TM 3

Cosmo Chief

9 июня 2025 г.

Содержание

База по графам

Граф - упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$
V - множество вершин (vertices) ((вертексы))
E - множество ребер (edges) ((эджи))

$V \neq \emptyset$ *правда есть nullgraph, у него вершин нет, а вот на вики написано, что мн-во вершин не пустое.*
$E \subseteq V \times V$

$V(G)$ - "получить" множество вершин графа G
$E(G)$ - "получить" множество ребер графа G
если вместо G будет не граф, а что то также имеющее вершины/ребра, то такая нотация также будет работать (например с путями в графе)

Порядок (order) графа - колличество вершин $|V(G)|$
Размер (size) графа - колличество ребер $|E(G)|$

все остальное будет в блоках по темам, на этом в общем то все

Немножечко филосовских уточнений/рассуждений:

- Таки а что такое вершина?
  Вершина это вершина. Смиритесь. Можете считать ее (для удобства мышления, а не для ответа преподу) как идентификатор вершины на картинке (типо как имя или номер)
- Таки а что такое ребро?
  Ребро это пара (неупорядоченная если граф неориентированный, упорядоченная если граф ориентированный) вершин. (А как же взвешенные ребра? Я думаю о том, что пара двух вершин, это база, и никуда вы от нее не денетесь. А свойств у ребра может быть много, так что я бы описал это как:
  $e \in E = \langle \langle v_1, v_2 \rangle, \langle \text{список свойств} \rangle \rangle$

1) Directed and undirected graphs

Ориентированное ребро - ребро, у которого есть направление
Неориентированное ребро - ребро, у которого нет направления

В базе уже написано, что упорядоченная/неупорядоченная пара. Надо добавить, что ориентация ребра накладывает ограничения на пути в графе (не можешь ты пройти против направления ребра), и это влияет на работу алгоритмов, и позволяет некоторым видам графов существовать впринципе (дерево, например)

Ориентированный(Directed) - граф, у которого все ребра ориентированы (имеют направление).
Неориентированный(Undirected) - граф, у которого все ребра неориентированы (не имеют направления).

даа... об этом так интересно говорить вообще без контекста...

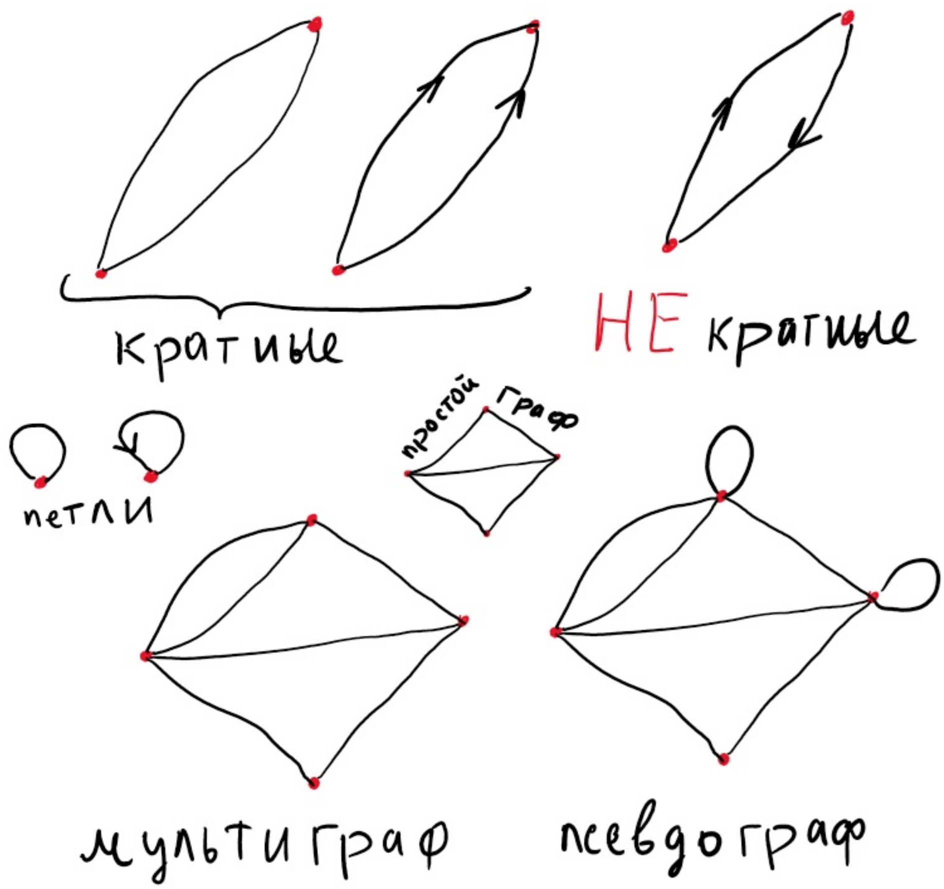
Так что контекста навалю я

В первую очередь, направленность / ненаправленность влияет на пути, циклы, обходы, алгоритмы поиска и тп.
Некоторые подвиды графов бывают только одного вида (например деревья всегда ориентированные)

2) Simple graphs and pseudographs

Простой граф (Simple graph) - граф без петель и кратных ребер
Псевдограф (Pseudograph) - граф с петлями или кратными реберами (проще говоря, все что не простой граф - псевдограф)

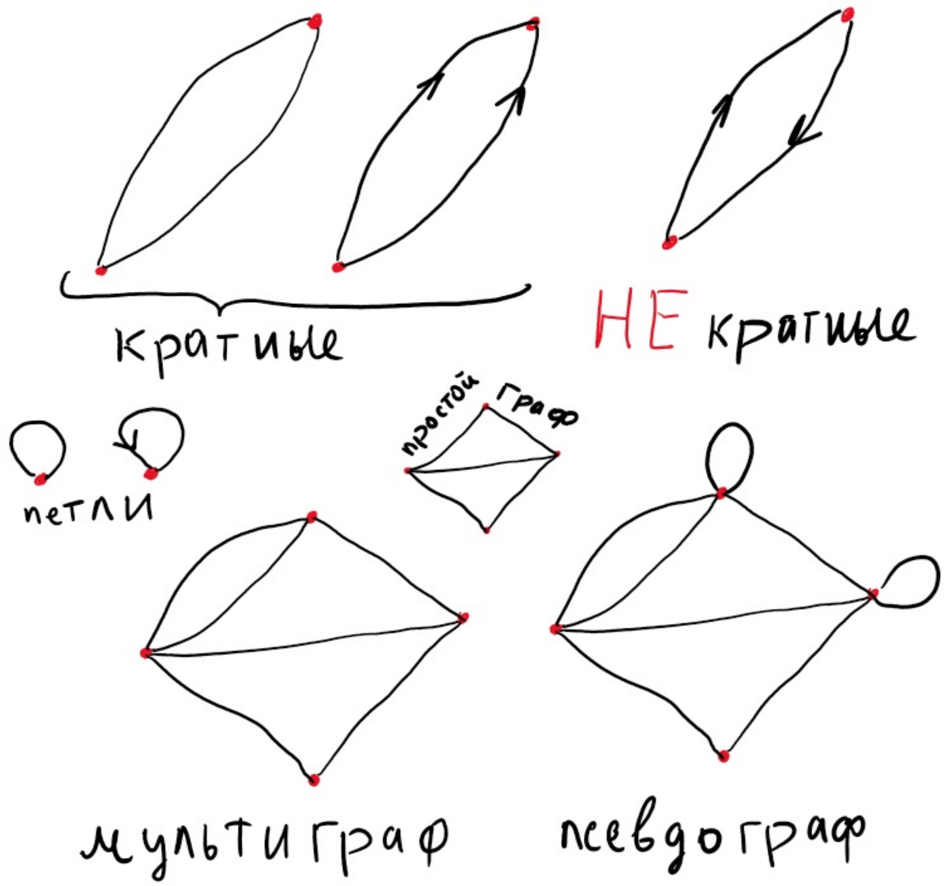
НО!!! У Кости написано, что:
Псевдограф (Pseudograph) - мультиграф (граф с кратными ребрами) **И** с петлями



- Еще, на сайтике вольфрама, чатик нашел что простые графы обычно считаются неориентированными и невзвешенными (без весов на ребрах)
- На счет не взвешенности - на вики и в читшите написаны ребра как пара вершин (тоесть весами тоже и не пахнет) ((впрочем это такой себе знак))
- Но явного 'простые графы - не взвешенные' - я не нашел. Так что считайте, что простой граф может быть взвешенным, по крайней мере - таково мое мнение.

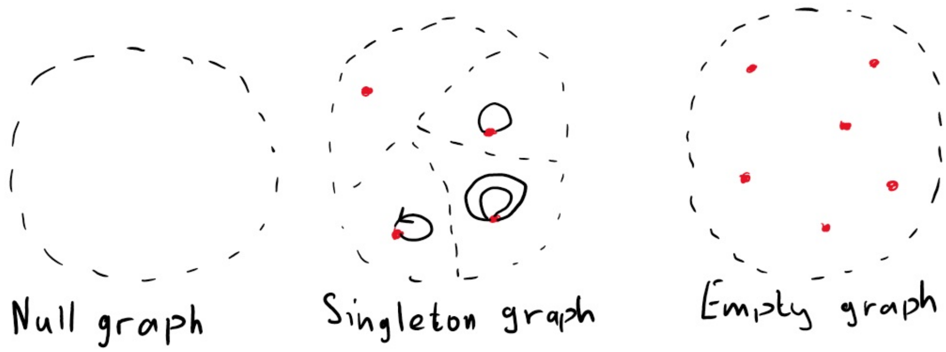
3) Multiedges and multigraphs

Мультиребро (кратное ребро)(Multiedge) - ребра, у которых одинаковые начальные, и конечные вершины.
Мультиграф - граф с мультиребрами (кратными ребрами)



4) Null, empty, singleton graphs

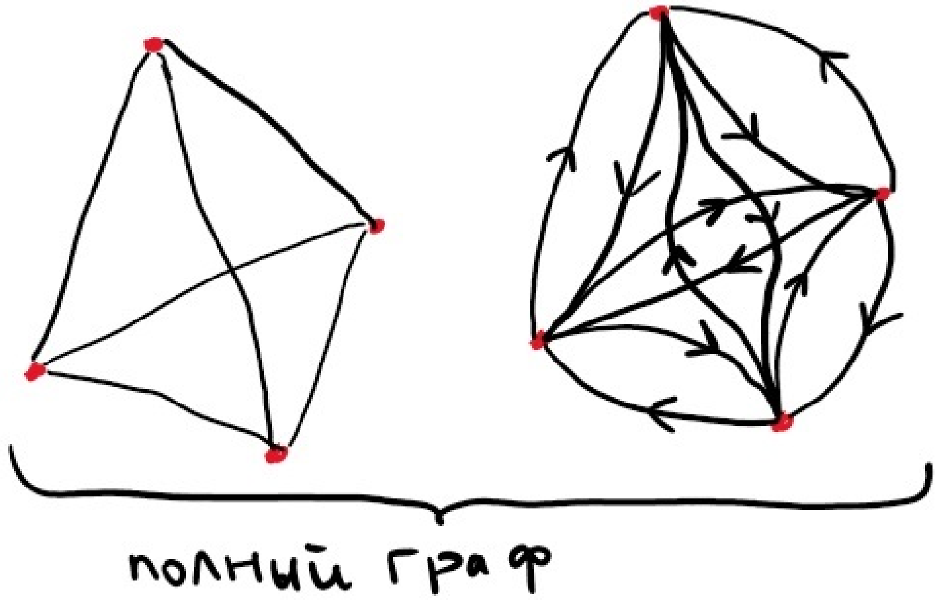
Null graph (нуль-граф? пустой граф?) - граф без вершин
Singleton (Trivial) graph) - граф с одной вершиной
Empty graph (пустой граф) - граф без ребер



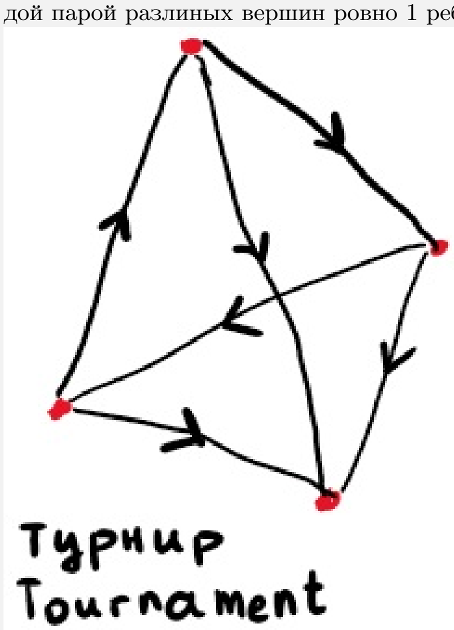
5) Complete graph

Complete graph (Полный граф) - простой граф, в котором каждая пара различных вершин соединена ребром

Полный граф определен и для ориентированных графов - простой граф, в котором между каждой парой различных вершин есть 2 противонаправленных дуги



- Еще есть "турнир"(Tournament) - это ориентированный простой граф, в котором между каждой парой разлиных вершин ровно 1 ребро

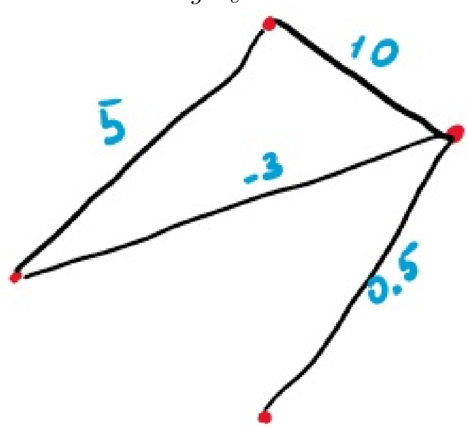


6) Weighted graph

Взвешенный граф (Weighted graph) - граф в котором у кадого ребра есть вес (взвешенные ребра)

Более формально - с каждым ребром есть ассоциированное численное значение - вес, представляемое в виде весовой функции.
Не кидайтесь в меня тапками, я буквально перевел на русский то, что написано в читшите

Еще более формально - Взвешенный граф
$G = \langle V, E, w \rangle;$
$w : E \to Num$
это то что написано в читшите, мне лично понятнее вот так:
$w : e \in E \to weight_e$



Взвешенный граф

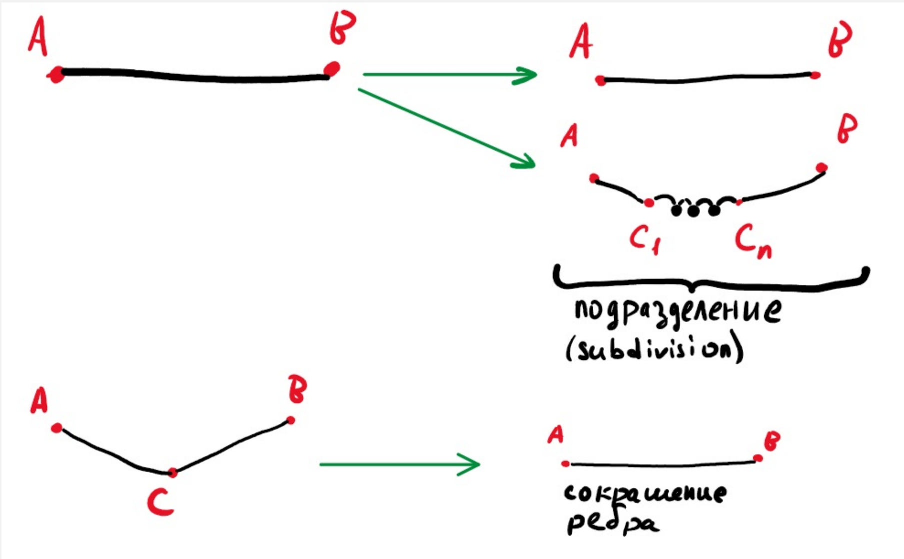
7) Planar graphs

Планарный граф (Planar graph) - граф, который можно представить на плоскости так, чтобы никакие 2 ребра не пересекались (кроме общих концов(вершин))

Примечание (спизжено с исагиллы) - есть еще плоские графы (plane graph), это те графы которые не просто можно, а уже изображены на плоскости, без пересечения ребер

Ладно, теперь поговорим серьезно

- Существуют признаки-теоремы планарности графа
- 2 точные теоремы, и значат по сути одно и тоже - теорема Куратовского и теорема Вагнера
- Теорема Куратовского:
  Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не соджержит подграф, являющийся подразделением (полного графа на 5 вершинах (K_5) или полного двудольного графа 3,3 ($K_{3,3}$))
  сформулированно по-ублюдски, теорема Вагнера мне нравится куда больше
- Теорема Вагнера: Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не содержит K_5 или $K_{3,3}$ как минор.
- коротенький экскурс в терминологию происходящего:
  - подграф - граф, который можно получить путем удаления вершин и ребер исходного графа
  - подразделение (subdivision, возможно не самый лучший перевод, ну ладно) граф получаемый делением ребра (ребер) на несколько, путем добавления вершин в середину (возможно 0 раз, так что сам граф является своим собственным подразделением)
  - минор - граф, который можно получить путем удаления вершин, удаления ребер, сокращения ребер исходного графа

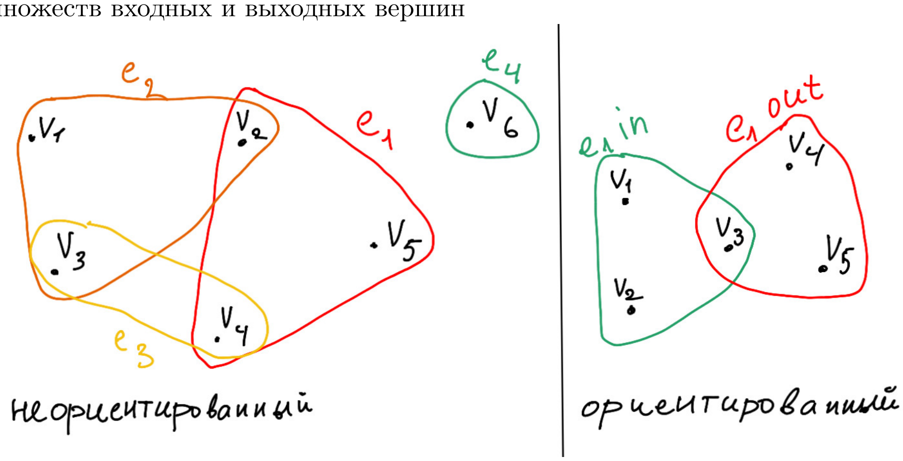


- ну и некоторые менее точные признаки:
  - $|E| < 3|V| - 6$
  - $|E| < 2|V| - 4$ (если нет циклов длинной 3)
  - $f < 2|V| - 4$ (f - кол-во "поверхностей")
  - и много много много других...
    Вот статья на википедии

8) Hypergraphs

Гиперграф (Hypergraph) - граф, в котором ребра могут соединять любое количество вершин

Также существуют ориентированные гиперграфы, в таком случае ребро выражается в виде подмножеств входных и выходных вершин



- Неориентированный:
  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\{v_2, v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_6\}\}$
- Ориентированный:
  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  $E = \{e_1\} = \{\langle e_1^{\text{in}}, e_1^{\text{out}} \rangle\} = \{\langle \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4, v_5\} \rangle\}$

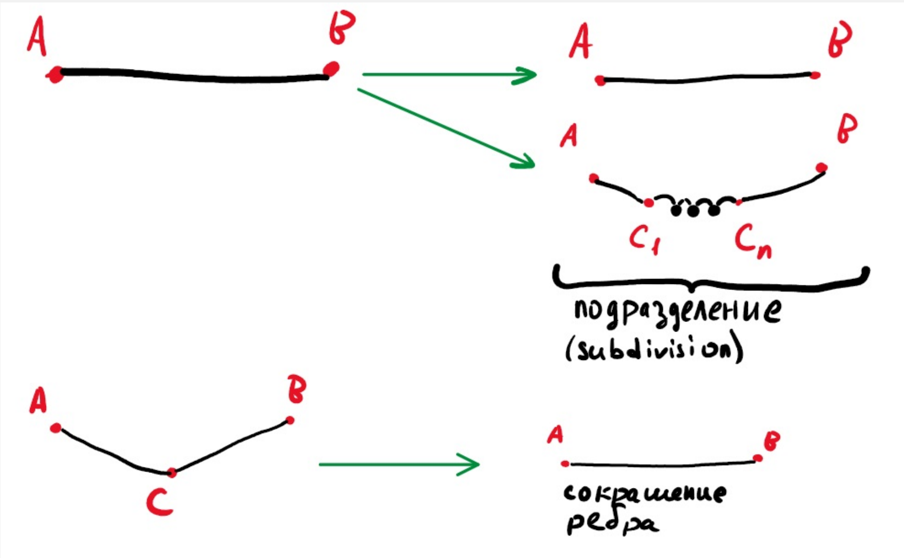
7) Planar graphs

Планарный граф (Planar graph) - граф, который можно представить на плоскости так, чтобы никакие 2 ребра не пересекались (кроме общих концов(вершин))

Примечание (спизжено с исагиллы) - есть еще плоские графы (plane graph), это те графы которые не просто можно, а уже изображены на плоскости, без пересечения ребер

Ладно, теперь поговорим серьезно

- Существуют признаки-теоремы планарности графа
- 2 точные теоремы, и значат по сути одно и тоже - теорема Куратовского и теорема Вагнера
- Теорема Куратовского:
  Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не соджержит подграф, являющийся подразделением (полного графа на 5 вершинах (K_5) или полного двудольного графа 3,3 ($K_{3,3}$))
  сформулированно по-ублюдски, теорема Вагнера мне нравится куда больше
- Теорема Вагнера: Конечный граф является планарным, тогда и только тогда, когда не содержит K_5 или $K_{3,3}$ как минор.
- коротенький экскурс в терминологию происходящего:
  - подграф - граф, который можно получить путем удаления вершин и ребер исходного графа
  - подразделение (subdivision, возможно не самый лучший перевод, ну ладно) граф получаемый делением ребра (ребер) на несколько, путем добавления вершин в середину (возможно 0 раз, так что сам граф является своим собственным подразделением)
  - минор - граф, который можно получить путем удаления вершин, удаления ребер, сокращения ребер исходного графа



- ну и некоторые менее точные признаки:
  - $|E| < 3|V| - 6$
  - $|E| < 2|V| - 4$ (если нет циклов длинной 3)
  - $f < 2|V| - 4$ (f - кол-во "поверхностей")
  - и много много много других...
    Вот статья на википедии