Коллок 4

Cosmo Chief

7 июня 2025 г.

Содержание

1 Formal languages

Формальный язык $\mathcal{L}$ - некторое подмножество всех слов из заданного алфавита Σ.

$$\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \qquad \Sigma^* = \sum_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

2 Operations on formal languages

- Как множества:
  - Объединение $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$
  - Пересечение $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$
  - Дополнение $\neg\mathcal{L} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}$
  - ...?
- Конкатенация
  $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \{x + y \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$
- Возведение в степень
  $\mathcal{L}^k = \underbrace{\mathcal{L} \cdot ... \cdot \mathcal{L}}_{k \text{ раз}}$
  $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$, ε = пустое слово
- Звезда Клини
  $\mathcal{L}^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$

3 Regular languages

Множество регулярных языков задается так:

$$REG = \bigcup_{k=0}^{\infty} Reg_k = Reg_\infty$$
$$Reg_{i+1} = Reg_i \cup \{\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1^* \mid \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in Reg_i\}$$
$$Reg_0 = \{\emptyset, \varepsilon, \{c\} \mid c \in \Sigma\}$$

Какой-то конкретный регулярный язык - регулярный язык, который может быть распознан каким-то конечным автоматом
Теорема Клини утверждает, что класс регулярных языков совпадает с классом языков, распознаваемых конечными автоматами

4 Closure properties of regular languages

Множество регулярных языков замкнуто относительно

- Объединения
- Конкатенации
- Звезды Клини

Очевидно из определения:

$$Reg_{i+1} = Reg_i \cup \{\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1^* \mid \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in Reg_i\}$$

Помимо этого, множество регулярных языков замкнуто относиттельно

- Пересечение $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$
- Positive closure $\mathcal{L}^+$
  По сути это все та же звезда Клини, но язык сконкатенирован сам с собой $k \geq 1$ раз. Тоесть $\mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}^*$
- Дополнение $\neg\mathcal{L}$
- Разность $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$
- Reversal $\mathcal{L}^R$
  По сути - берете конечный автомат, который выражает этот язык, и разворачиваете все ребра. (наверное надо будет еще добавить входную вершину, и из нее ε-переходы в каждую, ранее терминальную вершину, а ранее входная вершина станет терминальной)
  Еще проще
  $\forall w \in \mathcal{L} \mid w[:: -1] \in \mathcal{L}^R$
  Впрочем, скорее даже
  $\{w[:: -1]\} = \mathcal{L}^R \mid \forall w \in \mathcal{L}$
- Гомомрфизм $h(\mathcal{L})$
  Сопоставляет на каждый символ из начального языка - строку
  Пусть есть $w \in \mathcal{L}$. $h(w) = h(a_1...a_n) = h(a_1) + ... + h(a_n)$
  $h(\mathcal{L}) = \{h(w) \mid \forall w \in \mathcal{L}\}$
- Обратный гомоморфизм $h^{-1}(\mathcal{L})$
  $h^{-1}(h(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$
- Симметрическая разность $\mathcal{L}_1 \triangle \mathcal{L}_2 = (\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2) \cup (\mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_1)$
- Префикс (множество всех префиксов из регулярного языка)
- Субституция (Subtitution)
  Сопоставляет на каждый символ из начального языка - язык
  Пусть есть $w \in \mathcal{L}$. $f(w) = f(a_1...a_n) = f(a_1) \cdot ... \cdot f(a_n) = \mathcal{L}_{a_1} \cdot ... \cdot \mathcal{L}_{a_n}$
  Тоесть одной строке соответствует язык $\iff$ 1 и более строка.
  $f(\mathcal{L}) = \bigcup f(w) \mid \forall w \in \mathcal{L}$

5 Pumping lemma

Если $\mathcal{L}$ - регулярный язык, то существует $n > 1$, зависящее только от $\mathcal{L}$, такое, что
$\forall w \in \mathcal{L}, |w| > n \mid w = xyz$ так, что
$|y| > 0$
$|xy| < n$
$\forall k > 0 \mid xy^k z \in \mathcal{L}$

6 Regular expressions

Регулярное выражение - выражение описывающее регулярный язык.
Базис = Reg_0.
Если r_1 и r_2, то следующие выражения также являются регулярными

- $r_1 r_2$ - конкатенация
- r_1^* - звезда Клини (повторения от 0 до $+\infty$)
- r_1^+ - Позитивное дополнение..? (повторения от 1 до $+\infty$)
- $r_1?$ - 0 или 1 повторение
- $\{expression\}\{n\}$ - повторение $expression$ ровно n раз

- $\{expression\}\{min,\}$ - повторение $expression$ хотя бы min раз
- $\{expression\}\{,max\}$ - повторение $expression$ менее max раз
- $\{expression\}\{min,max\}$ - повторение $expression$ более min, менее max раз
- $r_1 \cup r_2$ - r_1 или r_2
  $r_1 + r_2$
- $[a_1...a_n]$ - ровно одно a_i
- () - для оперделения порядка применения операций

7 Deterministic finite automata (DFA)

Детерменированный конечный автомат (ДКА) - это кортеж $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где
Q - конечное множество состояний
Σ - алфавит
$q_0 \in Q$ - начальное состояние
$F \subseteq Q$ множество принимающих состояний (терминалы)
$\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ - функция перехода

Автомат называется детерменированным так как из каждого состояния есть **ровно 1** переход для каждого символа
Впрочем, некоторые авторы говорят что ДКА это автомат у которого из каждого состояния есть **не более 1** перехода для каждого символа (если "нужен"переход, которого нет, то автомиат останавливается)
(Формально, детерменированный автомат, это автомат который всегда находится в ровно одном состоянии)

8 Non-deterministic finite automata (NFA)

Недетерменированный конечный автомат(НКА) - это кортеж $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где
Q - конечное множество состояний
Σ - алфавит
$q_0 \in Q$ - начальное состояние
$F \subseteq Q$ множество принимающих состояний (терминалы)
$\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ - функция перехода
Обратите внимание, изменилось описание только функции перехода

Автомат называется недетерменированным, если для какого либо состояния для какого либо символа существует не ровно один переход, или если в автомате есть ε-переход (переход не "достающий"символ из строки).
(Такой автомат может находится в нескольких состояниях одновременно)

9 Rabin-Scott powerset construction

Конструкция Рабина-Скотта (subset construction) преобразует НКА в эквивалентный ДКА.
Дальше идет упрощенное описание, потому что на вики какая то фигня происходит, это кажется слишком жестко и ничерта не понятно

Каждое состояние в результирующем ДКА - подмножество состояний исходного НКА.
Каждое состояние ДКА имеющее хотя бы одно терминальное состояние из НКА - тоже терминальное.
Входное состояние - объединение ε-замыканий каждой входной точки.
Пусть есть состояние A из ДКА, и некоторый символ x, полученный из входной строки. Тогда

переход из A по x будет в состояние B, такое что B - множество всех состояний, достижимых из хотя бы одного состояния в A.
Более формально:
есть $A = \{a_1 ... a_n\}$ где a_i - состояние исходного НКА,
есть символ x, по которому мы вычисляем переход.
Из исходного НКА мы можем найти $a_i \xrightarrow{x} \{b_{i1} ... b_{im}\} = b_i$ - множество состояний достижимых в НКА из a_i при переходе по x.
Тогда $B = \bigcup_{i=1}^{n} b_i$.
И в результирующем ДКА $A \xrightarrow{x} B$

10 Epsilon-NFA

ε-НКА - НКА, допускающий ε-переходы (переходы без чтения символа). Используется для удобства построения из регулярных выражений. Для ε-НКА вводится понятие ε-замыкания:

$$\varepsilon\text{-closure}(P) \;=\; \{\, q \mid \exists q_0 \in P,\; q_0 \xrightarrow{*\varepsilon} q\}.$$

(Множество всех состояний, достижимых из данного состояния по ε-переходам)
Именно ε-замыкание начального состояния задаёт множество начальных состояний эквивалентного НКА без ε-переходов.

11 NFA construction from epsilon-NFA

**По сути - просто стягиваете ε-замыкания в одно состояние*

Для удаления ε-переходов строится эквивалентный НКА без них. Каждый переход по символу a из состояния q в ε-НКА заменяется переходом из каждого состояния $p \in \varepsilon\text{-closure}(q)$ по символу a в состояния из $\delta(p, a)$. Формально:

$$\delta'(q, a) = \bigcup_{p \in \varepsilon\text{-closure}(q)} \delta(p, a),$$

при этом принимающие состояния

$$F' \;=\; \{\, q \mid \varepsilon\text{-closure}(q) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Полученный ε-свободный НКА распознаёт тот же язык, что и исходный.

12 Kleene's theorem

Kleene's theorem: множество регулярных языков $\iff$ множество регулярных выражений $\iff$ множество ДКА
то есть для любого регулярного выражения существует ДКА (и НКА) с тем же языком, и наоборот, для любого ДКА есть регулярное выражение, задающее тот же язык.

Это означает, что конструкции между регулярными выражениями и автоматами обратимы, то есть регулярные языки = языки ДКА/НКА.

13 Kleene's algorithm

Алгоритм Клини строит регулярное выражение по ДКА через последовательное исключение состояний. Определяется регулярное выражение $R_{ij}^{(k)}$ — все слова, переводящие автомат из состояния i в j, не используя промежуточные состояния с номерами более k. В базисе $k = 0$ выражения соответствуют прямым переходам. Далее рекуррентно:

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} \big(R_{kk}^{(k-1)}\big)^{*} R_{kj}^{(k-1)}.$$

В конце $R_{s,t}^{(n)}$ между начальным и принимающими состояниями даёт искомое регулярное выражение.

14 Thompson's construction

Построение Томпсона превращает регулярное выражение в эквивалентный НКА (обычно с ε-переходами). Каждая операция регулярного выражения соответствует конструкции автомата:

- Для символа a: автомат из нового начального состояния в новое конечное по переходу a.
- Для $r_1 + r_2$: создаётся новое начальное состояние с ε-переходами в начала автоматов для r_1 и r_2, а их концы соединяются с общим конечным состоянием через ε-переходы.
- Для конкатенации $r_1 r_2$: конец автомата r_1 соединяется с началом r_2 через ε-переход.
- Для r^*: от начала к концу добавляется ε-переход, а от конца к началу также ε-переход, обеспечивая цикличное повторение.

В результате получается НКА, принимающий тот же язык, что и исходное регулярное выражение.

15 Ordered arrangements

Упорядоченное размещение n элементов. Задается как упорядоченная пара
$\langle \Sigma, s \rangle$
$s\colon [n] \to \Sigma$
$s(i) = x \in \Sigma$
Короче говоря соответствие индекса позиции и того что в ней стоит.
Еще можно записать как кортеж, строку, последовательность

16 Permutations

Перестановка из n элементов - это упорядоченное размещение всех элементов, число которых равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

17 k-permutations

По сути - упорядоченное размещение, т.к. из n элементов выбираем k и считаем их колличество перестановок. Вообщем это

$$A(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

18 Cyclic permutations

Циклическая перестановка n элементов - $(n-1)!$, т.к. представим перестановку P, так как цикл длинной n, то существует n циклически одинаковых перестановок. Отсюда

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Аналогично для циклических k-перестановок

$$\frac{A(n,k)}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

19 Unordered arrangements

Неупорядоченное размещение k элементов множества Σ это мультимножество S размера k
$\Sigma = 0, 1, 2$
$k = 3$
все возможные $S = \{\{0,0,0\},\{0,0,1\},\{0,0,2\},\{0,1,1\},\{0,1,2\},\{0,2,2\},\{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,2,2\},\{2,2,2\}\}$

20 k-combinations

Какой то выбор k элементов из множества размера n

$$C(n,k) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(Элементы различны, не повторяются)

21 Binomial theorem

Ну вот теорема: (Дальше то че? ну теорема и теорема)

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + ... + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

Ладно, минутка интересных фактов, которые по хорошему вы должны знать:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

22 Multisets

Мультисет - обобщение множества, допускающее повторения элементов. Задается как упорядоченная пара
$\langle \Sigma, r \rangle$
$r \colon \Sigma \to \mathbb{N}$ ($r(x)$ - колличество объектов x, $x \in \Sigma$)

23 Permutations of multisets

$$|P(\Sigma^*, n)| = \frac{n!}{r1! \cdot ... \cdot r_s!}$$

$n = |\Sigma^*|$(всего элементов в мультимножестве), $s = |\Sigma|$(кол-во уникальных элементов в мультимножестве)

24 Combinations of infinite multisets

Сочетание с повторениями (или сочетание из бесконечного мультисета) из n типов элементов (каждого в неограниченном количестве) по k элементов даёт формулу:

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Доказывать можно по Stars&Bars

25 Multinomial theorem

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$$

$$\forall k_i \geq 0$$

где сумма берётся по неотрицательным целым $(n_1, \ldots, n_m)$, сумма которых равна n. Коэффициенты $\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}$ называются мультиномиальными и равны числу способов разбить n объектов на группы размеров $k_1, \ldots, k_m$.

26 Compositions

Слабая композиция числа $n \geq 0$ на k частей это решение уравнения $b_1 + ...b_k = n \;\; (b_i \geq 0)$
Их колличество (по Stars&Bars)

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Композиция числа $n \geq 0$ на k частей это решение уравнения $b_1 + ...b_k = n \;\; (b_i \geq 0)$
Их колличество

$$\binom{n-1}{k-1}$$

кол-во делений n на произвольное кол-во частей $(k = 1...n) = 2^{n-1}$ (Опаньки, биномиальная теорема пригодилась)

27 Set partitions

Партиция (разбиение) множества из n элементов на k блоков (неупорядоченных и непустых)
Считается как число стирлинга второго рода

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

Если $k = 1...n$, то вычисляется как число Белла.

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

28 Stirling numbers of the second kind

Числа Стирлинга второго рода соответствуют количеству разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств. Их можно вычислить по формуле:

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$
$S(n,k) = 1 \Leftarrow n = k$
$S(n,0) = 0$
$S(n,k) = 0 \Leftarrow n < k$

Формула построена из следующих соображений: пусть нам нужно разделить множество из n элементов на k непустых частей. У нас есть два варианта:

- Разделить $n-1$ элемент на $k-1$ частей, а оставшийся элемент добавить в отдельную часть
- Разделить $n-1$ на k частей, а оставшийся элемент добавить в одну из получившихся частей. Т.к. у нас получилось k частей, а оставшийся элемент можно добавить в любую из них $\rightarrow$ получаем k вариантов (для каждого разбиения $n-1$ на k частей)

29 Bell numbers

Число Белла B_n равно числу всех разбиений n-элементного множества.

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp(e^x - 1)$$

Некоторые значения: $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, ...

30 Integer partitions

Целочисленное разбиение $p(n)$ - число способов представить n как сумму неубывающих натуральных слагаемых (порядок **неважен** (В композициях важен, по тому и формулы разные))) Например, $p(4) = 5$ для разбиений

$$4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1.$$

$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$
$p(0,0) = 1$
$p(n,k) = 0 \Leftarrow (n \le 0 \cup k \le 0)$

31 Principle of Inclusion-Exclusion

Для конечных множеств $A_1, \ldots, A_m$ мощность объединения даётся формулой:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_m|.$$

Этот принцип позволяет учитывать пересечения при подсчёте, например, количество объектов, не обладающих ни одним из нежелательных свойств. В частности, число перестановок без фиксированных точек (derangements) можно получить:

$$!n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

32 Recurrence relations

Рекуррентное (или рекурсивное) соотношение — это уравнение, задающее a_n через предыдущие члены. Линейное однородное соотношение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Общее решение строится через корни характеристического многочлена

$$\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - \cdots - c_k = 0.$$

Если корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ различны, то $a_n = \sum_i \alpha_i \lambda_i^n$. Для кратных корней добавляются множители n, n^2 и т.д.

33 Solving recurrence relations using characteristic equations

Для решения однородных линейных рекурренций ищут корни характеристического уравнения

$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - \cdots - c_k = 0.$$

Если, например, корень λ имеет кратность m, то вклад от него даётся $\alpha\, n^{m-1}\lambda^n$. Для неоднородных рекуррентов ищут сначала частное решение (например, подбирая вид, подобный неоднородной части), а затем добавляют общее решение однородного уравнения.

34 Generating functions

Порождающая функция последовательности (a_n) — формальный степенной ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Она кодирует последовательность и позволяет решить рекуррентные соотношения с помощью алгебраических манипуляций над рядами. Операции над порождающими функциями:

- Сумма рядов: $A(x) + B(x) = \sum (a_n + b_n)x^n$.
- Произведение рядов: $A(x)B(x) = \sum_{n\ge 0}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)x^n$ (свёртка коэффициентов).
- Стандартные ряды: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n$.

35 Solving linear recurrences using generating functions

Для линейного рекуррента составляют уравнение для $A(x)$, решают его и затем извлекают коэффициенты. Например, для Фибоначчи

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

получаем

$$A(x) = xA(x) + x^2A(x) + x,$$

откуда

$$A(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

и извлекается формула

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big).$$

36 Solving combinatorial problems using generating functions

Для комбинаторных классов строят порождающие функции по правилам: правило суммы соответствует объединению классов (сумма ГФ), правило произведения — декартово произведение (произведение ГФ). Например, если имеется m типов букв, каждая может повторяться любое число раз, то полная ГФ равна

$$(1 + x + x^2 + \dots)^m = \frac{1}{(1-x)^m},$$

и коэффициент при x^n равен

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

(числу слов длины n).

37 Operators and annihilators

Линейный разностный оператор E действует как $E(a_n) = a_{n+1}$. Оператор $\Delta = E - 1$ даёт разность $\Delta(a_n) = a_{n+1} - a_n$. Аннигилятором называется такой оператор, который обращает последовательность в нулевую. Например, оператор $E - 1$ аннигилирует константу (так как $a_{n+1} - a_n = 0$), оператор $E - 2$ аннигилирует геометрическую прогрессию 2^n ($2a_n - a_{n+1} = 0$). Идея: найти оператор, аннигилирующий неоднородную часть $f(n)$, и применить его к исходному уравнению, чтобы получить однородное соотношение.

38 Solving linear recurrences using annihilators

Если дано рекуррентное соотношение

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n),$$

ищут оператор $P(E)$ такой, что $P(E) f(n) = 0$. Умножая исходное уравнение оператором $P(E)$, получают новое однородное соотношение

$$P(E)\big(E^k + \cdots + c_k\big) = 0$$

для a_n, решают его, затем отбрасывают лишние решения, чтобы учесть начальные условия исходного уравнения.

39 Catalan numbers

Числа Каталана $\{C_n\}$ можно определить, например, как количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$ или число способов разбить $(n+2)$-угольник на треугольники. Формула:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Рекуррентно: $C_0 = 1$,

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \, C_{n-i}.$$

Генерирующая функция $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ удовлетворяет уравнению

$$C(x) = 1 + x \, C(x)^2,$$

что даёт замкнутую форму

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

40 Generalized binomial theorem

Для любого действительного (или комплексного) r справедливо:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \quad \text{где } \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Ряд бесконечен и сходится при $|x| < 1$. Для натурального r ряд конечен и совпадает с обычной биномной теоремой.

41 Gamma function

Гамма-функция $\Gamma(x)$ продолжает факториал на вещественные и комплексные значения:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt,$$

при этом $\Gamma(n) = (n-1)!$ для натуральных n. Рекуррентно: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Гамма-функция играет роль обобщённого факториала во многих формулах.

42 Divide-and-Conquer algorithms analysis using recursion trees

Метод рекурсивных деревьев используется для оценки сложности рекурсивных алгоритмов вида

$$T(n) = a\,T\Big(\frac{n}{b}\Big) + f(n).$$

Строят дерево рекурсии: на i-м уровне a^i узлов, каждый параметром n/b^i и затратами $f(n/b^i)$. Суммарное время

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i\, f\Big(\frac{n}{b^i}\Big).$$

Сравнивая вклад каждого уровня, можно определить асимптотику $T(n)$.

43 Master theorem

Рассматривается рекуррент

$$T(n) = a\,T\Big(\frac{n}{b}\Big) + f(n),$$

где $a \ge 1$, $b > 1$ и $f(n)$ положительная функция. Тогда:

- Если $f(n) = O\big(n^{\log_b a - \varepsilon}\big)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\big)$.
- Если $f(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\log^k n\big)$ для некоторого $k \ge 0$, то $T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\log^{k+1} n\big)$.
- Если $f(n) = \Omega\big(n^{\log_b a + \varepsilon}\big)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и при этом $a\,f(n/b) \le c\,f(n)$ для некоторого $c < 1$ при достаточно больших n, то $T(n) = \Theta(f(n))$.

44 Akra–Bazzi method

Обобщение Мастер-теоремы для более сложных рекуррент:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i\,T(b_i x + g_i(x)) + f(x),$$

где $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $g_i(x) = O\big(x/\log^2 x\big)$, $f(x)$ неотрицательна. Сначала решают уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\, b_i^p = 1$$

относительно $p > 0$. Тогда оценка даётся формулой

$$T(x) = \Theta\Big(x^p\Big(1 + \int_1^x \frac{f(u)}{u^{p+1}}\,du\Big)\Big).$$

Этот метод позволяет получать асимптотику рекуррентных соотношений, где аргументы рекурсии уменьшаются неравномерно.