中山大学本科生考试答题纸

学院(系)　　专业　　级

考试科目　　成绩评定

考生姓名　　教师签名

学　　号　　年　　月　　日

装　订　线

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

作业10：

1. 证明：若G是偶图，则G有Δ正则偶母图。

证明：设G为偶图，且有二分类(X, Y)。令$X'=Y$，$Y'=X$，$G'=(X', Y')$。令$G_1=(X'\cup X, Y'\cup Y)=(X_1, Y_1)$为一偶图。$E(G_1)$由$E(G)$和$E(G')$中的边，以及所有这样的边组成：$\forall x\in X$使得$d_G(x)=\delta$，存在$x'\in Y'=X$，$x'$与$x$是对应顶点，因而有$d_G(x)=d_{G'}(x')=\delta$，在$G_1$中加入边$xx'$。同样道理，$\forall y\in Y$使得$d_G(y)=\delta$，存在$y'\in X'=Y$，$y'$与$y$是对应顶点，因而有$d_G(y)=d_{G'}(y')=\delta$，在$G_1$中加入边$yy'$。这样$\delta(G_1)=\delta(G)+1$。再令$X_1'=Y_1$，$Y_1'=X_1$，$G_1'=(X_1', Y_1')$。构造$G_2=(X_1'\cup X_1, Y_1'\cup Y_1)=(X_2, Y_2)$为一偶图，构造方法与上述$G_1$的构造方法类似。从而有$\delta(G_2)=\delta(G_1)+1$。反复地按上述方法构造，最后得到偶图$G_k$，有$\delta(G_k)=\Delta(G_k)$。因而$G_k$是G的Δ正则偶母图。

2. 证明：若G是偶图，且$\delta>0$，则G有一个δ边着色，使得所有δ种颜色在每一个顶点上表现。

证明：若结论不成立，则对G存在一个最优δ边着色和一个顶点$v\in V$，在v上有一种颜色i不表现，又因为$d_G(v)>c(v)$，故v上有一种颜色j表现至少两次，故v满足引

理7.2的条件。由引理7.2知，在G中存在一个包含v的奇圈，这与G是偶图，不含奇圈矛盾。

7. 证明：若G是非空正则简单图，且v是奇数，则$\chi'=\Delta+1$。

证：因为v为奇数，故G的任一正常的边着色的每一色类的边数最多是$\frac{1}{2}(v-1)$。从而$\frac{1}{2}\chi'(G)(v-1)\geq\varepsilon(G)$。又由于G是正则图，从而$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}\Delta v$。故$\frac{1}{2}\chi'(G)(v-1)\geq\frac{1}{2}\Delta v$，从而有$\chi'(G)>\Delta$。另一方面，由Vizing定理知，$\chi'(G)\leq\Delta+1$。故$\chi'(G)=\Delta+1$。