# 中 山 大 学 本 科 生 考 试 答 题 纸

学院(系)……………… 专业……………… 级

考试科目………………　　成绩评定………………

考生姓名………………　　教师签名………………

学　　号………………　　　　年　　月　　日

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

装　订　线

作业7：

1. 设G是有$\nu-1$条边的图。证明下述三个语句是等价的：

(a) G是连通图；

(b) G是无圈图；

(c) G是树。

证明：先证(a)⇒(b)。设G有$\nu-1$条边，又是连通图。假设G有圈。在G的一个圈中$C_1$中删去一条边$e_1$，则$G-e_1$仍连通。令$G_1=G-e_1$。若$G_1$仍有圈，在$G_1$的一个圈$C_2$中删去一条边$e_2$，则$G_2=G_1-e_2$仍连通，反复这样做直到$G_m=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$中无圈，且$G_m$仍连通。这时$G_m$是树。由定理2.2，$\varepsilon(G_m)=\nu(G_m)-1=\nu(G)-1=\varepsilon(G)-m$. $(m>0)$，这与$\varepsilon(G)=\nu(G)-1$的假设矛盾。

再证(b)⇒(c) 设G无圈且G有$\nu-1$条边。只需证G连通，则G是树。假设G不连通，则G有m个分支$(m\geq 2)$。因为G无圈，G的每个分支是连通无圈图，因而是树。设G的m个分支为$G_1,G_2,\cdots,G_m$，由定理2.2，$\varepsilon(G)=\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+\cdots+\varepsilon(G_m)=\nu(G_1)-1+\nu(G_2)-1+\cdots+\nu(G_m)-1=\nu(G)-m$ $(m\geq 2)$，这与$\varepsilon(G)=\nu(G)-1$的假设矛盾。

最后证 (c) ⇒ (a)。因为G是树，故G连通。

2. 证明：

(a) 若G的每个顶点均为偶点，则G没有割边；

(b) 若G是k正则偶图且 $k\geq 2$，则G没有割边

证明：(a) 反证法。假设G有割边 $e=xy$，则 $G-e$ 有两个分支 $D_1$ 和 $D_2$，其中 $D_1$ 包含x，$D_2$ 包含y。$D_1$ 是一个独立的图。由于G中每个顶点均为偶点，$D_1$ 中除x以外每个顶点的度数均为偶数，而 $d_{D_1}(x)=d_G(x)-1$，从而x在 $D_1$ 中度数为奇数。$D_1$ 中奇度顶点的个数为1（奇数），这与推论1.1矛盾。

(b) 设 $G=(X,Y)$ 为k正则偶图 $(k\geq 2)$，并假设 $e=xy$ 是G的一条割边，则 $G-e$ 有两个连通分支 $G_1=(X_1,Y_1)$，$G_2=(X_2,Y_2)$。不失一般性，设在G中，$x\in X_1$，$y\in Y_2$。由于G是k正则偶图，因而有 $k|X_1|-1=\sum_{v\in X_1} d_{G_1}(v)=\sum_{v\in Y_1} d_{G_1}(v)=k|Y_1|$。

则 $k(|X_1|-|Y_1|)=1$。而 $k\geq 2$，$|X_1|-|Y_1|$ 是整数，故不存在这样的整数 $|X_1|$ 和 $|Y_1|$。矛盾。

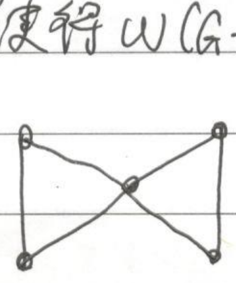
3. 设G连通且 $\nu\geq 3$，证明：

(a) 若G有割边，则G有顶点v使得 $\omega(G-v)>\omega(G)$；

(b) (a)的逆命题不一定成立。

证明：(a) 因为G连通且 $\nu\geq 3$。设 $G-e$ 不连通，$e=xy$ 且 $G-e$ 有两个连通分支 $D_1$ 和 $D_2$。不失一般性，设 $y\in V(D_2)$ 且 $|V(D_2)|\geq 2$，则 $\omega(G-y)>\omega(G)=1$。

(b) 若G中有顶点v使得 $\omega(G-v)>\omega(G)$，这时，G不一定有割边。例如：



4. 证明：若$e\in E$，则$\omega(G)\le\omega(G-e)\le\omega(G)+1$。

证：若$e$不是割边，则$\omega(G)=\omega(G-e)$。若$e$是割边，则$\omega(G)<\omega(G-e)$。故恒有$\omega(G)\le\omega(G-e)$。若$e$不是割边，则$\omega(G-e)=\omega(G)<\omega(G)+1$。若$e$是割边，我们证$\omega(G-e)=\omega(G)+1$。假若$\omega(G-e)\ge\omega(G)+2$。由于$e$只能连接两个分支，故$\omega(G)\ge\omega(G-e)-1\ge\omega(G)+2-1=\omega(G)+1$，矛盾。