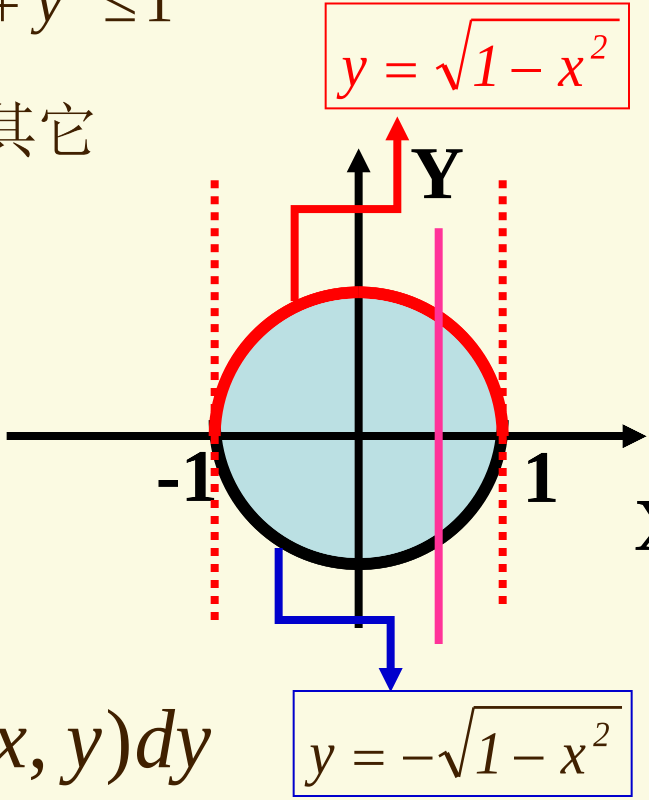
例 设随机向量(X,Y)服从区域D上的均匀分布,其中 $D=\{(x,y),x^2+y^2\le 1\}$,求X,Y的边缘密度函数 $p_1(x)$ 和 $p_2(y)$.

解 (1)由题意得: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

当 $|x|>1$ 时, $f(x,y)=0$, 所以, $p_1(x)=0$

当 $|x|\le 1$ 时,



$$p_1(x)=[\int_{-\infty}^{-\sqrt{1-x^2}}+\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty}]f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy \quad =\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

所以,

$$p_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\ , & |x|\le 1\\ 0\ , & |x|>1\end{cases}$$

同理,

$$p_2(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\ , & |y|\le 1\\ 0\ , & |y|>1\end{cases}$$

均匀分布的边缘密度不再是一维均匀分布

二维随机变量的分布函数

定义1　设(X,Y)是二维随机变量，如果对于任意实数x, y,二元 函数

$$F(x,y)$$

$$= P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\}$$

$$\square\, P(X \le x, Y \le y)$$

一维随机变量

X的分布函数

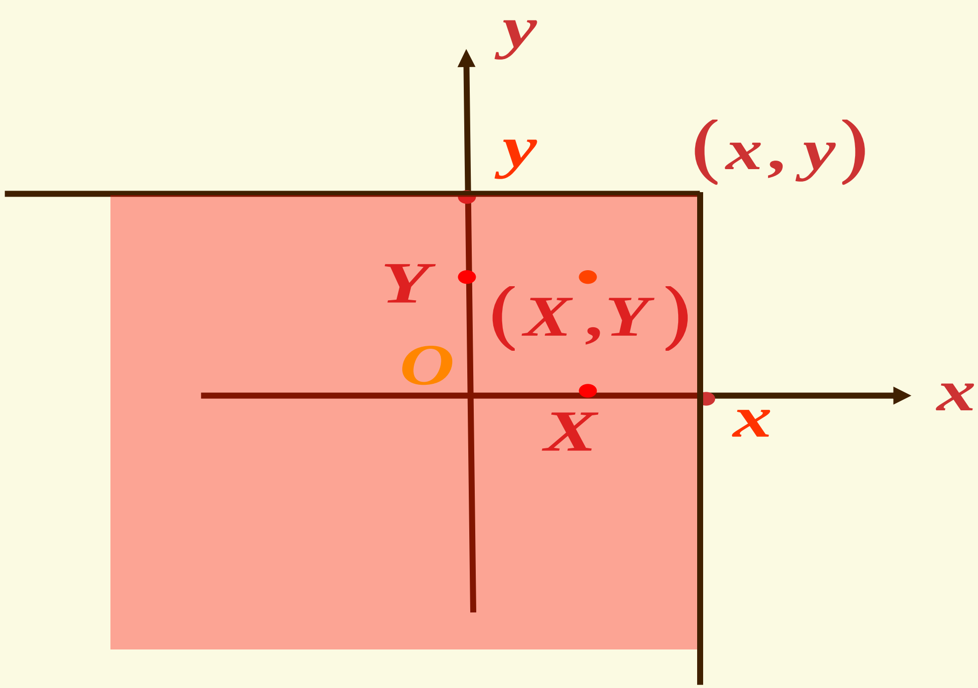
$$F(x) = P(X \le x)$$

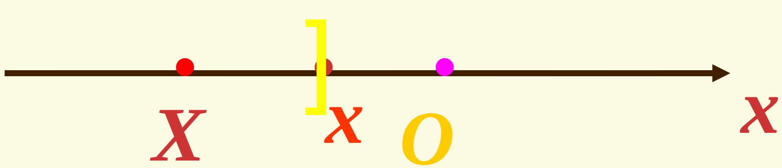
$$-\infty < x < \infty$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或者称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

分布函数的函数值的几何解释

将二维随机变量 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标, 那么,分布函数 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在下面左图所示的,以点 (x,y) 为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率.



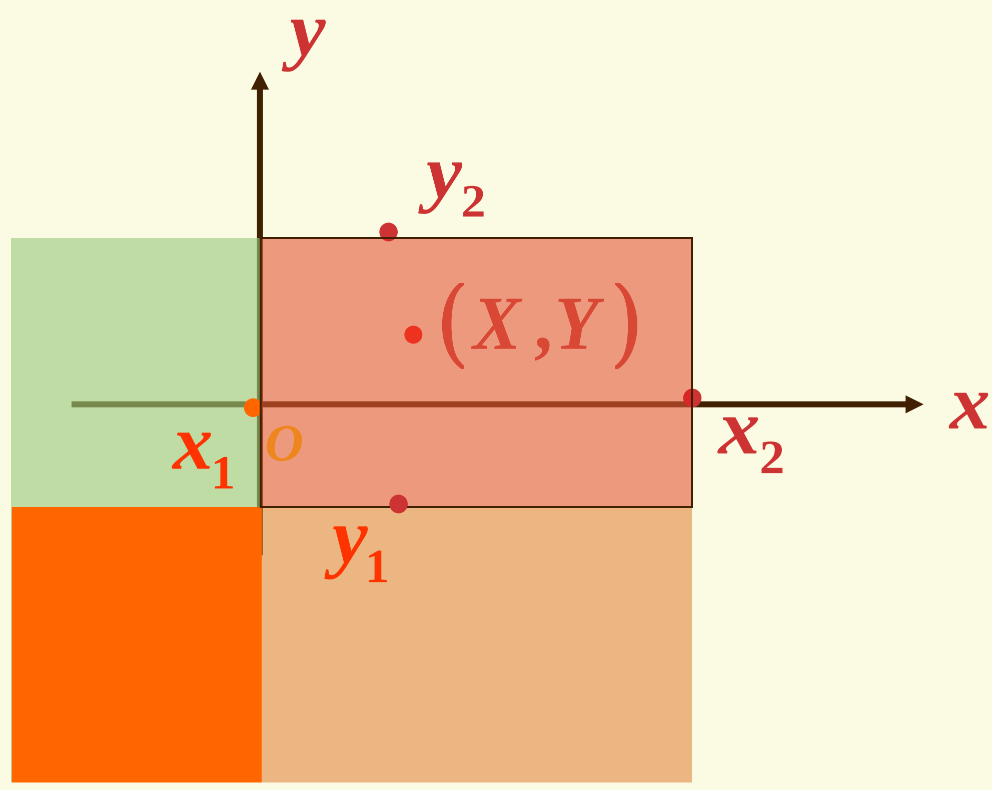


随机点(X,Y)落在矩形域 $[x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2]$

内的概率为

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$$



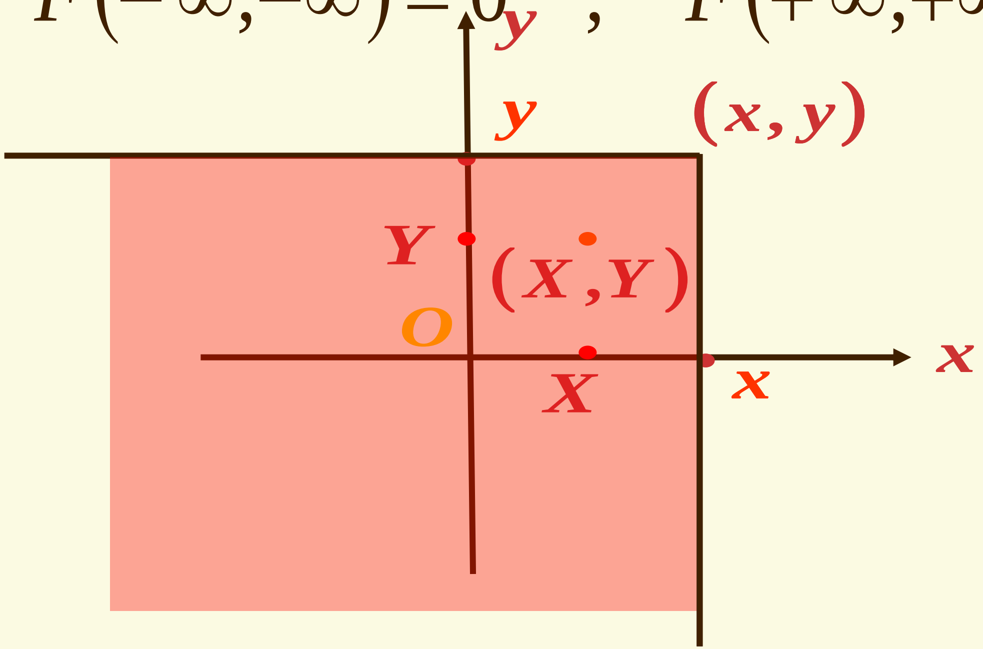
分布函数 $F(x,y)$ 的性质：

1. $0 \le F(x,y) \le 1$，且

对任意固定的 $y \in R$，$F(-\infty, y) = 0$，

对任意固定的 $x \in R$，$F(x, -\infty) = 0$，

$F(-\infty,-\infty) = 0$，$F(+\infty,+\infty) = 1$．



分布函数 $F(x,y)$ 的性质 :(Cont.)

2. $F(x,y)$是x的右连续函数，也是y的右连续函数

$$F(x,y)=F(x+0,y),\ F(x,y)=F(x,y+0).$$

分布函数 $F(x,y)$ 的性质：(Cont.)

3. $F(x,y)$ 是关于变量 x 和 y 的不减函数；

对任意固定的 $y \in R$

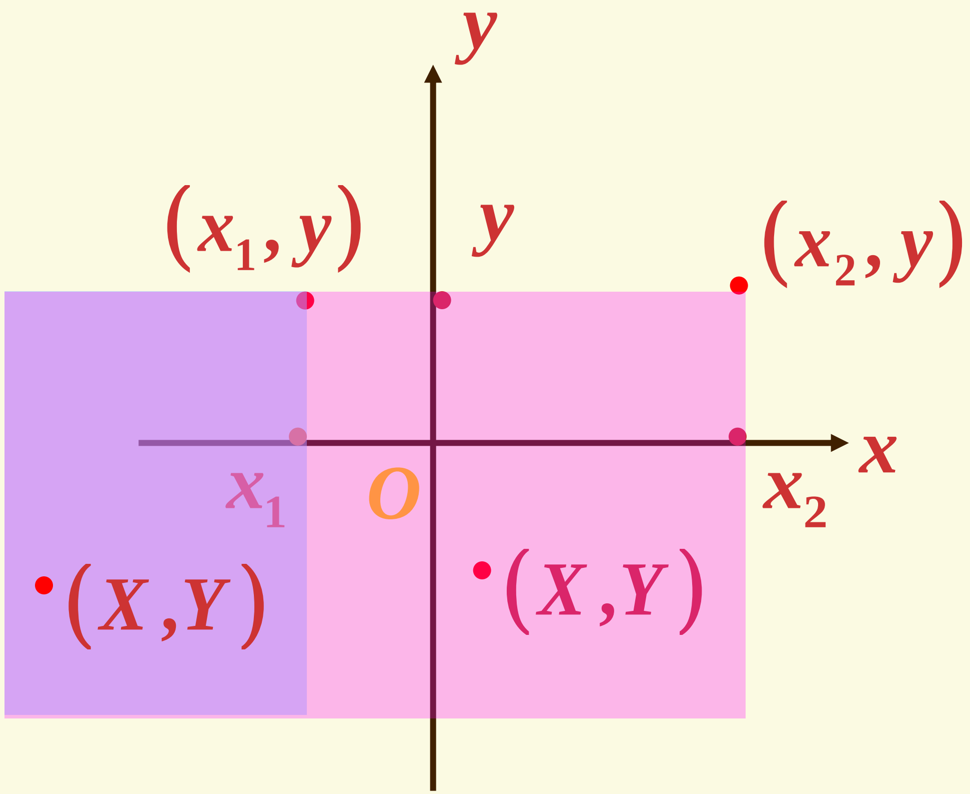
及 $\forall\, x_1, x_2 \in R$，当 $x_1 < x_2$

时 $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$；

对任意固定的 $x \in R$

及 $\forall\, y_1, y_2 \in R$，当 $y_1 < y_2$

时 $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$；



说明

（1）离散型随机变量（X，Y）的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的i, j求和.

（2）连续型随机变量（X，Y）的分布函数为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy,$$

不难得出，对连续型 随机变量(X,Y)，其概率密度与分布函数的关系如下：

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$ 在 **f** (x,y)的连续点

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

例 设随机变量 X 在 1, 2, 3 中等可能地取值，Y 在 1—X 中等可能地取整数值，求 (X,Y) 的分布及 $F(2,2)$.

解 确定随机变量的取值：

$$p_{ij} = P(X=i, Y=j)$$
$$= P(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$$
$$= P(Y=j \mid X=i) \cdot P(X=i)$$
$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{3} \quad (i = 1, 2, 3, \quad j \le i)$$

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/3	0	0
2	1/6	1/6	0
3	1/9	1/9	1/9

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

$$F(2, 2) = \sum_{i \le 2} \sum_{j \le 2} p_{ij}$$

$$= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2)$$

$$= 2/3$$

例 $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0; \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 试求:

(1) 常数C; (2)分布函数$F(x,y)$; (3) $P(0<X\le 1, 0<Y\le 2)$与$P(Y\le X)$.

解 (1)

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = C\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx\int_0^{+\infty} e^{-4y}dy = \frac{C}{12}, \qquad \therefore\ C=12;$$

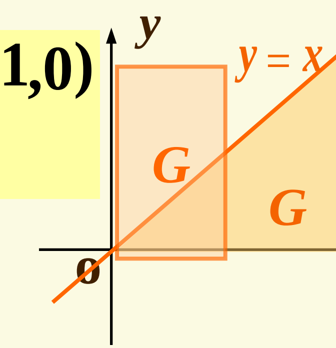
(2)

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = \begin{cases} \int_0^x du\int_0^y 12e^{-(3u+4v)}dv, & x>0,\ y>0; \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0, y>0; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(3) $P(\underline{0<X\le 1, 0<Y\le 2})$ 记为G $= F(1,2)+F(0,0)-F(0,2)-F(1,0)$

$$=(1-e^{-3})(1-e^{-8});$$



$$P(Y\le X)=P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy$$

$$=12\int_0^{+\infty}dx\int_0^x e^{-(3x+4y)}dy=\frac{4}{7}.$$

边缘分布函数

设(X, Y)的联合分布函数$F(x, y)$则 X 和 Y 的边缘分布函数 $F_X(x)$ ，$F_Y(y)$ 分别为:

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P\{X \le x\} \\
&= P\{X \le x, Y < +\infty\} \\
&= F(x, +\infty) \\
&= \lim_{y \to +\infty} F(x, y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} \\
&= P\{X < +\infty, Y \le y\} \\
&= F(+\infty, y) \\
&= \lim_{x \to +\infty} F(x, y)
\end{aligned}
$$

对离散型随机变量(X,Y),

(X,Y)关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{x_i\le x}p_{i\bullet}$$

(X,Y)关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{y_j\le y}p_{ij}=\sum_{y_j\le y}p_{\bullet j}$$

对连续型随机变量(X,Y),

(X,Y)关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx.$$

(X,Y)关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$= \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy.$$

条件分布

正如对两事件A, B, 若 $P(A)>0$, 可以考虑条件概率 $P(B|A)$ 一样，对二维离散型随机变量(X, Y)，其分布律为：

$$P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{ij}\quad i,j=1,2,\cdots$$

若$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}>0$, 我们也可以考虑条件概率

$$P\{X=x_i\,|\,Y=y_j\}\quad i=1,2,\cdots$$

定义：设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的y_j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称：

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{P_{\cdot j}}\quad i=1,2\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下，随机变量X的条件分布律.

同样，对于固定的x_i， 若 $P\{X=x_i\}>0$，则称：

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad j=1,2\cdots$$

为在$X=x_i$条件下，随机变量Y的**条件分布律**。

例　一射手进行射击，击中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止，设以X表示首次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的联合分布律和条件分布律。

解:

(X,Y)的分布律为:

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2q^{n-2},\ q=1-p,\ n=2,3,\cdots,\ \ m=1,2,\cdots n-1.$$

X的边缘分布律为：$P\{X=m\}$

$$=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}=pq^{m-1},\ m=1,2,\cdots$$

对每一$m(m=1,2,\cdots),P\{X=m\}>0,$

在$X=m$条件下，Y的条件分布律为:

$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1},\ n=m+1,m+2,\cdots$$

Y的边缘分布律为：$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\ n=2,3,\cdots$$

于是对每一$n(n=2,3,\cdots),P\{Y=n\}>0,$

在$Y=n$条件下，X的条件分布律为：

$$P\{X=m\,|\,Y=n\}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\ m=1,2,\cdots,n-1.$$

条件分布函数

若$P\{Y=y\}>0$，则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数为:

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\frac{P\{X\le x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

若$P\{Y=y\}=0$，但对任给$\varepsilon>0, P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$

则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数为:

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0}P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

仍记为$P\{X\le x|Y=y\}$.

条件概率密度

定义$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\partial}{\partial x}F_{X|Y}(x|y)$，则$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

事实上，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\partial}{\partial x}F_{X|Y}(x|y)\ =\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}\quad=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}}{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}{\varepsilon}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}}\quad=\quad\frac{\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}}{f_Y(y)}\quad=\quad\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

定义：条件概率密度

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,

(X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$,

若对于固定的y, $f_Y(y)>0$

则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下，X的**条件概率密度**,

记为：$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

同理，若对于固定的x, $f_X(x)>0$

在$X=x$条件下，Y的**条件概率密度**为：$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

例 设二维随机变量(X,Y)在区域$\{(x,y): |y| < x < 1\}$内均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$及$P\{X > \frac{2}{3} \big| Y = \frac{1}{2}\}$。

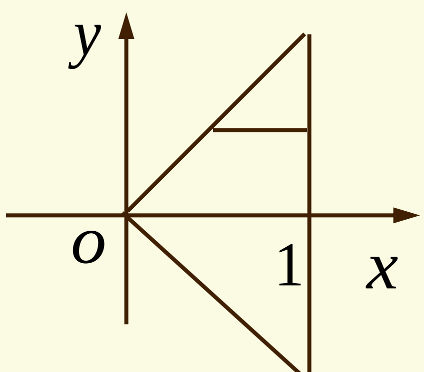
解： 根据题意，(X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

Y的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}\mathrm{d}x=1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是给定y (-1<y<1)，X的条件概率密度为：



$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&P\{X>\tfrac{2}{3}\big|Y=\tfrac{1}{2}\}\\ &=\int_{2/3}^{\infty} f_{X|Y}(x\big|\tfrac{1}{2})\mathrm{d}x\\ &=\int_{2/3}^{1} 2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\end{aligned}}$$

二维均匀分布的条件分布仍为均匀分布

例 设数X在区间$(0,1)$上随机取值，当观察到$X=x(0<x<1)$时，数Y在区间$(x,1)$上随机取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$。

分析：为求Y的概率密度，就要先求(X,Y)的概率密度；

而根据X的边缘概率密度和Y在X给定下的条件概率密度，

即可求得(X,Y)的概率密度，而$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

解：对任给$x(0<x<1)$，在$X=x$条件下，Y的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

故(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

所以Y的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y) & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

随机变量的独立性

定义 设*X*, *Y*是两个随机变量，若对于任意的 $a,b(a<b);c,d(c<d)$,

事件 $\{a<X\le b\},\{c<Y\le d\}$ 相互独立，即

$$P\{a<X\le b, c<Y\le d\}=P\{a<X\le b\}P\{c<Y\le d\},$$

则称随机变量 X,Y 相互独立.

说明

1) 设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 边缘分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$, 则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$.

2) 若离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\},$$

3）设连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$

在平面上几乎处处成立。

在平面上几乎处处成立:允许在平面上存在面积为零的集合，在其上等式 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ 不成立.

例 已知 (X, Y) 的联合概率密度为

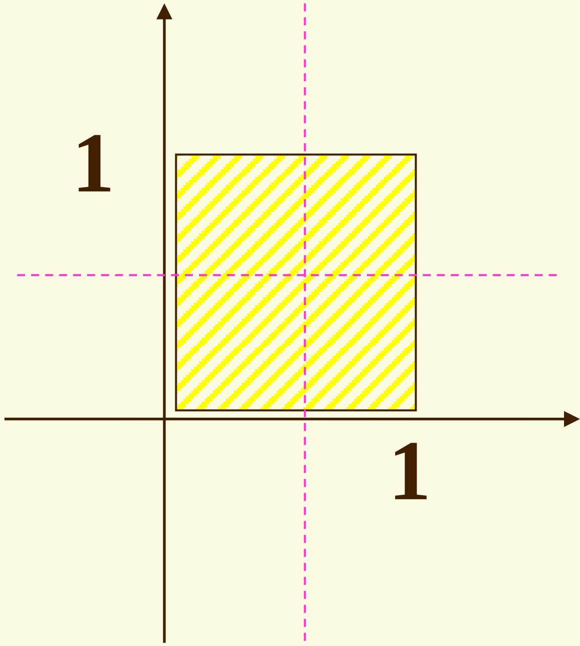
(1) $$p_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $$p_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

讨论 X, Y 是否独立?

解

(1) 由图可知边缘密度函数为



$$p_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

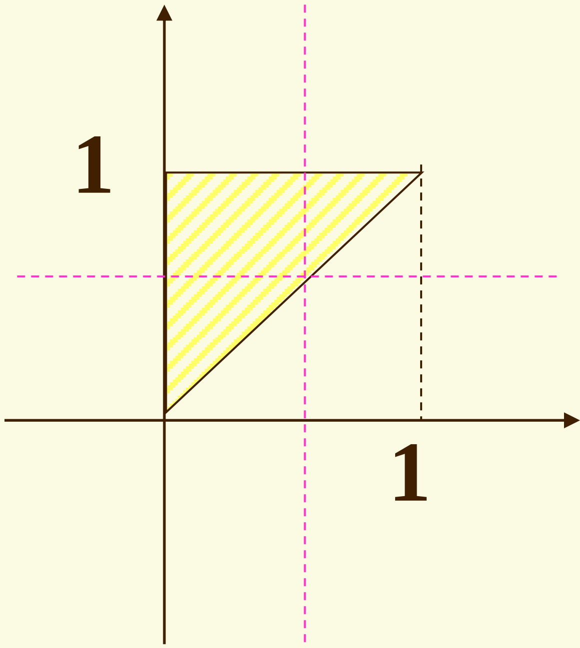
$$p_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然,

$$p_1(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

故X,Y相互独立

(2) 由图可知边缘密度函数为



$$p_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然，$p_2(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$

故X,Y不独立

例 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量（ X, Y ）的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = P\{X = 1\}P\{Y = 2\} = 0.3 \times 0.6 = 0.18,$$

$$P\{X = 1, Y = 4\} = P\{X = 1\}P\{Y = 4\} = 0.3 \times 0.4 = 0.12,$$

$$P\{X = 3, Y = 2\} = P\{X = 3\}P\{Y = 2\} = 0.7 \times 0.6 = 0.42,$$

$$P\{X = 3, Y = 4\} = P\{X = 3\}P\{Y = 4\} = 0.7 \times 0.4 = 0.28.$$

因此(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

例

X,Y相互独立吗？

设 （X,Y）～N($\mu_1,\mu_2,\sigma^2{}_1,\sigma^2{}_2,\rho$)

证明：X,Y相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

证：$\Leftarrow$

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2$$

$$-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

由$\rho=0$，得

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

因为 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$

所以 $$p_X(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}},\quad -\infty<y<\infty$$

易见 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

由x, y的任意性知，上式对一切x, y成立，故X和Y相互独立

$\Rightarrow$ 已知X和Y相互独立

即对$\forall x, y$，有$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$

令 $x = \mu_1$，$y = \mu_2$

则，$p(\mu_1, \mu_2) = p_X(\mu_1) p_Y(\mu_2)$

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

即 $$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore \sqrt{1-\rho^2} = 1 \quad \text{故 } \rho = 0$$

例 某种保险丝的寿命(以一百小时计) X 服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-x/3}, & x>0\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

(1) 有两只这种保险丝，其寿命分别为 X_1, X_2，设 X_1, X_2相互独立，求 X_1, X_2 的联合概率密度.

(2) 在(1)中，一只是原装的，另一只是备用的，备用的只在原装的熔断时自动投入工作，于是两只保险丝的总寿命为 X_1+X_2，求 $P\{X_1+X_2\le 1\}$.

解 (1) X_1 概率密度为 $f(x_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^{-x_1/3}, & x_1>0\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

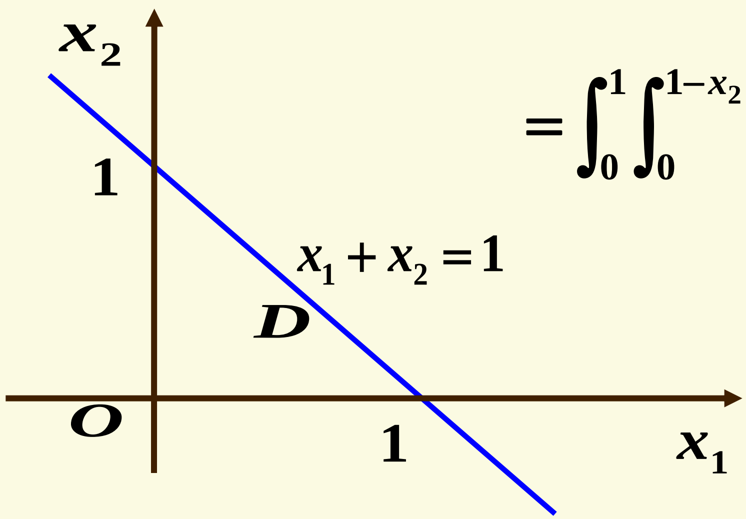
X_2 概率密度为 $f(x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^{-x_2/3}, & x_2>0\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

因两只保险丝的寿命 X_1, X_2，相互独立，故 X_1, X_2 的联合概率密度为 $f(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

$$=\begin{cases}(\dfrac{1}{3}e^{-x_1/3})(\dfrac{1}{3}e^{-x_2/3}), & x_1>0, x_2>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

即 $f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}e^{-(x_1+x_2)/3} & x_1>0,\ x_2>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(2) $P\{X_1+X_2\le 1\}=\iint_D f(x_1,x_2)dx_1dx_2$



$$=\int_0^1\int_0^{1-x_2}\frac{1}{9}e^{-(x_1+x_2)/3}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

$$=0.045$$

最后我们给出有关独立性的两个结果：

定理1 若连续型随机向量（X_1, …,X_n）的概率密度函数$f(x_1, \ldots,x_n)$可表示为n个函数$g_1, \ldots,g_n$之积，其中g_i只依赖于x_i，即

$$f(x_1, \ldots,x_n)= g_1(x_1) \ldots g_n(x_n)$$

则X_1, …,X_n相互独立,且X_i的边缘密度$f_i(x_i)$与$g_i(x_i)$只相差一个常数因子.

定理2 若$X_1, \ldots,X_n$相互独立,而

$Y_1=g_1(X_1, \ldots,X_m)$, $Y_2=g_2(X_{m+1}, \ldots,X_n)$

则Y_1与Y_2独立.

注意 若两个随机变量相互独立，且又有相同的分布，不能说这两个随机变量相等. 如

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

X,Y 相互独立，则

$Y \backslash p_{ij} \backslash X$	-1	1
-1	0.25	0.25
1	0.25	0.25

$P(X=Y)=0.5$，故不能说 $X=Y$.

二维随机变量函数的分布

我们讨论了一维随机函数的分布，现在我们进一步讨论:

当随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的联合分布已知时，如何求出它们的函数

$$Y=g(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad i=1,2,\ldots,m$$

的分布?

和的分布：$Z = X + Y$

离散型分布的情形

例　若X、Y独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0,1,2,\ldots$,

$P(Y=k)=b_k$, $k=0,1,2,\ldots$,

求$Z=X+Y$的概率函数.

解: $P(Z=r)=P(X+Y=r)$

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$

由独立性

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i)P(Y=r-i)$$

此即离散卷积公式

$=a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \ldots + a_r b_0 \quad r=0,1,2,\ldots$

例 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 $X+Y$的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3

所以 $X+Y$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

例 若X和Y相互独立,它们分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布,

证明$Z=X+Y$服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

解：依题意

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \qquad i=0,1,2,\ldots$$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!} \qquad j=0,1,2,\ldots$$

由卷积公式

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$

由卷积公式

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{i}}{i!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{r-i}}{(r-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\lambda_1^{i}\lambda_2^{r-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^{r},\quad r=0,1,\ \ldots$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

例　设X和Y相互独立，$X\sim B(n_1,p),Y\sim B(n_2,p)$, 求$Z=X+Y$的分布.

我们给出不需要计算的另一种证法:

回忆第二章对服从二项分布的随机变量所作的直观解释:

若$X\sim B(n_1,p)$,则X是在n_1次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率都为p.

同样，Y是在n_2次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率为p.

故$Z=X+Y$是在n_1+n_2次独立重复试验中事件A出现的次数，每次试验中A出现的概率为p,于是Z是以（n_1+n_2，p）为参数的二项随机变量

即：若X与Y相互独立，

$X \sim B(n_1,p)$，$Y \sim B(n_2,p)$，

则 $X+Y \sim B(n_1+n_2,p)$

二项分布的可加性

和的分布：$Z = X + Y$

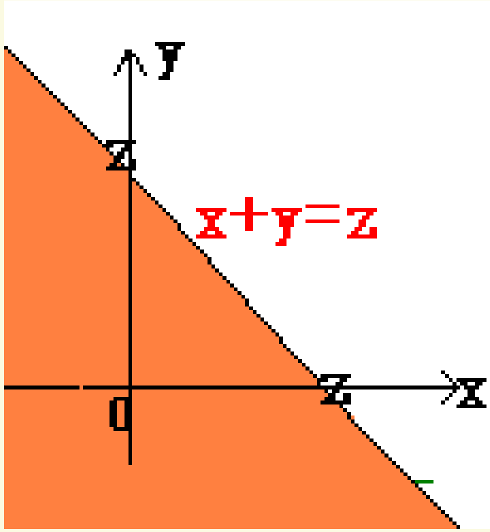
连续型分布的情形

例 设X和Y的联合密度为 $p(x,y)$,求$Z=X+Y$的密度

解: $Z=X+Y$的分布函数是:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint\limits_D p(x,y)dxdy$$

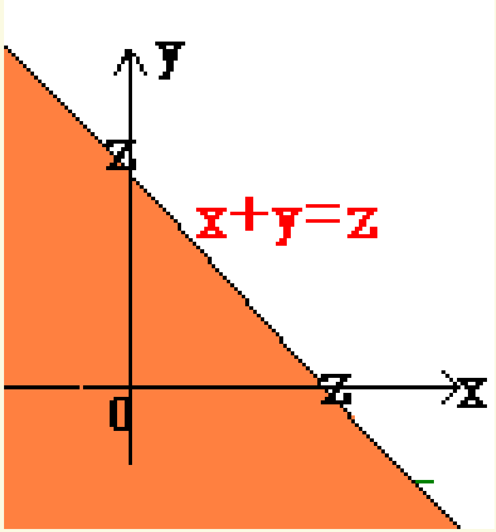


这里积分区域$D=\{(x, y): x+y \le z\}$

是直线$x+y=z$ 左下方的半平面.

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} p(x,y)dxdy$$

化成累次积分,得



$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z-y} p(x,y)dx]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z-y}[\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy]dx$$

$$p_Z(z)=F_Z^{'}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p(z-y,y)dy$$

由X和Y的对称性, $f_Z(z)$又可写成

$$p_Z(z)=F_Z^{'}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,z-x)dx$$

以上两式是两个随机变量和的概率密度的一般公式.

特别，当X和Y独立，设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$p_X(x)$，$p_Y(y)$，则上述两式化为:

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

这两个公式称为卷积公式.

例 若X和Y独立,具有共同的概率密度

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解：由卷积公式

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

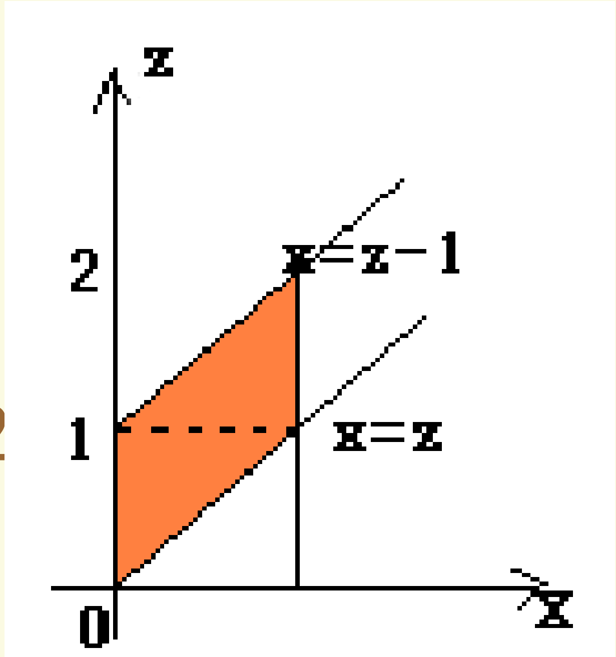
$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le z\le x+1\end{cases}$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

$$\begin{cases} 0 \le \boldsymbol{x} \le 1 \\ 0 \le \boldsymbol{z}-\boldsymbol{x} \le 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le z \le x+1 \end{cases}$$

如图示:



于是

$$p_Z(z)=\begin{cases} \int_0^z dx = z, & 0 \le z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z, & 1 \le z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

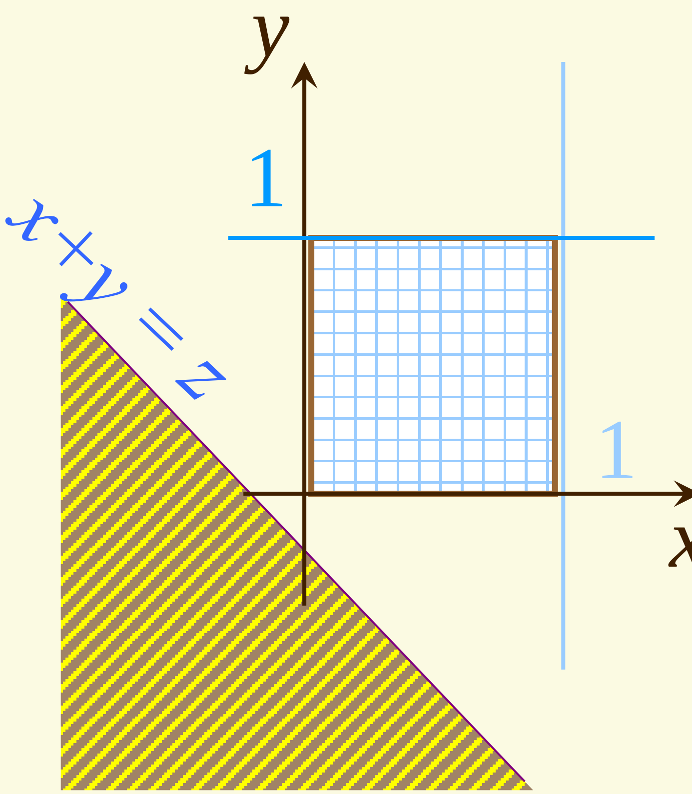
可用卷积公式直接求密度函数与通过分布函数求密度函数两种方法求和的分布

解法二 从分布函数出发

$$F_Z(z) = P(X+Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} p(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} p_X(x)\,p_Y(y)\,dx\,dy$$



当 $z<0$ 时， $F_Z(z)=0$

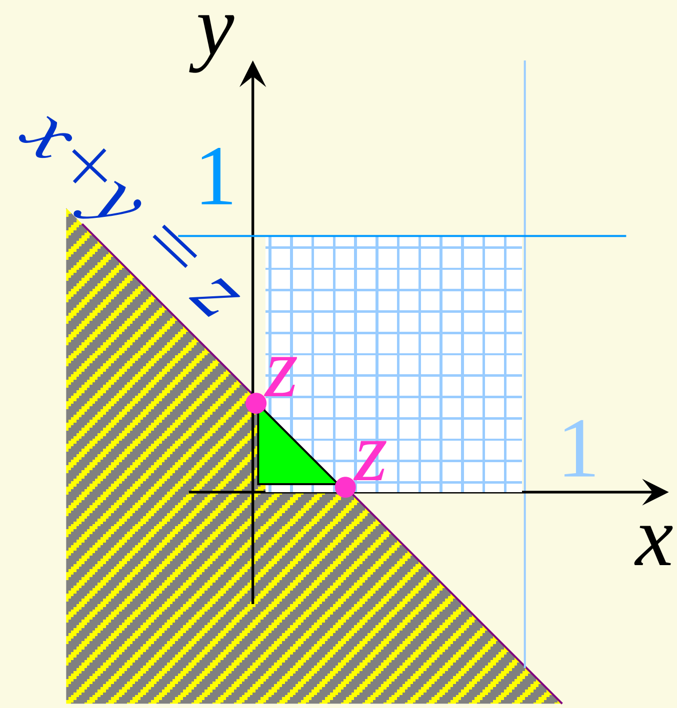
当$0 \le z < 1$ 时，

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 1 dy$$

$$= \int_0^z (z-x) dx$$

$$= \frac{z^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad p_Z(z) = z$$



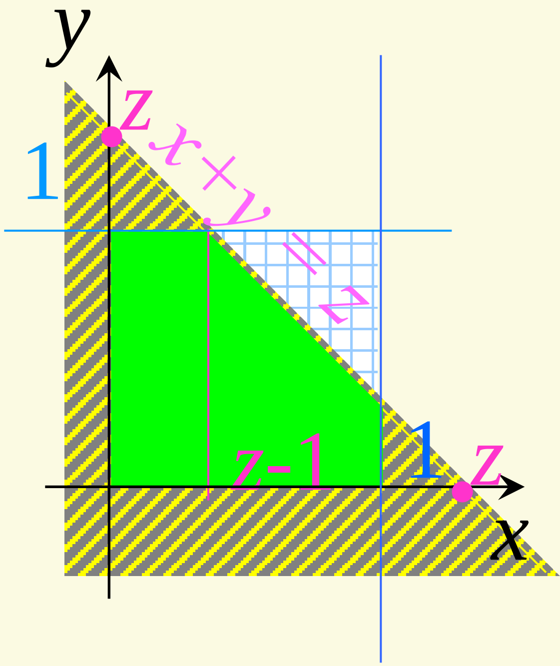
当$1 \le z < 2$时，

$$F_Z(z) = (z-1) + \int_{z-1}^{1} dx \int_{0}^{z-x} 1 dy$$

$$= z - 1 + \int_{z-1}^{1} (z-x) dx$$

$$= 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

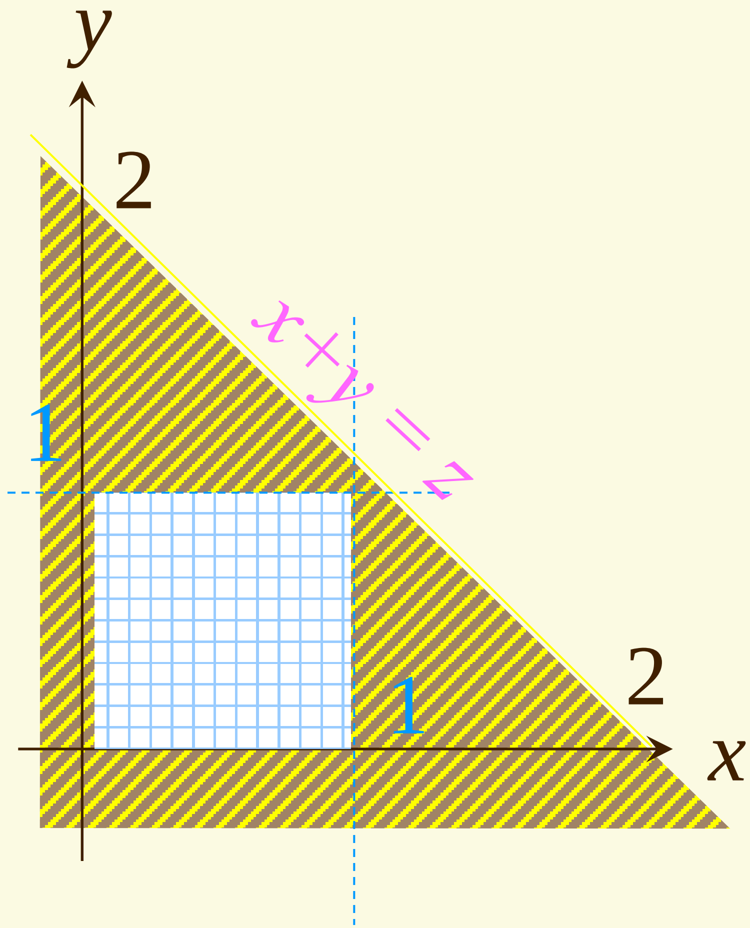
$$\Longrightarrow \quad p_Z(z) = 2 - z$$



当$2 \le z$时，

$$F_Z(z) = 1$$

$$p_Z(z) = 0$$



$$p_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0\text{或}z > 2 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 2 - z, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

例 设随机变量X_1和X_2相互独立,且均服从标准正态分布N~(0,1),求Y= X_1+X_2的概率密度函数.

解　由题意得 $p_1(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_1^2}{2}}, p_2(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2^2}{2}}$

X_1和X_2相互独立,故

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(y-x)p_2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\frac{y}{2})^2}{2}}dx \quad 令 \frac{t}{\sqrt{2}}=x-\frac{y}{2}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$$

$$\boxed{Y\sim N(0,2)}$$

结论:　两个独立的正态分布的随机变量的和仍服从正态分布.

.即:若$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, X_1,X_2独立,则

$$X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

正态分布的可加性

更一般地, 可以证明:

有限个独立正态变量的线性组合仍服从正态分布.

推论: 有限个独立的正态分布的线性函数

仍服从正态分布.

即:若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $(i=1,2,\ldots n)$, $X_1, X_2, \ldots X_n$相互独立,实数$a_1, a_2, \ldots, a_n$不全为零,则

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)}$$

特别, 若$X_1, X_2, \ldots X_n$独立同正态分布$N(\mu, \sigma^2)$,

记: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, 则 $\boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$

连续型随机变量商的分布

设$(X, \ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$p(x, \ y)$，令：$Z=\dfrac{X}{Y}$，

计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数$p_Z(z)$.

首先计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}$$

连续型随机变量商的分布(Cont.)

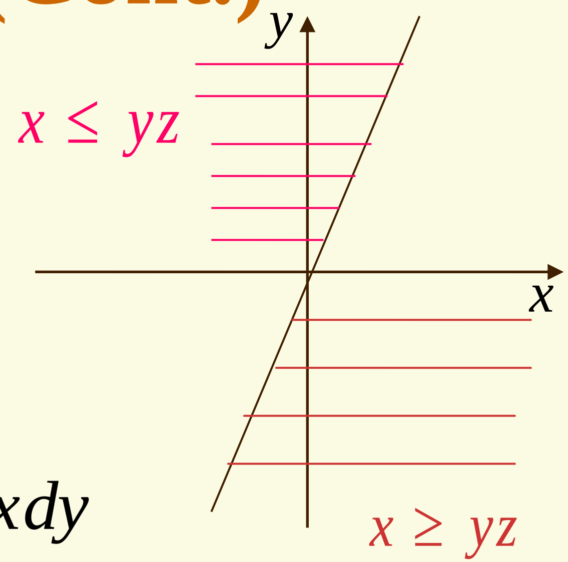
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}$$

$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} p(x,\quad y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z,\ y>0} p(x,\quad y)dxdy+\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z,\ y<0} p(x,\quad y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x\le zy,\ y>0} p(x,\quad y)dxdy+\iint\limits_{x\ge zy,\ y<0} p(x,\quad y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{zy}p(x,\quad y)dx+\int_{-\infty}^{0}dy\int_{zy}^{+\infty}p(x,\quad y)dx$$



连续型随机变量商的分布(Cont.)

在第一个积分 $\int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} p(x, \quad y) dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = ydu$，当 $x = zy$ 时，$u = z$；

当 $x \to -\infty$ 时，注意到 $y > 0$，因而有 $u \to -\infty$ ；

$$\int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} p(x, \quad y) dx = \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z} p(uy, \quad y) y du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} yp(uy, \quad y) dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} |y| p(uy, \quad y) dy$$

连续型随机变量商的分布(Cont.)

同理，在第二个积分 $\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} p(x, \quad y) dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = ydu$，当 $x = zy$ 时，$u = z$；

当 $x \to +\infty$ 时，注意到 $y < 0$，因而有 $u \to -\infty$；

$$\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} p(x, \quad y) dx = \int_{-\infty}^{0} dy \int_{z}^{-\infty} p(uy, \quad y) y du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} (-y) p(uy, \quad y) dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} |y| p(uy, \quad y) dy$$

连续型随机变量商的分布(Cont.)

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}|y|p(uy,\quad y)dy+\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{0}|y|p(uy,\quad y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(uy,\quad y)dy\right)du$$

所以，由密度函数的定义有

故

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(zy,\quad y)dy$$

连续型随机变量商的分布(Cont.)

特别地，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$p(x,\quad y)=p_X(x)p_Y(y)$$

此时，我们有

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p_X(yz)p_Y(y)dy$$

补充结论:

（1）设$(X, \ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$p(x, \ y)$,令：$Z = X - Y$，则

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z+y, \ y)dy$$

（2）设$(X, \ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$p(x, \ y)$，令：$Z = XY$，则

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p\left(x, \ \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p\left(\frac{z}{y}, \ y\right)\frac{1}{|y|}dy$$

$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设X，Y是两个相互独立的随机变量，

它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，

求$M=\max(X,Y)$ 及$N=\min(X,Y)$的分布函数.

$M=\max(X,Y)$不大于z等价于X和Y都不大于z，

故有 $P(M\le z)=P(X\le z, Y\le z)$

又由于X和Y 相互独立,

于是得到$M=\max(X,Y)$的分布函数为:

$$F_M(z)=P(M\le z) \quad =P(X\le z, Y\le z)$$

$$=P(X\le z)P(Y\le z)$$

即有 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$

类似地，可得N=min(X,Y)的分布函数是

$$F_N(z)=P(N\le z)\ \ =1-P(N>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)$$

即有 $F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

下面进行推广

设$X_1,\ldots,X_n$是n个相互独立的随机变量，

它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x)$ $(i=0,1, \ldots, n)$

与二维情形类似，可得:

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为:

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数是

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，有

$$F_M(z)=[F(z)]^n$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

二维随机变量的推广

（1）分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

二维随机变量的推广(Cont.)

（2）概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使对于任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = 1,$$

及 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度函数.

二维随机变量的推广(Cont.)

(3) 边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于X_1的**边缘分布函数**

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于(X_1, X_2)的**边缘分布函数**

其它依次类推.

二维随机变量的推广(Cont.)

(4) 边缘概率密度函数

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度,

则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1,关于 (X_1,X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的 $k(1\le k<n)$ 维边缘概率密度.

二维随机变量的推广(Cont.)

(5) 相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中F_1, F_2, F依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数,

则称随机变量$(X_1, \cdots, X_m)$与$(Y_1, \cdots, Y_n)$相互独立.

作业：

Exes.: **3, 9, 13, 15, 17,20, 21, 29,36**