

中山大学本科生考试答题纸

学院(系) _____ 专业 _____ 级 _____

考试科目 _____ 成绩评定 _____

考生姓名 _____ 教师签名 _____

学 号 _____ 年 月 日

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第七条：“考试作弊者不授予学士学位。”

作业2:

1. 设 G 是无向简单图, 且 $\delta \geq 2$. 证明: G 中存在长度大于等于 $\delta+1$ 的圈.

证明: 取 G 中一条最长路径, 设为 $P = v_0 v_1 \dots v_k$, 因为 P 是最长路径, 故 v_0 的所有相邻点都在 P 上, 设在 P 上与 v_0 相邻且在 P 上距离 v_0 最远的点为 v_m , 故与 v_0 相邻的所有点都在 $v_1 v_2 \dots v_m$ 这条路径上, 所以 $m \geq \delta(v_0) \geq \delta$, 从而 $v_0 v_1 \dots v_m v_0$ 是一个长度大于等于 $\delta+1$ 的圈.

2. 证明: 若 G 是简单图且 $E > \binom{V}{2}$, 则 G 连通 (其中 V 和 E 分别为 G 的顶点数和边数).

证明: 对 G 的顶点数 V 归纳证明.

当 $V=3$ 时, $E > \binom{3}{2} = 1$, 故 $E \geq 2$, 易知 G 连通.

设 $V=k$ 时, 若 $E > \binom{k}{2}$, 则 G 连通. 满足 $\delta(u) \geq 1$.

现在设 $V=k+1$. 任取一个顶点 $u \in V(G)$. 若 $\delta(u) = k$, 则 u 与 G 中所有顶点相邻, 显然 G 连通, 故 $1 \leq \delta(u) \leq k-1$.

因为 $E > \binom{k+1}{2} = \binom{k}{2} + k$, 从 G 中删去 u 及其关联的边得图 G' , 则 $E(G') > \binom{k}{2} - (k-1) = \frac{k(k-1)}{2} - (k-1) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \binom{k-1}{2}$, 而 $V(G') = k$. 由归纳假设设 G' 连通, 又因为 $\delta(u) \geq 1$,

11. G 与 G' 中某一点连通, 故 G 连通。

3. 某公司在六个城市 C_1, C_2, \dots, C_6 中都有分公司。从 C_i 到 C_j 的直接航程票价由下述矩阵的第 (i, j) 元素给出 (∞ 表示无直接航路), 求 C_1 到其余各城市的最廉航价和路线。(用 Dijkstra 算法)。

0	50	∞	40	25	10
50	0	15	20	∞	25
∞	15	0	10	20	∞
40	20	10	0	10	25
25	∞	20	10	0	55
10	25	∞	25	55	0

解:

