中山大学本科生考试答题纸

学院(系)……………… 专业……………… 级

考试科目……………… 成绩评定………………

考生姓名……………… 教师签名………………

学　　号………………　　　年　　月　　日

装　订　线

作业11：

1. 证明：任意9个人中或者有4个人互相认识，或者有3个人互相不认识。(用讲义中例8.1的方法证明)

证明：构造一个9个顶点的完全图$G=K_9$。$\forall u,v\in V(G)$，若u和v认识，u和v之间连一条红边；若u和v不认识，u和v之间连一条蓝边。只需证G中有一个红色的K_4或一个蓝色的K_3。

若G中存在一个顶点u，至少与4个蓝边相关联，不妨设uu_1，uu_2，uu_3，uu_4为蓝边，若$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$中至少有一条蓝边，不妨设u_1u_2是蓝边，则uu_1u_2u是一个蓝色的K_3。否则，$G[\{u_1,u_2,u_3,u_4\}]$是一个红色的K_4。

若G中任一顶点u至多与三条蓝边相关联，从而G中每个顶点至少与5条红边相关联。因为$v(G)=9$，在红色边构成的图中，不可能每个顶点的度都是5，否则与握手定理矛盾。故G中至少有一个顶点与6条以上的红边关联。不失一般性，设uu_1，uu_2，uu_3，uu_4，uu_5，uu_6为红边。由例8.1，$G[\{u_1,u_2,\cdots,u_6\}]$中或者有一个红色的三角形，不妨设为$\{u_i,u_j,u_k\}$或者有一个蓝色的三角形，不妨设为$u_pu_qu_ru_p$。则$G$中或者有一个红色的$K_4=G[\{u,u_i,u_j,u_k\}]$，或者有一个蓝色的$K_3=G[\{u_p,u_q,u_r\}]$。证毕。

2. 无环图G是α临界的，如果对所有$e\in E$，有$\alpha(G-e)>\alpha(G)$。
证明：连通α临界图没有割点。

证明：因α-临界图是无环的，故我们只要证明：连通的有割点的无环图是非α-临界的即可。

设G是连通的有割点w的无环图。由割点定义可分$E(G)$为E_1,E_2，使得$G[E_1]=G_1$，$G_2=G[E_2]$，以w为唯一的公共交点。设$E_k^w\ (k=1,2)$是G_k中与w关联的边集。由于G连通，E_k^w非空。下面分两种情况讨论。

(1) G的一切最大独立集S均不含w时，若有$e_1=wu\in E_k^w$，使得$\alpha(G-e_1)>\alpha(G)$，且设S'是$G-e_1$的一个最大独立集，当然

$|S'|=\alpha(G-e_1)>\alpha(G)$，则$S'$必含$w$和$u$；否则$S'$不含$w$或$u$，那么$S'$是$G$的独立集，但$|S'|>\alpha(G)$，矛盾。于是，$S''=S'\setminus\{u\}$是$G$的独立集，且$|S''|=|S'\setminus\{u\}|\geq\alpha(G)$。从而$S''$是$G$的含$w$的最大独立集，与条件矛盾。故对一切$e_1\in E_1^w$均有$\alpha(G-e_1)=\alpha(G)$，$G$非$\alpha$-临界的。

(2) G有最大独立集S，使$w\in S$。令$S_1=S\cap V(G_1)$，$S_2=S\cap V(G_2)$。显然，S_k是G_k的最大独立集，否则，与S是G的最大独立集矛盾。又$\alpha(G)=|S|=|S_1|+|S_2|-1$，这时，若有$e_1\in E_1^w$，$e_2\in E_2^w$，使得$\alpha(G_1-e_1)>\alpha(G_1)$，$\alpha(G_2-e_2)>\alpha(G_2)$，设$S_k'$是$G_k-e_k$的最大独立集。当然，$|S_k'|-1=\alpha(G_k-e_k)-1\geq\alpha(G_k)$，令$S'=(S_1'\cup S_2')-\{w\}$，则$S'$是$G$的独立集，且

$$|S'|\geq|S_1'|+|S_2'|-2\geq\alpha(G_1)+\alpha(G_2)$$
$$\geq|S_1|+|S_2|>|S_1|+|S_2|-1=\alpha(G)$$

，矛盾。所以要么$\forall e_1\in E_1^w$有$\alpha(G_1-e_1)=\alpha(G_1)$，要么$\forall e_2\in E_2^w$有$\alpha(G_2-e_2)=\alpha(G_2)$。不妨设后者成立。则$S_2$是$G_2-e_2$的最大独立集。于是$S=S_1\cup S_2$是$G-e_2$的最大独立集。$\alpha(G-e_2)=|S|=\alpha(G)$。故$G$非$\alpha$-临界的。

7. 所谓k部图是指这样的图，它的顶点集可分解为k个子集，使得任何一条边的两个端点均不同一在任一个子集中；完全k部图是指一个简单图，它的每个顶点与不在同一个子集中的所有顶点均相连接。具有n个顶点的完全m部图，若它的每个部分或是有$\lfloor n/m \rfloor$个顶点，或者有$\lceil n/m \rceil$个顶点，则记为$T_{m,n}$。证明：

(a) $\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$，这里$k=\lfloor n/m \rfloor$；

(b) 若G是具有n个顶点的完全m部图，则$\varepsilon(G)\le\varepsilon(T_{m,n})$，并且仅当$G\cong T_{m,n}$时，等式成立。

证：(a) 因为$n=mk+r$，$0\le r<m$，则由$T_{m,n}$定义，有$\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n}{2}-r\binom{k+1}{2}-(m-r)\binom{k}{2}$，用$r=n-mk$代入化简整理即得结论。

(b) 设完全m-部图G的m个部分的顶点数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_m$；若G不同构于$T_{m,n}$，则存在$n_i-n_j>1$；考虑如下的完全m-部图G'，它的m部分的顶点数分别为：$n_1, n_2, \cdots, n_i-1, \cdots, n_j+1, \cdots, n_m$。由于$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(n-n_k)n_k$，$\varepsilon(G')=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\ne i,j}}^{m}(n-n_k)\cdot n_k+\frac{1}{2}(n-n_i+1)(n_i-1)+\frac{1}{2}(n-n_j-1)(n_j+1)=\varepsilon(G)+(n_i-n_j)-1>\varepsilon(G)$。若$G'\cong T_{m,n}$则(b)结论已成立。若$G'$不同构于$T_{m,n}$，则上述过程可继续进行，直到对一切$i,j$，$|n_i-n_j|\le1$为止。这时所得的图恰为$T_{m,n}$，注意到在这过程中产生的新图的边数在逐渐增大，直至$\varepsilon(T_{m,n})$为止，故(b)成立。