敛散性判定

基本方法

1. 必要条件判定：若 $lim u_n \neq 0$，则级数发散
2. 通过比值法/根值法判定$\sum |u_n|$
   i. 收敛 ⇒ 绝对收敛
   ii. 发散 ⇒ 发散
3. 若比值/根值=1，通过其他方法（比较审敛法、极限形式比较审敛法、有界法、莱布尼茨判别法等）判定$\sum u_n$
   i. 收敛 ⇒ 条件收敛
   ii. 发散 ⇒发散
4. 收敛+发散 ⇒ 发散

判别法

1. 正项级数——比值/根值法：$0 \leqslant \rho \leqslant 1$，收敛；反之发散
2. 交错级数——莱布尼茨判别法：若$\{u_n\}$递减，且$lim u_n = 0$，则级数收敛

重要级数

1. 等比级数

$$s = \frac{首项}{1-q}$$

1. p-级数

$$\sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1，收敛 \\ p \leqslant 1，发散 \end{cases}$$

$$\sum \frac{ln(n)}{n^p} \begin{cases} p > 1，收敛 \\ p \leqslant 1，发散 \end{cases}$$

$$\sum \frac{1}{n \cdot ln^p n} \begin{cases} p > 1，收敛 \\ p \leqslant 1，发散 \end{cases}$$

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1，绝对收敛 \\ 0 \leqslant p \leqslant 1，条件收敛 \end{cases}$$

幂级数

求收敛半径

1. 比值法/根值法求得ρ，再利用$R = \frac{1}{\rho}$求得收敛半径
2. 缺项时，使用函数项级数求收敛域的方法
   i. 取绝对值，变为正项级数
   ii. $\rho(x) = lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$或$lim\sqrt[n]{u_n}$
   iii. $\rho(x) \leqslant 1$确定收敛半径/域
   iv. 若是确定收敛域，需要判定边界处的敛散性
3. Abel定理：分界点
   i. 条件收敛点
   ii. 绝对值相同的两点，一个收敛一个发散

和函数

1. 化为等比级数（积分/求导/极限可与求和交换次序计算）
2. 利用幂级数展开式
3. 注意：要求“$x \epsilon 收敛域$”

函数展开为幂级数

常用间接法，即借助麦克劳林级数，如下：

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n, \ \ x\epsilon(-1,-1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n, \ \ x\epsilon(-1,-1)$$

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}, \ \ x\epsilon(-\infty,+\infty)$$

$$sinx = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \ x\epsilon(-\infty,+\infty)$$

$$cosx = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \ x\epsilon(-\infty,+\infty)$$

$$ln(1+x) = \sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ \ x\epsilon(-1,1]$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n，\ x\epsilon(-1,1)$$

傅里叶级数

傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum (a_n cos \frac{n\pi x}{l} + b_n sin \frac{n\pi x}{l})$$

展开为傅里叶级数/正余弦级数

1. 周期延拓
2. 画图
3. 找间断点
4. 公式代入（a_0单独求）

正余弦级数

$$\sum b_n sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n cos \frac{n\pi x}{l}$$

求某点值

1. 不是间断点，直接带入原函数
2. 是间断点，求平均值