一、(6分) 写出 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-2x}$ 在 $x=0$ 的带佩亚诺余项的泰勒展开式.

解： $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-2x)$，利用 $\ln(1+t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}t^k+o(t^n)$ 得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-2x)^k+o\left((-2x)^n\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}+2^k}{k}x^k+o(x^n).$$

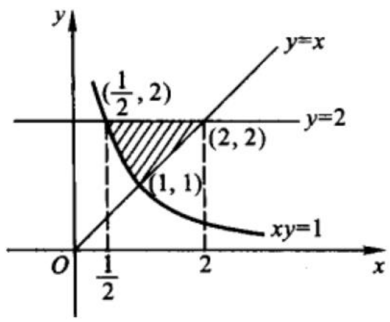
二、(6分) 利用泰勒公式求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

解：$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x\cdot x}=\lim_{x\to0}(-\frac{x}{6})+o(x)=0.$$

三、 (6分) 求曲线 $y=2, y=x, xy=1$ 所围图形的面积.

解：
$$A=\int_{\frac12}^{1}(2-\frac{1}{x})\,dx+\int_{1}^{2}(2-x)\,dx$$

$$=\left(2x-\ln x\right)\Big|_{\frac12}^{1}+(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{1}^{2}=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

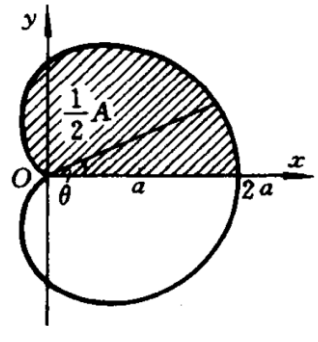


或

$$A=\int_{1}^{2}(y-\frac{1}{y})\,dy=(\frac{1}{2}y^2-\ln y)\Big|_{1}^{2}=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

四、(12分，每题6分) 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta), 0\le\theta\le2\pi,\ a>0$ 所围

(1)图形的面积； (2)曲线的弧长.



解：(1)
$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}[a(1+\cos\theta)]^2\,d\theta$$

$$=a^2\int_{0}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=a^2\pi+a^2\int_{0}^{\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta=a^2\pi+\frac{a^2}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi a^2$$

(2) $$s=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{[a(1+\cos\theta)]^2+[-a\sin\theta]^2}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\theta}{2}|d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

五、(24分，每题6分) 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+n+3}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{2^n}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\frac{1}{n})^n}$；

解：(1) 因 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1\neq 0$，由级数收敛的必要条件知，$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$ 发散.

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2n^2-1}{n^4+n+3}}{\frac{1}{n^2}}=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛 $\overset{\text{比较判别法}}{\underset{\text{极限形式}}{\Rightarrow}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+n+3}$收敛.

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)\ln(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{n\ln n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)=\frac{1}{2}<1\overset{\text{达朗贝尔判别法}}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{2^n}$收敛.

(4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{n+\frac{1}{n}}=0<1\overset{\text{柯西判别法}}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$收敛.

六、(18分，每题6分) 讨论下列积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$； (2) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$; (3) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$;

解：(1) $\forall x\geq 0$，有 $\frac{1}{1+x|\sin x|}\geq\frac{1}{x+1}>0$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$ 发散，

由比较判别法知，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x\arctan x}{1+x^3}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi}{2}$，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛 $\overset{\text{比较判别法}}{\underset{\text{极限形式}}{\Rightarrow}}$ 原积分收敛.

(3) $\frac{\cos^2 x}{x}=\frac{1+\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos 2x}{2x}$，因 $\left|\int_1^A\cos 2xdx\right|=\left|\frac{1}{2}(\sin 2A-\sin 1)\right|\leq 1$，

$\frac{1}{2x}$ 在[1，$+\infty$)单调下降，且当 $x\to+\infty$ 时趋于 0，由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛，

又 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ 发散，故 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{\cos 2x}{2x}\right)dx$ 发散，故 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$ 发散.

七、(16分，每题8分) 讨论下列积分的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$；(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$;

解：(1) 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ (x\geq 3)$，故 $\frac{\ln n}{n}\ (n\geq 3)$ 单调下降，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,$$

由莱布尼茨判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$ 收敛;

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\ln n}{n}\right|\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\ln n}{n}\right|$发散，故原级数条件收敛.

(2) $\int_1^A\cos xdx$有界，$\frac{1}{x}$ 在$[1,+\infty)$ 单调趋于 0，由狄利克雷判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 收敛.

$$\frac{|\cos x|}{x}\geq\frac{\cos^2 x}{x}=\frac{1+\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos 2x}{2x},$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛(因$\int_1^A\cos 2xdx$有界，$\frac{1}{2x}$ 单调趋于 0($x\to+\infty$)，由狄利克雷判别法可知收敛)，故$\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$ 发散，由比较判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x}dx$ 发散，故 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 条件收敛.

八、(7分)设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且$\lim_{n\to\infty}na_n=0$，求证$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)$收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

证： $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$收敛且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

九、(5分) 利用紧致性定理证明单调有界数列必有极限.

证: 不妨设数列$\{x_n\}$单调递增且有上界，由紧致性定理知，$\{x_n\}$有收敛子数列$\{x_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$，根据数列极限的定义知$\forall \varepsilon > 0, \exists K,$ 当$k > K$时，有$\left|x_{n_k} - c\right| < \varepsilon$，即

$c - \varepsilon < x_{n_k} < c + \varepsilon$，

特别地
$$x_{n_{K+1}} > c - \varepsilon ,$$

取$N = n_{K+1}$，则当$n > N$时，注意到$n_n > n > N = n_{K+1} \ge K + 1$，因$\{x_n\}$单调递增，此时有
$$c - \varepsilon < x_{n_{K+1}} \le x_n \le x_{n_n} < c + \varepsilon ,$$

故$\left|x_n - c\right| < \varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$，即单调递增有上界数列必有极限.