中山大学2011年秋季学期数学分析I期末考

1. (20 分) 求下列极限:

(1.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ (1.2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sin x}$

(1.3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}$ (1.4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{1+x^2}}$

(1.5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

2. (20 分) 求下列不定积分:

(2.1) $\int e^{2x}-\sin 2x+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (2.2) $\int\dfrac{x}{2+x^2}dx$

(2.3) $\int e^{-x}\cos 2xdx$ (2.4) $\int x^2\log(1+x)dx$

(2.5) $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$ (2.6) $\int\dfrac{dx}{4+3\tan x}$

3. (20 分) 求下列定积分:

(3.1) $\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx$ (3.2) $\int_0^1 x(3-x^2)^6dx$

(3.3) $\int_{-1}^1\dfrac{x}{x^2-x+1}dx$ (3.4) $\int_0^1\arcsin xdx$.

4. (15 分) 分析函数$y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$在实数轴上单调性、凸性、拐点、极值、渐近线并画出它的图像.

5. (10 分) 证明下列不等式:

(5.1) $x^p-1>p(x-1)$ $(p\ge 2, x>1)$;

(5.2) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}<\int_0^1\dfrac{x^7dx}{\sqrt{1+x}}<\dfrac{1}{8}$.

6. (8 分) 设函数f在实数轴$\mathbb{R}$上可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在且相等. 证明：存在一点$\xi\in\mathbb{R}$使得$f'(\xi)=0$.

7. (7 分) 设f''在$[a,b]$连续。

(7.1) 若$f(a)=f(b)=0$, 则连续用分部积分可知

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx.$$

利用这一结论证明：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\dfrac{(b-a)^3}{12}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

(7.2) 对$[a,b]$做n等分，等分结点记作$a=x_0<x_1<\cdots<x_n$. 证明：在每个等分区间$[x_{j-1},x_j]$上，

$$\left|\int_{x_{j-1}}^{x_j}f(x)dx-\frac{b-a}{n}\frac{f(x_{j-1})+f(x_j)}{2}\right|\le\frac{(b-a)^3}{12n^3}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$