概率论与数理统计

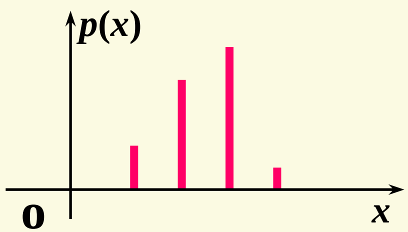
范正平
fanzhp@mail.sysu.edu.cn

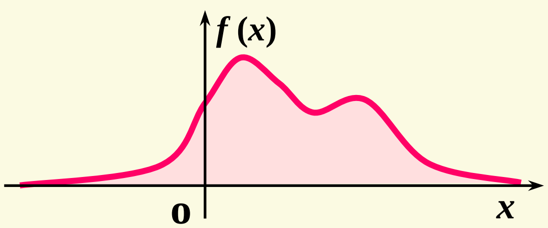
中山大学 数据科学与计算机学院

Chapter 4
随机变量的数字特征

随机变量的数学期望

前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量X 的概率分布，那么X的全部概率特征也就知道了.





但在实际问题中，概率分布一般是较难确定的. 而且在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了.

随机变量的数学期望(Cont.)

例如，评定一批灯泡的质量,主要应看这批灯泡的**平均寿命**和灯泡寿命**相对于平均寿命的偏差**. 平均寿命越长,灯泡的质量就越好,灯泡寿命相对于平均寿命的偏差越小,灯泡的质量就越稳定.

因此，在对随机变量的研究中，确定某些数字特征是重要的 .

最常用的数字特征是: 数学期望、方差

一维随机变量的数学期望

数学期望的概念

随机变量的数学期望是概率论中最重要的概念之一. 它的定义来自习惯上的平均值概念.

(1) 离散型变量数学期望的定义

引例　将一枚骰子掷100次，各点数出现的次数与频率如下, 求每次投掷的平均点数.

点数	1	2	3	4	5	6
次数	14	21	17	22	10	16
频率	14/100	21/100	17/100	22/100	10/100	16/100

一维随机变量的数学期望(Cont.)

点数	1	2	3	4	5	6
次数	14	21	17	22	10	16
频率	14/100	21/100	17/100	22/100	10/100	16/100

每次投掷的平均点数

$$\overline{W} = \frac{1}{100}(1\times 14+2\times 21+3\times 17+4\times 22+5\times 10+6\times 16)$$

$$=1\times\frac{14}{100}+2\times\frac{21}{100}+3\times\frac{17}{100}+4\times\frac{22}{100}+5\times\frac{10}{100}+6\times\frac{16}{100}\approx 2.965$$

平均值＝ 以频率为权的加权平均

$$\overline{W} = 1\cdot\frac{n_1}{n}+2\cdot\frac{n_2}{n}+3\cdot\frac{n_3}{n}+4\cdot\frac{n_4}{n}+\cdots$$

以概率为权的加权平均

频率和概率的关系

试验次数很大时，频率会接近于概率p_k

$$1\cdot p_0+2\cdot p_1+3\cdot p_2+4\cdot p_3+\cdots$$

抽象出

离散型变量数学期望的定义

一维随机变量的数学期望(Cont.)

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，简称期望或均值，记为 $E(X)$.

即 $$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

几点说明:

(1) 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ 收敛，是为了保证级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 不会因各项的次序的改变而改变其值.

一维随机变量的数学期望(Cont.)

(2) 数学期望$E(X)$是一个**常数**, 而**非变量**. 它既不是随机变量所有可能取值的**算术平均值**, 也不是随机变量的有限次观测值的**算术平均值**. 它是一种**以概率为权的加权平均值**, 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 具有重要的统计意义.

请看下面的例子和实验

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5,$

X 的期望为 $E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$

一维随机变量的数学期望(Cont.)

实例1 谁的技术比较好?

甲、乙两个射手,他们射击的分布律分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解 设甲、乙射手击中的环数分别为X_1, X_2.

$$E(X_1) = 8\times0.3 + 9\times0.1 + 10\times0.6 = 9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2) = 8\times0.2 + 9\times0.5 + 10\times0.3 = 9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.

一维随机变量的数学期望(Cont.)

实例２　如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元， 失败的机会为70%，将损失 2 万元．若存入银行，同期间的利率为5%，问是否作此项投资?

解　设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$$E(X)=8\times0.3-2\times0.7=1(\text{万元}),\text{存入银行的利息:}$$

$$10\times5\%=0.5(\text{万元}),$$ 故应选择投资.

一维随机变量的数学期望(Cont.)

几个重要随机变量的期望

1. 0-1分布的数学期望

X	1	0
P	p	$1-p$

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E(X)} = 1*p+0*(1-p) = \boldsymbol{p}$$

一维随机变量的数学期望(Cont.)

2. 二项分布*B(n, p)*

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0.1,\dots n$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

一维随机变量的数学期望(Cont.)

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$\underline{\underline{\text{令}l=k-1}}\;np\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^{l}p^{l}(1-p)^{n-1-l}$$

$$=np$$

一维随机变量的数学期望(Cont.)

3. 泊松分布

$$X \sim P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda;$$

一维连续型随机变量的数学期望

设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$,在数轴上取很密的分点$x_0<x_1<x_2<$ …

则X落在小区间$[x_i, x_{i+1})$的概率是

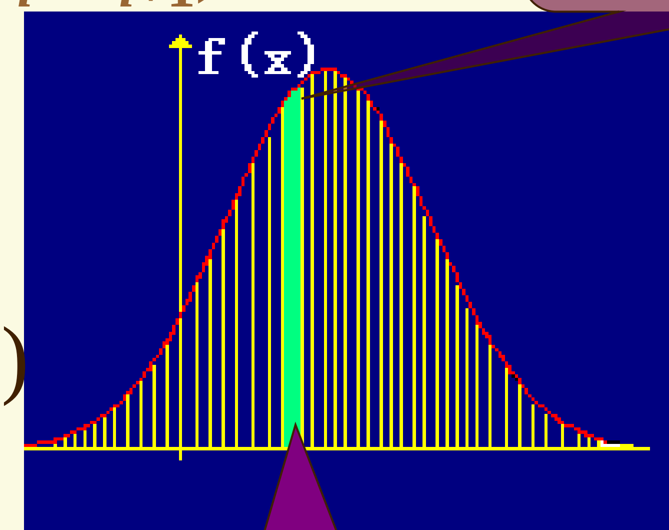
阴影面积近似为

$f(x_i)\Delta x_i$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

$$= f(x_i)\Delta x_i$$



小区间$[x_i, x_{i+1})$

一维连续型随机变量的数学期望(Cont.)

由于x_i与x_{i+1}很接近, 所以区间$[x_i, x_{i+1})$中的值可以用x_i来近似代替.

因此 X ≈ 取值 x_k、概率为 $f(x_k)\Delta x_k$ 的离散型随机变量,

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	$f(x_1)\Delta x_1$	$f(x_2)\Delta x_2$	$\cdots$	$f(x_k)\Delta x_k$	$\cdots$

它的数学期望是

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_k x_k f(x_k)\Delta x_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

一维连续型随机变量的数学期望(Cont.)

定义2　设*X*是连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$,如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛,则称此积分值为**X的数学期望**, 即

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx}$$

请注意：连续型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的积分.

数学期望不存在的随机变量

例 设随机变量 X 密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\quad -\infty<x<+\infty,$

试证 $E(X)$ 不存在.

柯西分布

证明 $\because \int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty,$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx$ 不绝对收敛

$\therefore\ E(X)$ 不存在.

一维连续型随机变量的数学期望(Cont.)

均匀分布*U(a, b)*

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2};$$

一维连续型随机变量的数学期望(Cont.)

指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{\infty} x de^{-\lambda x}$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

一维连续型随机变量的数学期望(Cont.)

例 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(以分计)服从参数为 $\theta\ (\theta > 0)$ 的指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,dx=\theta$(分钟).

因此, 顾客平均等待 θ 分钟就可得到服务.

一维连续型随机变量的数学期望(Cont.)

正态分布 **$N(\mu, \sigma^2)$**

$$X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\underline{\underline{令 t = \frac{x-\mu}{\sigma}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma t + \mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt;$$

$$= \mu$$

数学期望的性质

1. 设C是常数，则$\mathrm{E}(C)=C$;

2. 若k是常数，则$E(kX)=kE(X)$;

3. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;

推广：$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

数学期望性质的应用

例 求二项分布的数学期望

$X\sim B(n,p)$, X表示n重伯努利试验中的“成功”次数.

若设 $X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}$ $i=1,2,\ \ldots,\ n$

则 $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

因为 $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$

$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

数学期望性质的应用(Cont.)

例 一民航送客车载有20位旅客自机场开出,旅客有10个车站可以下车,如到达一个车站没有旅客下车就不停车.以X表示停车的次数，求E(X).(设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立)

解　引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{在第}i\text{站没有人下车} \\ 1 & \text{在第}i\text{站有人下车} \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots 10$$

易知　$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

数学期望性质的应用(Cont.)

按题意

$$P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20},P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20},i=1,2,\cdots10$$

由此 $$E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20},i=1,2,\cdots10$$

进而 $$\begin{aligned}E(X)&=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})\\&=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})\\&=10[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}]=8.784\text{次}\end{aligned}$$

数学期望性质的应用(Cont.)

将X分解成数个随机变量之和,然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望的和来求数学期望,此方法具有一定的意义.

一维随机变量函数的数学期望

设已知随机变量X 的分布

如何计算 X 的某个函数$g(X)$ 的期望 ？

一种方法是: $g(X)$也是随机变量,它的分布可以由已知的X 的分布求出来 .一旦知道了$g(X)$的分布, 就可以按照期望定义把 $E[g(X)]$ 计算出来 .

是否可以不先求$g(X)$的分布而只根据X 的分布求得$E[g(X)]$呢？

下面的定理指出答案是肯定的.

一维随机变量函数的数学期望(Cont.)

定理 设Y是随机变量X的函数:$Y=g(X)$ (g是连续函数)

(1) 当X为离散型时,它的分布率为$P(X=x_k)=p_k$；

$(k=1,2,\cdots)$,若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

一维随机变量函数的数学期望(Cont.)

(2) 当X为连续型时,它的密度函数为$f(x)$.若

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

一维随机变量函数的数学期望(Cont.)

例：设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P_k	$1/3$	$1/3$	$1/3$

求随机变量**Y=X^2**的数学期望

解:

Y	1	0
P_k	$2/3$	$1/3$

$$\therefore \quad E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

例 设

X	-2	0	1	3
p	$1/3$	$1/2$	$1/12$	$1/12$

求: $E(2X^3+5)$.

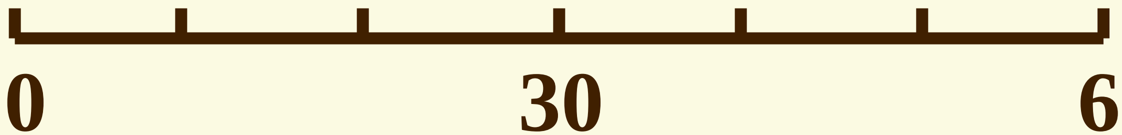
解 $E(2X^3+5)=2E(X^3)+E(5)$

$$=2E(X^3)+5,$$

又 $E(X^3)=(-2)^3\times\frac{1}{3}+0^3\times\frac{1}{2}+1^3\times\frac{1}{12}+3^3\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{3}$,

故 $E(2X^3+5)=2E(X^3)+5=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+5=\frac{13}{3}$.

例：长途汽车起点站于每时的10分、30分、55分发车，设乘客不知发车时间，于每小时的任意时刻随机地到达车站，求乘客的平均候车时间



解:设乘客于某时**X**分到达车站,候车时间为**Y**,则

$$Y = g(X) = \begin{cases} 10 - X & 0 \le X < 10 \\ 30 - X & 10 \le X < 30 \\ 55 - X & 30 \le X < 55 \\ 70 - X & 55 \le X < 60 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60} & 0 < x < 60 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$\therefore E(Y) = \frac{1}{60}\int_0^{60} g(x)dx$$ **=10分25秒**

一维随机变量函数的数学期望(Cont.)

例　设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布,即具有概率密度

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<v<a \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力W是V的函数:$W=kV^2$ $(k>0,$常数$)$,求W的数学期望.

解：由上面的公式

$$E(W)=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2f(v)dv=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$$

例: 设X服从N(0，1)分布，求$E(X^2)$,$E(X^3)$,$E(X^4)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

接上

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}} \quad =3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=3$$

二维随机变量的数字特征

二维随机变量的数学期望

- 离散二维随机变量的数学期望
- 连续型二维随机变量的数学期望
- 二维随机变量函数的数学期望

定理 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

则 $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}, \quad E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}$$

证明 关于X的边缘分布为 $P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$，$i=1,2,\cdots$

于是有 $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i P\{X=x_i\}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}$$

同理可得

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}y_j P\{Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}y_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}$$

例 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布表为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/4	1/8	1/4
2	1/8	1/8	1/8

求随机变量X和Y的数学期望.

解 由(X,Y)的联合分布律可得关于X、Y的边缘分布分别为

X	1	2
P	5/8	3/8

Y	1	2	3
P	3/8	1/4	3/8

于是有

$$E(X)=1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$$

$$E(Y)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{8}=2$$

定理 设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x, y)$，则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证 关于X、Y的边缘概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

于是有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} x[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} y[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二维随机变量函数的数学期望

如果(X,Y)为离散型随机向量，其联合概率分布为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij} \qquad i,j=1,2,3,\ldots,$$

如果 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|g(x_i,y_i)\right| p_{ij} < +\infty$ 则$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$\boxed{E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}}$$

二维随机变量函数的数学期望(Cont.)

设二维随机向量（*X*，*Y*）为连续型随机变量，它的联合概率密度为*f*(*x*,*y*),若 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x,y)|f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛, 则*Z*=*g*(*X*,*Y*)的数学期望为：

$$\boxed{E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy}$$

例 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2,\quad 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$

解 $E(X)=\int_0^2\int_0^1 x\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_0^1(1+3y^2)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$

$$E(Y)=\int_0^2\int_0^1 y\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^2 x\mathrm{d}x\int_0^1 y(1+3y^2)\mathrm{d}y=\frac{5}{8}$$

$$E(XY)=\int_0^2\int_0^1 xy\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_0^1 y(1+3y^2)\mathrm{d}y=\frac{5}{6}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_0^2\int_0^1(x^2+y^2)\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 x^3\mathrm{d}x\int_0^1(1+3y^2)\mathrm{d}y+\frac{1}{4}\int_0^2 x\mathrm{d}x\int_0^1 y^2(1+3y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{37}{15}$$

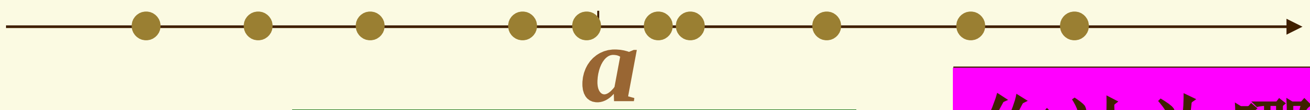
随机变量的方差

随机变量的数学期望，体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

随机变量的方差(Cont.)

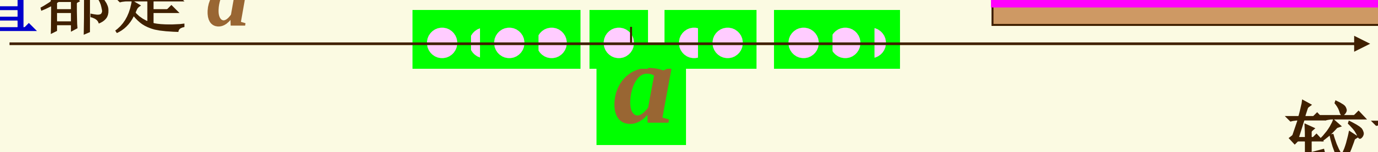
例如，某零件的真实长度为a，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果X用坐标上的点表示如图：



甲仪器测量结果

测量结果的均值都是 a

你认为哪台仪器好一些呢？



乙仪器测量结果

较好

因为乙仪器的测量结果集中在均值附近

一维随机变量的方差

由此可见,研究随机变量与其均值的偏离程度是十分必要的.那么,用怎样的量去度量这个偏离程度呢?容易看到

$$E\{|X-E(X)|\}$$

能度量随机变量与其均值E(X)的偏离程度. 但由于上式带有绝对值,运算不方便,通常用量

$$E\{[X-E(X)]^2\}$$

来度量随机变量X与其均值E(X)的偏离程度.

这个数字特征就是: 方差

一维随机变量方差的定义

设X是一个随机变量，若$E[(X-E(X)]^2$存在，称$E[(X-E(X)]^2$ 为 X 的方差. 记为D(X)或Var(X)，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E[X-E(X)]^2$$

方差的算术平方根$\sqrt{D(X)}$称为X的标准差或均方差记为$\sigma(X)$，它与X具有相同的量纲。

$E(X)$:是一个数； $E(Y)$:随机变量X函数的数学期望

$Y=[(X-E(X)]^2$: 是随机变量X的函数

一维随机变量方差的定义(Cont.)

方差刻划了随机变量的取值对于其数学期望的离散程度.

若X的取值比较集中，则方差$D(X)$较小；

若X的取值比较分散，则方差$D(X)$较大.

因此，D（X）是刻画X取值分散程度的一个量，它是衡量X取值分散程度的一个尺度。

一维随机变量方差的计算

由定义知，方差是随机变量 X 的函数

$$g(X)=[X-E(X)]^2$$

的数学期望．

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k, \\ \int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx,\end{cases}$$

X为离散型，分布率 $P\{X=x_k\}=p_k$

X为连续型，X概率密度$f(x)$

一维随机变量方差的计算(Cont.)

计算方差的一个简化公式

$$D(X)=E(X^2) - [E(X)]^2$$

证：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

展开

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

利用期望性质

$$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例　设随机变量X具有(0—1）分布，其分布率为

$$P\{X=0\}=1-p,\quad P\{X=1\}=p$$

求D(X) .

解　$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

由公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

因此,0-1分布

$$\boxed{E(X)=p, D(X)=p(1-p)}$$

二项分布

设随机变量$X \sim B(n, p)$, 其概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n, \quad q=1-p$$

则 $D(X)$）$=E(X^2)-[E(X)]^2$。事实上

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$
$$=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k p^k q^{n-k}+np$$
$$=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}+np$$

接上

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}q^{n-k}+np$$

$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np=n(n-1)p^2+np$$

所以

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p)$

例　设$X \sim \pi(\lambda)$，求$D(X)$。

解　X的分布率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$$

已算得　$E(X)=\lambda$,而

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]\quad=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda\ =\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

接上

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

因此,泊松分布

$$\boxed{E(X)=\lambda, D(X)=\lambda}$$

由此可知，泊松分布的数学期望与方差相等，等于λ。泊松分布的分布率中只含一个参数λ,只要知道λ,泊松分布就被确定了.

例　设$X \sim U(a,b)$，求$D(X)$。

解　X的概率密度为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

已求得$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$。方差为

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

因此,均匀分布

$$E(X)=\frac{a+b}{2},D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

例　设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\lambda>0$，求$E(X)$，$D(X)$

解
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=1/\lambda$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=2/\lambda^2$$

因此$D(X)=1/\lambda^2$

由此可知,指数分布

E（X）$=1/\lambda$，D（X）$=1/\lambda^2$

正态分布　设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$E(X)=\mu$$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \quad (t=\frac{x-\mu}{\sigma})$$

接上

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[t\left(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sigma^2$$

例　以X表示在一天的某一时间段内乘小汽车通过某一个十字街口的乘客（包括司机在内）的人数。已知X的分布律为

X	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0.52	0.27	0.11	0.05	0.02	0.02	0.01

求数学期望$E(X)$，方差$D(X)$以及标准差 $\sqrt{D(X)}$.

解
$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k =1\times0.52+2\times0.27+3\times0.11+4\times0.05$$
$$+5\times0.02+6\times0.02+7\times0.01=1.88(\text{人})$$
$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2 p_k =1^2\times0.52+2^2\times0.27+3^2\times0.11+4^4\times0.05$$
$$+5^2\times0.02+6^2\times0.02+7^2\times0.01=5.1$$

接上

故

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=5.1-1.88^2=1.566(\text{人}^2)$$

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{1.566}=1.25(\text{人})$$

例 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ 求 $D(X)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0} x(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x(1-x)\,\mathrm{d}x \ \mathbf{=0},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x^2(1-x)\,\mathrm{d}x \ \mathbf{=\frac{1}{6}},$$

于是 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2\mathbf{=\frac{1}{6}-0^2}=\frac{1}{6}.$$

方差的性质

(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0$.

证明 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0$.

(2) 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$D(CX)=C^2D(X), D(X+C)=D(X).$$

证明 $D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}$

$$=C^2E\{[X-E(X)]^2\}=C^2D(X).$$

$$D(X+C)=E\{[(X+C)-E(X+C)]^2\}$$

$$=E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=D(X).$$

方差的性质(Cont.)

(3) 设 X, Y 是两个随机变量，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}.$$

证明 $$D(X+Y)=E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\}$$

$$=E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\}$$

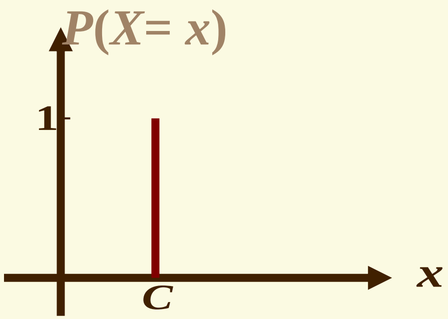
$$=E[X-E(X)]^2+E[Y-E(Y)]^2+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=D(X)+D(Y)\ +2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

方差的性质(Cont.)

(4) $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率1取常数 C.

即　$D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=C)=1$，　这里 $C=E(X)$



切比雪夫不等式

定理　设随机变量X,其数学期望$E(X)$,方差存在，假定$D(X)=\sigma^2$,则对于任意正数ε，有不等式

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

由切比雪夫不等式可以看出，若σ^2越小，则事件$\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$的概率越大，即随机变量X集中在期望附近的可能性越大.

$$P\{|X-E(X)|\geq \varepsilon\}\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

当方差已知时，切比雪夫不等式给出了*随机变量* *X*与它的期望的偏差不小于ε 的概率的估计式 .

如取 $\varepsilon = 3\sigma$

$$P\{|X-E(X)|\geq 3\sigma\}\leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2}\approx 0.111$$

可见，对任给的分布，只要期望和方差存在，则 *X*取值偏离*E*(*X*)超过 3σ 的概率小于**0.111** .

例 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，标准差是700 . 利用切比雪夫不等式估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率 .

解：设每毫升白细胞数为X

依题意，$E(X)=7300, D(X)=700^2$

所求为 $P(5200 \leq X \leq 9400)$

$$P(5200 \leq X \leq 9400)$$

$$= P(-2100 \leq X-E(X) \leq 2100)$$

$$= P\{|X-E(X)| \leq 2100\}$$

由切比雪夫不等式

$$P\{\,|X-E(X)|\leq 2100\}\ \geq 1-\frac{D(X)}{(2100)^2}$$

$$=1-\left(\frac{700}{2100}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

即估计每毫升白细胞数在**5200~9400**之间的概率不小于**8/9 .**

例 在每次试验中，事件A发生的概率为 0.75，利用切比雪夫不等式求：n需要多么大时，才能使得在n次独立重复试验中，事件A出现的频率在0.74~0.76之间的概率至少为0.90?

解：设X为n 次试验中，事件A出现的次数，

则 $X \sim B(n, 0.75)$

$E(X)=0.75n$, $D(X)=0.75\times 0.25n=0.1875n$

所求为满足 $$P(0.74 < \frac{X}{n} < 0.76) \geq 0.90$$

的最小的n .

$$P\left(0.74 < \frac{X}{n} < 0.76\right)$$ 可改写为

$$P(0.74n < X < 0.76n)$$

$$= P(-0.01n < X - 0.75n < 0.01n)$$

$$= P\{|X - E(X)| < 0.01n\}$$

在切比雪夫不等式中取 $\varepsilon = 0.01n$，则

$$P\left(0.74 < \frac{X}{n} < 0.76\right) = P\{|X - E(X)| < 0.01n\}$$

$$\geq 1 - \frac{D(X)}{(0.01n)^2} = 1 - \frac{0.1875n}{0.0001n^2} = 1 - \frac{1875}{n}$$

接上

依题意，取 $1-\dfrac{1875}{n}\geq 0.9$

解得

$$n\geq\frac{1875}{1-0.9}=18750$$

即n 取**18750**时，可以使得在n次独立重复试验中，事件A出现的频率在0.74~0.76之间的概率至少为0.90 .

协方差及相关系数

问题 对于二维随机变量(X,Y):

$$\boxed{\text{已知联合分布}} \quad \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} \quad \boxed{\text{边缘分布}}$$

这说明对于二维随机变量，除了每个随机变量各自的概率特性以外，相互之间可能还有某种联系．问题是用一个什么样的数去反映这种联系.

数 $E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$

反映了随机变量X,Y之间的某种关系

协方差

定义 量$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X和Y的协方差,记为$Cov(X,Y)$，即

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

简单性质

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

(2) $Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y)$ a,b 是常数

(3) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

计算协方差的一个简单公式

由协方差的定义及期望的性质，可得

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

即

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

可见，若X 与 Y 独立， $Cov(X,Y)=0$.

特别地

$$Cov(X,X)=E(X^2)-E(X)^2=D(X)$$

随机变量和的方差与协方差的关系

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

协方差的大小在一定程度上反映了X和Y相互间的关系，但它还受X与Y本身度量单位的影响．例如：

$$Cov(kX, kY)=k^2Cov(X,Y)$$

为了克服这一缺点，对协方差进行标准化，这就引入了相关系数 .

相关系数

定义：设$D(X)>0$, $D(Y)>0$，称

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

为随机变量 X 和 Y 的相关系数 .

在不致引起混淆时，记 ρ_{XY}为 ρ .

相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$

(2) 若$Y = aX + b$,则 $\begin{cases} a > 0\text{时}, & \rho_{XY} = 1 \\ a < 0\text{时}, & \rho_{XY} = -1 \end{cases}$

(3) $\rho_{XY} = \pm 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$

(4) 若X, Y相互独立,则$\rho_{XY} = 0$

注:$|\rho_{XY}|$的大小反映了X, Y之间的线性关系的密切程度

$\rho_{XY} = 0$时,X, Y之间无线性关系

$|\rho_{XY}| = 1$时,X, Y之间具有线性关系

相关系数的性质(*Cont.*)

注: 若X, Y相互独立,则$\rho_{XY}=0$

但由 $\rho=0$ 并不一定能推出X和Y独立.

例 设*X*服从(-1/2, 1/2)内的均匀分布 , 而*Y*=cos *X*,

不难求得 **$Cov(X,Y)=0$**，

事实上，X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad \text{可得}E(X)=0$$

$$E(XY)=E(X\cos X)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\cos x f(x)dx=0$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

因而 $\rho=0$，　即 X 和 Y 不相关 .

但 Y 与 X 有严格的函数关系，即 X 和 Y 不独立 .

例 已知 X, Y 的联合分布为

$Y \backslash X$	1	0
1	p	0
0	0	q

$0 < p < 1$

$p + q = 1$

求 $\mathrm{Cov}(X, Y)$, ρ_{XY}

解:

X	1	0
P	p	q

Y	1	0
P	p	q

XY	1	0
P	p	q

$$\left.\begin{array}{l} EX = p, \quad EY = p \\ DX = pq, \quad DY = pq \\ E(XY) = p \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = pq$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 1$$

例 设(X, Y)服从二维正态分布，求X, Y的相关系数。

解 X，Y的联合密度$f(x,y)$及边缘密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 如下：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\cdot e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy=\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\rho_{xy}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

从而说明二维正态分布随机变量X、Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$，即X、Y相互独立与不相关是等价的。

随机变量的其它数字特征

- 矩：
  - k阶原点矩
  - k阶中心矩
- p分位数
- 众数

设X和Y是随机变量,

(1)若$E(X^k)(k=1,2,\ldots)$存在,则称它为X的**k阶原点矩**.

(2)若$E\{[X-E(X)]^k\}$ $(k=1,2,\ldots)$存在,则称它为X的**k阶中心矩**.

(3)若$E(X^kY^l)$ $(k,l=1,2,\ldots)$存在,则称它为X和Y的**k+l阶混合矩**.

(4)若$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$ $(k,l=1,2,\ldots)$存在,则称它为X和Y的**k+l阶混合中心矩**.

作业

Exes. 7, 8, 14, 22, 26, 31, 32, 33, 34