中山大学2014年数学分析II期中考试

警示：《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

1. (20分) 判断下列级数是否收敛(写出推导过程):

$$(1.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+4}} \qquad (1.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!2^n}$$

$$(1.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n}$$

2. (10分) 求常数a,b使得$\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$当$x\to 0$时为6阶无穷小量.

3. (15分) 分析级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ $(x\in\mathbb{R},\ p>0)$的绝对收敛性和条件收敛性.

4. (15分) 判断下列广义积分是否收敛(写出推导过程):

$$(3.1)\ \int_0^1\frac{\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \qquad (3.2)\ \int_0^{\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt[4]{1+x^2}}dx$$

5. (10分) 分析广义积分$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}dx$的绝对收敛性和条件收敛性.

6. (10分) 下列结论是否正确? 若对,证明之.若不对,举反例.

   (6.1) 若数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

   (6.2) 若$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上非负连续且广义积分$\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)dx$ 收敛，则$f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上有界.

7. (10分) 求证: 闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$有界且能取到最大值.

8. (5分) 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续可微, 广义积分$\displaystyle\int_0^{\infty}f'(x)dx$收敛. 求证：$f(x)$ 当$x\to+\infty$ 时收敛. 若还有$\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)dx$收敛，求证：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

9. (5分) 设f在实轴$\mathbb{R}$上Lipschitz连续，即存在常数$L\geq 0$使得

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

   又设$g(x)$在$[a,b]$Riemann可积. 求证:$f(g(x))$在$[a,b]$Riemann可积.