1. Shapley 值方法的公理化解释、合理性与局限性

1.1 公理化解释

Shapley 值方法是合作博弈论中一个核心的解概念，它为每个参与者分配一个收益，这个分配是基于一组公理化的公平性原则。这些公理确保了分配方案的合理性和公正性。

- **可加性**
  - 解释：设有两个合作博弈 (N, v) 和 (N, w)，其中 N 是参与者集合，v 和 w 是特征函数。如果我们将这两个博弈合并成一个新的博弈 (N, v + w)，其中 (v + w)(S) = v(S) + w(S) 对于所有 S ⊆ N，那么每个参与者 i 在合并后的博弈中的 Shapley 值应该等于他们在原始博弈中的 Shapley 值之和。
  - 意义：这个公理保证了当一个复杂的问题可以分解为几个简单的问题时，我们可以分别计算每个简单问题的解，然后将它们组合起来得到原问题的解。这大大简化了计算。
- **对称性**
  - 解释：如果两个参与者 i 和 j 在所有联盟 S 中的贡献相同，即对于所有包含 i 但不包含 j 的联盟 S，有 v(S ∪ {j}) = v(S)，那么 i 和 j 应该获得相同的 Shapley 值。换句话说，如果两个参与者是“可互换的”，那么他们应该得到相同的报酬。
  - 意义：这个公理保证了如果两个参与者在博弈中扮演相同的角色，那么他们应该得到相同的待遇。这是公平性的一个基本要求。
- **有效性**
  - 解释：所有参与者获得的 Shapley 值之和应该等于整个参与者集合 N 的总收益，即 ∑i∈N φi(v) = v(N)。换句话说，所有收益应该被完全分配给参与者，没有剩余。
  - 意义：这个公理保证了博弈中产生的所有收益都会被参与者分享，没有浪费。这是一个合理性要求，因为它避免了资源的浪费。
- **哑参与者公理**
  - 解释：如果一个参与者 i 对任何联盟 S 的贡献都是 0，即对于所有包含 i 的联盟 S，有 v(S) = v(S \ {i})，那么这个参与者应该获得 0 的 Shapley 值。换句话说，一个对博弈没有任何贡献的参与者不应该获得任何收益。
  - 意义：这个公理保证了只有真正对博弈有贡献的参与者才能获得收益。这是一个基本的公平性原则。

1.2 合理性

Shapley 值方法的合理性在于它提供了一个公平、合理且唯一的解决方案，用于在合作博弈中分配收益。

- **公平性**：Shapley 值考虑了每个参与者对所有可能形成的联盟的边际贡献。这意味着，一个参与者最终获得的收益，是他对所有可能形成的联盟的“平均贡献”。这种平均化的思想，最大限度地减少了任意性和不公平性。每个参与者都是根据其“真实价值”来获得收益的。
- **唯一性**：Shapley 证明了满足上述四个公理的分配方案是唯一的。这意味着，在所有可能的分配方案中，Shapley 值是唯一符合所有公平性原则的方案。这个唯一性极大地增加了 Shapley 值方法的可信度和说服力。
- **广泛适用性**：Shapley 值方法可以应用于各种类型的合作博弈，只要这些博弈可以用特征函数来描述。例如，它可以用来分配合资企业的利润、分摊合作项目的成本，或者在政治联盟中分配权力。这种广泛的适用性使得 Shapley 值成为合作博弈论中一个重要的分析工具。

1.3 局限性

- **计算复杂性**：计算 Shapley 值需要考虑所有可能的联盟，即 2^n 个联盟。当参与者的数量 n 很大时，计算量会呈指数级增长，这使得计算变得非常困难，甚至在计算上不可行。在实际应用中，对于大规模的合作博弈，可能需要使用近似算法或简化模型来计算 Shapley 值。
- **信息需求**：Shapley 值方法需要知道所有联盟的收益，即需要知道特征函数 v 的完整信息。在实际问题中，获得所有联盟的收益可能非常困难，甚至是不可能的。例如，在一些复杂的经济活动中，企业可能不愿意透露其合作行为的收益信息。
- **可能不符合实际**：Shapley 值方法是基于一组公平性公理的，但这些公理并不总是与现实世界的实际情况完全吻合。在某些情况下，Shapley 值方法给出的分配方案可能不符合实际情况。例如，当参与者之间的权力不对称，或者某些联盟比其他联盟更稳定时，Shapley 值方法可能无法准确地反映实际的分配结果。

2.1 $w(|S|)$ 理解

$$w(|S|) \;=\; \frac{|S|!\,\bigl(n-|S|-1\bigr)!}{n!}$$

2.1含义：

在所有 $n!$ 种玩家排列（每一种都是等可能的）中，恰好有 $|S|$ 个玩家排在玩家 1 之前、而剩下的 $n-|S|-1$ 个玩家排在玩家 1 之后的排列数是

$$|S|!\,\bigl(n-|S|-1\bigr)!,$$

因此把它除以总排列数 $n!$，就得到了“玩家 1 前面恰有 $|S|$ 个玩家”这一事件发生的概率，也就是我们平时在 Shapley 值中给“前置联盟” S 一个权重时所用的 $w(|S|)$。

2.2 证明

要证明

$$\sum_{\substack{S\subseteq I\\ 1\in S}} w\big(|S|\big) \;=\; 1.$$

令 $k = |S|$，由于玩家 1 必定在联盟中，其它 $k-1$ 个成员可以从剩下的 $n-1$ 个玩家中任意选出，所以包含玩家 1 且规模为 k 的联盟数是

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{S\subseteq I\\ 1\in S}} w\big(|S|\big) \;&=\; \sum_{k=1}^{n}\Big(\text{联盟规模} = k \text{ 时的子集数}\Big) \times \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!}\\ &=\; \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!}.\end{aligned}$$

而

$$\binom{n-1}{k-1}(k-1)!\,(n-k)! = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\,(k-1)!\,(n-k)! = (n-1)!.$$

所以每一项都等于

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

共有 $k = 1, 2, \ldots, n$ 共 n 项，和就是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = 1.$$

结论得证。