

ТМ 3

Cosmo Chief

9 июня 2025 г.

Содержание

— База по графам —	2
1) Directed and undirected graphs	3
2) Simple graphs and pseudographs	4
3) Multiedges and multigraphs	5
4) Null, empty, singleton graphs	6
5) Complete graph	7
6) Weighted graph	8
7) Planar graphs	9
8) Hypergraphs	10
9) Subgraph, spanning subgraph	11
10) Induced subgraph	12

База по графам

Граф - упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$

V - множество вершин (vertices) ((вертексы))

E - множество ребер (edges) ((эджи))

$V \neq \emptyset$ правда есть *nullgraph*, у него вершин нет, а вот на вики написано, что мн-во вершин не пустое.
 $E \subseteq V \times V$

$V(G)$ - "получить" множество вершин графа G

$E(G)$ - "получить" множество ребер графа G

если вместо G будет не граф, а что то также имеющее вершины/ребра, то такая нотация также будет работать (например с путями в графе)

Порядок (order) графа - количество вершин $|V(G)|$

Размер (size) графа - количество ребер $|E(G)|$

все остальное будет в блоках по темам, на этом в общем то все

Немножечко философских уточнений/рассуждений:

- Таки а что такое вершина?
Вершина это вершина. Смиритесь. Можете считать ее (для удобства мышления, а не для ответа преподу) как идентификатор вершины на картинке (типо как имя или номер)
- Таки а что такое ребро?
Ребро это пара (неупорядоченная если граф неориентированный, упорядоченная если граф ориентированный) вершин. (А как же взвешенные ребра? Я думаю о том, что пара двух вершин, это база, и никуда вы от нее не денетесь. А свойств у ребра может быть много, так что я бы описал это как:
 $e \in E = \langle \langle v_1, v_2 \rangle, \langle \text{список свойств} \rangle \rangle$)

1) Directed and undirected graphs

Ориентированное ребро - ребро, у которого есть направление

Неориентированное ребро - ребро, у которого нет направления

В базе уже написано, что упорядоченная/неупорядоченная пара. Надо добавить, что ориентация ребра накладывает ограничения на пути в графе (не можешь ты пройти против направления ребра), и это влияет на работу алгоритмов, и позволяет некоторым видам графов существовать в принципе (дерево, например)

Ориентированный(Directed) - граф, у которого все ребра ориентированы (имеют направление).

Неориентированный(Undirected) - граф, у которого все ребра неориентированы (не имеют направления).

даа... об этом так интересно говорить вообще без контекста...

Так что контекста навалю я

В первую очередь, направленность / ненаправленность влияет на пути, циклы, обходы, алгоритмы поиска и тп.

Некоторые подвиды графов бывают только одного вида (например деревья всегда ориентированные)

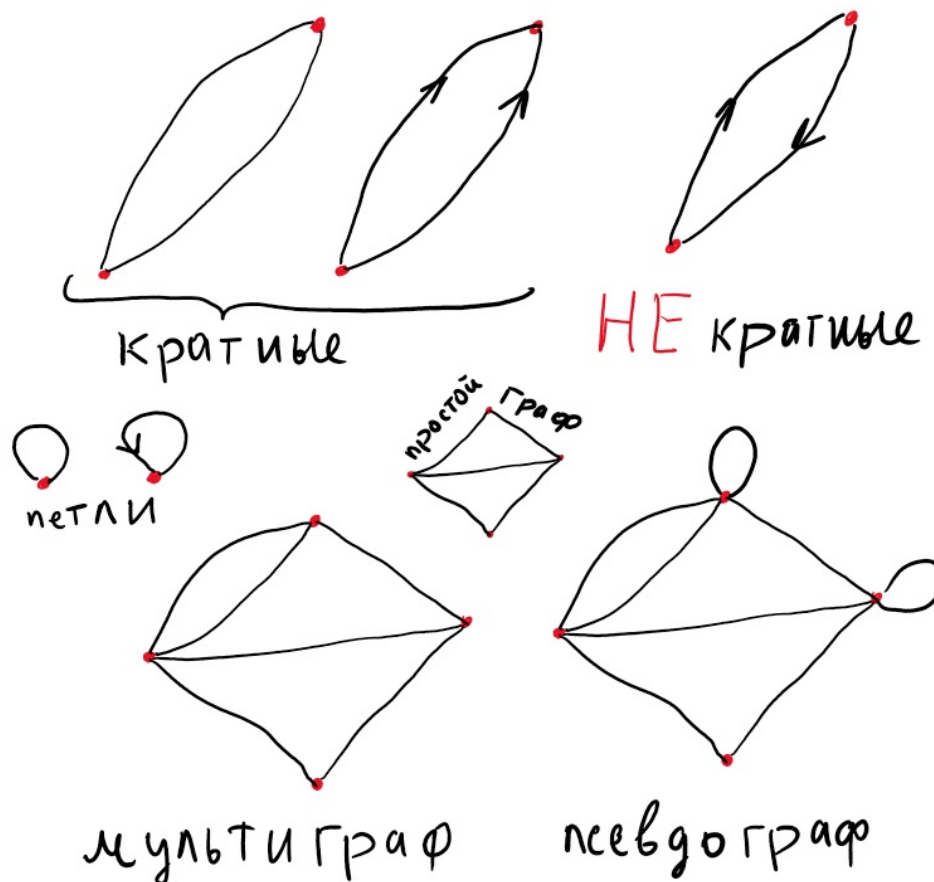
2) Simple graphs and pseudographs

Простой граф (Simple graph) - граф без петель и кратных ребер

Псевдограф (Pseudograph) - граф с петлями или кратными ребрами (проще говоря, все что не простой граф - псевдограф)

НО!!! У Кости написано, что:

Псевдограф (Pseudograph) - мультиграф (граф с кратными ребрами) **И** с петлями

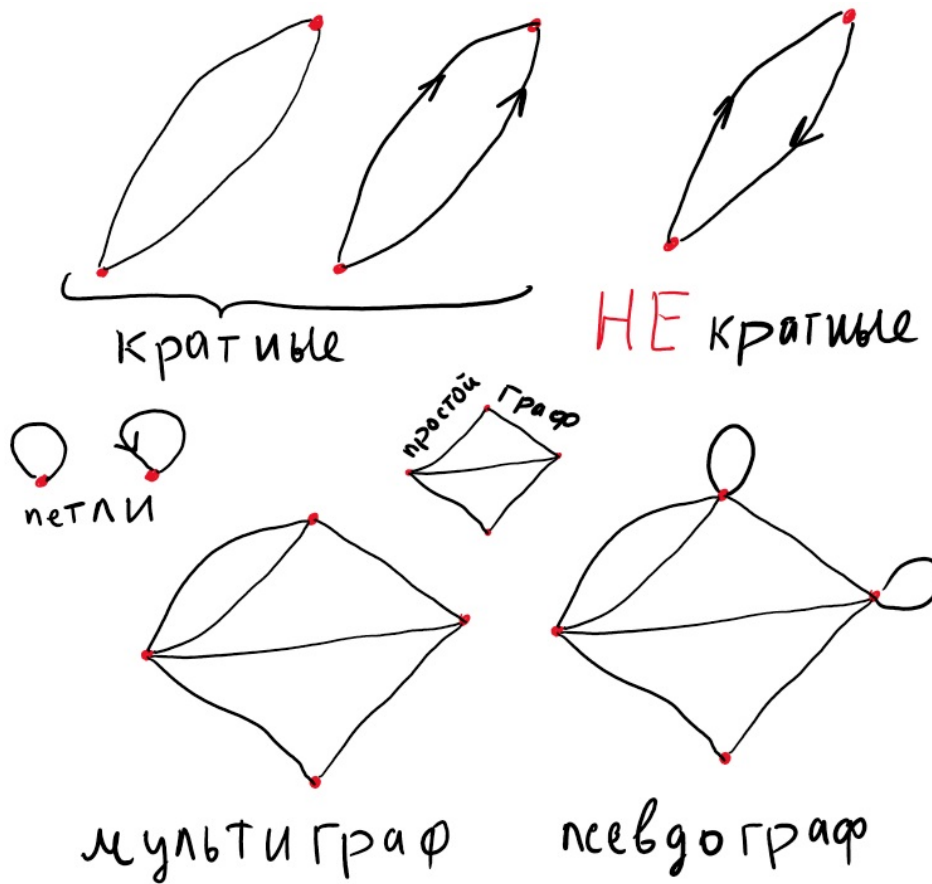


- Еще, на сайте вольфрама, чатик нашел что простые графы обычно считаются неориентированными и невзвешенными (без весов на ребрах)
- На счет невзвешенности - на вики и в читайте написаны ребра как пара вершин (то есть весами тоже и не пахнет) ((впрочем это такой себе знак))
- Но явного 'простые графы - невзвешенные' - я не нашел. Так что считайте, что простой граф может быть взвешенным, по крайней мере - таково мое мнение.

3) Multiedges and multigraphs

Мультиребро (кратное ребро) (Multiedge) - ребра, у которых одинаковые начальные, и конечные вершины.

Мультиграф - граф с мультиребрами (кратными ребрами)

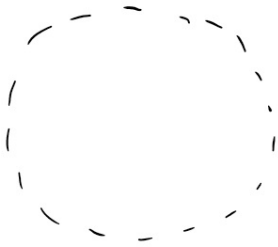


4) Null, empty, singleton graphs

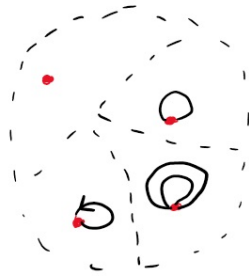
Null graph (нуль-граф? пустой граф?) - граф без вершин

Singleton (Trivial) graph - граф с одной вершиной

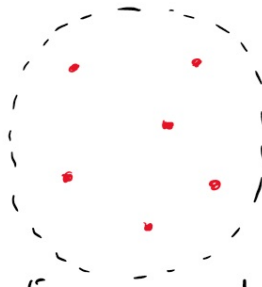
Empty graph (пустой граф) - граф без ребер



Null graph



Singleton graph

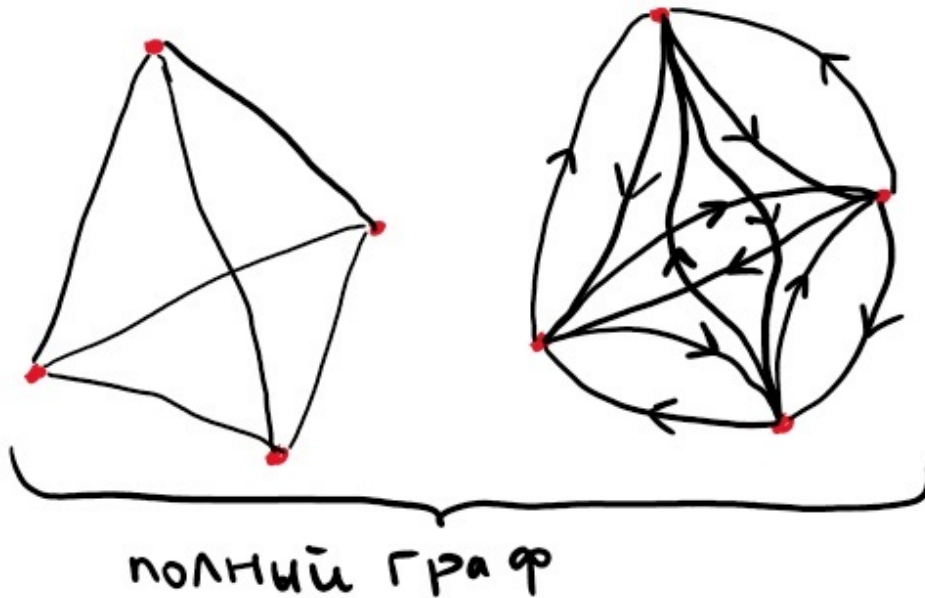


Empty graph

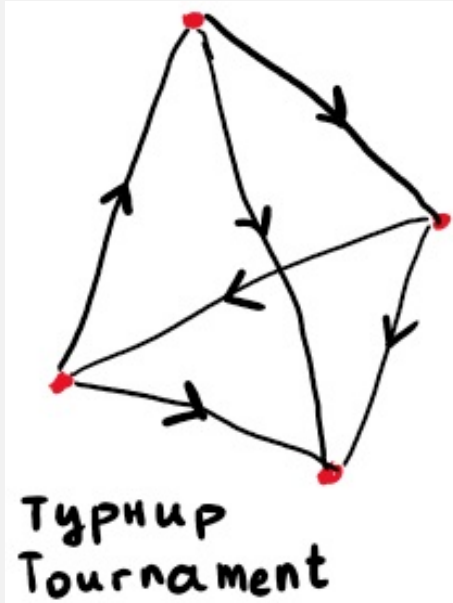
5) Complete graph

Complete graph (Полный граф) - простой граф, в котором каждая пара различных вершин соединена ребром

Полный граф определен и для ориентированных графов - простой граф, в котором между каждой парой различных вершин есть 2 противоположнонаправленных дуги



- Еще есть "турнир" (Tournament) - это ориентированный простой граф, в котором между каждой парой различных вершин ровно 1 ребро



6) Weighted graph

Взвешенный граф (Weighted graph) - граф в котором у кадного ребра есть вес (взвешенные ребра)

Более формально - с каждым ребром есть ассоциированное численное значение - вес, представляемое в виде весовой функции.

Не кидайтесь в меня тапками, я буквально перевел на русский то, что написано в читшите

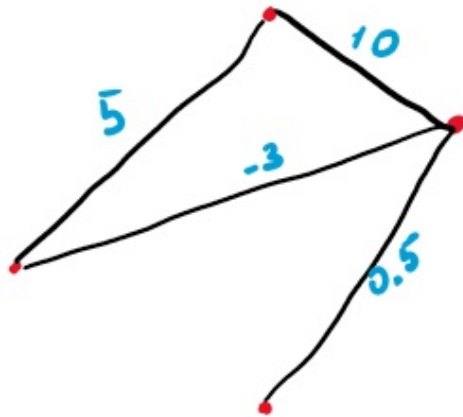
Еще более формально - Взвешенный граф

$$G = \langle V, E, w \rangle;$$

$$w : E \rightarrow Num$$

это то что написано в читшите, мне лично понятнее вот так:

$$w : e \in E \rightarrow weight_e$$



Взвешенный граф

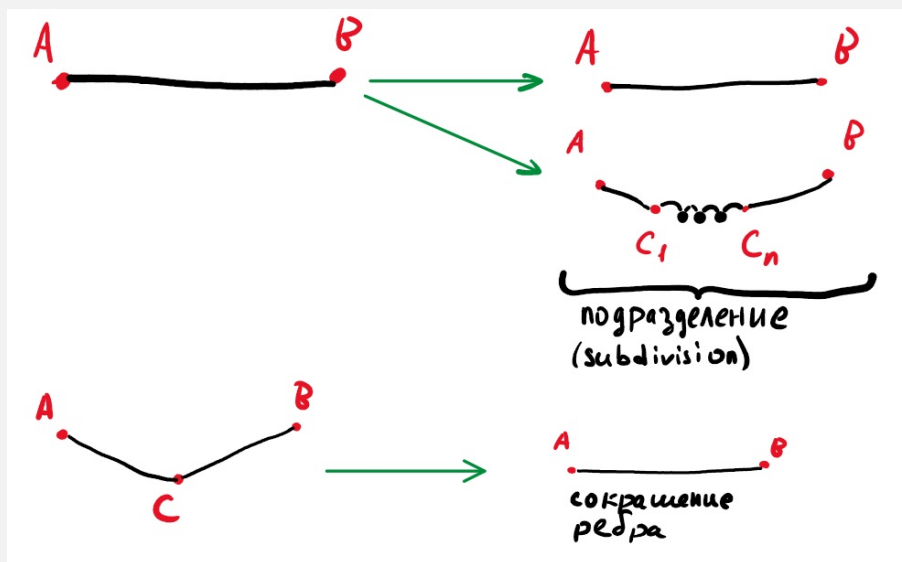
7) Planar graphs

Планарный граф (Planar graph) - граф, который можно представить на плоскости так, чтобы никакие 2 ребра не пересекались (кроме общих концов(вершин))

Примечание (спизжено с исагиллы) - есть еще плоские графы (plane graph), это те графы которые не просто можно, а уже изображены на плоскости, без пересечения ребер

Ладно, теперь поговорим серьезно

- Существуют признаки-теоремы планарности графа
- 2 точные теоремы, и значат по сути одно и то же - теорема Куратовского и теорема Вагнера
- Теорема Куратовского:
Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не содержит подграф, являющийся подразделением (полного графа на 5 вершинах (K_5) или полного двудольного графа $3,3$ ($K_{3,3}$))
сформулировано по-ублюдски, теорема Вагнера мне нравится куда больше
- Теорема Вагнера: Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не содержит K_5 или $K_{3,3}$ как минор.
- коротенький экскурс в терминологию происходящего:
 - подграф - граф, который можно получить путем удаления вершин и ребер исходного графа
 - подразделение (subdivision, возможно не самый лучший перевод, ну ладно) граф получаемый делением ребра (ребер) на несколько, путем добавления вершин в середину (возможно 0 раз, так что сам граф является своим собственным подразделением)
 - минор - граф, который можно получить путем удаления вершин, удаления ребер, сокращения ребер исходного графа



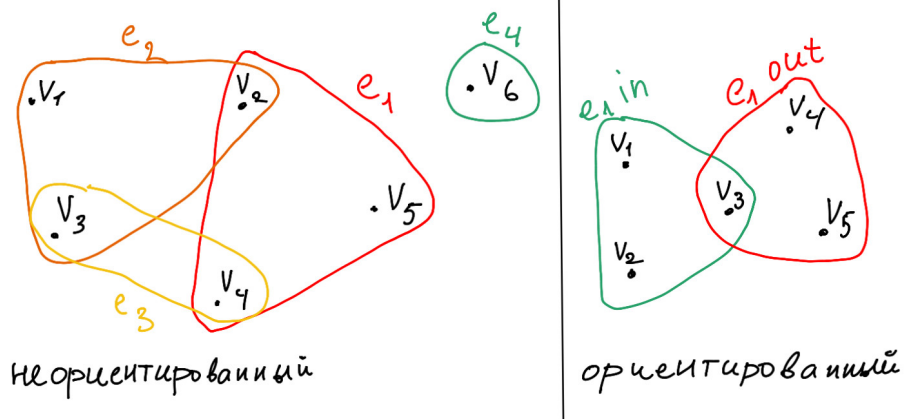
- ну и некоторые менее точные признаки:
 - $|E| < 3|V| - 6$
 - $|E| < 2|V| - 4$ (если нет циклов длиной 3)
 - $f < 2|V| - 4$ (f - кол-во "поверхностей")
 - и много много много других...

[Вот статья на википедии](#)

8) Hypergraphs

Гиперграф (Hypergraph) - граф, в котором ребра могут соединять любое количество вершин

Также существуют ориентированные гиперграфы, в таком случае ребро выражается в виде подмножеств входных и выходных вершин



- Неориентированный:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\{v_2, v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_6\}\}$$

- Ориентированный:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1\} = \{\langle e_1^{\text{in}}, e_1^{\text{out}} \rangle\} = \{\langle \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4, v_5\} \rangle\}$$

9) Subgraph, spanning subgraph

Подграф (Subgraph) - граф, множества вершин и ребер которого являются некоторыми подмножествами для некоторого другого графа

$$G = \langle V, E \rangle$$

$$G' = \langle V' \subseteq V, E' \subseteq E \rangle \quad G' - \text{подграф графа } G$$

Спэннинг подграф? (Spanning (partial) subgraph) (Вообще на вики написано что это **Суграф**, но кто вас поймет?) - подграф, множества вершин которого такое же, как и у исходного графа

$$G = \langle V, E \rangle$$

$$G' = \langle V' = V, E' \subseteq E \rangle \quad G' - \text{spanning подграф графа } G$$

бля, в рот я шатал картинки рисовать, я так эту доку никогда не закончу

10) Induced subgraph

Индукцированный подграф (Induced subgraph) - граф, который получается в результате удаления вершин (оставляем все ребра, вершины которых не тронуты)

$$G = \langle V, E \rangle$$

$$G' = \langle V' \subseteq V, E' = \{e \mid \forall e = \langle v, u \rangle \in E; v, u \in V'\} \rangle$$

G' - индуцированный подграф графа G