问题 1

当给团体i分配一个额外席位时，其每席位代表人数从 $\frac{p_i}{n_i}$ 变为$\frac{p_i}{n_i+1}$。分配后，绝对不公平的减少量为：

$$\Delta a_i = \frac{p_i}{n_i} - \frac{p_i}{n_i + 1} = \frac{p_i}{n_i(n_i + 1)}$$

为了最大化每次分配席位时减少的绝对不公平，应选择Δa_i最大的团体分配席位。因此，定义Q_i为：

$$Q_i = \frac{p_i}{n_i(n_i + 1)} \quad (i = 1,2, \dots, m)$$

每次增量席位分配给当前Q_i值最大的团体。具体步骤如下：

1. 初始化每个团体已分配的席位数 n_i。
2. 计算所有团体的 Q_i。
3. 将下一个席位分配给Q_i最大的团体。
4. 更新该团体的 $n_i \to n_i + 1$，并重复步骤 2-3，直到所有席位分配完毕。

问题 2

目标： 1. 单调性：总席位数增加时，每个团体的席位数不减； 2. 上下取整约束：每个团体的席位数在比例分配值的上下取整之间。

解决：

1. 计算理想席位：对于总席位数 s，总选民数 $P = \sum_{i=1}^{m} p_i$，每个团体 i 的理想席位为：

$$q_i = s \cdot \frac{p_i}{P}$$

2. 初始分配下取整：初始分配每个团体 i 的席位为 $n_i = \lfloor q_i \rfloor$，剩余席位数为：

$$r = s - \sum_{i=1}^{m} \lfloor q_i \rfloor$$

3. 分配剩余席位：将剩余席位分配给 $q_i - \lfloor q_i \rfloor$（即小数部分）最大的前 r 个团体。

4. 确保单调性：当总席位数从 s 增加到 $s+1$ 时：

   - 计算新的理想席位 $q'_i = (s+1) \cdot \frac{p_i}{P}$。
   - 每个团体的席位下限为原席位数 n_i，上限为 $\lceil q'_i \rceil$。
   - 初始分配 $n'_i = max\left(\lfloor q'_i \rfloor, n_i\right)$，确保不减少原席位。
   - 若此时 $sum\left(n'_i\right) < s+1$，将剩余席位按小数部分从大到小分配给满足 $n'_i < \lceil q'_i \rceil$ 的团体。

问题 3

1. 单层热传导：根据傅里叶定律，单位时间单位面积的热量 $Q = \frac{k\Delta T}{d}$，其中 k 为导热系数，d 为厚度，ΔT 为温差。

2. 多层串联热阻：每层的热阻 $R_i = \frac{d_i}{k_i}$，总热阻为各层热阻之和：

$$R_{total} = \sum_{i=1}^{m} R_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{k_i}$$

3. 总热量计算：稳态下，通过各层的热量相同，总热量为：

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{total}} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{k_i}}$$

4. 单位时间单位面积的热传导量为：

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{k_i}}$$