二重积分

直角坐标系下的计算

X型区域

- 若$a \leqslant x \leqslant b$，$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

- “先y后x”

Y型区域

- 若$c \leqslant y \leqslant d$，$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

交换积分次序——画图

极坐标系下的计算

$$\begin{cases} x = \rho\text{cos}\theta \\ y = \rho\text{sin}\theta \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

- 穿线法：确定ρ
- 重要结论

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

三重积分

对称性

- Ω关于xoy面对称，则有以下结论：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv\text{，} f(x,y,z)\text{为关于}z\text{的偶函数} \\ 0\text{，} f(x,y,z)\text{为关于}z\text{的奇函数} \end{cases}$$

- 轮换对称性

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(y,z,x)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(z,x,y)dv$$

直角坐标系下的计算

投影法

- 先定积分（对z），再二重积分（对D_{xy}）
- “穿线法”——先一后二（D_{xy}为Ω在xoy面上的投影区域）

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} [\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dxdy$$

截面法

- 先二重积分（对D_{xy}），再定积分（对z）
- “穿线法”——先二后一（D_z是截面区域）

$$I = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

- 常用情形：用$z=$常数去截Ω，其中$\sigma(z)$为截面面积

$$\iiint\limits_{\Omega} g(z)dv = \int_{z_1}^{z_2} g(z)\sigma(z)dz$$

- 常用区域：
  - $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\sigma(z)=\pi z^2$
  - $z=x^2+y^2$，$\sigma(z)=\pi z$
  - $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\sigma(z)=\pi(1-z^2)$
- 交换积分次序：等同于两次二重积分交换次序

柱面坐标系下的计算

$$\begin{cases} x=\rho cos\theta \\ y=\rho sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho cos\theta,\rho sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho d\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)}f(\rho cos\theta,\rho sin\theta,z)dz$$

球面坐标系下的计算

$$\begin{cases} x=rsin\varphi\cdot cos\theta \\ y=rsin\varphi\cdot sin\theta \\ z=rcos\varphi \end{cases}$$

$$I=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}d\theta\int_{\alpha_2}^{\beta_2}sin\varphi d\varphi\int_{r_1}^{r_2}f(rsin\varphi cos\theta,rsin\varphi sin\theta,rcos\varphi)r^2dr$$

重积分应用

空间曲面面积

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}d\sigma$$

质心公式

- 平面物体

$$\bar{x} = \frac{\iint x\mu(x,y)d\sigma}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y\mu(x,y)d\sigma}{m}$$

- 空间物体

$$\bar{x} = \frac{\underset{\Omega}{\iiint} x\mu(x,y,z)dv}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\underset{\Omega}{\iiint} y\mu(x,y,z)dv}{m}$$

$$\bar{z} = \frac{\underset{\Omega}{\iiint} z\mu(x,y,z)dv}{m}$$