

# ТМ 3

Cosmo Chief

8 мая 2025 г.

## Содержание

— База по графам —	2
1) Directed and undirected graphs	3
2) Simple graphs and pseudographs	4
3) Multiedges and multigraphs	5
4) Null, empty, singleton graphs	6
5) Complete graph	7
6) Weighted graph	8
7) Planar graphs	9

## База по графам

**Граф** - упорядоченная пара  $G = \langle V, E \rangle$

$V$  - множество вершин (vertices) ((вертексы))

$E$  - множество ребер (edges) ((эджи))

$V \neq \emptyset$  правда есть *nullgraph*, у него вершин нет, а вот на вики написано, что мн-во вершин не пустое.  
 $E \subseteq V \times V$

$V(G)$  - "получить" множество вершин графа  $G$

$E(G)$  - "получить" множество ребер графа  $G$

если вместо  $G$  будет не граф, а что то также имеющее вершины/ребра, то такая нотация также будет работать (например с путями в графе)

**Порядок (order)** графа - количество вершин  $|V(G)|$

**Размер (size)** графа - количество ребер  $|E(G)|$

все остальное будет в блоках по темам, на этом в общем то все

### Немножечко философских уточнений/рассуждений:

- Таки а что такое вершина?  
Вершина это вершина. Смиритесь. Можете считать ее (для удобства мышления, а не для ответа преподу) как идентификатор вершины на картинке (типо как имя или номер)
- Таки а что такое ребро?  
Ребро это пара (неупорядоченная если граф неориентированный, упорядоченная если граф ориентированный) вершин. (А как же взвешенные ребра? Я думаю о том, что пара двух вершин, это база, и никуда вы от нее не денетесь. А свойств у ребра может быть много, так что я бы описал это как:  
 $e \in E = \langle \langle v_1, v_2 \rangle, \langle \text{список свойств} \rangle \rangle$ )

## 1) Directed and undirected graphs

Ориентированное ребро - ребро, у которого есть направление

Неориентированное ребро - ребро, у которого нет направления

*В базе уже написано, что упорядоченная/неупорядоченная пара. Надо добавить, что ориентация ребра накладывает ограничения на пути в графе (не можешь ты пройти против направления ребра), и это влияет на работу алгоритмов, и позволяет некоторым видам графов существовать в принципе (дерево, например)*

**Ориентированный(Directed)** - граф, у которого все ребра ориентированы (имеют направление).

**Неориентированный(Undirected)** - граф, у которого все ребра неориентированы (не имеют направления).

*даа... об этом так интересно говорить вообще без контекста...*

### Так что контекста навалю я

В первую очередь, направленность / ненаправленность влияет на пути, циклы, обходы, алгоритмы поиска и тп.

Некоторые подвиды графов бывают только одного вида (например деревья всегда ориентированные)

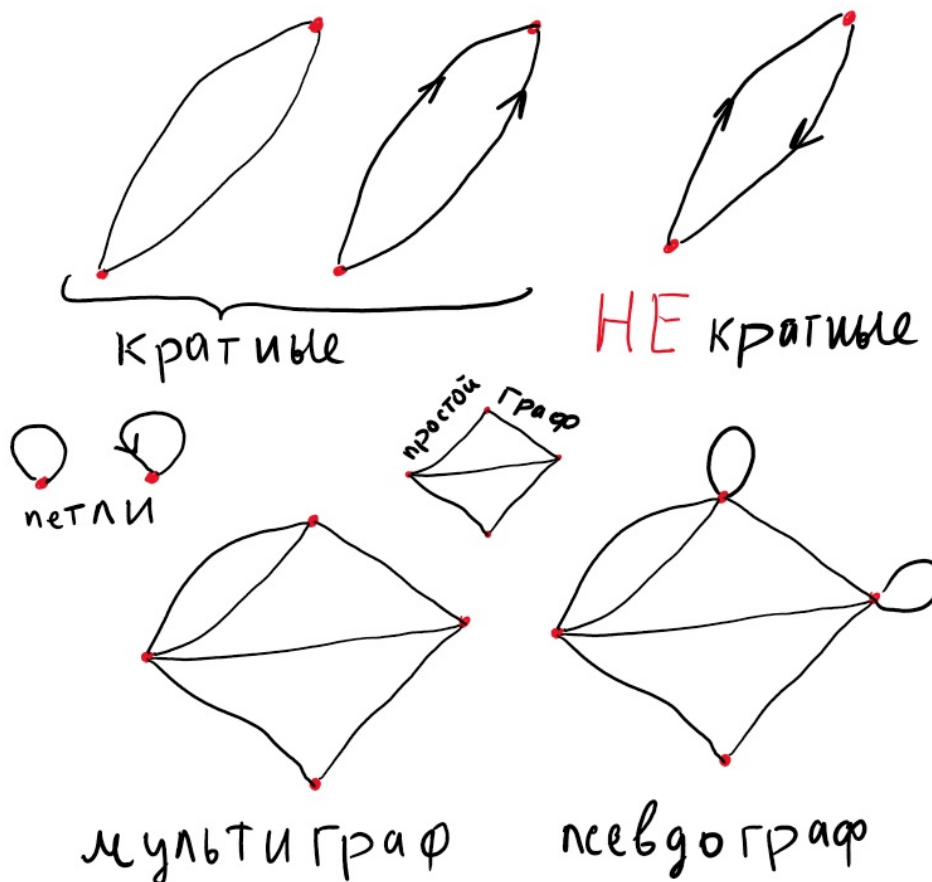
## 2) Simple graphs and pseudographs

**Простой граф (Simple graph)** - граф без петель и кратных ребер

**Псевдограф (Pseudograph)** - граф с петлями или кратными ребрами (проще говоря, все что не простой граф - псевдограф)

НО!!! У Кости написано, что:

**Псевдограф (Pseudograph)** - мультиграф (граф с кратными ребрами) **И** с петлями

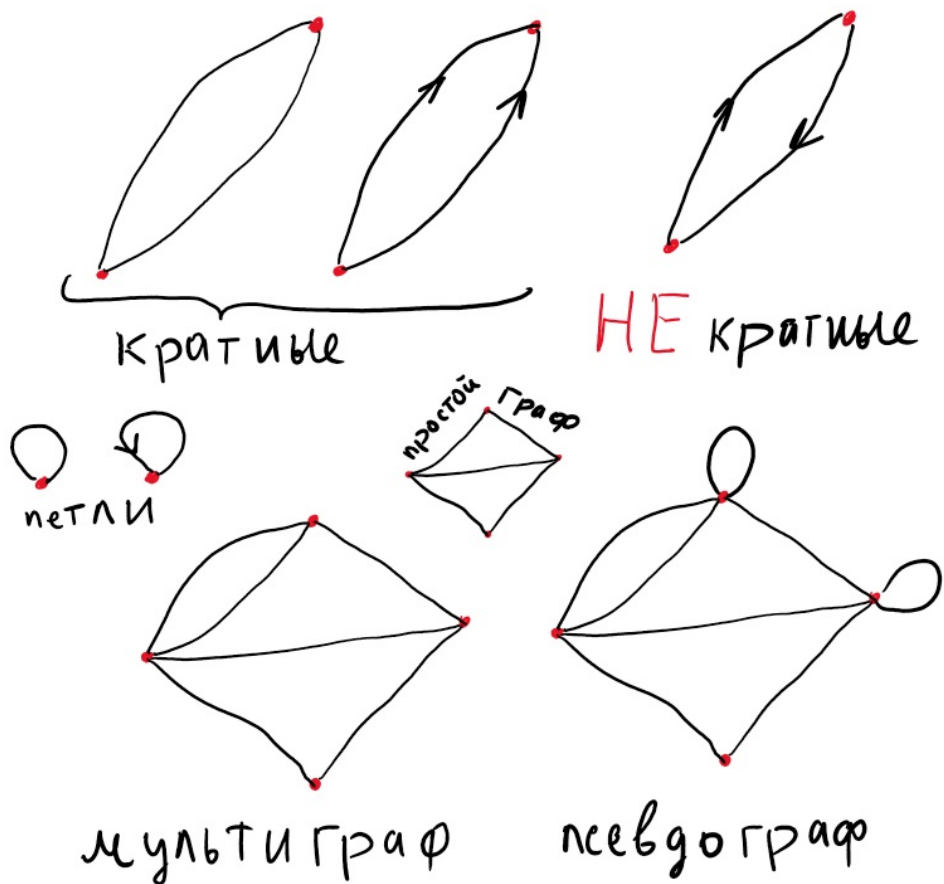


- Еще, на сайте вольфрама, чатик нашел что простые графы обычно считаются неориентированными и невзвешенными (без весов на ребрах)
- На счет невзвешенности - на вики и в читайте написаны ребра как пара вершин (то есть весами тоже и не пахнет) ((впрочем это такой себе знак))
- Но явного 'простые графы - невзвешенные' - я не нашел. Так что считайте, что простой граф может быть взвешенным, по крайней мере - таково мое мнение.

### 3) Multiedges and multigraphs

Мультиребро (кратное ребро) (Multiedge) - ребра, у которых одинаковые начальные, и конечные вершины.

Мультиграф - граф с мультиребрами (кратными ребрами)

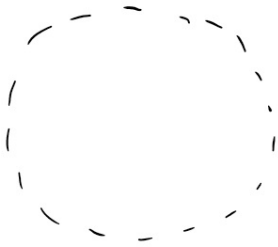


#### 4) Null, empty, singleton graphs

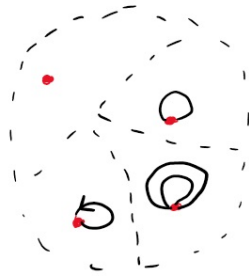
**Null graph** (нуль-граф? пустой граф?) - граф без вершин

**Singleton (Trivial) graph** - граф с одной вершиной

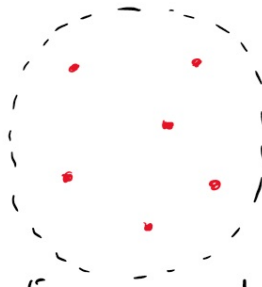
**Empty graph** (пустой граф) - граф без ребер



Null graph



Singleton graph

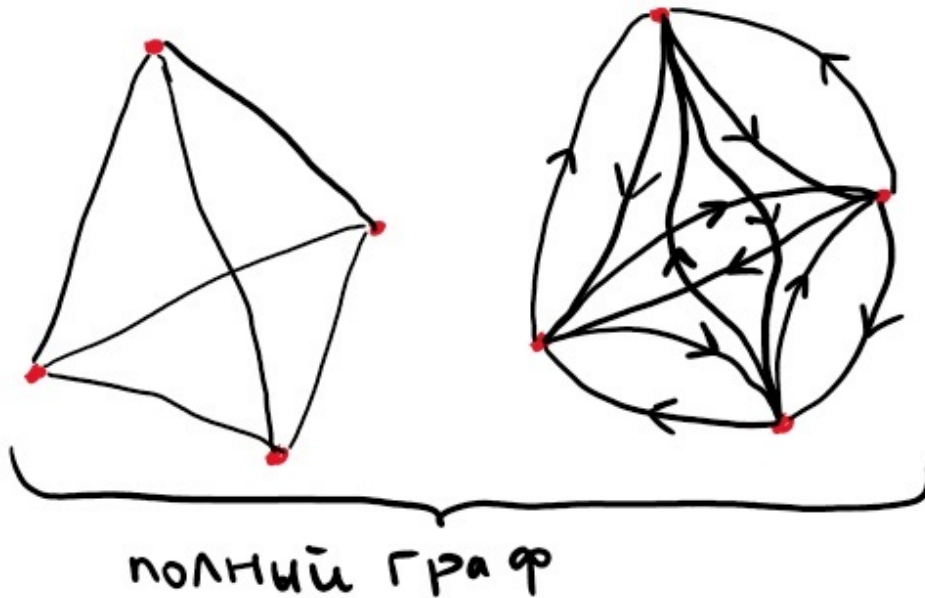


Empty graph

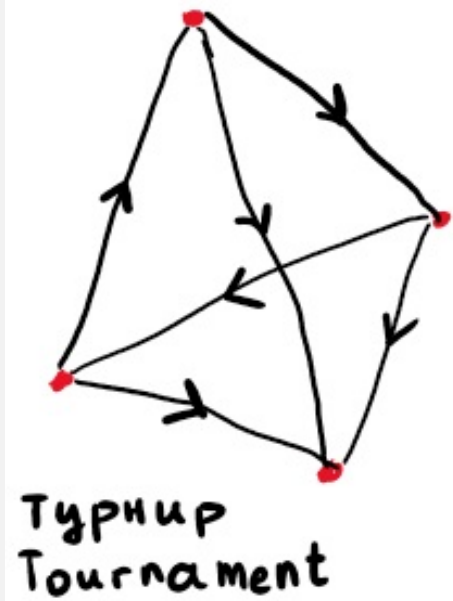
## 5) Complete graph

**Complete graph (Полный граф)** - простой граф, в котором каждая пара различных вершин соединена ребром

*Полный граф определен и для ориентированных графов - простой граф, в котором между каждой парой различных вершин есть 2 противоположно направленных дуги*



- Еще есть "турнир" (Tournament) - это ориентированный простой граф, в котором между каждой парой различных вершин ровно 1 ребро



## 6) Weighted graph

**Взвешенный граф (Weighted graph)** - граф в котором у кадного ребра есть вес (взвешенные ребра)

Более формально - с каждым ребром есть ассоциированное численное значение - вес, представляемое в виде весовой функции.

*Не кидайтесь в меня тапками, я буквально перевел на русский то, что написано в читшите*

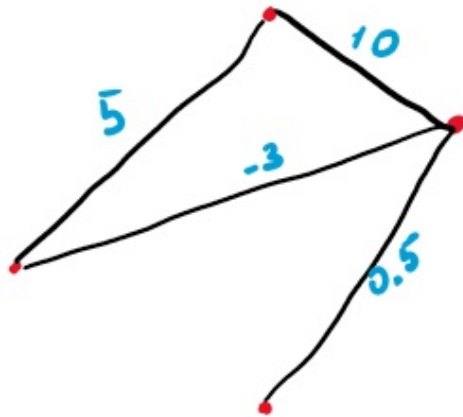
Еще более формально - Взвешенный граф

$$G = \langle V, E, w \rangle;$$

$$w : E \rightarrow Num$$

*это то что написано в читшите, думаю правильнее все таки:*

$$w : e \in E \rightarrow weight_e$$



**Взвешенный граф**



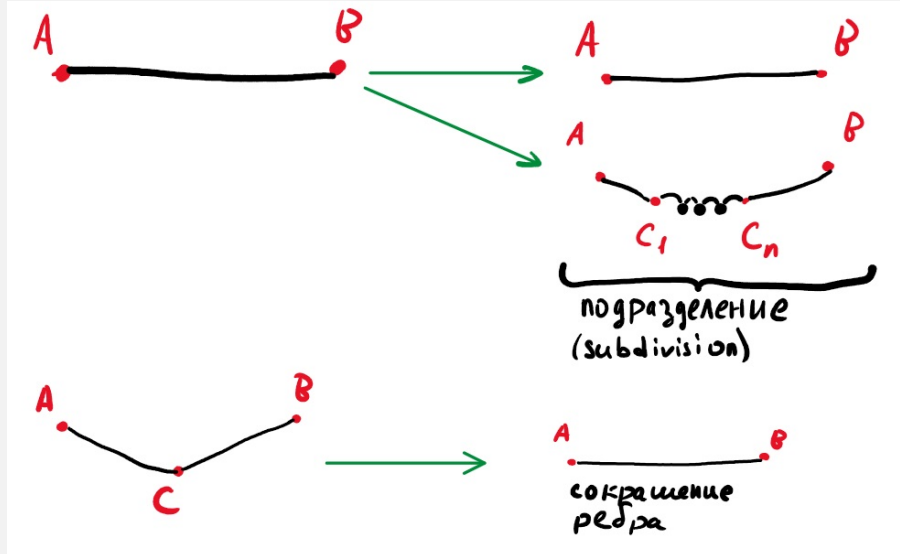
## 7) Planar graphs

**Планарный граф (Planar graph)** - граф, который можно представить на плоскости так, чтобы никакие 2 ребра не пересекались (кроме общих концов(вершин))

*Примечание (спизжено с исагиллы) - есть еще плоские графы (plane graph), это те графы которые не просто можно, а уже изображены на плоскости, без пересечения ребер*

Ладно, теперь поговорим серьезно

- Существуют признаки-теоремы планарности графа
- 2 точные теоремы, и значат по сути одно и то же - теорема Куратовского и теорема Вагнера
- Теорема Вагнера:  
Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не содержит подграф, являющийся подразделением (полного графа на 5 вершинах ( $K_5$ ) или полного двудольного графа  $3,3$  ( $K_{3,3}$ ))  
*сформулировано по-ублюдски, теорема Вагнера мне нравится куда больше*
- Теорема Вагнера: Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не содержит  $K_5$  или  $K_{3,3}$  как минор.
- коротенький экскурс в терминологию происходящего:
  - подграф - граф, который можно получить путем удаления вершин и ребер исходного графа
  - подразделение (subdivision, возможно не самый лучший перевод, ну ладно) граф получаемый делением ребра (ребер) на несколько, путем добавления вершин в середину (возможно 0 раз, так что сам граф является своим собственным подразделением)
  - минор - граф, который можно получить путем удаления вершин, удаления ребер, сокращения ребер исходного графа



- ну и некоторые менее точные признаки:
  - $|E| < 3|V| - 6$
  - $|E| < 2|V| - 4$  (если нет циклов длиной 3)
  - $f < 2|V| - 4$  ( $f$  - кол-во "поверхностей")
  - и много много много других...

[Вот статья на википедии](#)