

中山大学本科生考试答题纸

学院(系) _____ 专业 _____ 级 _____

考试科目 _____ 成绩评定 _____

考生姓名 _____ 教师签名 _____

学 号 _____ 年 月 日

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

作业12:

1. 在九个人的人群中，有一个人认识另外两个人，有两个人每人认识另外四个人，有四个人每人认识另外五个人，剩下的两个人每人认识另外六个人。证明：有三人他们全都互相认识。

证：将团体内的每个人看成图 G 的顶点，两点相邻的必要条件是对应的两人相互认识。若 G 存在，则它的度序列为： $(6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 2)$ 。现多次利用练习1.5.7(a)的结果，我们有 $(6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 2) \rightarrow (5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 2) \rightarrow (3, 3, 3, 3, 3, 3, 2) \rightarrow (3, 3, 2, 2, 2, 2) \rightarrow (2, 2, 2, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1)$ 。由于 $(1, 1, 1, 1)$ 是 $K_2 + K_2$ 的度序列，故 G 确实存在。计算 $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}(1 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 5 + 2 \times 6) = 21$ ，而 $\varepsilon(T_{2,9}) = 20$ 。故由定理8.9知， G 中含有 K_3 ，所以结论成立。证毕。

★练习1.5.7(a)：设 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是非负整数的不增序列，并用 d' 记序列 $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ 。证明： d 是图序列当且仅当 d' 是图序列。

证明： \Rightarrow) 设 G 是简单图，其图序列为 d ，且 $d(v_i) = d_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，分两种情况证明：

(1) 若 v_1 关联的 d_1 条边恰为 $v_1 v_2, v_1 v_3, \dots, v_1 v_{d_1+1}$ ，则 $G - v_1$ 的

图序列是 d' .

(2) 若 v_i 关联的 d_i 条边中, 有 $v_i v_j$, 且 $j > d_i + 1$. 令

$$j_0 = \max \{j \mid v_i v_j \in E(G)\} > d_i + 1,$$

$$i_0 = \min \{i \mid v_i v_{i_0} \notin E(G)\} \leq d_i + 1, \text{ 则}$$

$v_i v_{j_0} \in E(G)$, 且 $j > j_0$ 时, $v_i v_j \notin E(G)$;

$v_i v_{i_0} \notin E(G)$, 且 $i < i_0$ 时, $v_i v_i \in E(G)$. 因为 $d_{i_0} \geq d_{j_0}$, 考虑与 v_{i_0} 相邻的 d_{i_0} 个点, 其中必有一点 v_k 与 v_{j_0} 不相邻, 否则,

$d_{j_0} \geq d_{i_0} + 1 > d_{i_0}$, 矛盾. 作 $G' = G - \{v_i v_{j_0}, v_{i_0} v_k\} + \{v_i v_{i_0}, v_k v_{j_0}\}$. 这时, G' 与 G 有相同的图序列 d , 只是 G' 的 j_0 小了, i_0 大了.

如此继续下去, 必可化为情况 (1).

⇐) 设 G' 的图序列为 d' . 在 G' 上加入异于 G' 的顶点 v_2, v_3, \dots, v_n 的新顶点 v_1 , 并在 v_1 和 $v_2, v_3, \dots, v_{d_i+1}$ 之间连边, 所得之新图记为 G , 则 G 的图序列为 d . 证毕.

2. 证明: 唯一的 1-临界图是 K_1 , 唯一的 2-临界图是 K_2 , 仅有的 3-临界图是 $k \geq 3$ 的奇 k 圈.

证明: 由于 1-色图是空图, 从而 1-临界图只能是 K_1 ; 2-色图是 2-部图, 从而 2-临界图只能是 K_2 ; 3-色图必含奇圈且奇圈至少是 3-色才能正常着色. 从而 3-临界图只能是 k -奇圈 ($k \geq 3$). 证毕.

3. 证明: 若 G 的任意两个奇圈都有一个公共顶点, 则 $\chi \leq 5$.

证明: 若 $\chi \geq 6$, 且假定在 G 上已用 χ 种颜色着色. 令 G_1 是 G 中着 1, 2, 3 色的顶点在 G 中的导出子图, G_2 是 G 中着 4, 5, \dots , χ 色的顶点在 G 中的导出子图. 显然 $\chi(G_1) = 3$, $\chi(G_2) = \chi - 3 \geq 3$. 由于 2-部图的色数为 2, 故 G_1 和 G_2 均不是 2-部图. 所以在 G_1, G_2 中均含有奇圈, 且它们互不相交, 这和假设矛盾. 故 $\chi \leq 5$. 证毕.