一、核武器竞赛

1. 模型假设与符号

- 甲、乙起始各有核弹 x 和 y 枚；
- 双方发射后，剩余核弹分别为随机变量

$$X \sim \mathrm{Binomial}\big(x,\, p(y)\big), \quad Y \sim \mathrm{Binomial}\big(y,\, q(x)\big),$$

  其中 $p(y)$ 是“每枚甲方核弹在乙方打击下生存”的概率函数（关于乙方打击强度的单调递减函数），$q(x)$ 同理；
- 甲方希望

$$P\big(X \geq m\big) \;\geq\; \alpha, \quad m \in \mathbb{N},\, \alpha \in (0,1)$$

  乙方同理：

$$P\big(Y \geq n\big) \;\geq\; \beta.$$

2. 由 “尾部概率” 导出无差别曲线

以甲方为例，

$$P(X \geq m) = \sum_{k=m}^{x} \binom{x}{k} \big[p(y)\big]^k \big[1 - p(y)\big]^{\,x-k} \;\geq\; \alpha.$$

将其看作甲方的无差别曲线方程，在平面 (x, y) 上定义：

$$F(x,y) \;=\; \sum_{k=m}^{x} \binom{x}{k} p(y)^k \big[1 - p(y)\big]^{x-k} \;-\; \alpha \;=\; 0.$$

同理乙方的无差别曲线为

$$G(x,y) = \sum_{\ell=n}^{y} \binom{y}{\ell} q(x)^{\ell} \big[1 - q(x)\big]^{y-\ell} - \beta = 0.$$

- 这里，函数 $p(y)$ 与 $q(x)$ 可根据射击命中率、拦截率等物理参数具体选型（如指数衰减、线性衰减等）。
- 无差别曲线分隔了“安全区”（概率$\geq \alpha$）与“不安全区”（概率$< \alpha$）。

3. 安全区域的存在性

- 当 $x \to \infty$ 或 $y \to \infty$ 时，若 $p(y)$ 不太靠近 0，则尾部概率会趋 1；
- 当 $y \to \infty$，甲方“被打击”的强度极强，$p(y) \to 0$，则 $P(X \geq m) \to 0$;
- 由连续性（对整数可近似看作连续）和边界行为，曲线必将从左上伸向右下，形成一个凸或凹的界面，从而安全区（满足两式）必有非空交集，条件是参数 (m, α, n, β) 不“对立”得过于强烈（比如同时要求甲方和乙方都拥有极高的生存概率，但彼此初始弹数都很少，则无解）。
- 给定具体的 $p(y)$ 和 $q(x)$，可在 (x, y) 网格上计算上述两条曲线并描图;
- 标出满足

$$\begin{cases} F(x,y) \geq 0, \\ G(x,y) \geq 0, \end{cases}$$

  的点集，即为“双方都满意的安全区域”。

二、战争模型

1. 纯正规 vs. 纯游击回顾

- **正规作战** 通常假设双方火力、兵力和补给按线性或二次方衰减，产生方程如 $\dot{A} = -c_B\, B,\ \dot{B} = -c_A\, A$（李特尔-洛克斯模型）。
- **游击作战** 则强调非对称打击，模型中常见幂函数或对数项来表达打击效率随兵力/地形的非线性关系。

2. 混合作战模型讨论

设甲、乙双方分别投入正规兵力 R_A, R_B 和游击兵力 G_A, G_B。可构造混合式损耗模型：

$$\begin{cases} \dot{R}_A = -\left(a_1\, R_B + b_1\, G_B\right) R_A, \\ \dot{G}_A = -\left(a_2\, R_B + b_2\, G_B\right) G_A, \\ \dot{R}_B,\ \dot{G}_B \text{ 同理。} \end{cases}$$

- 其中 a_1, a_2, b_1, b_2 是正规／游击对正规／游击的交叉作战效率参数。
- 分别求出两方正规与游击兵力随时间的解析解（或数值解），并可考察不同时刻正规 vs. 游击的“临界优势”转移。

3. 柯布-道格拉斯型函数引入

为了给不同作战形式下的“综合战力”做统一评估，一般可用 **柯布-道格拉斯型函数**：

$$S_A = R_A^{\alpha}\, G_A^{1-\alpha}, \qquad S_B = R_B^{\alpha}\, G_B^{1-\alpha}, \quad \alpha \in [0,1].$$

- 当 $\alpha \to 1$ 时，重正规兵力；$\alpha \to 0$ 时，重游击兵力。
- 该函数具有常规模型的“规模报酬”含义：若 R_A, G_A 同比放大，战力也同比放大。
- 在混合作战动态模型中，可将 $(R_A(t), G_A(t)) \mapsto S_A(t)$，同理得 $S_B(t)$，再套用经典正规作战模型（如下），得到统一的作战损耗方程。

$$\dot{S}_A = -\,k_B\, S_B, \quad \dot{S}_B = -\,k_A\, S_A,$$