二重积分

直角坐标系下的计算

X型区域

• 若 $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$,则

$$\int \int \int f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{arphi_1(x)}^{arphi_2(x)} f(x,y) dy$$

• "先y后x"

Y型区域

• 若 $c \leqslant y \leqslant d$, $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$,则

$$\int \int \limits_{D} f(x,y) dx dy = \int \limits_{c}^{d} dy \int \limits_{\psi_{1}(y)}^{\psi_{2}(y)} f(x,y) dx$$

交换积分次序——画图

极坐标系下的计算

$$egin{cases} x =
ho ext{cos} heta \ y =
ho ext{sin} heta \ \end{bmatrix} f(x,y) d\sigma = \iint\limits_D f(x,y) dx dy = \iint\limits_D f(
ho cos heta,
ho sin heta)
ho d
ho d heta \ dt$$

穿线法: 确定ρ

• 重要结论

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = rac{\sqrt{\pi}}{2}$$

三重积分

对称性

• Ω 关于xoy面对称,则有以下结论:

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=egin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_{1}}f(x,y,z)dv,\ f(x,y,z)$$
为关于 z 的偶函数 $0,\ f(x,y,z)$ 为关于 z 的奇函数

• 轮换对称性

$$\mathop{\iiint}\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\mathop{\iiint}\limits_{\Omega}f(y,z,x)dv=\mathop{\iiint}\limits_{\Omega}f(z,x,y)dv$$

直角坐标系下的计算

投影法

- 先定积分 (对z) ,再二重积分 (对 D_{xy})
- "穿线法"——先一后二 $(D_{xy}$ 为 Ω 在xoy面上的投影区域)

$$I=\int\limits_{D_{xy}}\int\limits_{Q_{2}(x,y)}^{arphi_{2}(x,y)}f(x,y,z)dz]dxdy$$

截面法

- 先二重积分 (对 D_{xy}) ,再定积分 (对z)
- "穿线法"——先二后一 (D_z 是截面区域)

$$I=\int_{z_1}^{z_2}dz \int \int \limits_{D_z}f(x,y,z)dxdy$$

• 常用情形: 用z=常数去截 Ω , 其中 $\sigma(z)$ 为截面面积

$$\iiint\limits_{\Omega}g(z)dv=\int_{z_1}^{z_2}g(z)\sigma(z)dz$$

• 常用区域:

$$egin{aligned} \circ & z = \sqrt{x^2 + y^2} \,, \; \sigma(z) = \pi z^2 \ \circ & z = x^2 + y^2 \,, \; \sigma(z) = \pi z \ \circ & z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \,, \; \sigma(z) = \pi (1 - z^2) \end{aligned}$$

• 交换积分次序: 等同于两次二重积分交换次序

柱面坐标系下的计算

$$egin{cases} x =
ho cos heta \ y =
ho sin heta \ z = z \end{cases}$$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(
ho cos heta,
ho sin heta, z)
ho d
ho d heta dz = \int_{lpha}^{eta} d heta \int_{
ho_1(heta)}^{
ho_2(heta)}
ho d
ho \int_{z_1(
ho, heta)}^{z_2(
ho, heta)} f(
ho cos heta,
ho sin heta, z) dz$$

球面坐标系下的计算

$$egin{cases} x = r sin arphi \cdot cos heta \ y = r sin arphi \cdot sin heta \ z = r cos arphi \end{cases}$$

$$I=\int_{lpha_1}^{eta_1}d heta\int_{lpha_2}^{eta_2}sinarphi darphi\int_{r_1}^{r_2}f(rsinarphi cos heta,rsinarphi sin heta,rcosarphi)r^2dr$$

重积分应用

空间曲面面积

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_{x}^{2}+f_{y}^{2}}d\sigma$$

质心公式

• 平面物体

$$ar{x} = rac{\iint x \mu(x,y) d\sigma}{m} \ ar{y} = rac{\iint y \mu(x,y) d\sigma}{m}$$

• 空间物体

$$egin{aligned} ar{x} &= rac{\iint\limits_{\Omega} x \mu(x,y,z) dv}{m} \ ar{y} &= rac{\iint\limits_{\Omega} y \mu(x,y,z) dv}{m} \ ar{z} &= rac{\iint\limits_{\Omega} z \mu(x,y,z) dv}{m} \end{aligned}$$