中山大学本科生考试答题纸

学院(系)　　　　　　　　专业　　　　　　级

考试科目　　　　　　　　成绩评定

考生姓名　　　　　　　　教师签名

学　　号　　　　　　　　　　年　　月　　日

作业9：

1. 证明推论6.4的下述推广：若G是(k-1)边连通的k正则图，并且ν是偶数，则G有完美对集。

证：设G如题所设，$S \subset V$，用$G_1, G_2, \cdots, G_n$表示$G-S$的奇分支，并设m_i是一个端点在G_i中，另一个端点在S中的那些边的条数。由于G是k正则的，所以

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = k\,\nu(G_i)，对1 \le i \le n 成立 \quad (1)$$

并且 $\sum_{v \in S} d(v) = k|S|$. (2)

由于G是(k-1)边连通的，$(k-1) \le m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - 2\varepsilon(G_i)$

当k为奇数时，m_i为奇数，但(k-1)为偶数，故$m_i \ge k$.

当k为偶数时，m_i为偶数，但(k-1)为奇数，故$m_i \ge k$.

从而 $k\,o(G-S) = kn \le \sum_{i=1}^{n} m_i \le \sum_{v \in S} d(v) = k|S|$.

故 $o(G-S) \le |S|$。由Tutte定理，G有完美对集。

2. 证明一棵树G有完美对集当且仅当$o(G-v)=1$对所有$v \in V$成立。

证明：先证必要性，由Tutte定理，令$S=\{v\}$，如果G有完美对集，则 $o(G-S) \le |S| = 1$。又因为G的顶点数为偶数，$o(G-v)=1$。

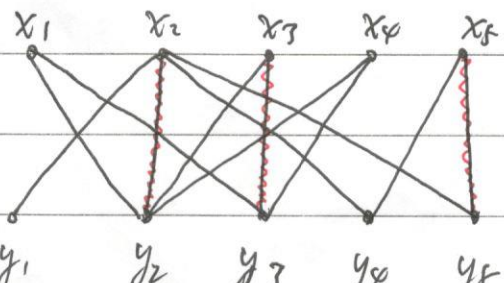
再证充分性。对G的顶点数 $\nu=2k$ 归纳证明：若 $o(G-v)=1$ 对所有 $v\in V$ 成立，则G有完美对集。

$k=1$ 时，显然 $o(G-v)=1$ 对所有 $v\in V$ 成立，并且显然 G 有完美对集。

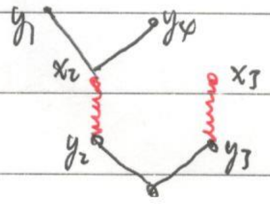
设 $k<r$ 时，若 $o(G-v)=1$ 对所有 $v\in V$ 成立，则 G 有完美对集。现在设 $k=r\ (\geq 2)$。由于 G 是树，故 G 有一片叶子 u，G 中与 u 相邻的那个顶点为 v。由条件假设知：

$G-v$ 有 n 个分支 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，设 $G_1=u$，则除 G_1 外，$G_2, G_3, \cdots, G_n$ 均为偶分支，并且 $o(G_i-w)=1$ 对所有 $w\in V(G_i)$ 成立。这因为 G_i-w 的所有分支除与 v 相邻的那个分支外，均为 $G-w$ 的分支，而 G_i-w 中与 v 相邻的那个分支是偶分支当且仅当在 $G-w$ 中那个分支是偶分支（它由那个分支和 $G_2, G_3, \cdots, G_n$（除 G_i 外）以及 $\{u,v\}$ 组成）。由 $o(G-w)=1$ 知 $o(G_i-w)=1$ 对所有 $w\in V(G_i)$ 成立。由于 $\nu(G_i)<2r$，由归纳假设知 G_i 有完美对集 $M_i\ (i=2,3,\cdots,n)$。则 $M=M_2\cup M_3\cup\cdots\cup M_n\cup\{uv\}$ 是G的完美对集。

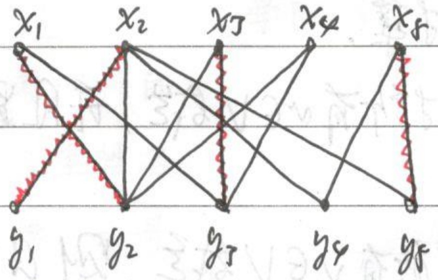
3. 利用匈牙利算法，求出下图的一个最大对集，该对集是否完美对集？



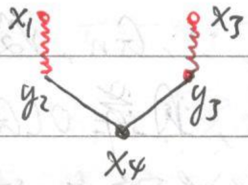
解：从任一对集（红色的边）开始，构造M交错树.



得到M交错路 $P=x_1y_2x_2y_1$，令 $M'=M\Delta E(P)$，得到的完美对集



再以 x_4 为根构造M交错树.



由此知，M' 是G的最大对集，并且它不是完美对集.