中山大学本科生考试答题纸

学院(系)　　　　专业　　　　级

考试科目　　　　成绩评定

考生姓名　　　　教师签名

学　号　　　　年　月　日

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

装 订 线

作业8：

1. 证明：一棵树最多只有一个完美对集。

证明：假设一棵树T有两个不同的完美对集 M_1 和 M_2，那么 $G[M_1 \Delta M_2]$ 就是若干个 M_1 和 M_2 的边的交错圈，这些圈包含在T中，与T是树无圈矛盾。

2. 对每个 $k>1$，找出一个没有完美对集的k正则简单图的例子。

解：$k=2$ 时，一个奇圈 C_{2r+1} 即是例子。

下面设 $k\geq 3$。当k为偶数时，完全图 K_{k+1} 即是例子。

下面设 $k\geq 3$ 且k为奇数。设 K_{k+1} 的顶点集为 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{2m}\}$，$2m=k+1$。在 K_{k+1} 中去掉一个对集 $v_{2i-1}v_{2i}$ ($i=1,2,\cdots,m-1$)，再加入一个点 u_j 和边 u_jv_n ($n=1,2,\cdots,2m-2$)，得到一个奇分支 D_j，D_j 中除 u_j 度为 $k-1$ 外，其它顶点度为k。最后构造图G：先构造k个分支 D_j ($j=1,2,\cdots,k$)，加入一个新顶点u，并将u与每个 D_j 中的 u_j 相连。这样的图G无完美对集。因为 $G-u$ 有k个奇分支 D_j ($j=1,2,\cdots,k$)，令 $S=\{u\}$，则 $o(G-S)=k>|S|=1$，由Tutte定理，G无完美对集。

3. 图G的k正则生成子图称为G的k因子，并且若G存在边不重

的k因子$H_1, H_2, \cdots, H_n$，使得$G=H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$，则称$G$是$k$可因子分解的。

证明：(a) $K_{n,n}$和K_{2n}是1-可因子分解的.

(b) 每个k正则偶图是1可因子分解的.

证：(a) 证明K_{2n}是1-可因子分解的。设K_{2n}的顶点集为$V=\{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{2k+1}\}$。令$v_{2k+1}$在中间，周围顺时针方向依次是$v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$。构造一个1-因子$v_{2k+1}v_0, v_1v_{2k}, v_2v_{2k-1}, \cdots, v_kv_{k+1}$，然后将$v_0, v_1, \cdots, v_{2k}$的下标加1（模$2k+1$），得到下一个1因子。即得到1因子$v_{2k+1}v_{0+i}, v_{1+i}v_{2k+i}, v_{2+i}v_{2k-1+i}, \cdots, v_{k+i}v_{k+1+i}$ $(i=0,1,\cdots,2k)$（所有下标模$2k+1$，除v_{2k+1}外），共有$2k+1$个1因子.

(b) (a)中的$K_{n,n}$是(b)中k正则偶图的特例。由婚姻定理，k正则偶图有完美对集M，去掉该完美对集M后，得到$(k-1)$正则图，仍有完美对集，反复去掉完美对集，最后得到0正则图（空图）。故k正则偶图的边集由k个完美对集不相交的并组成。因此，每个k正则偶图是1-可因子分解的.