极限与连续

二重极限的计算

1. 一元计算方法
2. 极坐标换元
3. 判定：当不同路径逼近极限不同时，极限不存在

导数与微分

求偏导数

- 多元复合函数：画线，沿线相乘，分线相加
- 隐函数
  - 直接法：直接对所给式子求偏导
  - 公式法

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

  - 微分法：对式子两边微分，从而得到$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$的形式，从而确定偏导数
- 公式

$$\frac{d}{dx}[\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt]=f[b(x)]\cdot b'(x)-f[a(x)]\cdot a'(x)$$

几何应用

- 空间曲线（多数题参数为x本身，其中x=x）

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

  - 切线方程

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t)}$$

  - 法平面方程

$$\varphi'(t)(x-x_0)+\psi'(t)(y-y_0)+\omega'(t)(z-z_0)=0$$

- 空间曲面

$$F(x,y,z)=0$$

  - 法向量方程

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

  - 切平面方程

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

  - 法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$$

- 方向导数（实数）和梯度（向量）
  - 方向导数

$$gradf=(f_x,f_y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=f_x(x_0,y_0)\cdot cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cdot cos\beta$$

$$(cos\alpha,cos\beta)=\frac{1}{\left|\vec{l}\right|}\vec{l}$$

  - 梯度
    - 方向导数沿梯度方向最大，大小等于梯度的模

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}_{max}=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$$

极值

- 求极值
  - 极值点：驻点（$f'=0$）或不可导点
  - 极值充分条件：二阶偏导连续，(x_0,y_0)为驻点，且$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$
    - $AC-B^2>0$，取得极值

            - $A > 0$，极小值
            - $A < 0$，极大值
        - $AC - B^2 < 0$，不是极值点
        - $AC - B^2 = 0$，无法确定
    - 拉格朗日（G为约束条件）

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda G(x,y,z)$$

$$\begin{cases} F_x(x_0,y_0,z_0,\lambda) = 0 \\ F_y(x_0,y_0,z_0,\lambda) = 0 \\ F_z(x_0,y_0,z_0,\lambda) = 0 \\ F_\lambda(x_0,y_0,z_0,\lambda) = 0 \end{cases}$$