中 山 大 学 本 科 生 考 试 答 题 纸

学院(系)………… 专业………… 级

考试科目…………　成绩评定…………

考生姓名…………　教师签名…………

学　　号…………　　年　　月　　日

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第七条:"考试作弊者不授予学士学位。"

装　订　线

作业7:

1. 有向图D的反向图$\overleftarrow{D}$是将D中每一条边反向得到的有向图。证明:有向图D是强连通图,当且仅当$\overleftarrow{D}$是强连通图。

证明:只要证D是强连通图蕴含$\overleftarrow{D}$是强连通图即可。因为$\overleftarrow{\overleftarrow{D}}=D$,故$\overleftarrow{D}$是强连通图蕴含D是强连通图的证明类似。设x,y是D中任意两个顶点,由于D是强连通的,D中存在从x到y的有向路P和从y到x的有向路Q。而在$\overleftarrow{D}$中,P和Q的弧全部反向得$\overleftarrow{P}$和$\overleftarrow{Q}$,则$\overleftarrow{P}$是从y到x的有向路,而$\overleftarrow{Q}$是从x到y的有向路。而x和y也是$\overleftarrow{D}$中的任意两个顶点。故$\overleftarrow{D}$也是强连通的。

2. 一个竞赛图T是可迁的,是说:无论何时(u,v)和(v,w)是T中的弧,那么总有(u,w)也是T中的弧。证明:一个竞赛图T是可迁的当且仅当T没有(有向)圈。

证明:先证充分性。假设T中没有有向圈。那么,如果T中存在边(u,v)和(v,w),由于T是竞赛图,或者(w,u)在T中或者(u,w)在T中。如果(w,u)在T中,则(u,v),(v,w)和(w,u)构成一个有向圈,矛盾。故(u,w)在T中。故T是可迁的。

再证必要性。假设T是可迁的,但T包含有向圈。

设 $C=u_1u_2\cdots u_ku_1$ 是T中的有向圈。由T的可迁性，由 (u_1,u_2) (u_2,u_3) 属于T，得 (u_1,u_3) 属于T；再由 (u_1,u_3)，(u_3,u_4) 属于T，得 (u_1,u_4) 属于T；如此进行下去。最后由 (u_1,u_{k-1}) 和 (u_{k-1},u_k) 属于T，得 (u_1,u_k) 属于T，这与前面假设 (u_k,u_1) 属于T矛盾。

3. 证明或否证：如果竞赛图T的每个顶点包含在一个(有向)圈中，那么T是强连通图。

否证：构造两个有向圈：$C_1=v_1v_2\cdots v_kv_1$ 和 $C_2=v_{k+1}v_{k+2}\cdots v_lv_{k+1}$ 包含T中所有顶点，再对 C_1 中每个顶点u作一条有向边到 C_2 中每一个顶点v。最后，C_1 中任意两个顶点之间作任意有向边，C_2 中任意两个顶点之间作任意有向边。最后得到竞赛图T。对T中任一顶点u，若u在 C_1 中，则有有向圈 C_1 包含u，若u在 C_2 中，则有有向圈 C_2 包含u。但 C_2 中顶点v没有有向路到达 C_1 中顶点u，故T不是强连通的。