曲线积分

Ⅰ型曲线积分

对称性

- 平面曲线类似二重积分
- 空间曲线类似三重积分

Ⅰ型曲线积分计算

- 利用参数方程转换为定积分计算

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$I = \int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

- 几何意义：以L为底以$f(x,y)$为高的柱面面积，即曲线积分可以用来求取截面面积

Ⅱ型曲线积分

Ⅱ型曲线积分计算

- 利用参数方程转换成定积分计算，Ⅱ型计算时要求方向必须为$\alpha \to \beta$

$$I = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t) \cdot x'(t) + y(x(t),y(t) \cdot y'(t)]dt$$

两类曲线积分的联系

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (Pcos\alpha + Qcos\beta)ds$$

$$其中 cos\alpha = \pm \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}，\ cos\beta = \pm \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

格林公式

公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

- 利用格林公式要求曲线闭合，可以添加辅助线使用格林公式，但是需要减去添加的曲线所产生的曲线积分

平面曲线积分与路径无关

- 第一个等价形式

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

- 第二个等价形式，$du=Pdx+Qdy$，$u(x,y)$为一个原函数，且要求

$$u(s,t)=\int_{(x_0,y_0)}^{(s,t)}Pdx+Qdy$$

曲面积分

I 型曲面积分

对称性

- 类似于三重积分
- 具有轮转对称性

I 型曲面积分计算

- 将z转换为x，y的函数，变成二重积分计算

$$I=\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

Ⅱ型曲面积分

与 I 型曲面积分的联系

$$\iint\limits_{\Omega} Pdxdz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Omega} (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)dS$$

Ⅱ型曲面积分计算

- 注意方向确定正负，以xoy面举例如下，与轴方向相同为正、相反为负：

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

高斯公式

公式内容

$$\oiint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dv$$

散度（div）

- 实数

$$\vec{A} = (P,Q,R)$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度（rot）

- 向量

$$\vec{A} = (P,Q,R)$$

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = ((R_y - Q_z),(P_z - R_x),(Q_x - P_y))$$