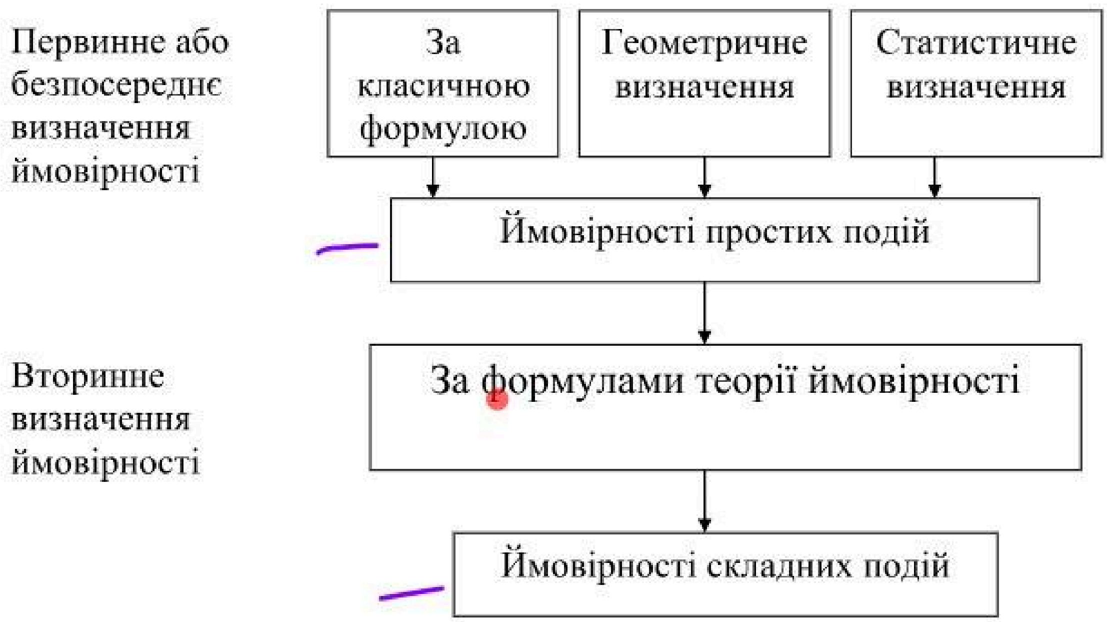
ЛЕКЦІЇ МАРІКА З ТЙ

1 лекція (6 вересня) ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ЗА КЛАСИЧНОЮ ФОРМУЛОЮ



Слайд 7

ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ЗА КЛАСИЧНОЮ ФОРМУЛОЮ

Класична формула була запропонована в 18-му столітті в Італії. Вона підходить для відносно вузького класу випадкових подій.

Умови коректності використання класичної формули:

- Кількість можливих подій можна порахувати і позначити через ***n***.

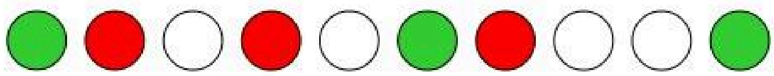
- Всі можливі події **рівноймовірні**.

- Подія, ймовірність якої визначає накриває підмножину всіх можливих подій, кількість елементарних подій в цій підмножині можна порахувати і позначити через ***m<n***.

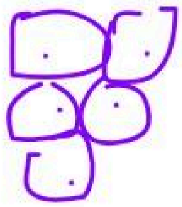
Тоді за класичною формулою ймовірність p події визначається у вигляді:

$$p = \frac{m}{n}$$

Приклад 1. В урні знаходиться 10 куль: 4 білих, 3 червоних і 3 зелених. Визначити ймовірність того, що вибрана куля виявиться червоною ?



$\boldsymbol{n} = 10 \qquad \boldsymbol{m} = 3 \qquad p = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0.3$



Основним елементом успішного розв'язання задач на класичну формулу є володіння **комбінаторикою**.

Комбінаторика. як наука, що надає методи вирішення задач:

- обрахування кількості варіантів:

- **організації перебору варіантів** - має велике значення для успішної роботи програміста

Формально існує багато формул комбінаторики, але для їх застосування потрібне комбінаторне мислення.

Формули множення та додавання в комбінаториці :

1) Якщо ситуацію можна розглядати як таку, що складається з складових, причому для кожного варіанту першої складової існують всі варіанти другої складової, то загальна кількість варіанті визначається **добутком** числа варіантів першої складової та кількість можливих варіантів другої складової.

Приклад: Два гравці кидають по гральній кістці. Перший може викинути **6** варіантів, а другий - **6** варіантів. Загальна кількість - $\mathbf{6 \cdot 6 = 36}$

2) Якщо ситуацію можна представити як АБО наявності певних ознак, то в разі взаємного виключенні цих ознак загальна кількість варіантів обчислюється як **сума** варіантів кожної з ознак.

Приклад: В урні є **3 червоних кулі**, **2 сині кулі**, **4 зелені кулі** та **3 фіолетових**.

Скільки існує варіантів вибрати **червону** або **зелену** кулю.

$$\mathbf{3} + \mathbf{4} = 7$$

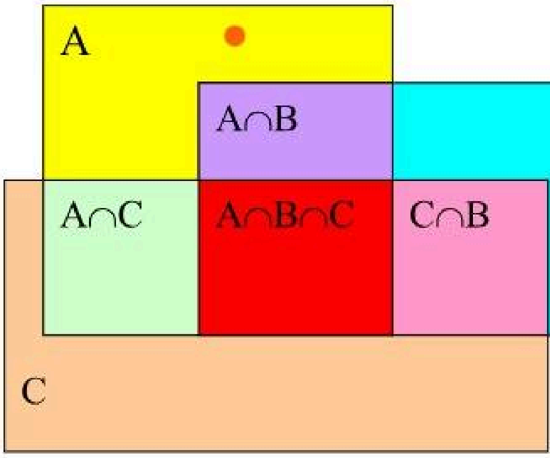
Якщо одна ознака не виключає іншу, то застосовується **формула включення-виключення**.

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕННЯ-ВИКЛЮЧЕННЯ

Формула включення-виключення

Для комбінаторних розрахунків дуже корисна **формула включення-виключення**.

Ідея формули полягає в наступному. Якщо є три множини А, В та С і вони можуть перетинатися, то ситуація може бути ілюстрована наступним чином:



Якщо через $|X|$ позначити кількість елементів множини X, то

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Класична задача з дитячої книжки 3: В бою приймали участь **100** піратів, **40** втратили руку, **30** втратили ногу, **40** втратили око, **20** втратили руку і ногу, **15** втратили руку і око, **15** втратили ногу і око, **10** втратили руку, ногу і око. Скільки піратів залишились неушкодженими ?

Слайд 13.

Кількість перестановок ***k*** предметів становить ***k*!**. Це означає, що при переході від ситуації коли порядок елементів важливий до ситуації коли він не важливий – кількість варіантів зменшується в ***k*!** раз.

Приклад 6. Широко відомою є така задача на написання рекурсивних програм: Є 6 фішок двох кольорів і два пустих місця. Допускається переставляти пари сусідніх фішок, не змінюючи їх порядку. Потрібно за найменшу кількість кроків поставити на початку жовті, а потім зелені.

Y	G	Y	G	Y	G		

Y	Y	Y	G	G	G		

В ході рекурсії може виникнути зациклення, тому потрібно пам'ятати всі пройдені позиції. Для виділення пам'яті потрібно оцінити **кількість можливих положень фішок**.

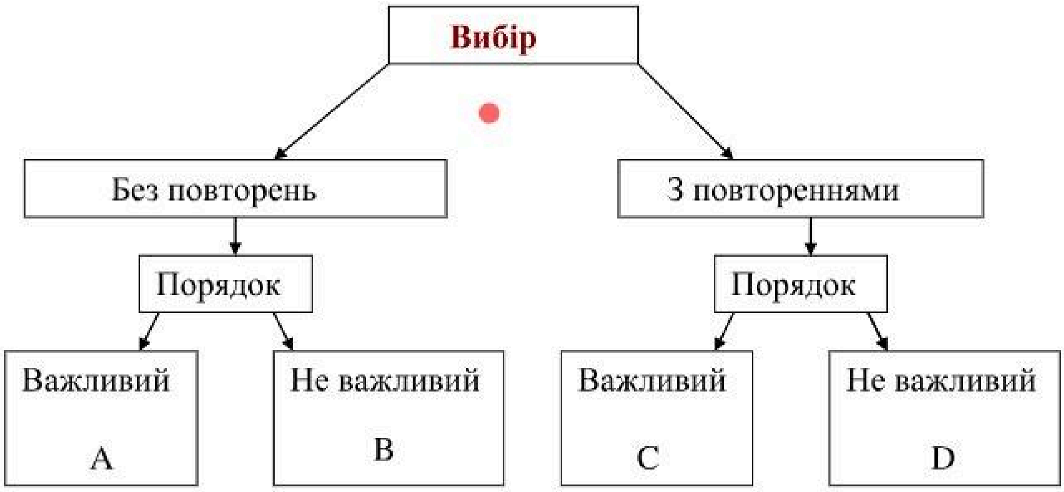
+8
−2

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}$$

Слайд 15

Комбінаторика вибору

Є $\boldsymbol{n}$ типів предметів. Вибирається з них $\boldsymbol{r}$ предметів.



$$\frac{n!}{(n-r)!} \qquad \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} \qquad n^r \qquad \frac{(n+r-1)!}{r!\cdot(n-1)!}$$

Приклад 8. Визначити ймовірність того, что в байті кільсть одиниць більша за кількість нулів

Приклад : **0 1 1 0 1 0 1 1**

2 лекція (13 вересня) ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ЗА КЛАСИЧНОЮ ФОРМУЛОЮ

Критерії формування цифр номера формули :

1. Пусті групи не допускаються (1)
2. Кількість елементів в групах не відомо (1)
3. Порядок груп не важливий (1)
4. Порядок елементів в групі не важливий (1)

1000 - пусті групи не допускаються (1)
- кількість елементів в групах відомо (0)

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$$

- порядок груп важливий (0)
- порядок елементів в групах важливий (0)

Приклад: 4 пілоти займають місця в двохмісних учбових літаках Л-39 та Leonardo

$$D_1 = n\,!$$

1001

$$D_2 = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

Приклад: 4 студента, що здають лабораторні роботи розподіляються на 2 бригади, одна з яких здає в середу, а друга в п'ятницю.

1010 $$D_3 = \frac{n!}{r!}$$

1011 $$D_4 = \frac{n!}{r! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

0100 $$D_5 = \frac{(n + r - 1)!}{(r - 1)!}$$

1100 $$D_6 = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot \frac{(n + r - k - 1)!}{n!}$$

0101 $$D_7 = r^n$$

Задача про Ханойські вежі Формула $D_7 = r^n = 3^4 = 81$

1101 $$D_8 = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot (r - k)^n$$

1110 $$D_9 = \frac{1}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot \frac{(n + r - k - 1)!}{n!}$$

1111 $$D_{10} = \frac{1}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot (r - k)^n$$

0110 $$D_{11} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(r - j)!} \cdot \sum_{k=0}^{r-j-1} (-1)^k \cdot \binom{r - j}{k} \cdot \frac{(n + r - k - j - 1)!}{n!}$$

0111 $$D_{12} = \sum_{j=0}^{r-1} D_{10}(n, r - j) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(r - j)!} \cdot \sum_{k=0}^{r-j-1} (-1)^k \cdot \binom{r - j}{k} \cdot (r - j - k)^n$$

Якщо є події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ які не можуть трапитися одночасно, але одна з них обов'язково трапляється, то такі події утворюють **повну групу**: сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$\sum_{j=1}^{n} P(H_j) = 1$$

Розв'язок 8. Нехай вибрали спочатку одного, а потім другого. Ймовірність того, що них співпадуть дні народження становить $\frac{1}{365}$. Відповідно, ймовірність того, що не співпадуть – дорівнює $1-\frac{1}{365}$. Візьмемо третього: ймовірність, того, що його день народження співпаде з першим або другим становить $\frac{2}{365}$. Ймовірність, що не співпаде - $1-\frac{2}{365}$. Тоді ймовірність, що нема співпадінь дня народження першого та другого і третього з першим та другим становить: $P_2 = (1-\frac{1}{365})\cdot(1-\frac{2}{365})$

Аналогічно, ймовірність, що ***t*** студентів мають різні дні народження становить:

$$(1-\frac{1}{365})\cdot(1-\frac{2}{365})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{t-1}{365}).$$

Ймовірність протилежної події – що хоча б два студенти з t мають однаковий день народження становить:

$$P = 1-(1-\frac{1}{365})\cdot(1-\frac{2}{365})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{t-1}{365})$$

При t =30, ця ймовірність становить **0.706**.

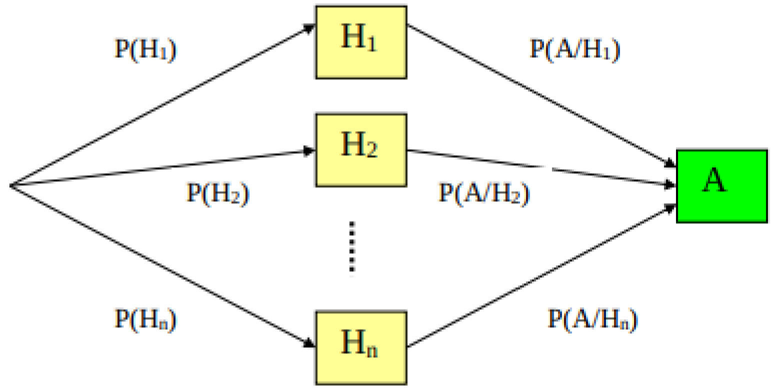
3 лекція (20 вересня) ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

ЛЕКЦІЯ 3

Слайд 1.

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Модель повної ймовірності розглядає здійснення події А після однієї з подій повної групи: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ які в цьому контексті трактуються як гіпотези.



Формула повної ймовірності: $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j)$$

Приклад 1: Згідно зі статистичних даних розподіл людей по групам крові однаковий по всім регіонам світу і становить:

Першу групу крові має – **18**% населення

Другу групу крові має - **23**% населення

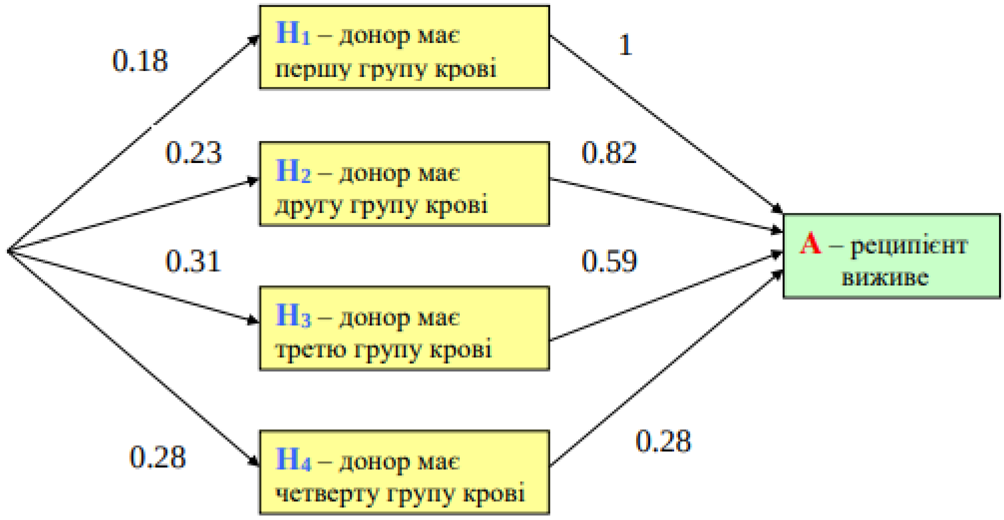
Третю групу крові має - **31**% населення

Четверту групу крові має – **28**% населення.

При переливання кров донора першої групи підходить всім реципієнтам, кров донора другої групи підходить всім реципієнтам, крім тих, у кого перша група. Кров третьої групи підходить реципієнтам, що мають третю і четверту групи; кров четвертої групи підходить тільки реципієнтам з такою ж групою крові. Визначити ймовірність того, що кров випадкового донора **Анастасії** підійде випадковому реципієнту Максиму.

Слайд 2

Розв'язок 1. Маємо таку схему подій:



$P(A) = 0.18 \cdot 1 + 0.23 \cdot 0.82 + 0.31 \cdot 0.59 + 0.28 \cdot 0.28 = \mathbf{0.63}$

Анастасія ⇒ Максим **ОК**

Анастасія ⇒ Олександр ?

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Слайд 3

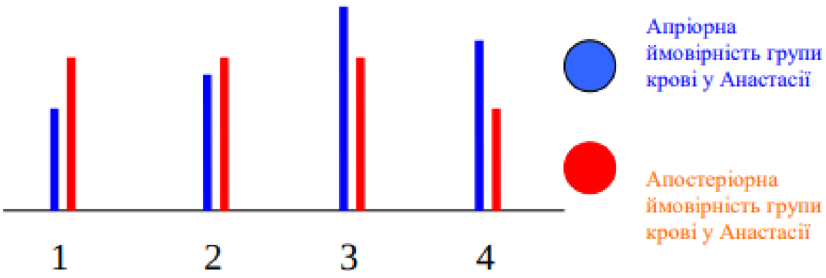
Формула Байеса (формула апостеріорної ймовірності)
Дозволяє визначити апостеріорну ймовірність гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$: $P(H_1/A)$, $P(H_2/A), \ldots, P(H_n/A)$ за умови, що трапилася подія А.

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,n\} : P(H_j / A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A/H_j)}{P(A)}$$

Приклад 2 . Після переливання крові від донора **Анастасії** до реципієнта Максима він вижив і почувається добре. Визначити апостеріорну ймовірність того, що у **Анастасії** перша, друга, третя та четверта групи крові.

Слайд 4

Розв'язок 2. Інтуїтивно факт виживання реципієнта після переливання збільшує ймовірність того, що у **Анастасії** перша або друга група крові і зменшує ймовірність того, що у нього третя чи четверта групи.



За формулою Байеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{0.18 \cdot 1}{0.63} = \mathbf{0.286} \qquad P(H_2 / A) = \frac{0.23 \cdot 0.82}{0.63} = \mathbf{0.3}$$

$$P(H_3 / A) = \frac{0.31 \cdot 0.59}{0.63} = \mathbf{0.29} \qquad P(H_4 / A) = \frac{0.28 \cdot 0.28}{0.63} = \mathbf{0.124}$$

Приклад 3. Після успішного переливання крові **Анастасії** Микиті і відновлення стану здоров'я здійснюється переливання крові від **Анастасії** до Олександра. Яка ймовірність, що для Олександра ця операція закінчиться успішно ?

Слайд 5

Розв'язок 3.

Використовується формула повної ймовірності, для якої ймовірності гіпотез становлять:

$P(H_1) = 0.286$ $P(H_2) = 0.3$ $P(H_3) = 0.29$ $P(H_4) = 0.124$

$P(A/H_1) = 1$ $P(A/H_2) = 0.82$ $P(A/H_3) = 0.59$ $P(A/H_3) = 0.28$

$$P(A) = 0.286 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.82 + 0.29 \cdot 0.59 + 0.124 \cdot 0.28 = 0.73782$$

Якщо операція по переливанню крові Олександру пройшла успішно, то за формулою Байеса апостеріорні ймовірності групи крові у **Анастасії**:

$P(H_1/A)$	$P(H_1/A)$	$P(H_1/A)$	$P(H_1/A)$
0.39	**0.33**	**0.23**	**0.04**

Ймовірність успішності третьої операції по переливанню крові від **Анастасії** до Дмитра по формулі повної ймовірності дорівнює **0.81**

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Слайд 6

Формула Бернуллі

Модель Бернуллі: здійснюється n дослідів в кожному з яких може зі ймовірністю p трапитися подія. Нас цікавить ймовірність P_m того, що трапиться рівно m подій, де $0 \le m \le n$:

$$P_m = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Приклад 4. Визначити ймовірність того, що при 5-х підкиданнях гральної кісти рівно 2 рази випаде шістка.

Розв'язок 4: n=5, m=2, p = 1/6.

$$P_2 = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.16$$

Слайд 7

Приклад 5. Мисливець має **3** патрони, ймовірність влучання в качку за багаторічною статистикою складає **0.7.** Визначити ймовірність того, що мисливець не матиме жодного трофею, заб'є одну качку, дві качки, і три качки.

m = 0 : $P_0 = C_3^0 \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^3 = \dfrac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot 1 \cdot 0.3^3 = 0.027$

m = 1 : $P_1 = C_3^1 \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^2 = \dfrac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.189$

m = 2 : $P_2 = C_3^2 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.441$

m = 3 : $P_3 = C_3^3 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^0 = \dfrac{3!}{3! \cdot 1!} \cdot 0.7^3 \cdot 1 = 0.343$

ФОРМУЛА СТІРЛІНГА

Слайд 8

При великих значеннях ***n*** для обчислень по формулі Бернуллі часто використовують формулу Стірлінга, яка зводить обчислення факторіалів до обчислення степені:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$$

Приклад 6. Визначити ймовірність того, що при підкиданні монети герб випаде 50 раз.

Розв'язок 6: ***n***=100, ***m*** =50, ***p*** = ½

За формулою Бернуллі:

$$P_{50} = C_{100}^{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \frac{100!}{50! \cdot 50! \cdot 2^{100}} = \frac{100^{100} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 100} \cdot e^{50} \cdot e^{50}}{e^{100} \cdot 50^{50} \cdot 50^{50} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 2^{100}} =$$

$$= \frac{2^{100} \cdot 50^{100} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 100}}{50^{100} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 2^{100}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} = 0.08$$

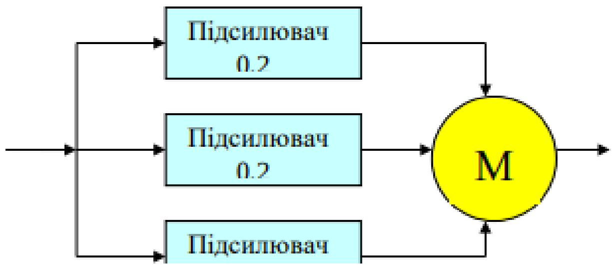
Приклад 7. Потрібно передавати байт по USB на відстань 30 метрів. Ймовірність помилкової передачі одного біту становить **0.004**. Є два варіанти організації передачі: просто передавати байт або використовувати код Хеммінга, який передбачає передачу 12-ти бітів (тобто є ще 4 надлишкових) і дозволяє виправляти помилку одного біту. Визначити ймовірність правильної передачі байту в обох варіантах.

Слайд 9

Розв'язок 7. При простій передачі байту він вважається переданим правильно, якщо не виникне помилки при передачі жодного з 8-ми бітів. Ймовірність цього становить $(1\text{-}0.004)^8 = 0.996^8 =$ **0.9684**. При передачі кода Хеммінга байт приймається правильно, якщо всі 12 бітів передані правильно, або один із 12-ти бітів спотворено.

$$P_2 = (1\text{-}0.004)^{12} + 12\cdot 0.004\cdot(1\text{-}0.004)^{11} = 0.953 + 0.046 = \mathbf{0.999}.$$

Приклад 8. При прокладенні оптоволоконного кабелю по дну океану через кожні 300 кілометрів на дно кидають вузол підсилення сигналів. Вузол, як і сам кабель, розрахований на 10 років роботи. Вузол підсилення сигналів складається з 3-х підсилювачів, виходи яких підключені до мажоритарного елементу. В кожен момент часу всі три підсилювачі мають видавати однакові сигнали. Ймовірність того, що за 10 років один підсилювач поламається становить 0.2. При поломці вихід підсилювача зі ймовірністю **0.7** “залипає” на нулі (тобто весь час видає нуль) і з ймовірністю **0.3** “залипає” в одиниці (тобто постійно видає одиницю). Визначити ймовірність правильної роботи вузла підсилення протягом 10 років.



Слайд 10

Розв'язок 8. Вузол нормально працює в таких ситуаціях:
1. Всі три підсилювачі справні.

$P_0 = (1 - 0.2)^3 = 0.512$

2. Один підсилювач вийшов з ладу, а два інших справні

$P_1 = C^1_3 \cdot 0.2 \cdot 0.8^2 = 0.384$

3. Поламалися два підсилювача, але в протифазі: один "залип" в нулі, а інший – в одиниці.

$P_2 = C^2_3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8 \cdot \mathbf{2 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = \mathbf{0.04}$

Ймовірність функціонування вузла:

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0.512 + 0.384 + 0.04 = \mathbf{0.936}$$

ФОРМУЛА ПУАССОНА

Слайд 12.

Формула Пуассона

Існує ще одна формула для визначення ймовірності того, що трапиться рівно m подій. Особливістю цієї формули є те, що вона використовується за умов, коли значення $\boldsymbol{n}$ та $\boldsymbol{p}$ не задано, а натомість відоме середнє значення a подій в серії. Тобто, можна говорити, що значення a акумулює в собі значення $\boldsymbol{n}$ та $\boldsymbol{p}$. Формула Пуассона:

$$P_m = \frac{1}{m!} \cdot e^{-a} \cdot a^m$$

Приклад 10. В книжці **200** сторінок. При наборі робиться, в середньому, 1 помилка на сторінку. Якщо на якійсь сторінці знайдеться більше **4**-х помилок, то книга бракується. Знайти ймовірність, що книга буде забракована.

Слайд 13.

Розв'язок 10.

Ймовірність, що на сторінці помилок **0**: $P_0 = \frac{1}{0!} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = 0.3679$

Ймовірність, що на сторінці помилок **1**: $P_1 = \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = 0.3679$

Ймовірність, що на сторінці помилок **2**: $P_2 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = 0.1839$

Ймовірність, що на сторінці помилок **3**: $P_3 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = 0.0613$

Ймовірність, що на сторінці помилок **4**: $P_4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = 0.0153$

Сума = 0.99634 - ймовірність того, що на одній сторінці не більше 4-х помилок

Для всієї книги (200 сторінок) : 0.99634^{200} = **0.48**

Приклад 11. За 20 років з 1875-1894 в 14-ти кавалерійських корпусах Німеччини вбито копитом 196 солдат. Визначити ймовірність, що в корпусі протягом року загине хоча б один солдат від удару копита.

Слайд 14

Розв'язок 11. В середньому за рік в кавалерійському корпусі гинуло від удару копита 196/280 = 0.7. Відповідно, ***a***=0.7. Ймовірність того, що жодного солдата (***m***=0) не загине за формулою Пуассона:

$$P_0 = \frac{1}{0!} \cdot e^{-0.7} \cdot 0.7^0 = \frac{1}{e^{0.7}} = 0.496$$

Приклад 12. Пекарський автомат випікає 40 булочок з родзинками. Скільки потрібно закласти в автомат родзинок, щоб з ймовірністю **0.99** в булочці була хоча б одна родзинка ?

Слайд 15.

Розв'язок 12. Середня кількість родзинок в булочці – ***a***. Задана ймовірність того, що в булочці не буде жодної родзинки становить **0.01.**
Тому за формулою Пуассона:

$$P_0 = \frac{1}{0!} \cdot e^{-a} \cdot a^0 = \frac{1}{e^a} = 0.01$$

Відповідно, $e^a = \frac{1}{0.01} = 100$. Звідси ***a*** = ln(100) = 4.6. Тобто, для того, щоб у кожній булочці була хоча б одна родзинка з ймовірністю 0.99, в ній має бути, в середньому, **4.6** родзинок. Відповідно, в автомат потрібно загрузити 4.6·40 = **184** родзинки.

Схема моделювання випадкових подій

Задана ймовірність події – ***p***. Генерається випадкове число ***r***: $0 \le r \le 1$.
Якщо $r \le p$, то вважається, що подія відбувається.

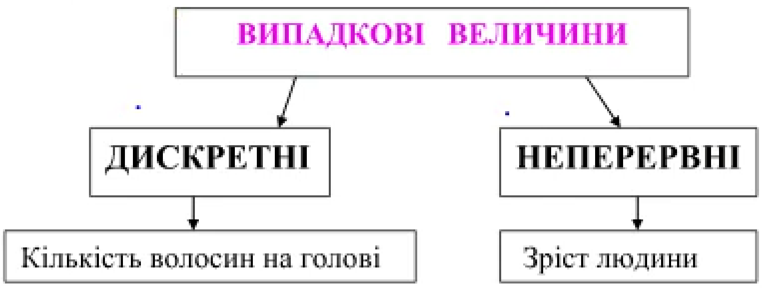
4 лекція (27 вересня) ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Слайд 1.

ЛЕКЦІЯ 4

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадкова величина – це величина, яка приймає випадкове, тобто не відоме досліднику, значення.



Слайд 2

ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Дискретні випадкові величини задаються законом розподілу. Закон розподілу дискретної випадкової величини кожному її значенню співставляє ймовірність того, що випадкова величина дорівнює цьому значенню.

Закон розподілу

ВИЗНАЧАЄТЬСЯ

ТАБЛИЦЕЮ

ФОРМУЛОЮ АБО РОЗРАХУНКАМИ

ПРИКЛАД

X_i	p_i
16	0.05
17	0.3
18	0.5
19	0.1
20	0.03
21	0.02

2

$$P_x = C_n^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Біноміальний закон розподілу

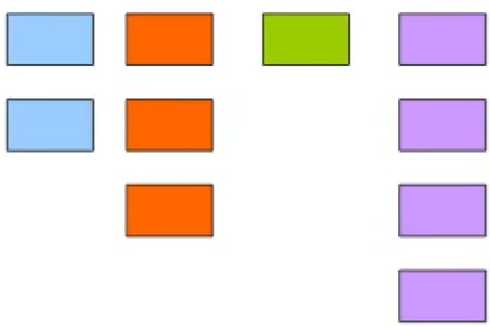
Загальна властивість:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

Слайд 3

Приклад дискретної випадкової величини, яка задається розрахунками

В кишені є 2 купюри по 5 гривень, 3 купюри по 10 гривень, 1 купюра 20 гривень і 4 купюри по 50 гривень.



Випадкова величина – це вартість купюри, яка випадково виймається із кишені.

X	P
5	**0.2**
10	**0.3**
20	**0.1**
50	**0.4**

Слайд 4

Інтегральна форма представлення закону розподілу

Інтегральний закон розподілу дискретної випадкової величини кожному її значенню спів ставляє ймовірність того, що випадкова величина **не більше** цього значення.

П Р И К Л А Д

j	X_j	P
1	5	0.2
2	10	0.3
3	20	0.1
4	50	0.4

Інтегральне представлення F(X)

j	X_j	F
1	5	0.2
2	10	0.5
3	20	0.6
4	50	1

Обчислення ймовірностей по заданому закону:

Ймовірності того, що випадкова величина дорівнює X_j :

$$p_x = P(X_j) \quad = F(X_j) - F(X_{j-1}) \text{ якщо } \; j > 2 = F(X_j) \text{ якщо } \; j = 1$$

Ймовірності того, що випадкова величина знаходиться в діапазоні:

$$p(X_i \le x \le X_j) = \sum_{k=i1}^{j} P(X_k) \quad = F(X_j) - F(X_{i-1})$$

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Слайд 5

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Математичне очікування - m_x

$$m_x = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p_i$$

Для біноміального розподілу $n=3$, $p=0.7$

X	P_x
0	0.027
1	0.189
2	0.441
3	0.343

$$m_x = 0\cdot 0.027 + 1\cdot 0.189 + 2\cdot 0.441 + 3\cdot 0.343 = \mathbf{2.1}$$

Для гри зі співпадінням трійки цифр в номері паспорту

X	P_x
-5	0.996
300	0.004

$$m_x = -5\cdot 0.996 + 300\cdot 0.004 = -3.78$$

Фізичний сенс математичного очікування випадкової величини – її середнє значення

2. Дисперсія - D_x

$$D_x = \sum_{j=0}^{n}(x_j - m_x)^2 \cdot p_j = \sum_{j=0}^{n} x_j^2 \cdot p_j - m_x^2$$

Приклад

Для біноміального розподілу n=3, p=0.7

X	P_x
0	**0.027**
1	**0.189**
2	**0.441**
3	**0.343**

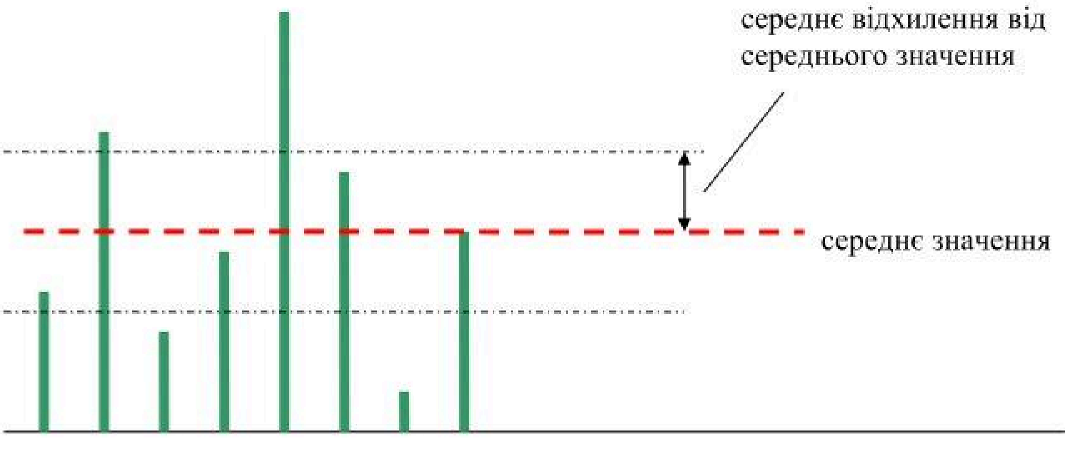
$m_x =$ **2.1**

$$D_x = 0^2 \cdot 0.027 + 1^2 \cdot 0.189 + 2^2 \cdot 0.441 + 3^2 \cdot 0.343 - 2.1^2 = \mathbf{0.63}$$

3. Середньоквадратичне відхилення σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad \sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0.63} = \mathbf{0.794}$$

Фізичний сенс середньоквадратичного відхилення випадкової величини
– це середнє відхилення від середнього значення.



Слайд 8.

ПРИКЛАДИ ТИПОВИХ ЗАДАЧ НА ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Приклад 3. Є дві дискретні випадкові величини **X** і **У** заданих таблицями розподілу:

X	P_x
0	**0.2**
2	**0.3**
4	**0.4**
6	**0.1**

У	P_y
1	**0.3**
3	**0.4**
5	**0.3**

Визначити ймовірність того, що **Y > X**

Слайд 9

Розв'язок 3.

		Y		
		1	**3**	**5**
X	**0**	$0.2\cdot0.3=0.06$	$0.2\cdot0.4=0.08$	$0.2\cdot0.3=0.06$
	2	$0.3\cdot0.3=0.09$	$0.3\cdot0.4=0.12$	$0.3\cdot0.3=0.09$
	4	$0.4\cdot0.3=0.12$	$0.4\cdot0.4=0.16$	$0.4\cdot0.3=0.12$
	6	$0.1\cdot0.3=0.03$	$0.1\cdot0.4=0.04$	$0.1\cdot0.3=0.03$

Сума ймовірностей всіх можливих ситуацій дорівнює одиниці.

$$P(Y>X) = 0.06 + 0.08 + 0.12 + 0.06 + 0.09 + 0.12 = \mathbf{0.53}$$

Приклад 4 Зловмисник пробує розбити вуличний ліхтар. Ймовірність влучання – 0.4. Визначити математичне очікування кількості камінців, які при цьому використовуватимуться.

Слайд 10

Розв'язок 4. Ймовірність в першій спробі досягти успіху становить p=0.4.

Ймовірність, того, що потрібно 2 спроби дорівнює $(1-p)\cdot p$, ймовірність того, що знадобиться рівно три спроби становить $(1-p)^2\cdot p$. Таким чином, ймовірність того, що випадкова величина (кількість кидань) дорівнює j становить $(1-p)^{j-1}\cdot p$. Відповідно, математичне очікування m_x кількості спроб визначається наступним чином:

$$m_x = \sum_{j=1}^{\infty} j\cdot(1-p)^{j-1}\cdot p = p\cdot\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot(1-p)^{j-1} = p\cdot\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

Сума геометричної прогресії:

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$$

Диференціал суми геометричної прогресії: $\frac{ds}{dq} = \sum_{j=1}^{\infty} j\cdot q^{j-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

Приклад 5. В кишені лежить 2 купюри по **50** гривень, 3 купюри по **100** гривень, одна купюра **500** гривень. Виймаються дві купюри. Визначити математичне очікування більшої з двох витягнутих купюр.

Слайд 11

Розв'язок 5

1. Ймовірність що найбільшою буде купюра **50** гривень: $p_{50} = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

2. Ймовірність що максимальною буде купюра **100** гривень:
   - 2.1. Перша **100**, а друга **50**
   - 2.2 Перша **100** і друга **100**
   - 2.3 Перша **50**, а друга **100**

$$p_{100} = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$$

3. Ймовірність що максимальною буде купюра **500** гривень:

$$p_{500} = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$$

Перевірка: $p_{50} + p_{100} + p_{500} = \frac{1}{15} + \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = 1$

Математичне очікування: $m = \frac{1}{15}\cdot(1\cdot 50 + 9\cdot 100 + 5\cdot 500) = 230$

Слайд 12.

Схема моделювання випадкових подій

Задана ймовірність події – p. Генерається випадкове число r: $0 \le r \le 1$. Якщо $r \le p$, то вважається, що подія відбувається.

Генерація дискретних випадкових величин на комп'ютері

Зазвичай для генерації дискретних випадкових величин використовують таблицю **інтегрального** розподілу.

Таблиця розподілу

X	p
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
:	:
:	:
x_n	p_n

Таблиця інтегрального розподілу

X	F
x_1	F_1
x_2	F_2
x_3	F_3
:	:
:	:
x_n	1

$$P_j = \sum_{i=1}^{j} p_i$$

Генерується за допомогою вбудованого генератора випадкове число r :
$0 \le r \le 1$. В таблиці інтегрального розподілу знаходиться максимальне j для якого $F_j \le r$ (тобто таке j, що $F_{j+1} > r$). Значення x_j являє собою число, розподілене за заданим законом.

Слайд 13.

Приклад генерація дискретних випадкових величин на комп'ютері

Потрібно згенерувати 4 числа, які мають біноміальний закон розподілу з параметрами: n=3, p=0.7

Припустимо, що вбудований генератор видає такі числа r_1=0.2 , r_2=0.96, r_3 = 0. 6, r_4 = 0.34.

Які числа будуть згенеровані ?

Слайд 14

Таблиця розподілу	
X	***p***
0	**0.027**
1	**0.189**
2	**0.441**
3	**0.343**

Таблиця інтегрального розподілу	
X	***P***
0	**0.027**
1	**0.216**
2	**0.657**
3	**1**

$r_1 = 0.2$ $x_1 = 1$
$r_2 = 0.96$ $x_2 = 3$
$r_3 = 0.6$ $x_3 = 2$
$r_4 = 0.34$ $x_4 = 2$

Слайд 15

Якщо дискретна випадкова величина підпорядкована біноміальному закону, тобто відомі значення ***n*** та ***p***, то можна вивести формули для прямого визначення:

1. **Математичного очікування**:

$$m_x = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{i=0}^{n} i \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-1} = n \cdot p$$

Наприклад, для n=3, p=0.7 : $m_x = 3 \cdot 0.7 =$ **2.1**

2. **Дисперсії**:

$$D_x = \sum_{i=0}^{n} i^2 \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-1} - (n \cdot p)^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Наприклад, для n=3, p=0.7 : $D_x = 3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 =$ **0.63**

3. **Середньоквадратичного відхилення**:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Наприклад, для n=3, p=0.7 : $\sigma_x = \sqrt{3 \cdot 0.7 \cdot (1-0.7)} = \sqrt{0.63} =$ **0.794**

5 лекція (4 жовтня) НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Слайд 1. **ЛЕКЦІЯ 5**

НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Неперервні випадкові величини можуть приймати нескінченну множину значень, відповідно:

1. Ймовірність того, що неперервна величина X приймає якесь конкретне значення дорівнює нулю.

2. Можна визначити лише ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення у певних проміжках. Наприклад $P(0<X<5)$.

Основною характеристикою неперервної випадкової величини x є закон її розподілу, який задається функцією $f(x)$ щільності розподілу.

Теоретично значення функції $f(X)$ щільності розподілу випадкової величини x в точці X визначається формулою:

$$f(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(X \le x \le X + \Delta X)}{\Delta X}$$

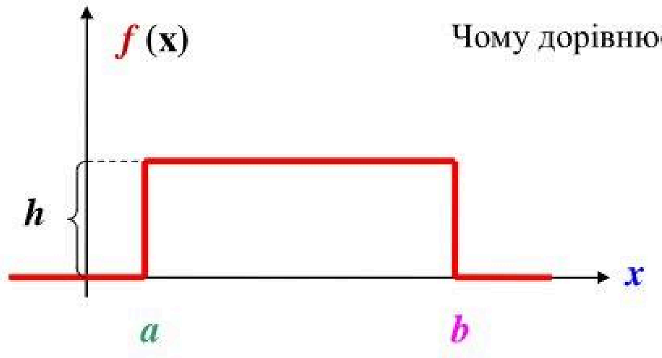
РІВНОМІРНИЙ РОЗПОДІЛ

Слайд 3

Рівномірний розподіл

Припустимо, що неперервна випадкова величина x приймає з рівною ймовірністю будь-які значення в інтервалі від a до b. Причому, кількість можливих значень величини x дорівнює **нескінченості**.

Тоді логічно припустити, що функція $f(x)$ щільності розподілу приймає однакове значення на всьому інтервалі від a до b і дорівнює нулю за її межами. Тобто графік функції $f(x)$ має такий вигляд:



Чому дорівнює висота h ?

Якщо $a=1$ і $b=5$, то чому дорівнює ймовірність, що величина x лежить в інтервалі від **3** до **5** ?

Слайд 5

Функцію ***f***(***x***) щільності розподілу випадкової величини ***x*** іноді називають **диференційною** функцією розподілу.

Інтегральна функція розподілу ***F(X)*** визначається як ймовірність того, що випадкова величина менша за ***X***, тобто:

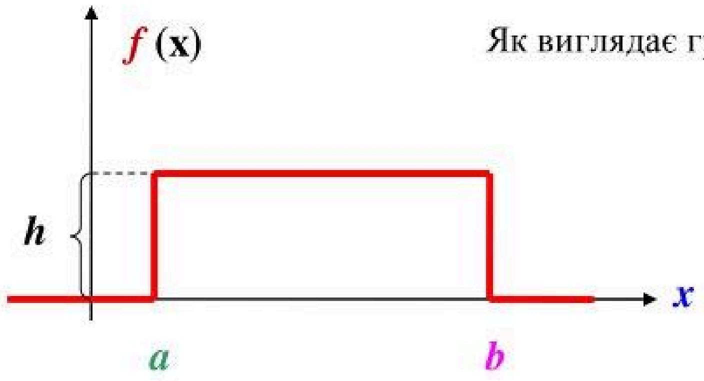
$$F(X) = P(-\infty \le x \le X) = \int_{-\infty}^{X} f(x) \cdot dx$$

Чому дорівнює ***F***(**-∞**) ? ***F***(**∞**) ?

Ймовірність знаходження випадкової величини ***x*** в інтервалі від А до В можна визначити через інтегральну функцію розподілу **F**(**x**)

$$P(A \le X \le B) = F(B) - F(A)$$

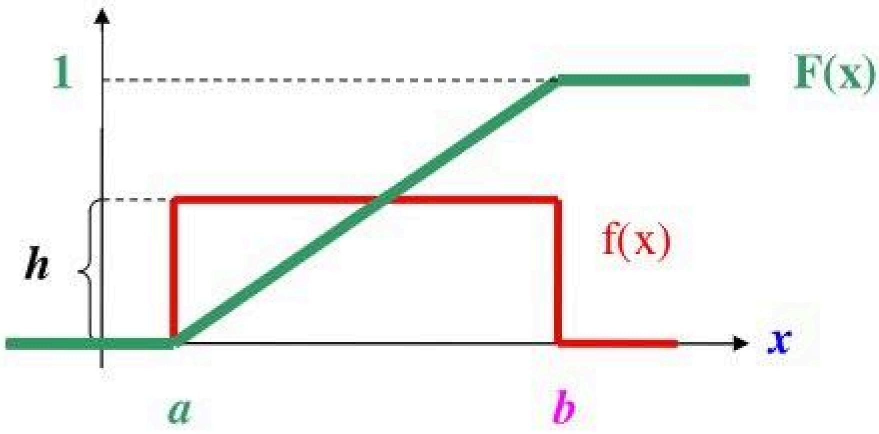
Як аналітично виглядає інтегральна функція **F(x)** для рівномірно розподіленої неперервної випадкової величини в інтервалі від ***a*** до ***b*** та як виглядає її графік ?



Як виглядає графік **F(x)** ?

Слайд 6

$$F(X)=\int\limits_{-\infty}^{X} f(x)\cdot dx = h\cdot\int\limits_{a}^{X} dx = \frac{1}{b-a}\cdot(X-a)$$



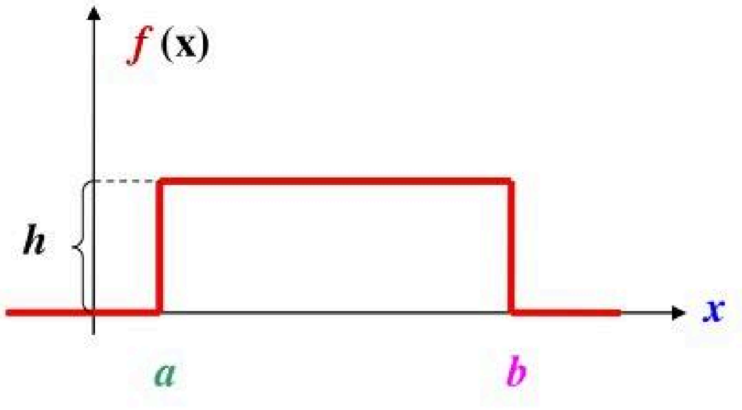
Слайд 7

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Математичне очікування - m_x

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

Приклад. Визначити математичне очікування неперервної випадкової величини $\boldsymbol{x}$ рівномірно розподіленої в інтервалі від $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$.



Слайд 8

Математичне очікування неперервної випадкової величини ***x*** рівномірно розподіленої в інтервалі від ***a*** до ***b*** визначається наступним чином:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b x \cdot h \cdot dx = h \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Фізичний сенс математичного очікування випадкової величини – її середнє значення

2. **Дисперсія** неперервної випадкової величини - D_x

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - m_x^2$$

Приклад. Визначити **дисперсію** неперервної випадкової величини ***x*** рівномірно розподіленої в інтервалі від ***a*** до ***b***.

Слайд 9

Дисперсія неперервної випадкової величини ***x*** рівномірно розподіленої в інтервалі від ***a*** до ***b*** визначається наступним чином:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - m_x^2 = h \cdot \int_a^b x^2 \cdot dx - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2 + a \cdot b + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3. Середньоквадратичне відхилення σ_x : $\sigma_x = \sqrt{D_x}$

Для неперервної випадкової величини ***x*** рівномірно розподіленої в інтервалі від ***a*** до ***b*** середньоквадратичне відхилення становить:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Слайд 10

Генерація неперервних чисел, рівномірно розподілених в інтервалі від *a* до *b*

Задано : параметри ***a* і *b***

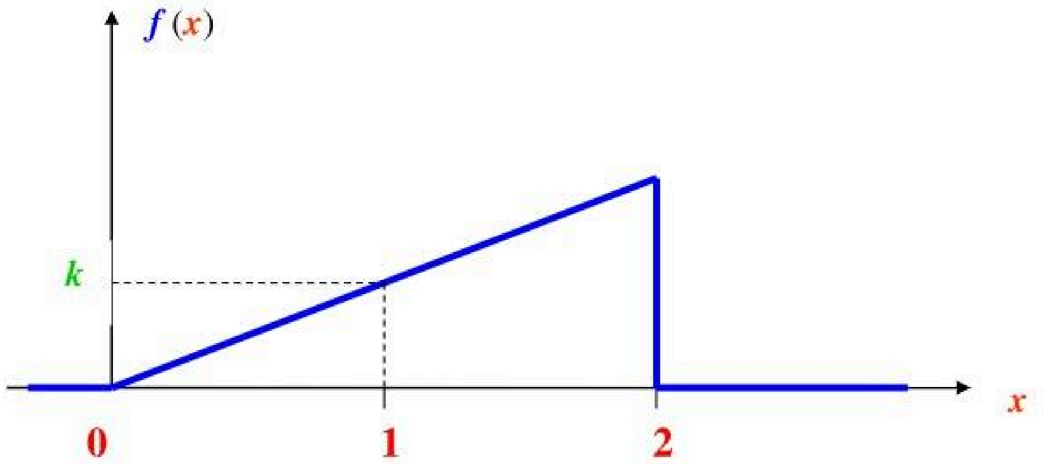
З використанням вбудового генератора випадкових чисел отримати випадкове число ***r* :** $0 \le r \le 1$.

Число **X** генерується за формулою**:** $X = a + r \cdot (b - a)$

Типові задачі

Приклад 1. Визначити математичне очікування неперервної випадкової величини, закон розподілу якої задається функцією щільності розподілу:

$f(x)=0$ при $x<0$ та $x>2$; при $0 \le x \le 2$: $f(x) = k \cdot x$.



Слайд 11

Розв'язок 1. Визначається чисельне значення ***k***:

$$1 = \int_0^2 k \cdot x \cdot dx = k \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 = k \cdot 2 \quad \text{відповідно} \quad k = 0.5$$

Математичне очікування:

$$m_x = \int_0^2 x \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_0^2 x^2 \cdot dx = k \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{6} = \mathbf{1.33}$$

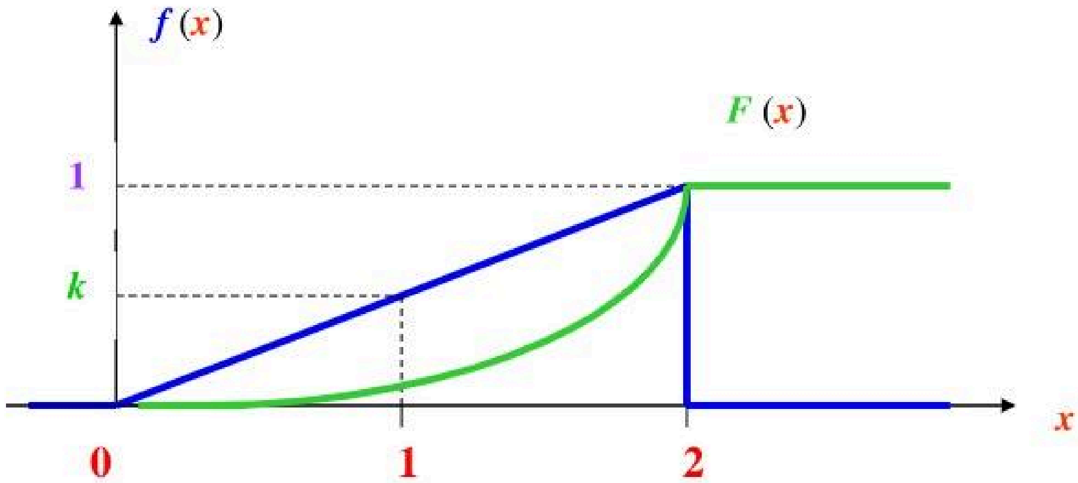
Визначити інтегральну функцію $F(x)$ розподілу:

$f(x)=0$ при $x<0$ та $x>2$; при $0 \le x \le 2$: $f(x) = k \cdot x$.

Слайд 13

При $x \le 0$: $F(x) = 0$; при $x > 2$ $F(x) = 1$; при $0 \le x \le 2$:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{X} k \cdot x \cdot dx = k \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^X = k \cdot \frac{x^2}{2}$$



При $x=2$: $F(x) = 1 \Rightarrow k \cdot \frac{2^2}{2} = 1$ $k = 0.5$

Слайд 14

Дисперсія розподілу:

$f(x)=0$ при $x<0$ та $x>2$; при $0 \le x \le 2$: $f(x) = k \cdot x$.

Загальна формула:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - m_x^2$$

Більш зручно користуватися другою формою формули:

$$D_x = \int_{0}^{2} x^2 \cdot k \cdot x \cdot dx - m_x^2 = \frac{k}{4} \cdot x^4 \Bigg|_0^2 - 1.33^2 = \frac{2^4}{2 \cdot 4} - 1.77 = 0.32$$

Середньоквадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0.32} = 0.565$

Слайд 15

Генерація випадкових величин з заданим законом розподілу

В загальному випадку для комп'ютерної генерації випадкових чисел з заданою функцією щільності розподілу $f(x)$ потрібно розв'язувати інтегральне рівняння:

$$\int_{-\infty}^{X} f(x) \cdot dx = r$$

де: X – те число, яке ми маємо згенерувати, r – число з вбудованого генератора випадкових чисел: $0 \le r \le 1$

Написати формулу для генерації випадкових чисел з законом розподілу: $f(x)=0$ при $x<0$ та $x>2$; при $0 \le x \le 2$: $f(x) = k \cdot x$.

Слайд 16

Формула для генерації випадкових чисел з законом розподілу: $f(x)=0$ при $x<0$ та $x>2$; при $0 \le x \le 2$: $f(x) = k \cdot x$.

Інтегральне рівняння: $\int_{-\infty}^{X} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{X} k \cdot x \cdot dx = \frac{k}{2} \cdot X^2 = \frac{X^2}{4} = r$

Відповідно число X генерується за формулою: $X = 2 \cdot \sqrt{r}$

Наприклад при $r = 0.5$ **X =** $2 \cdot \sqrt{0.5} =$ **1.414**

Слайд 18

$$m_x = \int_0^3 x \cdot f(x) \cdot dx = 0.5 \cdot \int_0^1 x \cdot dx + 0.25 \cdot \int_1^3 x \cdot dx = \frac{0.5}{2} + \frac{0.25}{2} \cdot (9-1) = 1.25$$

Дисперсія:

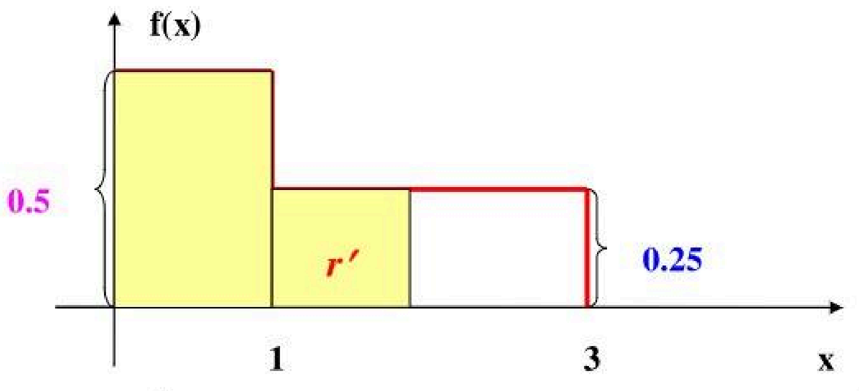
$$D_x = \int_0^3 f(x) \cdot x^2 \cdot dx - m_x^2 = 0.5 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot dx + 0.25 \cdot \int_1^3 x^2 \cdot dx - m_x^2 =$$

$$= \frac{0.5}{3} + \frac{0.25}{3} \cdot (27-1) - 1.25^2 = 2.33 - 1.56 = 0.77$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D_x} = \sqrt{0.77} = 0.88$

Слайд 19

Комп'ютерна генерація багаторівневого рівномірного розподілу



За допомогою вбудованого генератора отримується випадкове $0 \le r \le 1$. Потрібно отримати таке ***g***, щоб площа фігури від 0 до ***g*** дорівнювала ***r***.

Наприклад: ***r* = 0.4** ***g*** = 0.8, тому, що **0.5**·0.8 = **0.4**

r* = 0.7** оскільки ***r >0.5 ***r′* = *r* -** 0.5 = 0.2.

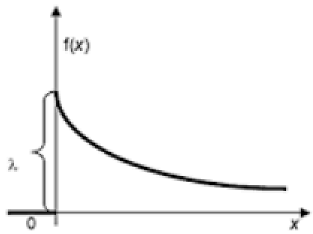
g′ = 0.2/0.25= 0.8, **g** =1+0.8 = **1.8**

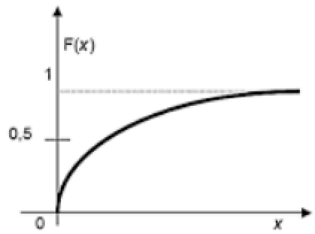
6 лекція (11 жовтня)
ЕКСПОНЕНЦІЙНИЙ РОЗПОДІЛ

Слайд 1

ЕКСПОНЕНЦІЙНИЙ РОЗПОДІЛ

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$





Слайд 2 **Фізичний сенс розподілу**

Система складається з ***n*** вузлів, які працюють. Якщо хоч один вузол поламається, то система виходить з ладу. Нам відомо, що одиницю часу виходять з ладу, в середньому, λ з ***n*** вузлів. Тоді логічно припустити, що за час ***t*** виходять з ладу, в середньому, **λ·*t*** вузлів. За формулою Пуассона, ймовірність того, що за час ***t*** поламається ***m*** вузлів становить:

$$P_m = \frac{1}{m!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (\lambda \cdot t)^m$$

Ймовірність того, що протягом часу ***t*** жоден з вузлів не вийде з ладу, тобто того, що ***m***=0 становить:

$$P_0 = e^{-\lambda \cdot t}$$

Ймовірність того, що система за час ***t*** вийде з ладу:

$$P(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

Експоненційний розподіл описує ймовірність виходу із ладу технічних систем в залежності від часу ***t*** їх роботи.

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \qquad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Слайд 3

Числові характеристики експонеційного розподілу

1. Математичне очікування **m_x**

$$m_x = \int_0^\infty t \cdot f(t) \cdot dt = \lambda \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda}$$

Середній час роботи системи до відмови становить $\frac{1}{\lambda}$

2. Дисперсія:

$$D_x = \lambda \cdot \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. Середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D_x} = \frac{1}{\lambda}$

Слайд 4

РОЗРАХУНКИ НАДІЙНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО РОЗПОДІЛУ

Ймовірність безвідмовної роботи протягом часу часу ***t*** :

$$P(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

λ - інтенсивність відмов, $\frac{1}{\lambda}$ - середній час напрацювання на відмову

Приклад 1. Ноутбук має середній час напрацювання на відмову 36 місяців. Його придбав студент групи ІО-25 при вступі на 1-й курс. Визначити ймовірність того, що комп'ютер поламається на другому курсі.

Слайд 5

Розв'язок 1. Ймовірність того, що ноутбук буде працювати протягом двох років роботи:

$$P(24) = e^{-\lambda \cdot 24} = e^{-\frac{24}{36}} = e^{-0,667} = 0.51$$

Ймовірність того, що ноутбук буде працювати протягом першого року роботи:

$$P(12) = e^{-\lambda \cdot 12} = e^{-\frac{12}{36}} = e^{-0,333} = 0.72$$

Ймовірність того, що ноутбук поламається на 2-му році експлуатації :

$$P(\ 12 \le t \le 24) = 0.72 - 0.51 = 0.21$$

Приклад 2. Ноутбук має середній час напрацювання на відмову 36 місяців. Його придбав студент групи ІМ-21 при вступі на 1-й курс. Рік ноутбук пропрацював безвідмовно. Визначити ймовірність того, що він поламається на другому році навчання.

Слайд 6

Розв'язок 2. Ймовірність того, що ноутбук вийде з ладу на протязі перших двох років роботи:

$$P(24) = 1 - e^{-\lambda \cdot 24} = 1 - e^{-\frac{24}{36}} = 1 - e^{-0,667} = 0.49$$

Ймовірність того, що ноутбук поламається на першому році роботи:

$$P(12) = 1 - e^{-\lambda \cdot 12} = 1 - e^{-\frac{12}{36}} = 1 - e^{-0,333} = 1 - 0.72 = 0.28$$

Апріорна ймовірність того, що ноутбук поламається на 2-му році експлуатації :

$P(\ 12 \le t \le 24) = 0.49 - 0.28 = 0.21$

Ймовірність того, що ноутбук поламається після 1-го року експлуатації :

$P(t\ >12) = 1\text{-}0.28 = 0.72$

Ймовірність того, що ноутбук поламається на 2-му році експлуатації з урахуванням того, що він нормально працював протягом першого року :

$$P'(t \le 24 / t > 12) = \frac{P(12 \le t \le 24)}{P(t > 12)} = \frac{0.21}{0.72} = 0.291$$

Слайд 7.

Якщо система має ***k*** вузлів, для яких задані інтенсивності відмов: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то інтенсивність відмови системи дорівнює сумі інтенсивностей відмови її вузлів:

$$\lambda_C = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$$

Приклад 3. Комп'ютер містить материнську плату, блок живлення, вінчестер. Середній час напрацювання на відмову материнської плати - $170 \cdot 10^3$ годин, блока живлення - $26 \cdot 10^3$ годин, вінчестера - $18 \cdot 10^3$ годин. Визначити середній час напрацювання на відмову комп'ютера.

Слайд 8.

Розв'язок 3 . $\lambda_1 = 1/170 \cdot 10^3 = 5.88 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_2 = 1/26 \cdot 10^3 = 38.4 \cdot 10^{-6}$,
$\lambda_3 = 1/18 \cdot 10^3 = 55.55 \cdot 10^{-6}$. $\boldsymbol{\lambda_c} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 99.83 \cdot 10^{-6}$.
Середній час напрацювання на відмову комп'ютера **$1/\lambda_c$** $= 10^4$ годин.

Слайд 9.

ПОНЯТТЯ ТЕХНІЧНОГО РЕСУРСУ

Технічний ресурс – це час, протягом якого безвідмовної роботи системи гарантується з заданою ймовірністю.

Приклад 4. На літаку Ан-26 встановлено двигуни АІ-24, які мають середній час напрацювання на відмову 15 000 годин.

Визначити ресурс двигуна, який забезпечує ймовірність безвідмовної роботи з ймовірністю 0.9.

Слайд 10

Розв'язок 4. Маємо рівняння: $P(t) = e^{-\lambda t} = 0.9$ Логарифмуємо ліву і праву частини: $-\lambda \cdot t = \ln 0.9 \Rightarrow$

$$t = -\frac{\ln 0.9}{\lambda} = -15000 \cdot (-0.105) = 1575$$

Це означає, що після **1575** годин роботи двигун списується.

Слайд 11

Генерація чисел, розподілених за експоненційним розподілом

Якщо є випадкове число $0 \le r \le 1$ то число q, розподілене за експоненційним розподілом можна отримати з загальної формули генерації випадкових чисел з заданим законом розподілу:

$$r = F(q) = \int_0^q f(t) \cdot dt$$

Тобто: $r = 1 - e^{-\lambda \cdot q}$ звідси $e^{-\lambda \cdot q} = 1 - r = r$

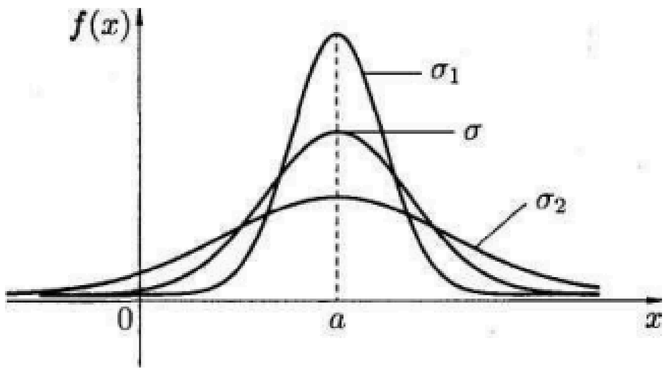
$$q = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln r$$

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, РОЗПОДІЛЕНІ НА НОРМАЛЬНИМ ЗАКОНОМ (Розподілення Гаусса)

Слайд 12.

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, РОЗПОДІЛЕНІ НА НОРМАЛЬНИМ ЗАКОНОМ (Розподілення Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$



Графік функції $f(x)$ щільності нормального розподілу

a – математичне очікування m_x σ- середньоквадратичне відхилення

Слайд 13

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

Слайд 14

Визначення ймовірності знаходження випадкової величини, розподіленої за нормальним законом від заданому інтервалі від ***a*** до ***b***:

$$P(a \le x \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx = \Phi(\frac{b-m_x}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m_x}{\sigma}),$$

де **Ф**(x) – функція Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt$

Значення функції Лапласа можуть бути обчислені:

- з використанням таблиць (при обчисленнях вручну);
- за допомогою чисельного інтегрування (при обчисленні на комп'ютері).

Властивості функції Лапласа:

Ф(0) = 0 **Ф**(- x) = - **Ф**(x) **Ф**(∞) = 0.5

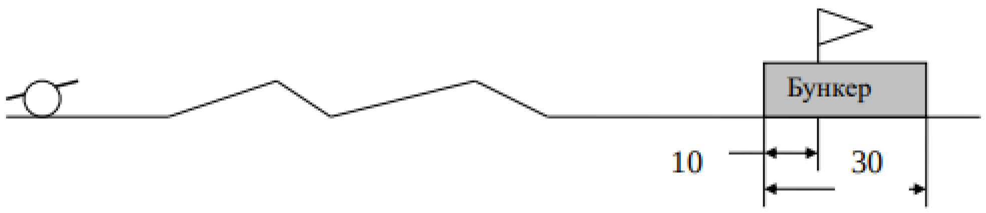
Таблиця значень інтегральної функції Лапласа

Слайд 15 **Таблиця значень інтегральної функції Лапласа**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,49	0,1879	0,98	0,3365	1,47	0,4292
0.01	0.0040	0.50	0.1915	0.99	0.3389	1.48	0.4306
0.02	0.0080	0.51	0.1950	1.00	0.3413	1.49	0.4319
0.03	0.0120	0.52	0.1985	1.01	0.3438	1.50	0.4332
0.04	0.0160	0.53	0.2019	1.02	0.3461	1.51	0.4345
0.05	0.0199	0.54	0.2054	1.03	0.3485	1.52	04357
0.06	0.0239	0.55	0.2088	1.04	0.3508	1.53	0.4370
0.07	0.0279	0.56	0.2123	1.05	0.3531	1.54	0.4382
0.08	0.0319	0.57	0.2157	1.06	0.3554	1.55	0.4394
0.09	0.0359	0.58	0.2190	1.07	0.3577	1.56	0.4406
0.10	0.0398	0.59	0.2224	1.08	0.3599	1.57	0.4418
0.11	0.0438	0.60	0.2257	1.09	0.3621	1.58	0.4429
0.12	0.0478	0.61	0.2291	1.10	0.3643	1.59	0.4441
0.13	0.0517	0.62	0.2324	1.11	0.3665	1.60	0.4452
0.14	0.0557	0.63	0.2357	1.12	0.3686	1.61	0.4463
0.15	0.0596	0.64	0.2389	1.13	0.3708	1.62	0.4474
0.16	0.0636	0.65	0.2422	1.14	0.3729	1.63	0.4484
0.17	0.0675	0.66	0.2454	1.15	0.3749	1.64	0.4495
0.18	0.0714	0.67	0.2486	1.16	0.3770	1.65	0.4505
0.19	0.0753	0.68	0.2517	1.17	0.3790	1.66	0.4515
0.20	0.0793	0.69	0.2549	1.18	0.3810	1.67	0.4525
0.21	0.0832	0.70	0.2580	1.19	0.3830	1.68	0.4535
0.22	0.0871	0.71	0.2611	1.20	0.3949	1.69	0.4545
0.23	0.0910	0.72	0.2642	1.21	0.3869	1.70	0.4554
0.24	0.0948	0.73	0.2673	1.22	0.3888	1.71	0.4564
0.25	0.0987	0.74	0.2703	1.23	0.3907	1.72	0.4573
0.26	0.1026	0.75	0.2734	1.24	0.3925	1.73	0.4582
0.27	0.1064	0.76	0.2764	1.25	0.3944	1.74	0.4591
0.28	0.1103	0.77	0.2794	1.26	0.3962	1.75	0.4599
0.29	0.1141	0.78	0.2823	1.27	0.3980	1.76	0.4608
0.30	0.1179	0.79	0.2852	1.28	0.3997	1.77	0.4616
0.31	0.1217	0.80	0.2881	1.29	0.4015	1.78	0.4625
0.32	0.1255	0.81	0.2910	1.30	0.4032	1.79	0.4633
0.33	0.1293	0.82	0.2939	1.31	0.4049	1.80	0.4641
0.34	0.1331	0.83	0.2967	1.32	0.4066	1.81	0.4649
0.35	0.1368	0.84	0.2995	1.33	0.4082	1.82	0.4656
0.36	0.1406	0.85	0.3023	1.34	0.4099	1.83	0.4664
0.37	0.1443	0.86	0.3051	1.35	0.4115	1.84	0.4671
0.38	0.1480	0.87	0.3078	1.36	0.4131	1.85	0.4678
0.39	0.1517	0.88	0.3106	1.37	0.4147	1.86	0.4686
0.40	0.1554	0.89	0.3133	1.38	0.4162	1.87	0.4693
0.41	0.1591	0.90	0.3159	1.39	0.4177	1.88	0.4699
0.42	0.1628	0.91	0.3186	1.40	0.4192	1.89	0.4706
0.43	0.1664	0.92	0.3212	1.41	0.4207	1.90	0.4713
0.44	0.1700	0.93	0.3238	1.42	0.4222	1.91	0.4719
0.45	0.1736	0.94	0.3264	1.43	0.4236	1.92	0.4726
0.46	0.1772	0.95	0.3289	1.44	0.4251	1.93	0.4732
0.47	0.1808	0.96	0.3315	1.45	0.4265	1.94	0.4738
0.48	0.1844	0.97	0.3340	1.46	0.4279	1.95	0.4744

Слайд 16

Приклад 5. Гармата стріляє по бункеру розміром 30 метрів, на якому, за 10 метрів від краю, встановлено прапор. Приціл здійснюється по прапору. Розліт снаряду по дальності відносно точки прицілювання підпорядкований нормальному закону з середньоквадратичним відхиленням 20 метрів. Визначити ймовірність попадання снаряду в бункер.



Слайд 17

Розв'язок 5. Якщо встановити початок координат в точку прицілювання (точку встановлення прапора), то m=0 , a = -10, b = 20, σ = 20

$$P(a \le x \le b) = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma}) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) + \Phi(0.5) = 0.34 + 0.19 = 0.53$$

Приклад 6.

На полігоні проводяться випробування нової гаубиці. Зроблено 100 пострілів, в результаті яких виявлено, що на робочій дистанції 14 кілометрів, 80% снарядів по дальності не відлітали далі ніж на 30 метрів від точки прицілу. Визначити середньоквадратичне відхилення розльоту снарядів по дальності.

Слайд 18

Розв'язок 6.

$$P(-30 \le x \le 30) = \Phi(\frac{30}{\sigma}) - \Phi(\frac{-30}{\sigma}) = 2 \cdot \Phi(\frac{30}{\sigma}) = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\frac{30}{\sigma}) = 0.4$$

Використовуючи таблицю Лапласа в зворотному напрямку:

$$\frac{30}{\sigma} = 1.28 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \mathbf{23.44}$$

Приклад 7. Зріст чоловіків розподілено нормально з мат. очікуванням 175 та дисперсією 64 см^2. Визначити рівень такий, що 20% чоловіків вищі за цей рівень.

Слайд 19.

Розв'язок 7.

$$P(0 \le x \le h) = \Phi(\frac{h-175}{8}) - \Phi(\frac{0-175}{8}) = \Phi(\frac{h-175}{8}) + \Phi(21.9) = 0.8 =$$

$$= \Phi(\frac{h-175}{8}) + 0.5 = 0.8$$

$$\Phi(\frac{h-175}{8}) = 0.3$$

Використовуючи таблицю Лапласа в зворотному напрямку: $\frac{h-175}{8} = 0.84$

$$h = \mathbf{181.7}$$

Слайд 20.

Комп'ютерна генерація випадкових чисел, розподілених за нормальним законом.

1 метод. З використанням вбудованого генератора отримується 12 рівномірно розподілених випадкових чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{12}$: $0 \le r_j \le 1$.

Обчислюється Y за формулою: $Y = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6$

2 метод. З використанням вбудованого генератора отримується 6 рівномірно розподілених випадкових чисел $r_1, r_2, \ldots, r_6$: $0 \le r_j \le 1$.

Обчислюється Y за формулою: $Y = \sqrt{2} \cdot (\sum_{j=1}^{6} r_j - 3)$

3 метод. З використанням вбудованого генератора отримується 2 рівномірно розподілених випадкових чисел r_1, r_2: $0 \le r_j \le 1$.

Обчислюється Y за формулою: $Y = \sqrt{-2 \cdot \ln r_1} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot r_2)$

Одержання числа за нормальним розподілом (задано m та σ):

$$R = \sigma \cdot Y + m$$

$$\sigma' = \sqrt{D'}$$

7 лекція (18 жовтня) НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ (ГАУСА)

Слайд 1

Л Е К Ц І Я   7

Найбільш важливий у практичному сенсі розподіл неперервних випадкових – **нормальний** (**Гауса**).

Функція щільності розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Обчислення ймовірності:

$$P(a \le x \le b) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2 \sigma^2}} \cdot dx = \Phi(\frac{b - m_x}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - m_x}{\sigma})$$

Приклад 1. Зріст людей чоловічої статі розподілено за нормальним законом з математичним очікуванням **176** см. та дисперсією **64** квадратні сантиметри. Визначити ймовірність того, що перша людина вказаної статі, яку Ви зустрінете буде вища **180** сантиметрів.

Слайд 2. *Розв'язок* 1. Середньоквадратичне відхилення зросту σ - це квадратний корінь дисперсії: $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{64} = 8$. Математичне очікування зросту ***m*=176**, нижня границя величини: ***a* = 180**, верхняя границя зросту ***b* = ∞**

Ймовірність того, що зріст особи чоловічої статі вищий за 180 сантиметрів:

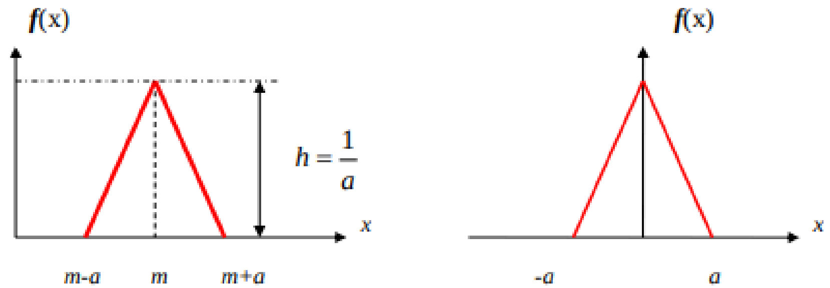
$$P(180 \le x \le \infty) = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{\infty - 176}{8}) - \Phi(\frac{180-176}{8}) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(0.5) = 0.5 - 0.19 = 0.31$$

Випадкові величини розподілені за законом Сімпсона

Слайд 3

Випадкові величини розподілені за законом Сімпсона



Розрахунок ймовірностей можна проводити або через обчислення інтегралу від f(x) або з геометричних міркувань.

Приклад 2. Величина розподілена за законом Сімпсона з параметрами: ***m***=5 і ***a***=4. Визначити ймовірність того, що випадкова величина лежить в інтервалі від 3-х до 6-ти.

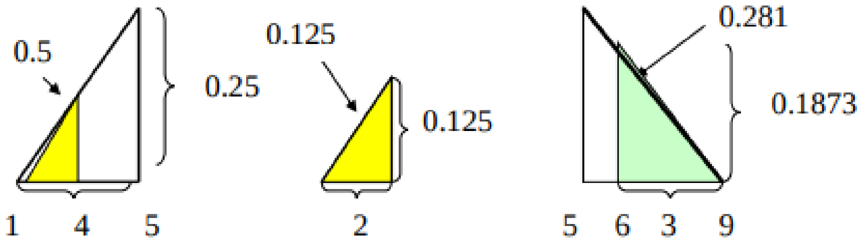
Слайд 5.

Розв'язок 2.

Рівняння лівої прямої розподілу $f_L(x) = 0.0625\cdot x - 0.0625.$

Рівняння правої прямої розподілу $f_R(x) = 0.5625 - 0.0625\cdot x.$

$$P(3 \le x \le 6) = \int_3^5 f_L(x)\cdot dx + \int_5^6 f_R(x)\cdot dx = 0.0625\cdot\left(\frac{x^2}{2}\Big|_3^5 + x\Big|_3^5\right) + 0.5625\cdot x\Big|_5^6 - 0.0625\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_5^6 = 0.6$$



$P(3\le x\le 6) = 0.5 - 0.125 + 0.5 - 0.281 =$ **0.6**

Слайд 5.

Числові характеристики закону Сімпсона

Математичне очікування співпадає з ***m***.

Дисперсія може бути обчислена для зміщеного в нуль графіку:
Рівняння прямої $f(x)=x/a^2$

$$D=\int_{-a}^{a} x^2 \cdot f(x)\cdot dx=\int_{-a}^{0} x^2 \cdot \frac{x}{a^2}\cdot dx+\int_{0}^{a} x^2 \cdot (\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2})\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\int_{-a}^{0} x^3 \cdot dx+\frac{1}{a}\cdot\int_{0}^{a} x^2 \cdot dx-\frac{1}{a^2}\cdot\int_{0}^{a} x^3 \cdot dx=\frac{a^4}{4\cdot a^2}+\frac{a^3}{3\cdot a}-\frac{a^4}{4\cdot a^2}=\frac{a^2}{3}$$

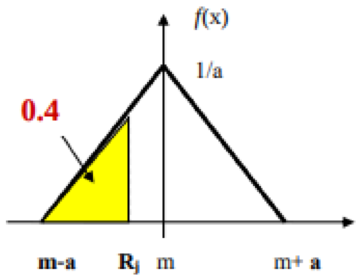
Середньоквадратичне відхилення $\sigma=\frac{a}{\sqrt{3}}$

Генерація чисел, розподілених за законом Сімпсона

Загальна формула одержання числа R_i з законом розподілу $f(x)$

$$r_i=\int_{-\infty}^{R_i} f(x)\cdot dx$$

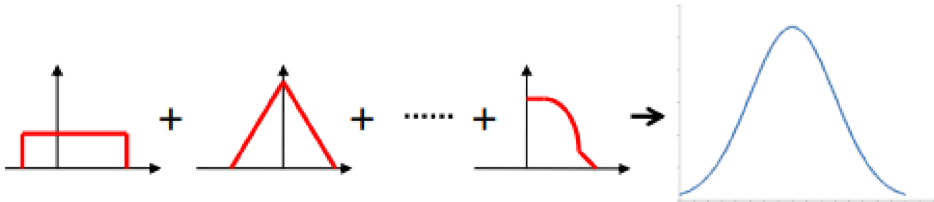
Задано ***a*,*m***: *потрібно для кожного r_j знайти R_j таке, що площа фігури від –а до R_j дорівнює r_j.*
Наприклад: m=3, a=2, r_j=0.4
*$d_j \cdot \xi=0.4\cdot 2 \rightarrow d_j=1.79 \rightarrow R_j = m-a+d=$ **2.79***



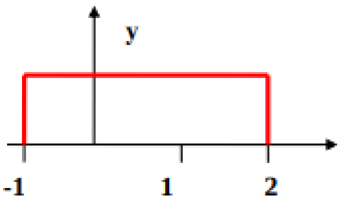
ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Слайд 6 **ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА**

Якщо є ***n*** **незалежних** випадкових величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які мають математичні очікування $m_1, m_2, \ldots, m_n$ та дисперсії $D_1, D_2, \ldots, D_n$, то закон розподілу суми цих величин **S**$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ при збільшенні ***n*** буде прямувати до нормального закону розподілу з математичним очікуванням $\boldsymbol{m_S} = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ та дисперсією $\mathbf{D_S} = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$.



Приклад 3. Є **12** випадкових величин, кожна з яких рівномірно розподілена в інтервалі від **-1** до **2.** Обчислюється сума цих **12**-ти величин. Визначити ймовірність того, що ця сума виявиться додатною.



Слайд 7.

Розв'язок 3. Характеристики випадкової величини, рівномірно розподіленої в інтервалі від -1 до 2 ($\boldsymbol{a}$=-1, $\boldsymbol{b}$=2): математичне очікування m_x = (a+b)/2 = 0.5, дисперсія **D**=$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2/12$ = 9/12=0.75. Згідно з центральною граничною теоремою сум розподілена за нормальним законом з параметрами: $m_S = m_x \cdot 12 = 6$, $D_S = \mathbf{D} \cdot 12 = 9$. $\sigma = 3$.

$$P(0 \le S \le \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(\frac{0-6}{3}) = 0.5 + \Phi(2) = 0.5 + 0.477 = \mathbf{0.977}$$

Приклад 4. В копилці є 300 монет 1 динар, 200 монет 5 динарів, 100 монет 10 динарів. У пітьмі виймається 20 монет. Яка ймовірність, що сума вибраних монет перевищить 80 динарів.

Слайд 8

Розв'язок 4. Монета, що виймається являє собою випадкову дискретну величину, яка з ймовірністю 0.5 дорівнює 1, з ймовірністю 0.33 дорівнює 5, з ймовірністю 0.17 дорівнює 10. Відповідно: математичне очікування ціни однієї монети становить:

$$m = \sum_{j=1}^{3} x_j \cdot P_j = 1\cdot 0.5 + 5\cdot 0.333 + 10\cdot 0.167 = \mathbf{3.835}.$$

Дисперсія $$D = \sum_{j=}^{3} x_j^2 \cdot P_j - m^2 = 1\cdot 0.5 + 25\cdot 0.333 + 100\cdot 0.167 - 3.835^2 = \mathbf{10.82}$$

Згідно з центральною граничною теоремою математичне очікування суми 20 монет: m_S = m·20 = 3.835·20 = 76.7. Дисперсія суми 20 монет D_S = D·20 = 10.82·20= 216.4; середньоквадратичне відхилення $\sigma_S = \sqrt{D_S} = 14.7$

$$P(100 \le S \le 200) = \Phi(\frac{200-76.7}{14.7}) - \Phi(\frac{80-76.7}{14.7}) = 0.5 - \Phi(0.224) = 0.5 - 0.088 = \mathbf{0.412}$$

Приклад 5. В літак Ан-2 загружають баранів без зважування. Вага барана розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням 30 кг. і середньоквадратичним відхиленням **8** кілограмів. Літак може безпечно летіти, якщо вага вантажу не перевищує **однієї тони**. Скільки баранів можна загрузити, щоб зі ймовірністю **0.96** їх вага не перевищила одну тону.

Слайд 9.

Розв'язок 5. Можна позначити кількість баранів через n. Тоді математичне очікування m_n ваги n баранів становить $m_n = n \cdot m_1 = n \cdot 30$. Дисперсія ваги одного барана : $D_1 = \sigma^2 = 64$. Дисперсія ваги n баранів: $D_n = n \cdot D_1 = n \cdot 64$.

$$P(1000 \le W \le \infty) = 0.04 = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{1000 - n \cdot 30}{8 \cdot \sqrt{n}}\right)., \ \Phi\left(\frac{1000 - n \cdot 30}{8 \cdot \sqrt{n}}\right) = 0.46$$

З таблиці Лапласа отримуємо $\dfrac{1000 - n \cdot 30}{8 \cdot \sqrt{n}} = 1.75$ Маємо квадратне рівняння:

$30 \cdot n + 14 \cdot \sqrt{n} - 1000 = 0$ Розв'язок: $\sqrt{n}_{1,2} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{196 + 120000}}{2 \cdot 30}$

$\sqrt{n} = \dfrac{-14 + 347}{60} = 5.55$ $n = 5.55^2 = 30.8$ $n = 30$

Слайд 10.

Комп'ютерна генерація випадкових чисел, розподілених за нормальним законом.

1 метод. З використанням вбудованого генератора отримується 12 рівномірно розподілених випадкових чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{12}$: $0 \le r_j \le 1$.

Обчислюється Y за формулою: $Y = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6$

2 метод. З використанням вбудованого генератора отримується 6 рівномірно розподілених випадкових чисел $r_1, r_2, \ldots, r_6$: $0 \le r_j \le 1$.

Обчислюється Y за формулою: $Y = \sqrt{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{6} r_j - 3\right)$

3 метод. З використанням вбудованого генератора отримується 2 рівномірно розподілених випадкових чисел r_1, r_2: $0 \le r_j \le 1$.

Обчислюється Y за формулою: $Y = \sqrt{-2 \cdot \ln r_1} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot r_2)$

Одержання числа за нормальним розподілом (задано m та σ):

$$R = \sigma \cdot Y + m$$

Слайд 11

Розглянемо ***n*** **незалежних** випадкових величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які мають однакові математичні очікування ***m*** та однакові дисперсії **D** і середньоквадратичні відхилення **σ**. Тоді, у відповідності з центральною граничною теоремою:

Дисперсія суми: $D_\Sigma = n \cdot D$ середньоквадратичне відхилення:

$\sigma_\Sigma = \sqrt{D_\Sigma} = \sqrt{n} \cdot \sigma$ середньоквадратичне відхилення середнього значення: $\overline{\sigma} = \frac{\sigma_\Sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Два важливих висновки:

1. Середнє арифметичне ***n*** випадкових значень випадкової величини з математичним очікуванням ***m*** і середньоквадратичним відхиленням σ є випадковою величиною, що має нормальний розподіл з параметрами: $m_{\overline{x}} = m$ (математичне очікування середнього значення дорівнює математичному очікуванні величини) і середньоквадратичними відхиленням $\overline{\sigma} = \frac{\sigma_\Sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

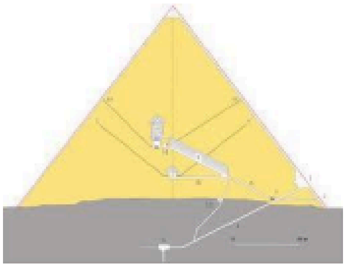
2. Похибка середнього арифметичного ***n*** вимірів величини в $\sqrt{n}$ менше похибки одного виміру.

Слайд 12.

Останній висновок є одним із найбільш фундаментальним серед технологічних надбань людства.

Похибка середнього арифметичного ***n*** вимірів величини в $\sqrt{n}$ менше похибки одного виміру.

Практично це означає, що неточними вимірювальними прилададами можна виміряти величину з будь-якою точністю, якщо робити багато вимірів і брати середнє значення.

Приклад 6. Відхилення піраміди Хуфу від напрямку на північ становить $2'30''$, а першої з пірамід - піраміди Джосера - 3°. Скільки раз будівельники визначали напрям на північ при будівництво піраміди Хуфу.

Слайд 13

Розв'язок 6 При будівництві піраміди Джосера визначення напрямку на північ здійснювалась один раз і похибка становила 3°. Похибка орієнтації піраміди Хуфу становить в 72 рази менше. Тому $\sqrt{n} = 72$, відповідно $\boldsymbol{n}$ = 5184. На стінах піраміди Униса описано, що робилося 6000 вимірів.

Приклад 7. Випадкова величина Х рівномірно розподілена в інтервалі від **0** до **4**-х. Вимірюємо цю випадкову величину **9** раз. Яка ймовірність того, що середнє значення виміряних значень буде відрізнятися від справжнього математичного очікування на величину більше **0.2 ?**

Слайд 14.

Розв'язок 3.

Для рівномірного розподілу $\sigma = \dfrac{b-a}{\sqrt{12}} = \dfrac{4}{3.46} = 1.15$. $\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1.15}{\sqrt{9}} = 0.385$

$$P(-0.2 \le \bar{x} - m \le 0.2) = 2 \cdot \Phi(\frac{0.2}{0.385}) = 2 \cdot \Phi(0.519) = 2 \cdot 0.198 = 0.396$$

Відповідь: 1- 0.396 = **0.6**

8 лекція (25 жовтня) ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ
ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ

Слайд 1

ЛЕКЦІЯ 8

Формула повної ймовірності для неперервних випадкових величин

Є одна величина H, яка передує події А. Відома щільність розподілу величини Н: $f(H)$, а також ймовірність події А при конкретному значенні величини H: $P(A/H)$

Ймовірність події А: $$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(H) \cdot P(A/H) \cdot dH$$

Приклад 1. Ймовірність появи літака-винищувача рівномірно розподілена в інтервалі кутів від -45° до 45°. Ймовірність враження винищувача кормовою гарматою дорівнює $0.7 \cdot \cos(\varphi)$, де φ - кут, під яким з'являється винищувач. Визначити ймовірність відбиття нападу винищувача.

Слайд 2.

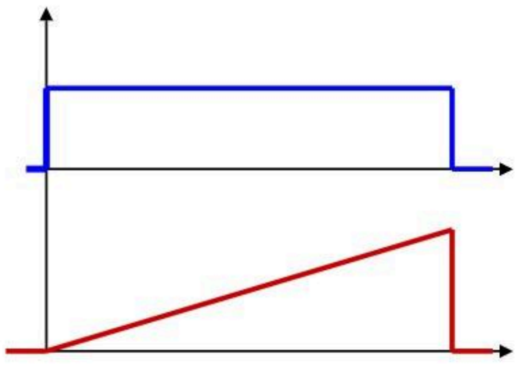
Розв'язок 1. Неперервна випадкова величин H рівномірно розподілена в інтервалі від $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$. Тому функція щільності її розподілу $f(H)=\frac{2}{\pi}$

P(A/*H*) = 0.7·cos φ. Підставляємо у формулу повної ймовірності для неперервних величин :

$$P(A)=\frac{1.4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(\varphi)\cdot d\varphi=\frac{1.4}{\pi}\cdot(\sin\frac{\pi}{4}-\sin(-\frac{\pi}{4}))=\frac{1.4}{\pi}\cdot\sqrt{2}=0.63$$

Слайд 3.

Приклад 2. Є дві випадкові величини, одна з яких (величина A) рівномірно розподілена в інтервалі від 0 до 2, а друга (величина B) в цьому інтервалі має функцію розподілу $\mathbf{f_B(\boldsymbol{x})} = k\cdot x$. При x<0: $\mathbf{f_B(\boldsymbol{x})=0}$, при x>2: $\mathbf{f_B(\boldsymbol{x})=0}$, Визначити ймовірність того, що величина B більша за величину A.



Слайд 4

Розв'язок **2**: користуючись формулою повної ймовірності для неперервних випадкових величин можна визначити ймовірність того, що величина B більша за величину A у вигляді інтегралу:

$$P(B>A)=\int_0^2 P(B=x)\cdot P(A<x)\cdot dx=\int_0^2 f_B(x)\cdot\int_0^x f_A(y)\cdot dy\cdot dx=$$

$$=\int_0^2 k\cdot x\cdot h\cdot x\cdot dx=\frac{1}{4\cdot 3}\cdot x^3\Big|_0^2=\frac{2}{3}$$

ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Слайд 5

ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Схема Бернуллі: здійснюється n дослідів, в кожному з яких зі ймовірністю p може трапитися подія.

Суть теореми Муавра-Лапласа: при великих значеннях n ймовірність того, що кількість подій лежить в інтервалі від a до b може бути наближено обчислена у наступному вигляді:

$$P(a \le m \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$$

Приклад 3. Спортсмен вражає мішень зі ймовірністю 0.85. На змаганнях буде робити 100 пострілів. Якщо кількість влучань буде більше 80-ти, він потрапить до збірної. Визначити ймовірність цього.

Слайд 6.

Розв'язок 3. Прямо по формулі Муавра-Лапласа. Параметри для підстановки в формулу: n=100, p=0.85, a = 80, b = 100.

$$P(80 \le m \le 100) = \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0.85}{\sqrt{100 \cdot 0.85 \cdot 0.15}}\right) - \Phi\left(\frac{80 - 100 \cdot 0.85}{\sqrt{100 \cdot 0.85 \cdot 0.15}}\right) = \Phi(4.2) + \Phi(1.4) = 0.91$$

Приклад 4. Певний хімічний процес проходить успішно і дозволяє отримати **1** кг високоякісної речовини зі ймовірністю **0.8**. На яку кількість процесів потрібно закупити матеріали та реактиви, щоб із ймовірністю **0.96** отримати **20** кілограмів речовини ?

Слайд 7.

Розв'язок 4. Якщо позначити через ***n*** невідому кількість процесів, які потрібно запланувати і підготувати, то верхня границя: ***b*** =***n***, нижня границя ***a*=20,** ***p*** = **0.8**. Відповідно:

$$\Phi(\frac{n - n\cdot p}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}}) - \Phi(\frac{20 - n\cdot p}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}}) = 0.96$$

Після спрощення:

$\Phi(\frac{0.2\cdot\sqrt{n}}{0.4}) - \Phi(\frac{20-0.8\cdot n}{0.4\cdot\sqrt{n}}) = 0.96$ Враховуючи, що ***n***>20 $\frac{\sqrt{n}}{2} > 2.5 \Rightarrow \Phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) \approx 0.5$

$\Phi(\frac{20-0.8\cdot n}{0.4\cdot\sqrt{n}}) = 0.46 \Rightarrow \frac{20-0.8\cdot n}{0.4\cdot\sqrt{n}} = 1.75$ Отримується квадратне рівняння

$0.8\cdot n - 0.7\cdot\sqrt{n} - 20 = 0$ Його розв'язок

$$\sqrt{n}_{1,2} = \frac{0.7 \pm \sqrt{0.7^2 + 4\cdot 0.8\cdot 20}}{2\cdot 0.8} = 5.456$$

Відповідно:

$$(\sqrt{n})^2 = 5.456^2 = 29.77 \Rightarrow$$ ***n*=30**

Слайд 8

Системи випадкових величин

Системи дискретних випадкових величин

Найбільш поширеним варіантом задання систем дискретних випадкових величин – є табличний.

Є 4 карти: **0, 1, 1, 2.** Одну карту бере перший гравець і одну вибирає другий гравець.

Тобто маємо дві випадкові дискретні величини – **X** (карту, яку вибрав перший гравець) і **Y** – карту, яку вибрав другий гравець.

Дискретна випадкова величина задається ймовірностями для всіх можливих значень **X** і **Y.**

		Y		
		0	**1**	**2**
X	**0**	**0**	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
	1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
	2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$	**0**

Сума всіх ймовірностей в таблиці дорівнює одиниці.

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Слайд 9

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

X	Y		
	0	1	2
0	0	1/6	1/12
1	1/6	1/6	1/6
2	1/12	1/6	0

Функція розподілу величини X:

X	P
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Функція розподілу величини Y

X	P
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Математичне очікування X: $m_x = \sum_i \sum_j x_{ij} \cdot p_{ij}$ $\quad \boldsymbol{m_x} = 1$

Математичне очікування Y: $m_y = \sum_i \sum_j y_{ij} \cdot p_{ij}$ $\quad \boldsymbol{m_y} = 1$

Слайд 10

Умовні розподіли

X	Y		
	0	1	2
0	0	1/6	1/12
1	1/6	1/6	1/6
2	1/12	1/6	0

Умовний розподіл величин X при Y=0 :

X	P(X/Y=0)
0	0
1	2/3
2	1/3

Умовний розподіл величини Y при X =1

X	P(Y/X=1)
0	1/3
1	1/3
2	1/3

1/6+1/12 = 1/4

Нормалізація $\frac{1/6}{1/4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $\frac{1/12}{1/4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Слайд 11

Дисперсія і середньоквадратичне відхилення

X	Y		
	0	1	2
0	0	1/6	1/12
1	1/6	1/6	1/6
2	1/12	1/6	0

Дисперсія $D_x=\sum_i\sum_j(x_{ij}-m_x)^2\cdot p_{ij}=\sum_i\sum_j x_{ij}{}^2\cdot p_{ij}-m_x^2$

$D_x = (0-1)^2\cdot(1/6 + 1/12) + (2-1)^2\cdot(1/12 + 1/6) = 1/4 + 1/4 = 1/2$ $D_Y = 1/2$

Середньоквадратичне відхилення: $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sigma_y=\sqrt{D_y}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Слайд 12.

КОВАРІАЦІЯ І КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Коваріація $\mathrm{cov} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - m_x) \cdot (y_{ij} - m_y) \cdot p_{ij} = \sum_i \sum_j x_{ij} \cdot y_{ij} \cdot p_{ij} - m_x \cdot m_y$

Коефіцієнт кореляції $\rho = \dfrac{\mathrm{cov}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

Коефіцієнт кореляції характеризує силу зв'язку між величинами X та Y:

$$-1 \le \rho \le 1$$

За дослідженнями Ватикану коефіцієнт кореляції між вірою та зростом дорівнює **0.98**. Коефіцієнт кореляції між зростом та розміром черевика **0.82**

Коефіцієнт кореляції між зростом та тривалістю життя **- 0.73**

Слайд 13

Розрахунок коваріації та коефіцієнта кореляції для приклада

X	Y		
	0	**1**	**2**
0	**0**	**1/6**	**1/12**
1	**1/6**	**1/6**	**1/6**
2	**1/12**	**1/6**	**0**

$\mathrm{cov} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - m_x) \cdot (y_{ij} - m_y) \cdot p_{ij}$ = **(0-1)·(2-1)·(1/12) + (2-1)·(0-1)·(1/12) =**

= - 1/6

Коефіцієнт кореляції: $\rho = \dfrac{\mathrm{cov}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\dfrac{1}{3}$

9 лекція (1 листопада) ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Слайд 1.

ЛЕКЦІЯ 9

Системи неперервних випадкових величин

Для неперервних випадкових величин розподіл задається або функцією щільності розподілу ***f(x,y)***, або інтегральною функцією розподілу – ***F*(x,y)**. Функція щільності розподілу ***f(x,y)***, визначається як межа, до якої прямує відношення ймовірності попадання випадкової величини в область X+Δx, Y+Δy до її площі Δx·Δy, коли Δx,Δy →0:

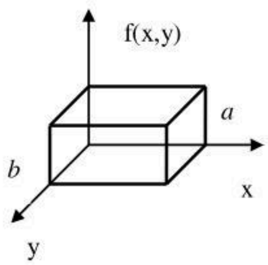
$$f(x,y) = \lim_{\Delta x,\Delta y \to 0} \frac{P(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Тоді ймовірність P(***a***<**x**<b, c<**y**<d) визначається як інтеграл виду:

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

Приклад рівномірного розподілу системи двох випадкових величин, величина x лежить в інтервалі від 0 до ***a***, а величина y - від 0 до ***b***.

$$c = \frac{1}{a \cdot b}$$



Слайд 2

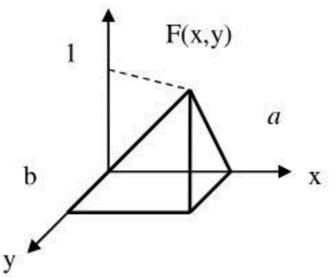
Інтегральна функція розподілу ***F***(**x**,**y**) визначається як ймовірність P(x<X,y<Y). Властивості функції розподілу:

$$\lim_{x\to\infty, y\to\infty} F(x,y) = 1$$

$$P(a < x < b, c < y < d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$$

Приклад рівномірного розподілу системи двох випадкових величин, величина ***x*** лежить в інтервалі від 0 до ***a***, а величина ***y*** - від 0 до ***b***.

$$c = \frac{1}{a \cdot b}$$



Слайд 3

Функція щільності розподілу та інтегральна функція розподілу пов'язані між собою наступним чином:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\cdot dx\cdot dy,$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}$$

Умовна функція розподілу: $f_x(x / y')$ $\quad f_x(x/y') = \dfrac{f(x,y')}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y')\cdot dx}$

Часткові функції розподілу : $\varphi_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot dy \qquad \psi_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot dx$

Величини ***x*** і ***y*** є незалежними, коли функція щільності розподілу $f(x,y)$ може бути представлена у вигляді добутку часткових функцій розподілу:

$$f(x,y) = \varphi(x)\cdot\psi(y)$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Слайд 4

Основні характеристики системи неперервних випадкових величин

Математичне очікування: $m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) \cdot dx$

Дисперсія:

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy - m_x^2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx - m_x^2$$

Коваріація:

$$\mathrm{cov} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \cdot (y - m_y) \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy =$$

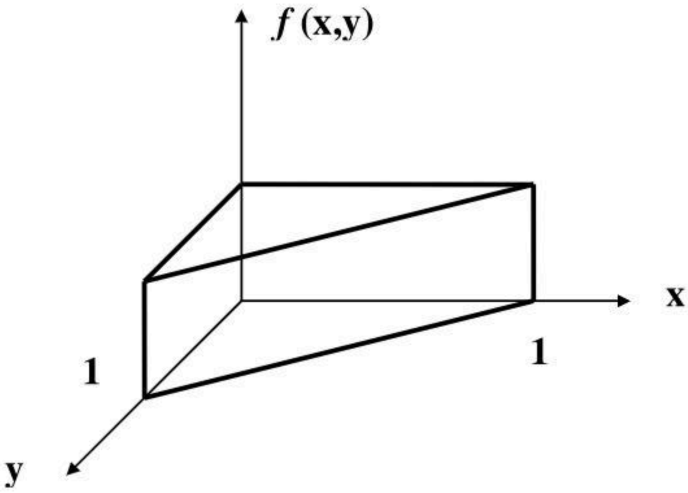
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy - m_x \cdot m_y$$

Коефіцієнт кореляції: $\rho = \dfrac{\mathrm{cov}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

Слайд 5

ПРИКЛАД

Задана система двох випадкових величин



Функція щільності розподілу $\boldsymbol{f}(x,y)$ =

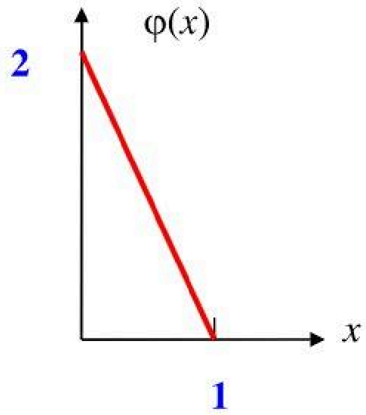
Часткова функція розподілу φ_x : $\varphi_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dy$

Умовна функція розподілу: $f_x(x/y') = \dfrac{f(x,y')}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y') \cdot dx}$

Слайд 6 Функція щільності розподілу $\boldsymbol{f}(x,y) = 2$

Часткова функція розподілу φ_x :

$$\varphi_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot dy = \int_{0}^{1-x} 2\cdot dy = 2\cdot y\Big|_0^{1-x} = 2-2\cdot x$$



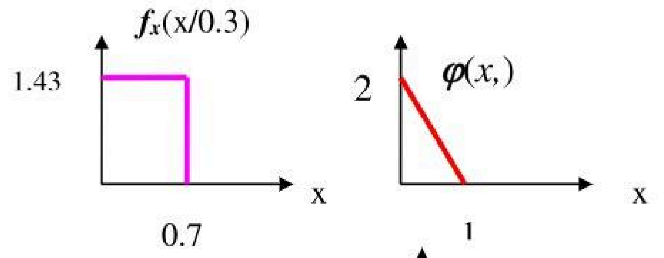
$\psi_y = 2-2\cdot y$ $\varphi\cdot\psi \neq 2$ Значить величини залежні

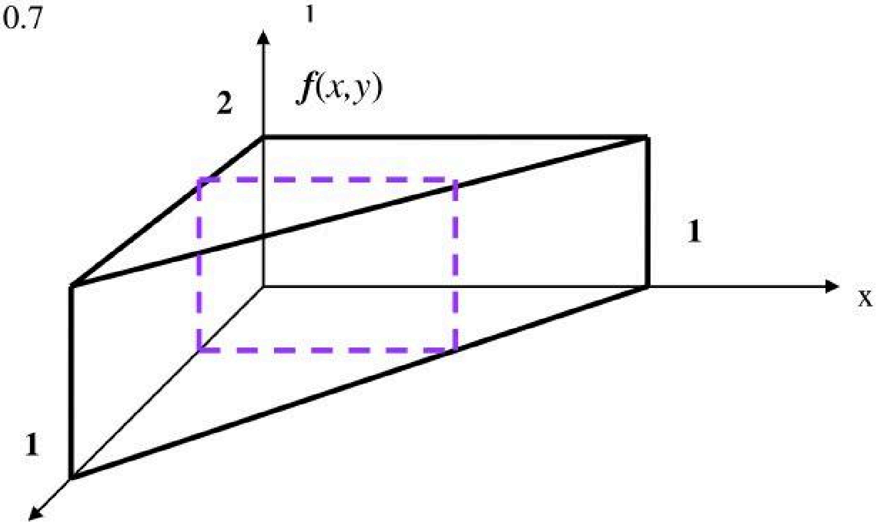
Слайд 7

Умовна функція розподілу: $\boldsymbol{f_x}(x\,/\,\boldsymbol{y'})$

$$f_x(x/y') = \frac{f(x,y')}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y')\cdot dx} = \frac{2}{\int\limits_{0}^{1-y'} 2\cdot dx} = \frac{2}{2\cdot(1-y')} = \frac{1}{1-y'}$$

Наприклад, при $y' = 0.3$ $\quad f_x(x/0.3) = \dfrac{1}{(1-0.3)} = 1.43$





Слайд 8 ПРИКЛАД: **Числові характеристики розподілу**

Математичне очікування: $m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) \cdot dx$

Дисперсія

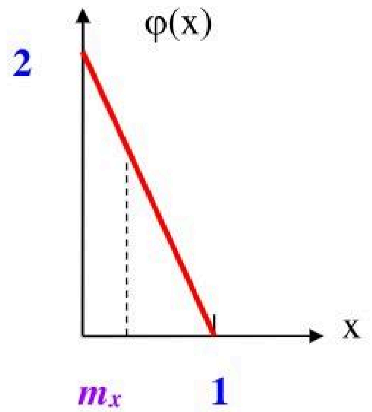
$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy - m_x^2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx - m_x^2$$

Слайд 9

Математичне очікування:

$$m_x = \int\limits_0^1 x \cdot \varphi(x) \cdot dx = \int\limits_0^1 x \cdot (2 - 2 \cdot x) \cdot dx = x^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$



Слайд 10

Дисперсія: $$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx - m_x{}^2$$

$$D_x = \int\limits_0^1 x^2 \cdot (2 - 2 \cdot x) \cdot dx - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{2}{4} \cdot x^3 - \frac{1}{9} = \frac{24 - 18 - 4}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma_x = 0.\mathbf{236}$

Слайд 11 **Коваріація:**

$$\operatorname{cov} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy - m_x \cdot m_y = 2 \cdot \int\limits_0^1 x \cdot (\int\limits_0^{1-x} y \cdot dy) \cdot dx - \frac{1}{9} =$$

$$= \int\limits_0^1 x \cdot (1 - x)^2 \cdot dx - \frac{1}{9} =$$

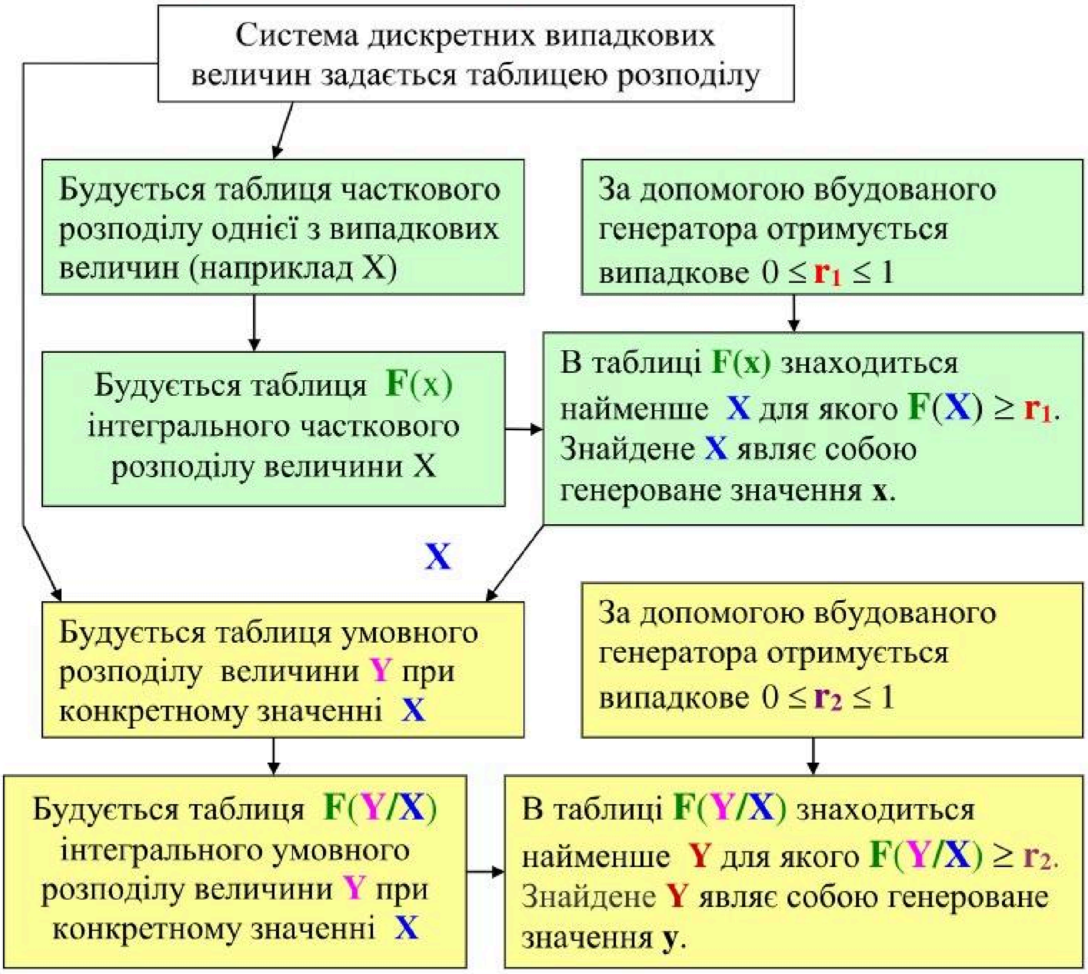
$$= (\frac{x^2}{2} - \frac{2 \cdot x^3}{3} + \frac{x^4}{4})\Big|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{6 - 8 + 3}{12} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{36}$$

Коефіцієнт кореляції $\rho = -\frac{1 \cdot 18}{36} = -\frac{1}{2}$

Слайд 12

Комп'ютерна генерація систем випадкових випадкових величин

Генерація систем дискретних випадкових величин



Слайд 13

ПРИКЛАД

Таблиця розподілу системи величин X і Y

X	Y		
	0	**1**	**2**
0	**0**	**1/6**	**1/12**
1	**1/6**	**1/6**	**1/6**
2	**1/12**	**1/6**	**0**

Функція часткового розподілу величини X:

X	P
0	**0.25**
1	**0.5**
2	**0.25**

Інтегральна функція часткового розподілу X

X	F
0	**0.25**
1	**0.75**
2	**1.0**

Генерація $\mathbf{r_1 = 0.82}$ найменше **X** для якого F(**X**) $\geq$ $\mathbf{r_1}$ **: F(2)** $\geq$ **0.82** $\Rightarrow$ **X=2**

Функція умовного розподілу величини **Y** при **X=2**:

Y	P
0	**1/3**
1	**2/3**
2	**0**

Інтегральна функція умовного розподілу **Y** при **X=2**

Y	F
0	**1/3**
1	**1**
2	**1**

Генерація $\mathbf{r_2 = 0.28}$

найменше **Y** для якого F(**Y/X=2**) $\geq$ r_2 **: F(0)= 0.33** $\geq$ **0.28** $\Rightarrow$ **Y=0**

Слайд 14

Генерація систем неперервних випадкових величин

Система неперервних випадкових величин задається функцією **f(x,y)** щільності розподілу

Отримується функція часткового розподілу однієї з випадкових величин, наприклад X - **φ(x)**

За допомогою вбудованого генератора отримується випадкове $0 \le \mathbf{r_1} \le 1$

Знаходиться **X** як розв'язок інтегрального рівняння : $r_1 = \int_{-\infty}^{X} \varphi(x) \cdot dx$

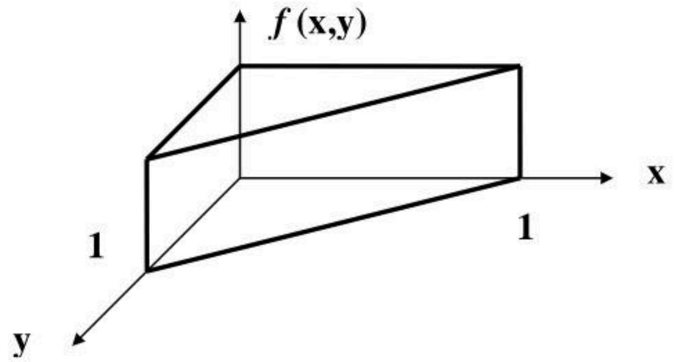
X

Отримується функція **ψ(Y/X)** умовного розподілу величини **Y** при конкретному значенні **X**

За допомогою вбудованого генератора отримується випадкове $0 \le \mathbf{r_2} \le 1$

Знаходиться **Y** як розв'язок інтегрального рівняння : $r_2 = \int_{-\infty}^{Y} \psi(y/x) \cdot dy$

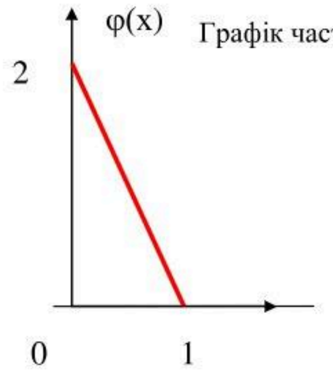
Задана система двох випадкових величин



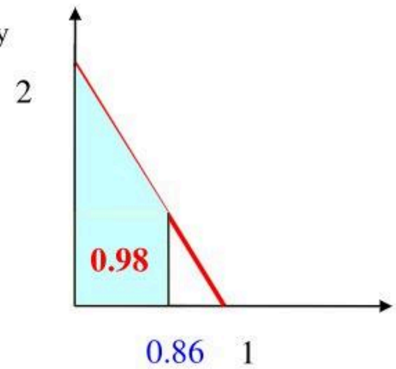
Функція щільності розподілу $f(x,y) = 2$

Часткова функція розподілу φ_x :

$$\varphi_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dy = \int_{0}^{1-x} 2 \cdot dy = 2 \cdot y \Big|_0^{1-x} = 2 - 2 \cdot x$$

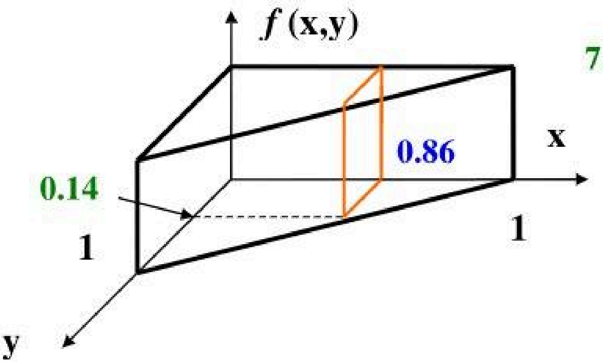


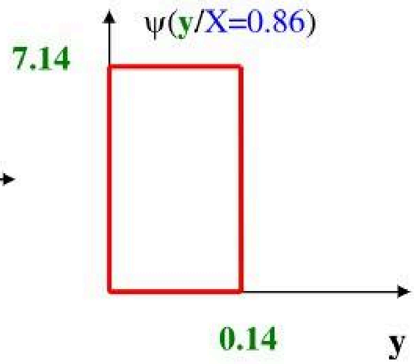
Графік часткової функції розподілу



Розв'язання інтегрального рівняння означає визначення такого **X**, що виділена площа дорівнює випадковому $0 \le \mathbf{r_1} \le 1$. Якщо $\mathbf{r_1 = 0.98}$ **X=0.86**

Умовна функція розподілу $\psi(y/X=0.86)$ величини **Y** при **X=0.86**





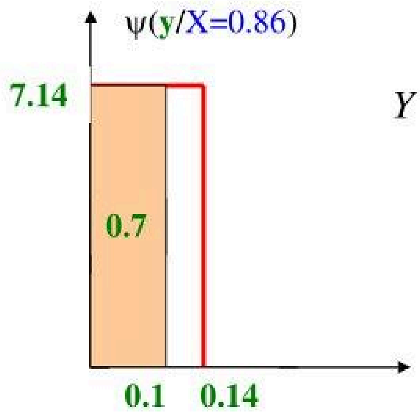
Умовна функція розподілу: $f_y(y\ /\ X=0.86)$

$$\psi_y(y/x') = \frac{f(x',y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x',y)\cdot dy} = \frac{2}{\int\limits_{0}^{1-x'} 2\cdot dy} = \frac{2}{2\cdot(1-x')} = \frac{1}{1-x'}$$

Наприклад, при $x' = 0.86$ $\quad \psi(y/X=0.86) = \dfrac{1}{(1-0.86)} = \dfrac{1}{0.14} = 7.14$

Розв'язання інтегрального рівняння $r_2 = \int\limits_{-\infty}^{Y} \psi(y/x)\cdot dy$

означає визначення такого **Y**, що виділена площа дорівнює випадковому $0 \le r_2 \le 1$. Якщо $r_2 = 0.7$ **X=0.86**



$$Y = \frac{0.7}{7.14} = 0.098 \approx 0.1$$

Слайд 17

ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТРИСТИК ЕКСПЕРИМЕНТАЛЛЬНИХ ДАНИХ

В результаті моделювання отримано ***n*** пар значень (**n**=5000):

X	Y
$x_1 = 0.86$	$y_1 = 0.1$
x_2	y_2
x_3	y_3
:	:
x_n	y_n

Середні значення: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$

Дисперсії: $D_x = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ $\quad D_y = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$

Середньоквадратичні відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ $\quad \sigma_y = \sqrt{D_y}$

Коваріація: $\mathrm{cov} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$

Коефіцієнт кореляції $\rho = \frac{\mathrm{cov}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

10 лекція (8 листопада) ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

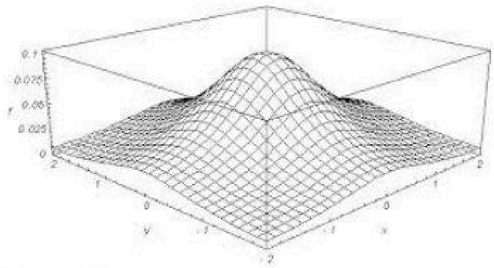
Слайд 1

Л Е К Ц І Я   10

Система двох нормально розподілених випадкових величин

Функція $f(x,y)$ щільності розподілу:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\cdot(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2\cdot\frac{(x-m_x)\cdot(y-m_y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}$$



При фіксованому значенні y випадкова величина x розподілена за нормальним законом з параметрами:

$$m_x'=m_x+\rho\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y) \qquad \sigma_x'=\sigma_x\cdot\sqrt{1-\rho^2}$$

Приклад 1. Зріст розподілено з параметрами $\boldsymbol{m}$=175, **σ** =10. Середній розмір черевик - **42.5** з середньоквадратичним відхиленням **1.4.** Коефіцієнт кореляції між зростом і розміром черевика становить **0.82** Виявлено слід злочинця: розміром **44**. Визначити ймовірність, що зріст злочинця перевищує **180** см.

Слайд 2

Розв'язок 1. Позначимо через x – випадкову величину зросту людини, а через y – випадкову величину: розмір черевика. Тоді при відомому значенні величини y =44, величина x розподілена нормально з параметрами:

Математичне очікування:

$$m_x' = m_x + \rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y) = 175 + 0.82 \cdot \frac{10}{1.4} \cdot (44 - 42.5) = 183.78$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma_x' = \sigma_x \cdot \sqrt{1-\rho^2} = 10 \cdot \sqrt{1-0.82^2} = 5.72$

Ймовірність що $x \geq 180$

$$P(180 \leq x \leq \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{180 - 183.78}{5.72}\right) = 0.5 + \Phi(0.66) = 0.5 + 0.245 = 0.745$$

Слайд 3.

Узагальнення центральної граничної теореми для залежних величин

Є n випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ для яких визначені математичні очікування: $m_1, m_2, \ldots, m_n$ та дисперсії $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Для цих величин також визначена матриця попарних коваріацій (коваріаційна матриця):

$$COV = \begin{vmatrix} \mathrm{cov}_{11} & \mathrm{cov}_{12} & \cdots & \mathrm{cov}_{1n} \\ \mathrm{cov}_{21} & \mathrm{cov}_{22} & \cdots & \mathrm{cov}_{2n} \\ & \vdots & & \\ \mathrm{cov}_{n1} & \mathrm{cov}_{n2} & \cdots & \mathrm{cov}_{nn} \end{vmatrix}$$

Центральна теорема: Математичне очікування суми n випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ дорівнює сумі математичних очікувань, а дисперсія суми дорівнює сумі всіх елементів коваріаційної матриці.

$$m_\Sigma = \sum_{j=1}^{n} m_j \qquad D_\Sigma = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}_{i,j}$$

Центральна гранична теорема: Сума n випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ зі зростанням n наближається до нормального розподілу, причому математичне очікування суми дорівнює сумі математичних очікувань, а дисперсія суми дорівнює сумі всіх елементів коваріаційної матриці.

Приклад 2: Вага людини розподілена нормально з математичним очікуванням **75** кг. і дисперсією **144** кг^2. Вага близнюків корельовано з коефіцієнтом кореляції **0.85**. Визначити ймовірність того, що два близнюки важитимуть більше **160** кг і ймовірність того, що два випадкові важитимуть більше **160** кг.

Слайд 4

Розв'язок 2. Сума двох нормальних розподілена нормально незалежно від їх кількості. Математичне очікування ваги двох людей в обох випадках: $m_\Sigma = 150$ кг. В випадку двох незалежних людей їх коваріаційна матриця має вигляд:

$$COV_2 = \begin{vmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 144 \end{vmatrix}$$

Відповідно, дисперсія суми двох незалежних: $D_{\Sigma 2} = 288 \quad \sigma_{\Sigma 2} = 17$

Шукана ймовірність для двох незалежних:

$$P(S_2 > 160) = \Phi(\infty) - \Phi(\frac{160-150}{17}) = 0.5 - \Phi(0.588) = \mathbf{0.278}$$

Коваріція для близнюків дорівнює: $cov = \rho \cdot D = 0.85 \cdot 144 = 122.4$

Коваріаційна матриця для пари близнюків має вигляд:

$$COV_1 = \begin{vmatrix} 144 & 122.4 \\ 122.4 & 144 \end{vmatrix}$$

Відповідно, дисперсія суми: $D_{\Sigma 1} = 144 \cdot 2 + 122.4 \cdot 2 = 532.8$

Середньоквадратичне відхилення близнюків: $\sigma_{\Sigma 1} = \sqrt{D_{\Sigma 1}} = 23$

Ймовірність, що двоє близнюків важитимуть більше 160 кг.:

$$P(S_1 > 160) = \Phi(\infty) - \Phi(\frac{160-150}{23}) = 0.5 - \Phi(0.43) = \mathbf{0.334}$$

Слайд 5

Приклад 3. Для розв'язання задачі потрібно виконати **три** процедури. Час виконання кожної з процедур є випадковою величиною, розподіленою за законом Гауса з параметрами:

Процедура	Мат.очікування часу	Середньоквадратичне відхилення
1	**3**	**1**
2	**5**	**2**
3	**4**	**4**

Коефіцієнт кореляції часу виконання першої і другої $\rho_{12} =$ **- 0.8**;

другої та третьої $\rho_{23} =$ **- 0.6**

першої та третьої $\rho_{13} =$ **0.3**

Визначити ймовірність, що задача буде розв'язана менше ніж за **10** секунд.

Слайд 6.

Розв'язок 3. Попарні коваріації часу виконання процедур дорівнюють:

$cov_{12} = \rho_{12}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2 = -0.8\cdot 1\cdot 2 = -1.6$

$cov_{13} = \rho_{13}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_3 = 0.3\cdot 1\cdot 4 = 1.2$

$cov_{23} = \rho_{23}\cdot\sigma_2\cdot\sigma_3 = -0.6\cdot 2\cdot 4 = -4.8$

Коваріаційна матриця має вигляд:

$$COV = \begin{vmatrix} 1 & -1.6 & 1.2 \\ -1.6 & 4 & -4.8 \\ 1.2 & -4.8 & 16 \end{vmatrix}$$

Дисперсія загального часу обчислюється як сума всіх елементів коваріаційної матриці:

$D_\Sigma = 1+4+16 - 4.8 - 4.8 -1.6 - 1.6 +1.2+1.2 = 10.6$

Середньоквадратичне відхилення: $\sigma_\Sigma = \sqrt{10.6} =$ **3.26**

Математичне очікування загального часу: $m_\Sigma = 3+5+4 =$ **12**

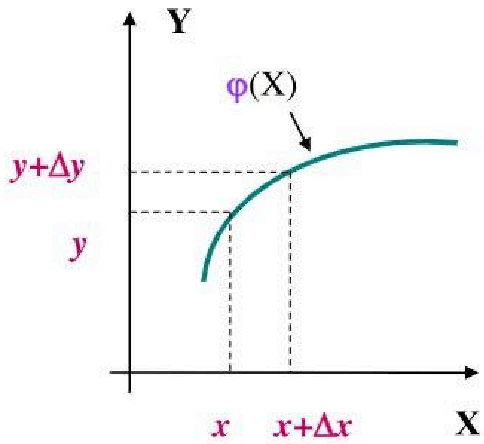
Ймовірність того, що всі три процедури будуть виконані менш ніж за 10 секунд:

$$P(\Sigma < 10) = \Phi(\frac{10-12}{3.26}) - \Phi(\frac{-12}{3.26}) = -0.177 + 0.5 = 0.323$$

Слайд 7

ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Постановка задачі. Є випадкова величина X, що має функцію щільності розподілу ***f*** (x). Є також випадкова величина **Y**, яка являє собою функцією від X: **Y** = φ(X), причому існує зворотна функція X = ψ(**Y**). Оскільки **Y** залежить від випадкової величини X, то **Y** також випадкова величина. Потрібно визначити функцію ***g***(**Y**) щільності розподілу **Y**.



За визначенням

$$g(Y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y \le Y \le y + \Delta y)}{\Delta y}$$

$$g(Y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta y \cdot \Delta x} =$$

$$= f(X) \cdot \frac{d\psi(Y)}{dY} = f(\psi(Y)) \cdot \frac{d\psi(Y)}{dY}$$

Приклад* 4**. Величина X розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням **нуль** і середньоквадратичним відхиленням **1**. Величина **Y** є функцією від X: **Y** = φ(X) = X^3. Визначити функцію ***g(**Y**) щільності розподілу **Y**.

Слайд 8

***Розв'язок* 4**. Зворотна функція X = **ψ**(**Y**) = $\sqrt[3]{Y}$ відповідно

$$\frac{d\psi(Y)}{dY} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{Y^2}}$$

$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ тоді за формулою: $g(Y) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt[3]{Y^2}} \cdot e^{-\frac{\sqrt[3]{Y^2}}{2}}$

Приклад 5. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі від 0 до 2 –х. Величина **Y** є функцією від X: **Y** = φ(X) = 1+ 2·X. Визначити функцію ***g***(**Y**) щільності розподілу **Y**.

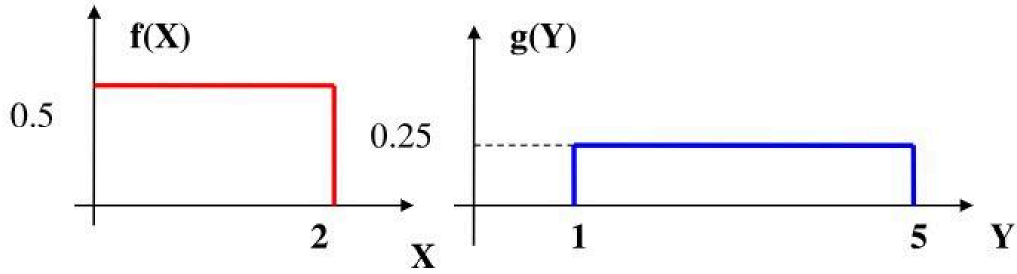
Приклад 6. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі від 0 до 1. Величина **Y** є функцією від X: **Y** = φ(X) = $\sqrt{X}$. Визначити функцію ***g***(**Y**) щільності розподілу **Y**.

Слайд 9

***Розв'язок* 4.** Зворотна функція X = ψ(**Y**) = 0.5·(Y-1) відповідно

$$\frac{d\psi(Y)}{dY} = 0.5$$

$f(X) = \mathbf{0.5}$ тоді за формулою: **g**(Y) = **0.5**·0.5 = **0.25**

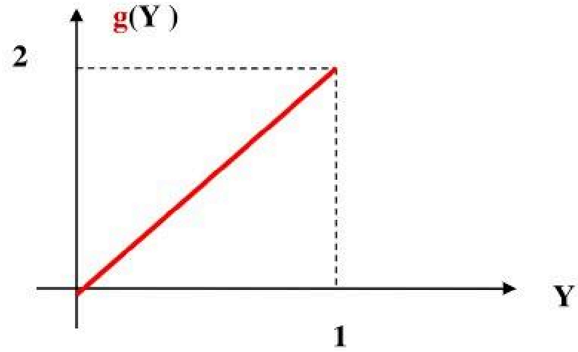


Важливий висновок: **лінійні перетворення не міняють виду закону розподілу і змінюють лише його параметри**

***Розв'язок* 6.**

Зворотна функція X = ψ(**Y**) = **Y²** відповідно $\frac{d\psi(Y)}{dY} = 2 \cdot Y$

$f(X) = \mathbf{1}$ тоді за формулою: **g**(Y) = 2·Y



Слайд 10

ФУНКЦІЇ СИСТЕМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Постановка задачі:

Є дві випадкові величини: x_1 з функцією щільності розподілу - $f_1(x_1)$

x_2 з функцією щільності розподілу - $f_2(x_2)$

Задана функція $f(x_1,x_2)$ щільності розподілу системи величин

Задана функція $y=\varphi(x_1,x_2)$, що визначена на цих величинах. Можна визначити функцію $x_2 = \psi(y, x_1)$.

Якщо величини незалежні, то $f(x_1,x_2) = f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)$

Потрібно визначити функцію щільності розподілу $g(y)$.

Загальна формула:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \psi(y, x_1)) \cdot \frac{d\psi(y, x_1)}{dy} \cdot dx_1$$

Формула для випадку, коли величини незалежні:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(\psi(y, x_1)) \cdot \frac{d\psi(y, x_1)}{dy} \cdot dx_1$$

Слайд 11. **Сума двох випадкових величин:**

$$y = \varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = \psi(y, x_1) = y - x_1 \quad \frac{d\psi}{dy} = 1$$

Якщо величини незалежні:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(\psi(y, x_1)) \cdot \frac{d\psi(y, x_1)}{dy} \cdot dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(y - x_1) \cdot 1 \cdot dx_1$$

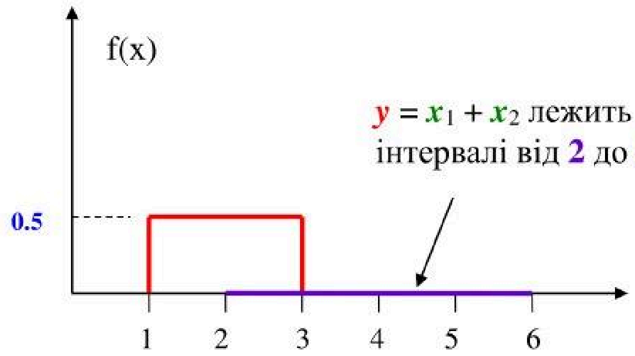
Приклад 6. Є дві незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені в інтервалі від **1** до **3**. Визначити функцію щільності розподілу суми цих величин.

Для однієї величини: математичне очікування $m_x = 2$,

дисперсія $D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Математичне очікування суми – сума мат. очікувань : $m_y = 2 \cdot m_x = 4$.

Дисперсія суми: сум дисперсій $D_Y = 2 \cdot D_x = \frac{2}{3}$



Слайд 12. *Розв'язок*: $f_1(x_1) = f_2(x_2) = 0.5$. За формулою:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\cdot f_2(y-x_1)\cdot 1\cdot dx_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot dx_1$$

$$1 \le x_1 \le 3$$

$$1 \le x_2 \le 3 \Rightarrow 1 \le y - x_1 \le 3 \Rightarrow y-3 \le x_1 \le y-1$$

Маємо дві умови:

$$1 \le x_1 \le 3 \quad \text{при тому, що} \quad 2 \le y \le 6$$

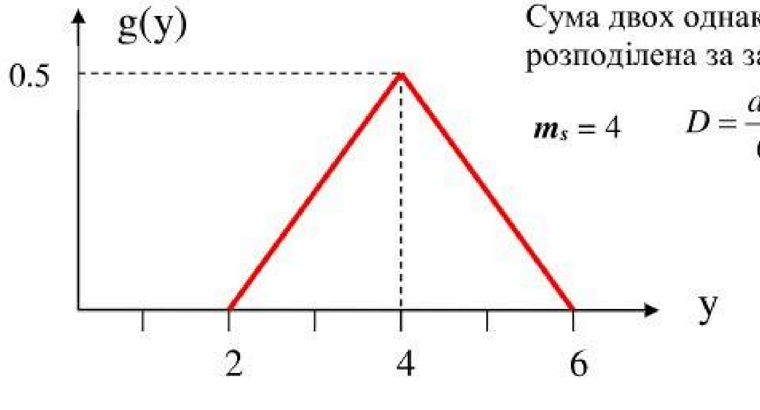
$$y-3 \le x_1 \le y-1$$

Якщо $y < 4 \Rightarrow 1 \le x_1 \le y-1$ $\qquad \alpha = 1 \qquad \beta = y-1$

$$g(y) = \frac{1}{4}\cdot\int_{1}^{y-1} dx_1 = \frac{1}{4}\cdot(y-2)$$

Якщо $y > 4 \Rightarrow y-3 \le x_1 \le 3$ $\qquad \alpha = y-3 \quad \beta = 3$

$$g(y) = \frac{1}{4}\cdot\int_{y-3}^{3} dx_1 = \frac{1}{4}\cdot(6-y)$$



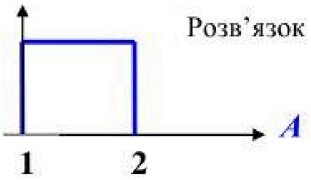
Сума двох однакових рівномірних розподілена за законом Сіпсона

$m_s = 4 \qquad D = \frac{a^2}{6} = \frac{2}{3}$

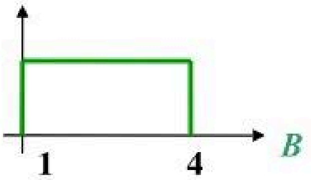
Слайд 13 Якщо **параметри не однакові**, то сума двох випадкових величин з рівномірним розподілом має більш складну форму:

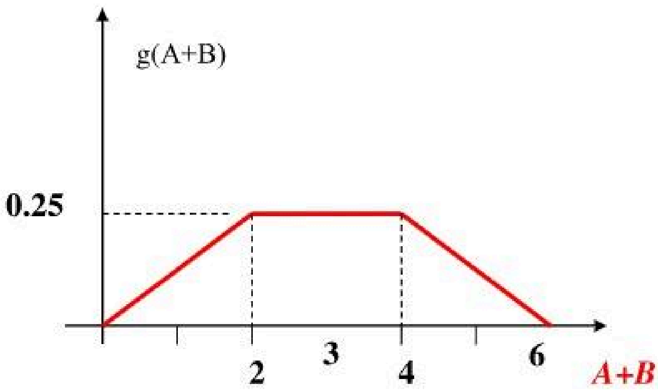
Приклад. Випадкова величина **A** рівномірно розподілена в інтервалі від **0** до **2**, а випадкова величина **B** рівномірно розподілена в інтервалі від **0** до **4**. Визначити дисперсію суми цих двох випадкових величин.

Слайд 14



Розв’язок





$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\cdot f_2(y-x_1)\cdot 1\cdot dx_1=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot dx_1$$

$0 \le \mathbf{x_1} \le 2$

$0 \le x_2 \le \mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{0} \le \mathbf{y} - \mathbf{x_1} \le \mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{y}\text{-}\mathbf{4} \le \mathbf{x_1} \le \mathbf{y}$

Маємо дві умови:

$0 \le \mathbf{x_1} \le \mathbf{2}$ при тому, що $0 \le \mathbf{y} \le 6$

$\mathbf{y}\text{-}\mathbf{4} \le \mathbf{x_1} \le \mathbf{y}$

Якщо $y < \mathbf{2}$ $\Rightarrow 0 \le x_1 \le \mathbf{y}$ $\alpha = 0$ $\beta = \mathbf{y}$

$$g(y)=\frac{1}{8}\cdot\int_{0}^{y} dx_1=\frac{1}{8}\cdot y$$

Якщо $\mathbf{2} < y < \mathbf{4}$ $\Rightarrow \mathbf{0} \le x_1 \le \mathbf{2}$ $\alpha = \mathbf{0}$ $\beta = \mathbf{2}$

$$g(y)=\frac{1}{8}\cdot\int_{0}^{2} dx_1=\frac{1}{8}\cdot 2=0.25$$

Якщо $\mathbf{4} < y < \mathbf{6}$ $\Rightarrow \mathbf{y}\text{-}\mathbf{4} \le x_1 \le \mathbf{2}$ $\alpha = \mathbf{y}\text{-}\mathbf{4}$ $\beta = \mathbf{2}$

$$g(y)=\frac{1}{8}\cdot\int_{y-4}^{2} dx_1=\frac{1}{8}\cdot(2-y+4)=\frac{1}{8}\cdot(6-y)$$

Слайд 15

Добуток двох випадкових величин

$$\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 \quad \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \psi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) = \frac{y}{x_1} \qquad \frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{x_2}$$

Загальний випадок:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \frac{y}{x_1}) \cdot \frac{1}{x_1} \cdot dx_1$$

Якщо величини незалежні:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(\frac{y}{x_1}) \cdot \frac{1}{x_1} \cdot dx_1$$

Математичне очікування добутку:

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2$$

Дисперсія добутку:

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{Y}} = \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{m_1}^2 \cdot \boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{m}_2{}^2 \cdot \boldsymbol{D}_1$$

11 лекція (15 листопада) ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ і МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Слайд 1 **ЛЕКЦІЯ 11**

ФУНКЦІЇ СИСТЕМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Постановка задачі:

Є дві випадкові величини: x_1 з функцією щільності розподілу - $f_1(x_1)$
x_2 з функцією щільності розподілу - $f_2(x_2)$

Задана функція $f(x_1,x_2)$ щільності розподілу системи величин

Задана функція $y=\varphi(x_1,x_2)$, що визначена на цих величинах. Можна визначити функцію $x_2 = \psi(y, x_1)$.

Якщо величини незалежні, то $f(x_1,x_2) = f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)$

Потрібно визначити функцію щільності розподілу $g(y)$.

Загальна формула:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \psi(y, x_1)) \cdot \frac{d\psi(y, x_1)}{dy} \cdot dx_1$$

Формула для випадку, коли величини незалежні:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(\psi(y, x_1)) \cdot \frac{d\psi(y, x_1)}{dy} \cdot dx_1$$

Слайд 2. **Сума двох випадкових величин:**

$$\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}_2 = \psi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1 \qquad \frac{d\psi}{dy} = 1$$

Якщо величини незалежні:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\cdot f_2(\psi(y,x_1))\cdot \frac{d\psi(y,x_1)}{dy}\cdot dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\cdot f_2(y-x_1)\cdot 1\cdot dx_1$$

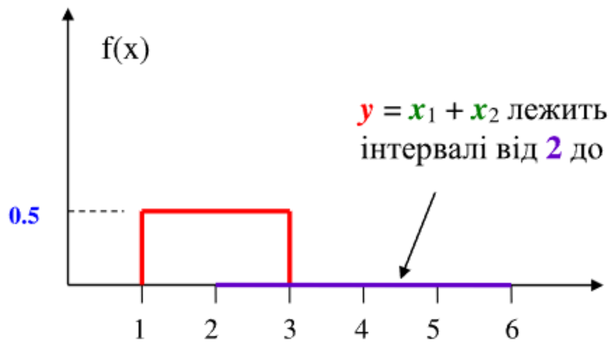
Приклад 1. Є дві незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені в інтервалі від **1** до **3**. Визначити функцію щільності розподілу суми цих величин.

Для однієї величини: математичне очікування $\boldsymbol{m_x}$=**2**,

дисперсія $D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Математичне очікування суми – сума мат. очікувань : $\boldsymbol{m_y} = 2\cdot\boldsymbol{m_x} = \mathbf{4}$.

Дисперсія суми: сум дисперсій $D_Y = 2\cdot D_x = \frac{2}{3}$



Слайд 3. *Розв'язок* 1: $f_1(x_1) = f_2(x_2) = 0.5$. За формулою:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(y - x_1) \cdot 1 \cdot dx_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot dx_1$$

$1 \le x_1 \le 3$

$1 \le x_2 \le 3 \;\Rightarrow\; 1 \le y - x_1 \le 3 \;\Rightarrow\; y\text{-}3 \le x_1 \le y\text{-}1$

Маємо дві умови:

$1 \le x_1 \le 3$ при тому, що $2 \le y \le 6$

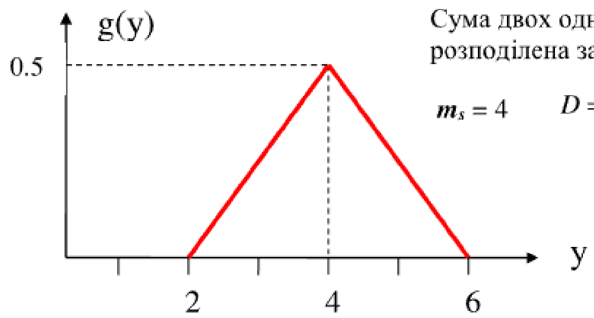
$y\text{-}3 \le x_1 \le y\text{-}1$

Якщо $y < 4 \;\Rightarrow 1 \le x_1 \le y\text{-}1$ $\quad \alpha = 1 \quad \beta = y\text{-}1$

$$g(y) = \frac{1}{4} \cdot \int_{1}^{y-1} dx_1 = \frac{1}{4} \cdot (y - 2)$$

Якщо $y > 4 \;\Rightarrow y\text{-}3 \le x_1 \le 3$ $\quad \alpha = y\text{-}3 \quad \beta = 3$

$$g(y) = \frac{1}{4} \cdot \int_{y-3}^{3} dx_1 = \frac{1}{4} \cdot (6 - y)$$



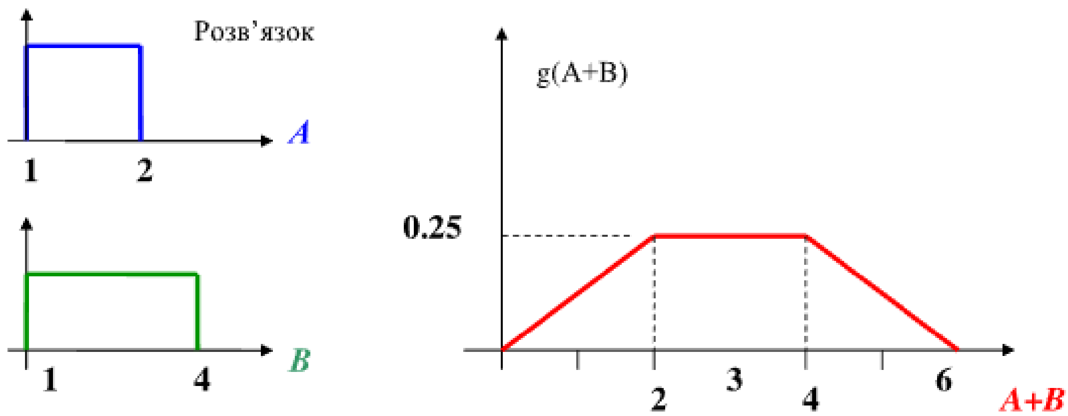
Сума двох однакових рівномірних розподілена за законом Сіпсона

$m_s = 4 \qquad D = \frac{a^2}{6} = \frac{2}{3}$

Висновок: сума двох рівномірних з однаковими параметрами розподілена за законом Сімпсона.

Слайд 4 Якщо **параметри не однакові**, то сума двох випадкових величин з рівномірним розподілом має більш складну форму:

Приклад. Випадкова величина **A** рівномірно розподілена в інтервалі від **0** до **2**, а випадкова величина **B** рівномірно розподілена в інтервалі від **0** до **4**. Визначити дисперсію суми цих двох випадкових величин.



$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\cdot f_2(y-x_1)\cdot 1\cdot dx_1=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot dx_1$$

$$0\le x_1\le 2$$

$$0\le x_2\le 4 \;\Rightarrow\; 0\le y-x_1\le 4 \;\Rightarrow\; y-4\le x_1\le y$$

Маємо дві умови:

$$0\le x_1\le 2 \quad \text{при тому, що} \quad 0\le y\le 6$$

$$y-4\le x_1\le y$$

Якщо $y<2 \;\Rightarrow 0\le x_1\le y$ $\qquad \alpha=0 \quad \beta=y$

$$g(y)=\frac{1}{8}\cdot\int_0^y dx_1=\frac{1}{8}\cdot y$$

Якщо $2<y<4 \;\Rightarrow 0\le x_1\le 2$ $\qquad \alpha=0 \quad \beta=2$

$$g(y)=\frac{1}{8}\cdot\int_0^2 dx_1=\frac{1}{8}\cdot 2=0.25$$

Якщо $4<y<6 \;\Rightarrow y-4\le x_1\le 2$ $\qquad \alpha=y-4 \quad \beta=2$

$$g(y)=\frac{1}{8}\cdot\int_{y-4}^{2} dx_1=\frac{1}{8}\cdot(2-y+4)=\frac{1}{8}\cdot(6-y)$$

Слайд 5 **Добуток двох випадкових величин**

$$y = \varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad \Rightarrow x_2 = \psi(y, x_1) = \frac{y}{x_1} \qquad \frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{x_2}$$

Загальний випадок:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \frac{y}{x_1}) \cdot \frac{1}{x_1} \cdot dx_1$$

Якщо величини незалежні:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(\frac{y}{x_1}) \cdot \frac{1}{x_1} \cdot dx_1$$

Математичне очікування добутку:

$$m_Y = m_1 \cdot m_2$$

Дисперсія добутку:

$$D_Y = D_1 \cdot D_2 + m_1^2 \cdot D_2 + m_2^2 \cdot D_1$$

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Слайд 6

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Наука про узагальнення: як правильно робити оцінки про загальне по частковим спостереженням.

Основне поняття мат.статистики – **вибірка даних** (результат вимірювання) – $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По вибірці даних оцінюється **генеральна сукупність**. Наприклад: по вибірці зросту студентів потоку оцінюється закон розподілу зросту всього людства.

Треба знати і відчувати межі ефективного застосування математичної статистики.

Теорія **чорного лебедя** – суть в тому, що нові відкриття можуть поламати науку, що вже склалася. Наука – це створення моделей окремих частин реального світу. Моделі USB – накопичувачів.

Слайд 7

Визначення характеристик вибірки:

1. Оцінка математичного очікування генеральної сукупності здійснюється через середнє арифметичне вибірки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Математичне очікування та середнє значення завжди відрізняються: середнє арифметичне розподілене за нормальним законом: математичне очікування середнього дорівнює математичному очікуванню **генеральної сукупності.**

2. Оцінка середньоквадратичного відхилення:

При ***n* > 10** через оцінку дисперсії**:**

$$\bar{D} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 \qquad \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{D}}$$

При ***n* ≤ 10** через розмах ***R*** – різницю між максимальним і мінімальним значеннями вибірки**:** $R = x_{max} - x_{min}$;

$$\bar{\sigma} = \frac{R}{a_n}$$

, де a_n – коефіцієнт, що залежить від n

n	a_n
4	2.06
5	2.32
6	2.55
7	2.7
8	2.8
9	2.95
10	3.1

Слайд 8.

ОЦІНКА ДОСТОВІРНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИК, ОТРИМАНИХ ПО ВИБОРЦІ

Достовірність оцінки математичного очікування генеральної сукупності середнім арифметичним вибірки.

Насправді, $\bar{x}$ є випадкова величина, що нормально розподілена з математичним очікуванням m_x і середньоквадратичним відхиленням $\frac{\overline{\sigma_x}}{\sqrt{n}}$.

Ймовірність того, що різниця між середнім значенням і математичним очікуванням не перевищує заданої величини ε:

$$P(|\bar{x}-m_x|<\varepsilon)=2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\overline{\sigma_x}}\right)=\beta$$

Термінологія: довірчий інтервал: від $\bar{x}-\varepsilon$ до $\bar{x}+\varepsilon$

Довірча ймовірність β - це ймовірність, що справжнє значення математичного очікування знаходиться довірчому інтервалі.

Приклад 2. Здійснено виміри зросту 9-ти студентів. Визначити довірчий інтервал, в якому математичне очікування зросту всіх студентів знаходиться зі ймовірністю 0.96.

Вибірка: 172, 182, 175, 175, 177, 186, 170, 180, 176

Слайд 9

Розв'язок 2. $\bar{x}=\frac{1}{9}\cdot(172+182+175+175+177+186+170+180+176)=177$

$\bar{\sigma}=\frac{16}{2.95}=5.42$ $\quad 2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{9}}{5.42}\right)=\beta=\mathbf{0.96}$ $\quad \frac{\varepsilon\cdot 3}{5.42}=2.05$ $\quad$ **ε = 3.7**

Це означає, що справжній середній зріст всіх студентів з ймовірністю 0.96 лежить в інтервалі від 173.3 до 180.7 см.

Приклад 3. У скількох студентів потрібно поміряти зріст, щоб визначити інтервал в **2** сантиметри, в якому зі ймовірністю **0.98** лежить середній зріст всіх студентів ?

Слайд 10.

Розв'язок 3. За заданими умовами $\varepsilon = 1$, $\sigma \approx 5.42$, $\beta = 0.98$.

$$2 \cdot \Phi(\frac{1 \cdot \sqrt{n}}{5.42}) = 0.49 \Rightarrow \frac{1 \cdot \sqrt{n}}{5.42} = 2.33 \Rightarrow \boldsymbol{n} = 160$$

Слайд 11

Приклад 4. Припустимо, що відбувається голосування за певного кандидата. Об'єм вибірки – **20** чоловік. Із них **14** проголосували ЗА, тобто **70**%. Яка ймовірність того, що помилка визначення проценту тих, що проголосував ЗА лежить в межах **5** %. За формулою Муавра-Лапласа:

$$P(0.65 < x < 0.75) = \Phi(\frac{n \cdot (p + 0.05) - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}) - \Phi(\frac{n \cdot (p - 0.05) - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}) =$$

$$= 2 \cdot \Phi(\frac{n \cdot 0.05}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}) = 2 \cdot \Phi(\frac{1}{\sqrt{20 \cdot 0.7 \cdot (1-0.7)}}) = 2 \cdot \Phi(\frac{1}{2.05}) = 2 \cdot \Phi(0.49) = 0.38$$

Якщо взяти вибірку **200** чоловік із яких **140** голосували ЗА.

$$P(0.65 < x < 0.75) = 2 \cdot \Phi(\frac{10}{\sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot (1-0.7)}}) = 2 \cdot \Phi(\frac{10}{6.5}) = 2 \cdot \Phi(1.54) = 0.87$$

Якщо взяти вибірку **2000** чоловік із яких **1400** голосували ЗА.

$$P(0.65 < x < 0.75) = 2 \cdot \Phi(\frac{100}{\sqrt{2000 \cdot 0.7 \cdot (1-0.7)}}) = 2 \cdot \Phi(\frac{100}{20.5}) = 2 \cdot \Phi(4.9) = 1$$

ОЦІНКА ДОСТОВІРНОСТІ ГІПОТЕЗИ

Слайд 12.

ОЦІНКА ДОСТОВІРНОСТІ ГІПОТЕЗИ ПРО ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ЗА КРИТЕРІЄМ χ^2

Постановка задачі: Досліджується певна випадкова величина X. Для її аналітичного аналізу потрібно знати її закон розподілу, тобто функцію щільності $f\ (x)$. На основі вимірювань і визначення характеристик формулюється гіпотеза (припущення), що функція щільності розподілу має вигляд $f(x)$. Потрібно перевірити наскільки ця гіпотеза відповідає дійсності.

Технології перевірки:

Європа, Китай, Україна – критерій χ^2

США, Канада – критерій Вількоксона

Росія - критерій Колмогорова

ТЕХНОЛОГІЯ ПЕРЕВІРКИ ЗА КРИТЕРІЄМ χ^2

Задано: Вибірка значень випадкової величини x: $x_1,x_2,\ldots,x_n$

Гіпотетичний закон розподілу функцією щільності: $f(x)$

Ціль: Визначити ймовірність того, що задана вибірка підпорядкована гіпотетичному закону розподілу $f(x)$.

На прикладі вибірки: **12, 11, 9, 16, 10, 6, 7, 14, 5**

Є **гіпотеза**, що задана вибірка підпорядкована нормальному закону.
Його математичне очікування:

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \cdot (12 + 11 + 9 + 16 + 10 + 6 + 7 + 14 + 5) = \mathbf{10}$$

Середньоквадратичне відхилення: $\bar{\sigma} = \frac{R}{a_9} = \frac{16-5}{2.95} = \frac{11}{2.95} = 3.73$

Слайд 13

Технологія перевірки за критерієм χ^2

1. Впорядкувати вибірку за зростанням:

12, 11, 9, 16, 10, 6, 7, 14, 5 → 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16

2. Розбити вибірку на l інтервалів, довільно вибираючи їх границі.

5, 6, 7 | 9, 10, 11, 12 | 14, 16

$m_1 = 3$ **8** $m_2 = 4$ **13** $m_3 = 2$

3. Порахувати кількості $m_1, m_2, \ldots m_l$ елементів вибірки в кожному інтервалі

4. Виходячи з гіпотези, обчислити ймовірності $p_1, p_2, \ldots, p_l$ знаходження випадкової величини в кожному з інтервалів.

$$p_1 = P(-\infty \le X \le 8) = \Phi\left(\frac{8-10}{3.73}\right) - \Phi(-\infty) = 0.5 - \Phi(0.54) = 0.5 - 0{,}2 = \mathbf{0.3}$$

$$p_2 = P(8 \le X \le 13) = \Phi\left(\frac{13-10}{3.73}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{3.73}\right) = \Phi(0.81) + \Phi(0.54) = 0.29 + 0{,}2 = \mathbf{0.49}$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.3 - 0.49 = \mathbf{0.21}$$

Слайд 14

Технологія перевірки за критерієм χ^2

5. Обчислюється чисельне значення критерію χ^2 за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{l} \frac{m_j^{\ 2}}{n \cdot p_j} - n = \sum_{j=1}^{l} \frac{(m_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$$

$$\chi^2 = \frac{3^2}{9 \cdot 0.3} + \frac{4^2}{9 \cdot 0.49} + \frac{2^2}{9 \cdot 0,21} - 9 \ = 3.33 + 3.63 + 2.12 - 9 \ \mathbf{= 0.08}$$

6. По таблицям χ^2 знаходиться ймовірність, що гіпотеза справедлива

Фрагмент таблиці критерія Пірсона

χ^2

l - 1	1 - P										
	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0.02	0.04	**0.1**	0.21	0.446	0.713	1.386	2.41	3.22	4.6	5.99
3	0.12	0.185	0.352	0.584	1	1,42	2.37	3.66	4.63	6.25	7.82

Оскільки l -1= 2, то в 2-му рядку віднаходиться найближче до обчисленого **χ^2=0.08.** **1-P = 0.05.** Відповідно **P=0.95**

Слайд 15

Приклад **5**.

За даними агента А в потенційного противника є 10 підводних човнів, за даними агента В їх 11. Послали агента С. Він візуально спостерігав підводні човни з тактичними номерами: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 10 Що більш ймовірно: наявність 10-ти чи 11-ти підводних човнів ?

Слайд 12

Розв'язок **4**.

$$\begin{array}{ccc} & 1, 3, 4, 6, 8, 9, 10 & \\ 1, 3 & \Big| \quad 5, 6 \quad \Big| & 8, 9, 10 \\ & 3.3 \qquad 6.7 & \end{array}$$

$m_1 = 2$ $\quad m_2 = 2$ $\quad m_3 = 3$

За першою гіпотезою $p_1 = \frac{3}{10}, \quad p_2 = \frac{3}{10}, \quad p_3 = \frac{4}{10}$

$$\chi^2 = \frac{2^2}{7 \cdot 0.3} + \frac{2^2}{7 \cdot 0.3} + \frac{3^2}{7 \cdot 0{,}4} - 7 = 1.9 + 1.9 + 3.21 - 7 = 0.01$$

За другою гіпотезою $p_1 = \frac{3}{11} = 0.273 \quad p_2 = \frac{3}{11} = 0.273 \quad p_3 = \frac{5}{11} = 0.454$

$$\chi^2 = \frac{2^2}{7 \cdot 0.273} + \frac{2^2}{7 \cdot 0.273} + \frac{3^2}{7 \cdot 0{,}454} - 7 = 2.1 + 2.1 + 2.83 - 7 = 0.03$$

Більш ймовірно, що підводних човнів **10.**

12 лекція (22 листопада) ВИКОРИСТАННЯ КРИТЕРІЮ ХІ-КВАДРАТ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОДНОРІДНОСТІ РОЗПОДІЛУ

Слайд 1

ЛЕКЦІЯ 12

ВИКОРИСТАННЯ КРИТЕРІЮ χ^2 ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОДНОРІДНОСТІ РОЗПОДІЛУ

Постановка задачі: Є дві вибірки $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n1}$ та $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n2}$, які презентують дві випадкові величини X_1 і X_2 Потрібно визначити ймовірність того, що X_1 і X_2 підпорядковані одному закону розподілу. Іншими словами, потрібно визначити ймовірність того, що дві задані вибірки презентують одну і ту ж саму генеральну сукупність.

Технологія χ^2 **:**

1. Впорядкувати за зростанням обидві вибірки

2. Розбити обидві вибірки на l інтервалів з чітко визначеними межами, дійсними для обох вибірок.

3. Порахувати кількість елементів $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1l}$ та $m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2l}$ обох вибірок, які попадають в кожен із інтервалів.

4. Обчислити значення критерію χ^2 за формулою**:**

$$\chi^2 = n_1 \cdot n_2 \cdot \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{m_{1,j} + m_{2,j}} \cdot \left(\frac{m_{1,j}}{n_1} - \frac{m_{2,j}}{n_2}\right)^2$$

6. По таблицям χ^2 знаходиться ймовірність, що гіпотеза однорідності розподілу справедлива

Слайд 2

Приклад застосування технології χ^2 для визначення ймовірності однорідності розподілу

Приклад 1. Визначити ймовірність того, що зріст дівчат потоку під порядковано такому ж самому закону розподілення, як і зріст хлопців потоку.

Фрагмент таблиці критерія Пірсона χ^2

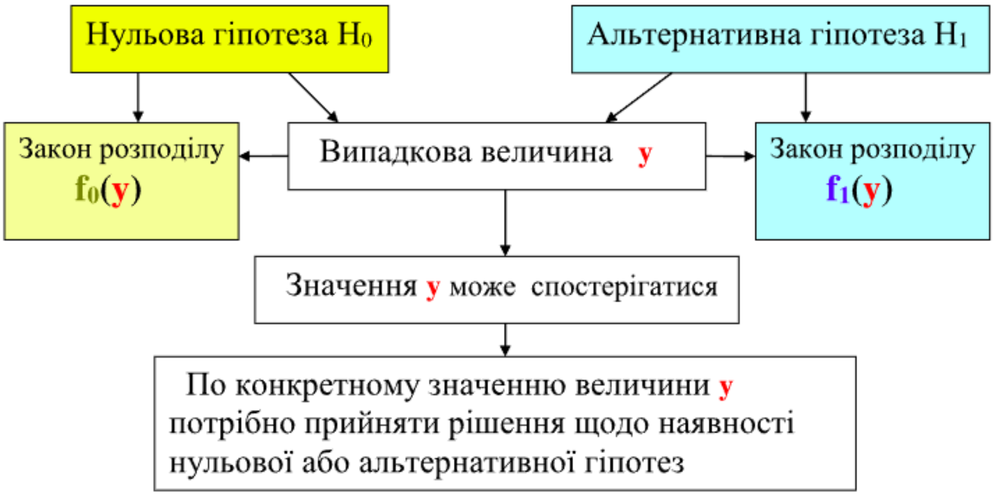
l -1	1 - **P**										
	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0.02	0.04	**0.1**	0.21	0.446	0.713	1.386	2.41	3.22	4.6	5.99
3	0.12	0.185	0.352	0.584	1	1,42	2.37	3.66	4.63	6.25	7.82

Слайд 3

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТАТИСТИЧНОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

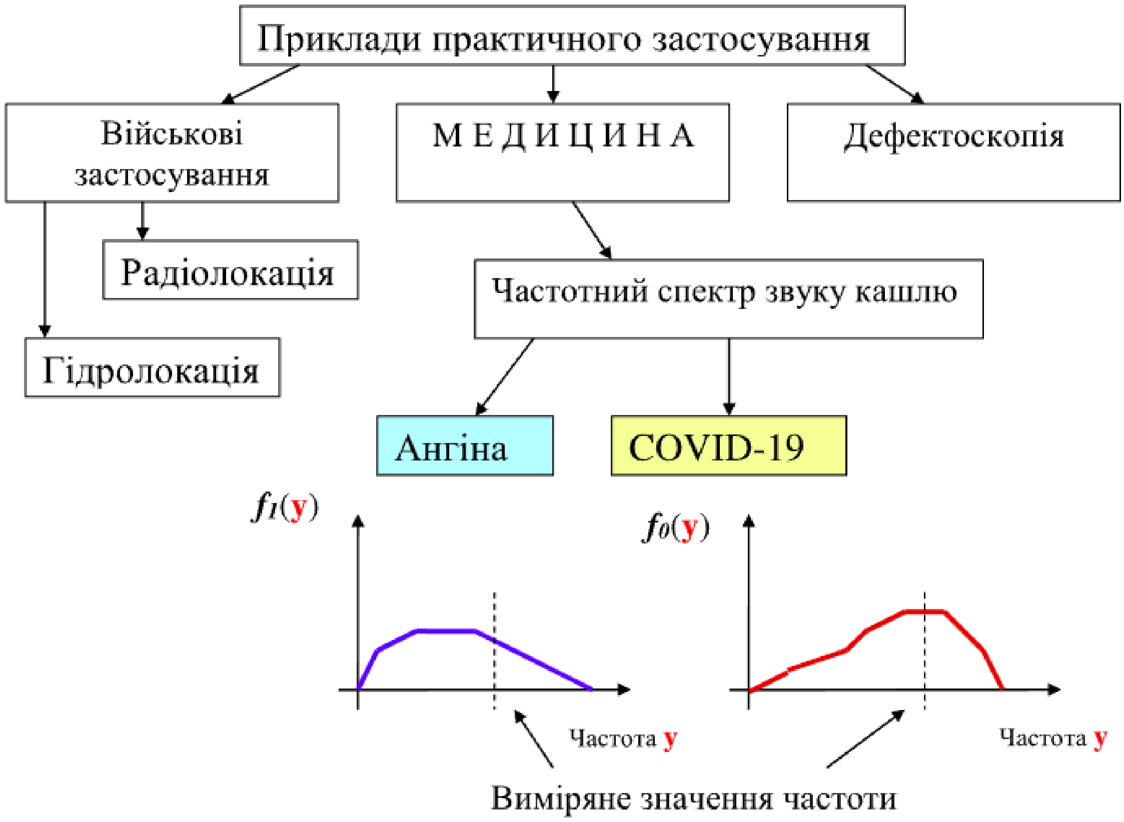
Постановка задачі: Є два явища **A** і **B**, пов'язані з випадковою величиною **y**, яка розподілена за законом $\mathbf{f_0(y)}$, якщо має місце явище А і розподілена за законом $\mathbf{f_1(y)}$, якщо є подія B.

В теорії статистичного прийняття рішень використовується специфічна термінологія.



Слайд 4

Технології статистичного прийняття рішень широко використовується на практиці



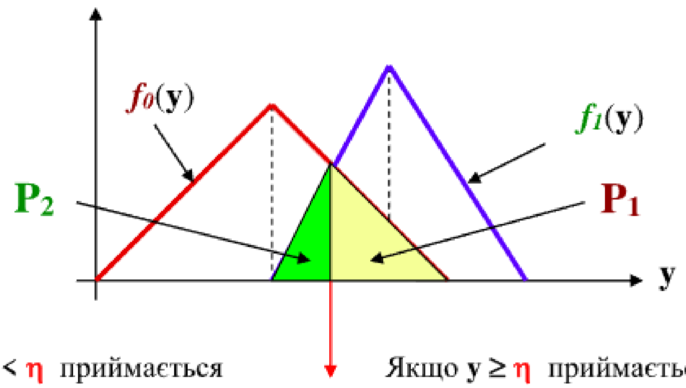
Слайд 5

Помилки прийняття рішення

Помилка 1-го роду: Реально є нульова гіпотеза, але прийнято рішення на користь альтернативної гіпотези. $\mathbf{P_1}$ – ймовірність помилки першого роду. $\mathbf{C_1}$ – ціна помилки першого роду

Помилка 2-го роду: Реально є альтернативна гіпотеза, але прийнято рішення на користь нульової гіпотези. $\mathbf{P_2}$ – ймовірність помилки другого роду. $\mathbf{C_2}$ – ціна помилки другого роду

Приклад. Нульова та альтернативна гіпотези пов’язані за величинами, розподіленими за законом Сімпсона.



Якщо $\mathbf{y} < \eta$ приймається нульова гіпотеза $\mathbf{H_0}$

η

Якщо $\mathbf{y} \geq \eta$ приймається альтернативна гіпотеза $\mathbf{H_1}$

ПОСТУЛАТИ НЕЙМАНА-ПІРСОНА

Слайд 6

Постулати Неймана – Пірсона

1. Якщо не вважати на ймовірність помилки першого роду, то ймовірність помилки другого роду може бути скільки завгодно малою. І навпаки: якщо не вважати на ймовірність помилки другого роду, то ймовірність помилки першого роду можна зробити скільки завгодно малою.

2. Сума ймовірностей помилок 1-го та 2-го роду не може бути меншою за певну величину ξ: $P_1 + P_2 \geq \xi$

3. Оптимальним є правило прийняття рішення, яке мінімізує риск – тобто математичне очікування втрат, пов'язаних з помилковим прийняттям рішення :

$$R = P \cdot P_1 \cdot C_1 + (1-P) \cdot P_2 \cdot C_2$$

де P - апріорна ймовірність нульової гіпотези.

Слайд 7

Прийняття рішення за критерієм Неймана-Пірсона

Нейман і Пірсон показали, що оптимальним рішенням є прийняття нульової гіпотези для тих значень **y**, для яких виконується нерівність:

$$\frac{f_1(y)}{f_0(y)} < \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2}$$

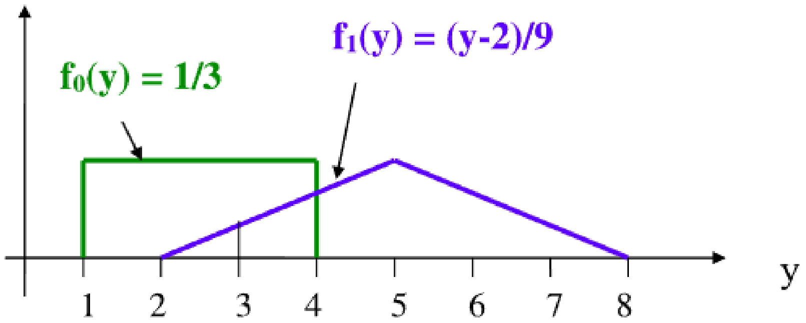
Величина $-\frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2}$ називається порогом прийняття рішення

При одиночному значенні порогу нульова гіпотеза приймається якщо $f_0(y) > f_1(y)$.

Приклад: Нульова гіпотеза – сигнал, рівномірно розподілений в інтервалі від 1 до 4-х вольт. Альтернативна гіпотеза – сума двох таких сигналів, яка розподілена за Сімпсоном. Задано, що ціни помилок першого та другого роду однакові і дорівнюють 100 доларів, але одиночні сигналі зустрічаються в 3 рази рідше, ніж поява відразу двох сигналів. Потрібно виробити правило прийняття рішення, визначити ймовірності помилок 1-го та 2-го роду, а також математичне очікування ризику.

Слайд 8

Розв'язок.



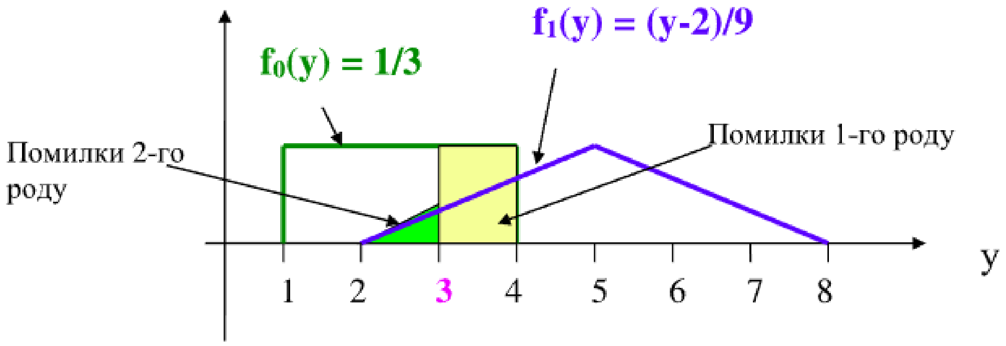
Критерій Неймана-Пірсона **P = 1/4** **(1- P) =3/4**

$$\frac{f_1(y)}{f_0(y)} = \frac{y-2}{3} < \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbf{y < 3}$$

Приймається рішення про наявність одиночного сигналу, якщо сигнал, що спостерігається менше **3** В.

Ймовірність помилки першого роду **P_1 = 1/3**

Ймовірність помилки 2-го роду **P_2 = 1/18**

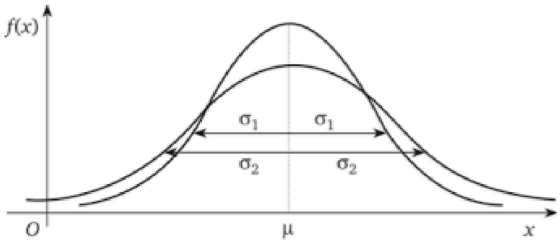


Математичне очікування ризику $\mathbf{R} = \frac{100}{4 \cdot 3} + \frac{100}{4 \cdot 6} = \mathbf{12.5}$

1-ИЙ ВИПАДОК

Слайд 9

1-й типовий випадок: нульова та альтернативні гіпотези пов'язані з нормально розподіленими величинами, що відрізняються середньоквадратичними відхиленнями



Нульова гіпотеза H_0 – середньоквадратичне відхилення σ_1

Альтернативна гіпотеза H_1 – середньоквадратичне відхилення σ_2

Критерій Неймана-Пірсона

$$\frac{f_1(y)}{f_0(y)} < \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2}$$

трансформується до наступного виду:

$$y < \sqrt{2 \cdot \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \cdot \ln(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2})}$$

Приклад 3. Напруга вихідного сигналу мікросхеми є потенційно бракованим вихідним підсилювачем розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням 2.4 В та середньоквадратичним відхиленням 0.4 В. Для справної мікросхеми при такій же номінальній напрузі вихідного сигналу середньоквадратичне відхилення становить 0.2 В. Вартість мікросхеми – 50 доларів, а втрати від установки бракованої – 500 доларів. Ймовірність виготовлення бракованої мікросхеми – 10%. Визначити правило відбраківки мікросхем та ймовірність пропустити браковану мікросхему.

Слайд 10.

Розв'язок 3 : Поріг: Нульова гіпотеза – мікросхема справна. Ціна помилки першого роду - C_1 =50. Ціна помилки другого роду – 500. Апріорна ймовірність того, що мікросхема справна – 0.9. Поріг: $\frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2} = \frac{0.9 \cdot 50}{0.1 \cdot 500} = 0.9$

$$y < \sqrt{2 \cdot \frac{0.4^2 \cdot 0.2^2}{0.4^2 - 0.2^2} \cdot \ln(2 \cdot 0.9)} = \sqrt{2 \cdot \frac{0.16 \cdot 0.04}{0.12} \cdot 0.5878} = \sqrt{0.0627} = 0.25$$

За заданих умов правило прийняття рішення про те, що мікросхема справна за критерієм Неймана-Пірсона: 2.4**- 0.25** < V < 2.4 + **0.25**

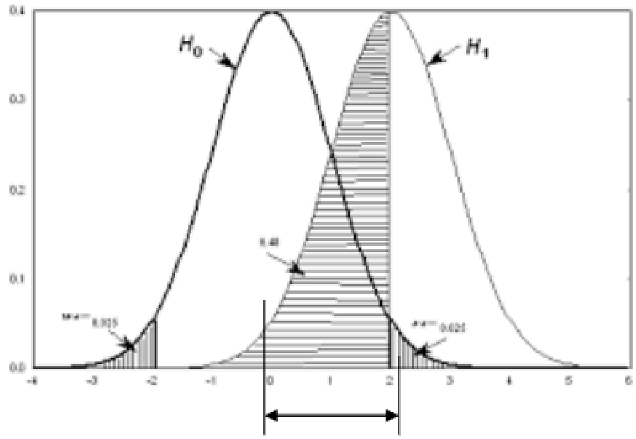
Ймовірність того, що буде пропущена бракована мікросхема, тобто ймовірність P_2 помилки другого роду:

$$P = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0.25}{0.4}\right) = 2 \cdot \Phi(0.625) = 2 \cdot 0.234 = \mathbf{0.468}$$

2-ИЙ ВИПАДОК

Слайд 11

2-й типовий випадок: нульова та альтернативні гіпотези пов'язані з нормально розподіленими величинами, що відрізняються математичними очікуваннями



Нульова та альтернативна гіпотези пов'язані з нормально розподіленими випадковими величинами, які мають однакові середньоквадратичні відхилення, а їх математичні очікування відрізняються на величину **x**

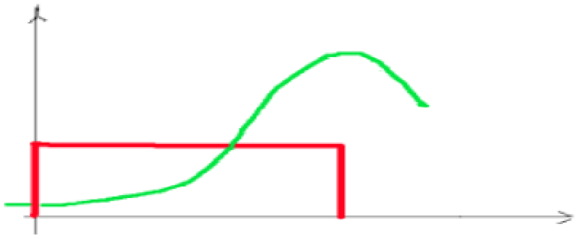
Критерій Неймана-Пірсона трансформується до наступного виду:

$$y < \frac{\sigma^2}{x} \cdot \ln\left(\frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2} \cdot e^{\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}}\right)$$

Слайд 12

Приклад 3. При виконанні нульової гіпотези випадкова величина розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням **3** і середньоквадратичним відхиленням **2.** При виконанні альтернативної гіпотези випадкова величина розподілена рівномірно від **0** до **3**-х. Ціна помилки **2**-го роду становить 1000 доларів, а ціна помилки **1**-го роду – **500** доларів. Нульова гіпотеза на практиці зустрічається зі ймовірністю **0.8**, а альтернативна – зі ймовірністю **0.2**. Визначити правило прийняття рішення, а також ймовірності помилок першого та другого роду.

Слайд 13. *Розв'язок* 3.



$f_0(y) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(y-3)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ $f_1(y) = 1/3$ $\frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2} = \frac{0.8 \cdot 500}{0.2 \cdot 1000} = \mathbf{2}$

$$\frac{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{3} \cdot e^{\frac{(y-3)^2}{2\cdot\sigma^2}} < 2 \Rightarrow e^{\frac{(y-3)^2}{2\cdot\sigma^2}} < \frac{2 \cdot 3}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} = 1.2 \Rightarrow (y-3)^2 < 2 \cdot \sigma^2 \cdot \ln(1.2) = 1.44$$

Два варіанти: $y - 3 < \sqrt{1.44} = 1.2$ та $3 - y < \sqrt{1.44} = 1.2$

Наявній ситуацій відповідає другий варіант: $y > 3 - 1.2 = 1.8$

Тобто, при рішення на користь нульової гіпотези слід приймати при $\boldsymbol{y \geq 1.8}$

Ймовірність помилки 1-го роду:

$$P_1 = P(-\infty < y \leq 1.8) = \Phi(\frac{1.8-3}{2}) - \Phi(-\infty) = \Phi(-0.6) + 0.5 = \mathbf{0.27}$$

Ймовірність помилки 2-го роду: 1.2 ·(1/3) = **0.4**

Слайд 14.

Критерій Неймана-Пірсона для визначення оптимального прийняття рішення може бути застосований і для дискретних випадкових величин. При цьому він трансформується наступним чином: рішення на користь нульової гіпотези приймається для тих значень ***y***, для яких виконується умова:

$$\frac{p_1(y)}{p_0(y)} < \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2}$$

Приклад 2. Нульова гіпотеза: величина y - це дискретна випадкова величина, яка з рівною ймовірністю приймає значення від 1 до 12-ти. Альтернативна гіпотеза – це дискретна величина, що має біноміальний закон розподілу з параметрами ***n***=12, ***p***=0.6. Ціни помилок першого та другого роду однакові. Нульова гіпотеза зустрічається однаково часто з альтернативною. Визначити критерій прийняття рішення за критерієм Неймана-Пірсона.

Слайд 15.

Розв'язок 1. $p_0(y) = C^y_8 \cdot 0.3^y \cdot 0.7^{8-y}$, $p_1(y) = C^y_{12} \cdot 0.6^y \cdot 0.4^{12-y}$,

Поріг прийняття рішення : $\dfrac{P \cdot C_1}{(1-P)\cdot C_2} = 2$.

Критерій Неймана-Пірсона:

$$\frac{p_1(y)}{p_0(y)} = \frac{12! \cdot (8-y)! \cdot 0.4^{12-y}}{8! \cdot (12-y)! \cdot 0.7^{8-y}} \cdot 0.5^y$$

y = 1: $\dfrac{p_1(y)}{p_0(y)} = 0.00152 < 2$

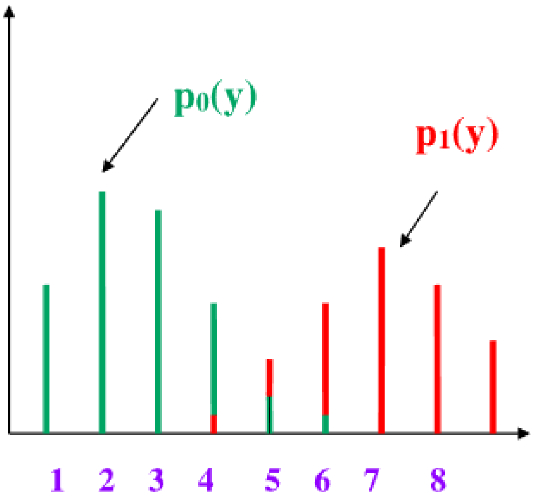
y = 2: $\dfrac{p_1(y)}{p_0(y)} = 0.0084 < 2$

y = 3: $\dfrac{p_1(y)}{p_0(y)} = 0.049 < 2$

y = 4: $\dfrac{p_1(y)}{p_0(y)} = 0.31 < 2$

y = 5: $\dfrac{p_1(y)}{p_0(y)} = 2.16 > 2$

y = 6: $\dfrac{p_1(y)}{p_0(y)} = 17.65 > 2$



Відповідь: при **y** < **5** оптимальним є приймати рішення на користь нульової гіпотези.

Ймовірність помилки 1-го роду (є нульова гіпотеза, а ситуація розпізнається як альтернативна гіпотеза)

$$P_1 = C^5_8 \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^3 + C^6_8 \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^2 + C^7_8 \cdot 0.3^7 \cdot 0.7^1 + 0.3^8 =$$
$$= 0.047 + 0.01 + 0.0012 + 0.00006 \approx 0.058$$

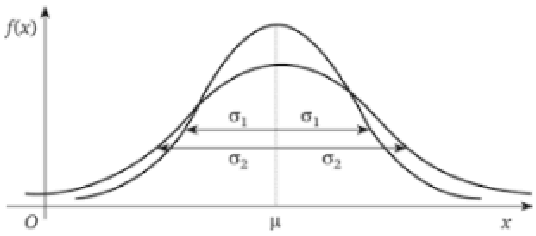
Слайд 16

Інші критерії прийняття рішення

Для деяких практичних застосувань використовують інші методи визначення критеріїв прийняття рішення.

Зокрема, для отримання способу прийняття рішення часто використовується використовується критерій граничної помилки першого (або другого) роду.

Приклад 3. Справна мікросхема має вихідну напругу, розподілену за нормальним законом з математичним очікуванням **2.4** В і середньоквадратичним відхиленням **0.1** В. Потенційно бракована мікросхема формує вихідну напругу, яка нормально розподілена з математичним очікуванням **2.4** і середньоквадратичним відхиленням **0.3** В. При яких відхиленнях від номінальної напруги 2.4 В. потрібно бракувати мікросхему, щоб ймовірність відбраковки справної мікросхеми не перевищувала **0.2** ?



Слайд 17

Розв'язок 3. Якщо прийнято критерій прийняття рішення на користь того, що мікросхема справна (нульова гіпотеза H_0) при значеннях вихідної напруги $2.4-\Delta < y < 2.4+\Delta$, то для справної мікросхеми рішення буде правильне з ймовірністю:

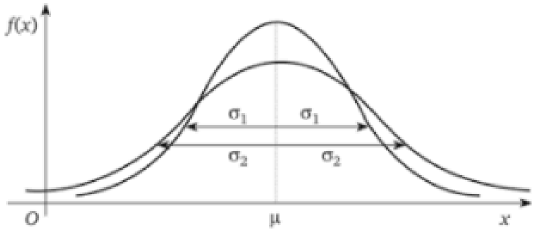
$$2\cdot\Phi(\frac{\Delta}{\sigma_0}) = 0.8 \Rightarrow \frac{\Delta}{0.1} = 1.28 \Rightarrow \Delta = 0.1\cdot 1.28 = \mathbf{0.128}$$

Це означає, що мікросхем бракується, якщо вихідна напруга менша за 2.272 В і більша за 2.528 В.

13 лекція (29 листопада)

Слайд 1 **Л Е К Ц І Я 14**

1-й типовий випадок: нульова та альтернативні гіпотези пов'язані з нормально розподіленими величинами, що відрізняються середньоквадратичними відхиленнями



Нульова гіпотеза H_0 – середньоквадратичне відхилення σ_1

Альтернативна гіпотеза H_1 – середньоквадратичне відхилення σ_2

Критерій Неймана-Пірсона

$$\frac{f_1(y)}{f_0(y)} < \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2}$$

трансформується до наступного виду:

$$y < \sqrt{2 \cdot \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \cdot \ln(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2})}$$

Приклад 1. Напруга вихідного сигналу мікросхеми с потенційно бракованим вихідним підсилювачем розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням 2.4 В та середньоквадратичним відхиленням 0.4 В. Для справної мікросхеми при такій же номінальній напрузі вихідного сигналу середньоквадратичне відхилення становить 0.2 В. Вартість мікросхеми – 50 доларів, а втрати від установки бракованої – 500 доларів. Ймовірність виготовлення бракованої мікросхеми – 10%. Визначити правило відбраківки мікросхем та ймовірність пропустити браковану мікросхему.

Слайд 11.

Розв'язок 1 : Поріг: Нульова гіпотеза – мікросхема справна. Ціна помилки першого роду - C_1 =50. Ціна помилки другого роду – 500. Апріорна ймовірність того, що мікросхема справна – 0.9. Поріг:

$$\frac{P \cdot C_1}{(1-P)\cdot C_2} = \frac{0.9 \cdot 50}{0.1 \cdot 500} = 0.9$$

$$y < \sqrt{2 \cdot \frac{0.4^2 \cdot 0.2^2}{0.4^2 - 0.2^2} \cdot \ln(2 \cdot 0.9)} = \sqrt{2 \cdot \frac{0.16 \cdot 0.04}{0.12} \cdot 0.5878} = \sqrt{0.0627} = 0.25$$

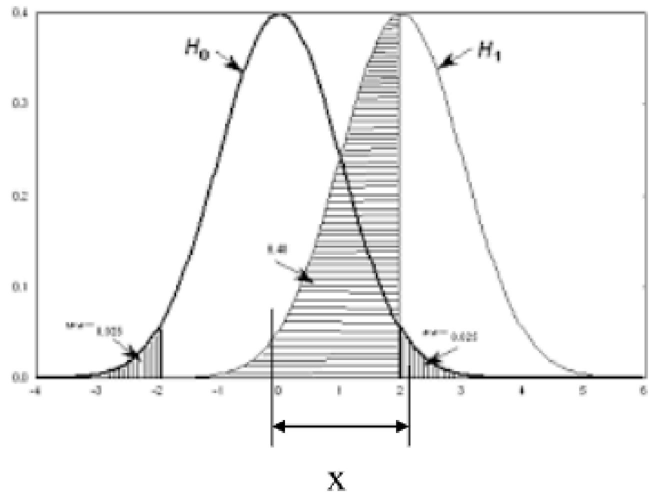
За заданих умов правило прийняття рішення про те, що мікросхема справна за критерієм Неймана-Пірсона: 2.4**- 0.25** < V < 2.4 + **0.25**

Ймовірність того, що буде пропущена бракована мікросхема, тобто ймовірність P_2 помилки другого роду:

$$P = 2 \cdot \Phi(\frac{0.25}{0.4}) = 2 \cdot \Phi(0.625) = 2 \cdot 0.234 = \mathbf{0.468}$$

Слайд 3

2-й типовий випадок: нульова та альтернативні гіпотези пов'язані з нормально розподіленими величинами, що відрізняються математичними очікуваннями



Нульова та альтернативна гіпотези пов'язані з нормально розподіленими випадковими величинами, які мають однакові середньоквадратичні відхилення, а їх математичні очікування відрізняються на величину **x**

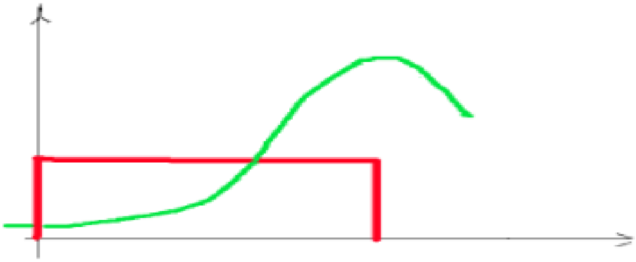
Критерій Неймана-Пірсона трансформується до наступного виду:

$$y < \frac{\sigma^2}{x} \cdot \ln\left(\frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2} \cdot e^{\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}}\right)$$

Слайд 4

Приклад 2. При виконанні нульової гіпотези випадкова величина розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням **3** і середньоквадратичним відхиленням **2.** При виконанні альтернативної гіпотези випадкова величина розподілена рівномірно від **0** до **3**-х. Ціна помилки **2**-го роду становить 1000 доларів, а ціна помилки **1**-го роду – **500** доларів. Нульова гіпотеза на практиці зустрічається зі ймовірністю **0.8**, а альтернативна – зі ймовірністю **0.2**. Визначити правило прийняття рішення, а також ймовірності помилок першого та другого роду.

Слайд 5. *Розв'язок* 2.



$$f_0(y) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(y-3)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

$f_1(y) = 1/3$ $\quad \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2} = \frac{0.8 \cdot 500}{0.2 \cdot 1000} = \mathbf{2}$

$$\frac{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{3} \cdot e^{\frac{(y-3)^2}{2 \cdot \sigma^2}} < 2 \quad \Rightarrow e^{\frac{(y-3)^2}{2 \cdot \sigma^2}} < \frac{2 \cdot 3}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} = 1.2 \Rightarrow$$

$(y-3)^2 < 2 \cdot \sigma^2 \cdot \ln(1.2) = 1.44$

Два варіанти: $y - 3 < \sqrt{1.44} = 1.2$ та $3 - y < \sqrt{1.44} = 1.2$

Наявній ситуацій відповідає другий варіант: $y > 3 - 1.2 = 1.8$

Тобто, при рішення на користь нульової гіпотези слід приймати при $\mathbf{y \geq 1.8}$

Ймовірність помилки 1-го роду:

$$P_1 = P(-\infty < y \leq 1.8) = \Phi(\frac{1.8-3}{2}) - \Phi(-\infty) = \Phi(-0.6) + 0.5 = \mathbf{0.27}$$

Ймовірність помилки 2-го роду: 1.2 ·(1/3) = **0.4**

Слайд 6.

Критерій Неймана-Пірсона для визначення оптимального прийняття рішення може бути застосований і для дискретних випадкових величин. При цьому він трансформується наступним чином: рішення на користь нульової гіпотези приймається для тих значень ***y***, для яких виконується умова:

$$\frac{p_1(y)}{p_0(y)} < \frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2}$$

Приклад 3. Нульова гіпотеза: величина y - це дискретна випадкова величина, яка з рівною ймовірністю приймає значення від 1 до 12-ти. Альтернативна гіпотеза – це дискретна величина, що має біноміальний закон розподілу з параметрами ***n***=12, ***p***=0.6. Ціни помилок першого та другого роду однакові. Нульова гіпотеза зустрічається однаково часто з альтернативною. Визначити критерій прийняття рішення за критерієм Неймана-Пірсона.

Слайд 6.

Розв'язок 3. $\mathbf{p_0(y) = 1/12}$, $\mathbf{p_1(y) = C^y_{12} \cdot 0.6^y \cdot 0.4^{12-y}}$,

Порог прийняття рішення : $\frac{P \cdot C_1}{(1-P) \cdot C_2} = 1$.

Критерій Неймана-Пірсона:

$$\frac{p_1(y)}{p_0(y)} = 12 \cdot C_{12}^y \cdot 0.6^y \cdot 0.4^{12-y} < 1$$

y = 4: $12 \cdot C_{12}^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^8 = 0.5 < 1$

y = 5: $12 \cdot C_{12}^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^7 = 1.21 > 1$

y = 8: $12 \cdot C_{12}^8 \cdot 0.6^8 \cdot 0.4^4 = 2.55 > 1$

y = 9: $12 \cdot C_{12}^9 \cdot 0.6^9 \cdot 0.4^3 = 1.7 > 1$

y = 10: $12 \cdot C_{12}^{10} \cdot 0.6^{10} \cdot 0.4^2 = 0.77 < 1$

Відповідь: при **y < 5** та **y > 9** оптимальним є приймати рішення на користь нульової гіпотези.

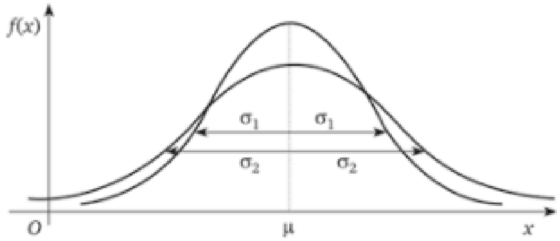
Слайд 8

Інші критерії прийняття рішення

Для деяких практичних застосувань використовують інші методи визначення критеріїв прийняття рішення.

Зокрема, для отримання способу прийняття рішення часто використовується використовується критерій граничної помилки першого (або другого) роду.

Приклад 4. Справна мікросхема має вихідну напругу, розподілену за нормальним законом з математичним очікуванням **2.4** В і середньоквадратичним відхиленням **0.1** В. Потенційно бракована мікросхема формує вихідну напругу, яка нормально розподілена з математичним очікуванням **2.4** і середньоквадратичним відхиленням **0.3** В. При яких відхиленнях від номінальної напруги 2.4 В. потрібно бракувати мікросхему, щоб ймовірність відбраковки справної мікросхеми не перевищувала **0.2** ?



Слайд 9

Розв'язок 4. Якщо прийнято критерій прийняття рішення на користь того, що мікросхема справна (нульова гіпотеза H_0) при значеннях вихідної напруги $2.4-\Delta < y < 2.4+\Delta$, то для справної мікросхеми рішення буде правильне з ймовірністю:

$$2\cdot\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_0}\right)=0.8 \Rightarrow \frac{\Delta}{0.1}=1.28 \Rightarrow \Delta = 0.1\cdot 1.28 = \mathbf{0.128}$$

Це означає, що мікросхем бракується, якщо вихідна напруга менша за 2.272 В і більша за 2.528 В.

РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

$X \to Y$

Слайд 10 $Y = R(X)$

РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Постановка задачі. Є дві вибірки кореляційно пов'язаних між собою величин: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ та $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Потрібно побудувати функцію залежності $Y = R(X)$ яка з мінімальною похибкою дозволяє відобразити залежність **Y** від **X**.

Лінійна регресія. В найпростішому випадку для відображення залежності **Y** від **X** використовується лінійна функція:

$$Y = \alpha + \beta \cdot X$$

Приклади лінійної регресії : Студенти вивели: Y- тривалість життя S - вага сигарет на рік A- літрів алкоголю на рік

$$Y = 75.6 - 0.396 \cdot S \quad (\bar{s} = 2) \qquad Y = 75.6 - 0.077 \cdot A$$

Регресійна залежність тривалості життя (у) від зросту (х) в Україні:

Для жінок: $\mathbf{y = 100.1 - 0.18 \cdot x}$ Для чоловіків: $\mathbf{y = 111 - 0.25 \cdot x}$

Теоретично доведено, що помилка мінімальна коли:

$$\alpha = \bar{y} - \rho \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \bar{x} \quad \text{та} \quad \beta = \rho \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Мат. очікування помилки регресії $m(\Delta) = \sigma_y^2 \cdot (1 - \rho^2)$

Приклад 5. В одній із груп Вашого потоку взято вибірку значень зросту та розміру черевик. Вивести формулу лінійної регресії залежності розміру черевика від зросту.

X:	170	175	178	179	180	180	183	193	194
Y:	41	42	43	42	43	44	45	44	47

Слайд 10.

Розв'язок 5.

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{j=1}^{9} x_j = \mathbf{181.3} \quad \sigma_x = \frac{R}{a_9} = \frac{194-170}{2.95} = \mathbf{8.14}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{j=1}^{9} y_j = \mathbf{43.4} \quad \sigma_y = \frac{R}{a_9} = \frac{47-41}{2.95} = \mathbf{2}$$

Коваріація **cov** = $\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{9}(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) =$ (11.3·2.4 + 6.3·1.4 + 3.3·0.4 + 2.3·1.4 + 1.3·0.4 - 1.3·0.6 + 1.7·1.6 + 11.7·0.6 + 12.7·3.6)/8 = **11.96**

Коефіцієнт кореляції $\rho = \frac{\text{cov}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{11.96}{8.14 \cdot 2} =$ **0.73**

$$\alpha = \bar{y} - \rho \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \bar{x} = 43.4 - 0.73 \cdot \frac{2}{8.14} \cdot 181.3 = 10.88$$

$$\beta = \rho \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.73 \cdot \frac{2}{8.14} = 0.18$$

Формула лінійної регресії : **Y = α + β·X = 10.88 + 0.18·X**

МНОЖИННА РЕГРЕСІЯ

Слайд 12.

МНОЖИННА РЕГРЕСІЯ

Множинна регресія – це лінійна регресія від багатьох змінних:

$$y = \alpha + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + ... + \beta_n \cdot x_n$$

Задано: ***n*** вибірок X: **X_{11}, X_{12}, … X_{1m},**

по ***m*** чисел в кожній **X_{21}, X_{22}, … X_{2m},**

. . . . .

X_{n1}, X_{n2}, … X_{nm}

а також вибірку **Y:** **Y_1, Y_2, … Y_m,**

Потрібно визначити**:** **α, β_1, β_2,…,β_n**

1. Формується коваріаційна матриця:

$$L = \begin{vmatrix} \mathrm{cov}_{11}.\mathrm{cov}_{12}.....\mathrm{cov}_{1n} \\ \mathrm{cov}_{21}.\mathrm{cov}_{22}.....\mathrm{cov}_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{cov}_{n1}.\mathrm{cov}_{n2}.....\mathrm{cov}_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Обчислюється її визначник ΔL
3. Формується ***n*** модифікованих матриць, кожна ***j***-та з яких отримується заміною ***j*** -го стовпцями коваріації всіх X з величиною Y

$$L_j = \begin{vmatrix} \mathrm{cov}_{11}.\mathrm{cov}_{12}...\mathrm{cov}_{yx1}...\mathrm{cov}_{1n} \\ \mathrm{cov}_{21}.\mathrm{cov}_{22}...\mathrm{cov}_{yx2}...\mathrm{cov}_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{cov}_{n1}.\mathrm{cov}_{n2}...\mathrm{cov}_{yxn}...\mathrm{cov}_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Обчислюються визначники модифікованих матриць ΔL_1 … ΔL_n і коефіцієнти β

$$\beta_j = \frac{\Delta L_j}{\Delta L}$$

5. Значення $\alpha = \overline{y} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \overline{x_j}$

14 лекція (6 грудня) Елементи теорії випадкових процесів

Слайд 1

Л Е К Ц І Я 14

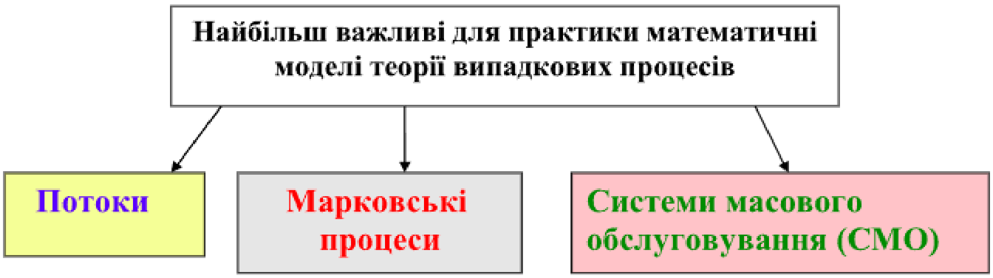
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Математика надає нам абстрактні моделі, для яких існує готовий апарат аналізу. Ці моделі можуть бути використані для аналізу практичних задач

Апарат для аналізу і вирішення практичних задач

Математична модель абстрагується від конкретики і дає рішення

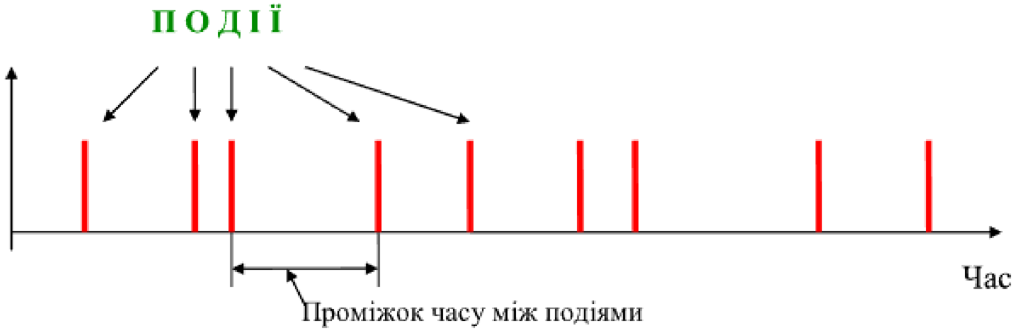
Практична задача завжди відрізняється від моделі. Тому безглуздо робити розрахунки з точністю, яка менша за помилку неспівпадіння реальної задачі та математичної моделі яка застосовується для її вирішення



Слайд 2

П О Т О К И

Потік – це математична модель подій, які трапляються через випадкові проміжки часу. При цьому від сутності самих подій модель абстрагується.



Характеристики потоків

Інтенсивність потоку (λ) – математичне очікування подій в одиницю часу

Математичне очікування часового інтервалу між подіями - τ

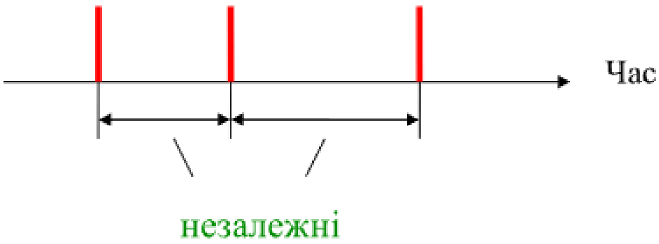
$$\lambda = \frac{1}{\tau}$$

Слайд 3

Пуассонівські потоки

Потік називається Пуасонівським, якщо він відповідає умовам:

1. Стаціонарності – інтенсивність потоку не змінюється з часом
2. Ординарності - дві події не можуть трапитися одночасно
3. Інтервали між подіями не корельовані, тобто інтервали між сусідніми парами подій незалежні:



ФОРМУЛИ ДЛЯ ПОТОКУ ПУАССОНА

Слайд 4

Основні формули для потоку Пуассона

Ймовірність P_k того, що за час t трапиться рівно k подій:

$$P_k = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Математичне очікування m_k кількості подій за час t : $m_k = \lambda \cdot t$

Дисперсія D_k кількості подій за час t : $D_k = \lambda \cdot t$ $\qquad \sigma = \sqrt{\lambda \cdot t}$

Ймовірність P_k того, що за час t трапиться від a до b подій:

$$P_k(a \le k \le b) = \Phi\left(\frac{b - \lambda \cdot t}{\sqrt{\lambda \cdot t}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \lambda \cdot t}{\sqrt{\lambda \cdot t}}\right)$$

Слайд 5

Приклад **1**. Студентка Анастасія з Дніпра любить піцу Гавайська, має сьогодні 3 пари та побачення о 15:00. Замовляє піцу в улюбленій піцерії на перерві о 12-00. Оператор каже, що у них на кухні працює лише один кухар, тому час, який залежить від типу піци є випадковий, так, що моменти доставки підпорядковані потоку Пуассону з середнім інтервалом 30 хвилин. Її замовлення четверте в черзі. Визначити ймовірність того, що вона не піде на побачення голодна.

Комп'ютерна генерація потоку Пуассона

Генерується за допомогою вбудованого генератора **r : 0< r <1**

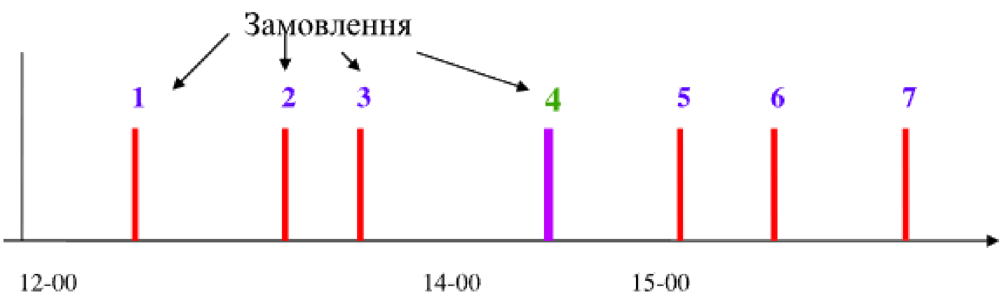
Інтервал часу між подіями = $-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln r$

Центральна гранична теорема для потоків.

Якщо потік S утворюється як сума різних *n* потоків $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то при зростанні *n* сумарний потік прямує до потоку Пуассона, інтенсивність λ_S якого дорівнює сумі інтенсивностей потоків, які його складають:

$$\lambda_S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$$

Слайд 6 *Розв'язок* **1**.



Для того, щоб Анастасія змогла поласувати піцею вона має бути доставлена їй в інтервалі часу від 14-00 (кінець пари) до 15-00.

Для цього потрібно, щоб:

a) - кількість порцій піци, вироблених до 15-00 було не менше 4-х, тобто щоб піца для Анастасії не була виготовлена після терміну очікування.

b) - кількість порцій піци, виготовлених до 14-00 не більше 4-х, тобто, щоб не виникло ситуації, коли піца прибуде під час пари.

Для виконання умови ***a***) потрібно порахувати ймовірність того, що за 3 години (t_1=3) кількість вироблених піц ,буде більше 3. Інтенсивність $\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.5} = 2$:

$$P_0 = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-2 \cdot 3} = 0.0025 \qquad P_1 = \frac{(2 \cdot 3)^1}{1!} \cdot e^{-2 \cdot 3} = 0.0149$$

$$P_2 = \frac{(2 \cdot 3)^2}{2!} \cdot e^{-2 \cdot 3} = 0.0446 \qquad P_3 = \frac{(2 \cdot 3)^3}{3!} \cdot e^{-2 \cdot 3} = 0.0892$$

$$\boldsymbol{P_a} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = 1 - 0.1512 = \mathbf{0.8488}$$

Для виконання умови ***b***) потрібно порахувати ймовірність того, що за 2 години (t_2=2) кількість вироблених піц ,буде не більше 3.

$$P_0 = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-2 \cdot 2} = 0.018 \qquad P_1 = \frac{(2 \cdot 2)^1}{1!} \cdot e^{-2 \cdot 2} = 0.073$$

$$P_2 = \frac{(2 \cdot 2)^2}{2!} \cdot e^{-2 \cdot 2} = 0.1465 \qquad P_3 = \frac{(2 \cdot 2)^3}{3!} \cdot e^{-2 \cdot 2} = 0.1954$$

$$\boldsymbol{P_b} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \mathbf{0.433}$$

Ймовірність одночасного виконання обох умов:

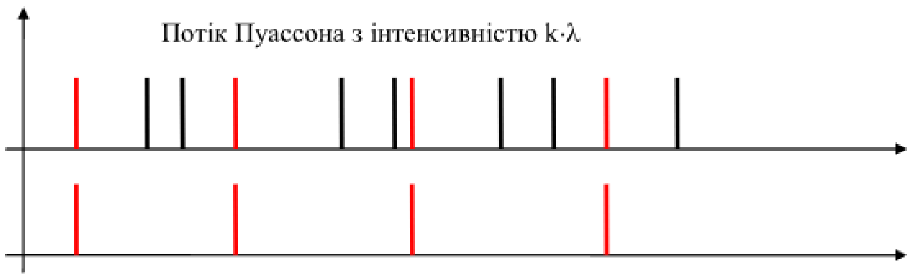
$$\mathbf{P_a \cdot P_b = 0.8488 \cdot 0.433 = 0.367}$$

ПОТІК ЕРЛАНГА К-ГО ПОРЯДКУ

Слайд 7

Потік Ерланга *k*-го порядку

Потік Ерланга утворюється з потоку Пуассону, інтенсивність якого в ***k*** раз більше інтенсивності потоку Ерланга шляхом його просіювання, тобто вибору кожної ***k***-ї події



Розрахунки для потоків Ерланга ***k***-порядку здійснюються через розрахунки відповідних породжуючих потоків Пуассона, інтенсивність яких в ***k*** раз більша.

Коефіцієнт кореляції між суміжними інтервалами для потоків Ерланга ***k***-порядку становить: $\rho = -\dfrac{k-1}{k+5}$

Мат.очікування інтервалу між подіями $m = \dfrac{1}{\lambda}$

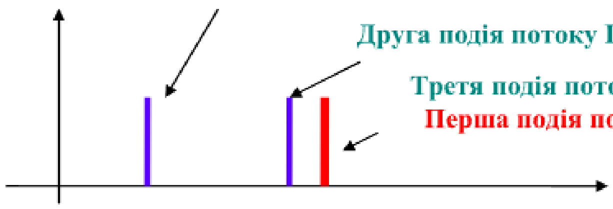
Середньоквадратичне відхилення $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{k} \cdot \lambda}$

Приклад **2.** Під час лекції мама запросила старосту на сніданок. Він попросив маму побути на лекції та знає, що в середньому кожні 10 хвилин йому пишуть одногрупники (за потоком Пуассона). Також відомо, що в середньому кожні 10 хвилин до нього, як до старости звертається викладач, причому ці звернення підпорядковані потоку Ерланга третього порядку. Яка ймовірність того, що ніхто не помітить відсутність старости на лекції протягом 5-ти хвилин ?

Слайд 8

Розв'язок **2**. Ймовірність того, що з 5 хвилин старосту не потурбують одногрупники $P_{0P} = e^{-0.1\cdot 5} =$ **0.61**

Для розрахунку потоку Ерланга 3-го порядку аналізуємо породжуючий потік Пуассона з інтенсивністю $\lambda_П = 3\cdot\lambda = 3\cdot 0.1 = 0.3$



Ймовірність того, що не трапиться події потоку Ерланга (не буде звернення з боку викладача) є сумою: ймовірності того, що не буде жодної події породжуючого потоку Пуассона, буде одна подія потоку Пуассона, буде дві події потоку Пуассона

$$P_{0_p} = e^{-0.3\cdot 5} = 0.223$$

$$P_{1_p} = 0.3\cdot 5\cdot e^{-0.3\cdot 5} = 0.335$$

$$P_{2_p} = \frac{(0.3\cdot 5)^2}{2}\cdot e^{-0.3\cdot 5} = 0.25$$

$P_{0E} = 0.223 + 0.335 + 0.25 =$ **0.81**

Ймовірність того, що староста спокійно перекусить:

$$P = P_{0P}\cdot P_{0E} = 0.61\cdot 0.81 = 0.4941$$

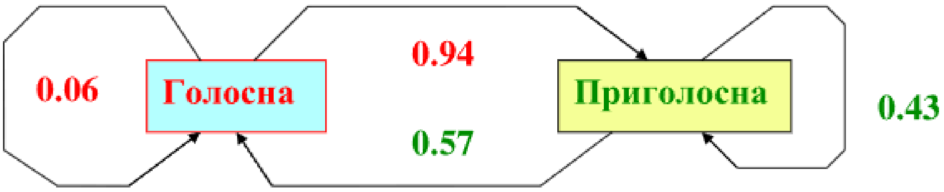
Слайд 9

Процеси Маркова

Процеси Маркова – наступна математична модель теорії випадкових процесів, які активно і широко використовуються для вирішення практичних задач в інформаційних технологіях.

Процеси Маркова – математична модель системи, яка має певну кількість станів і може переходити із одного стану в інший. Перехід із поточного стану в інші стани відбувається випадковим чином. При цьому, ймовірності переходу в інші стани залежать тільки від поточного стану.

Приклад: В українській мові перехід від приголосної до голосної описується наступним процесом Маркова:



Слайд 10

Марковські процеси

ДИСКРЕТНІ

Перехід між станами відбувається в фіксовані моменти часу. На практиці через рівні проміжки часу.

Приклад: Виконання команд в процесорі відбувається по тактам, після кожного з яких він або продовжує виконувати поточну команду, або переходить до наступної

НЕПЕРЕРВНІ

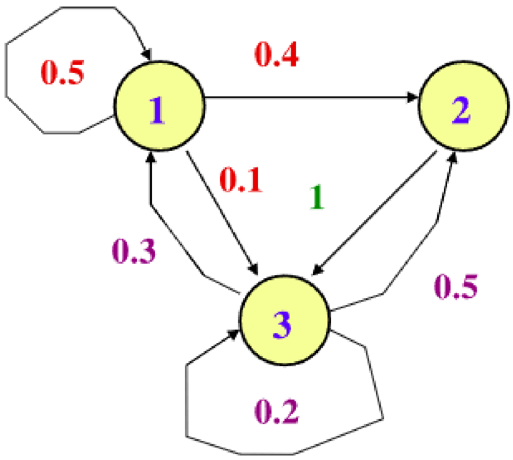
Перехід між станами відбувається в довільні моменти часу

Приклад: Кількість людей в касі магазину

Слайд 11.

ДИСКРЕТНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ
(Ланцюги Маркова)

Задаються: графом переходів або матрицею переходів



	1	2	3
1	0.5	0.4	0.1
2	0	0	1
3	0.3	0.4	0.2

Слайд 12

Ймовірність знаходження процесу в кожному із станів після певної кількості кроків може бути обчислена з використанням **процедури Колмогорова-Чепмена**

	1	2	3	крок 0	крок 1	крок 2	крок 3	крок 4
1	0.5	0.4	0.1	1	0.5	0.28	0.281	0.252
2	0	0	1	0	0.4	0.25	0.347	0.298
3	0.3	0.5	0.2	0	0.1	0.47	0.372	0.449

2-й крок: $0.5 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.28$

$0.4 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.25$

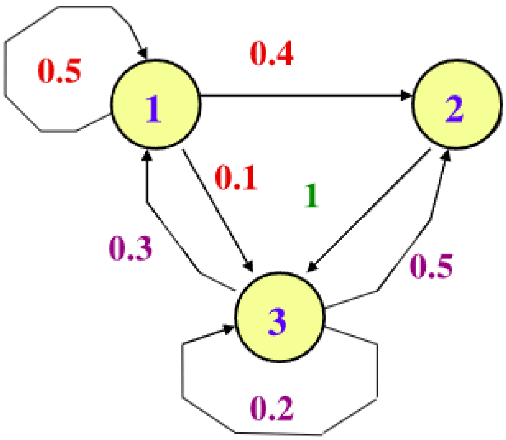
$0.1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.47$

Ймовірності знаходження системи у кожному із станів через певну кількість кроків, незалежно від початкового стану, сходяться до **стаціонарних ймовірностей.**

Слайд 13.

Аналітичне визначення стаціонарних ймовірностей

Позначимо через p_1, p_2, p_3 – стаціонарні ймовірності



Значення *n* стаціонарних ймовірностей знаходяться як результат розв'язку системи рівнянь: одного нормуючого і *n*-1 балансних.

Нормуюче рівняння: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Балансне рівняння для 1-го стану:

$$-0.5 \cdot p_1 + 0.3 \cdot p_3 = 0$$

Балансне рівняння для 3-го стану:

Слайд 14

Система рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -0.5 \cdot p_1 + 0.3 \cdot p_3 = 0 \\ 0.1 \cdot p_1 + p_2 - 0.8 \cdot p_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок: $p_1 = 0.256$ $p_2 = 0.316$ $p_3 = 0.428$

15 лекція (13 грудня) ПРОЦЕСИ МАРКОВА

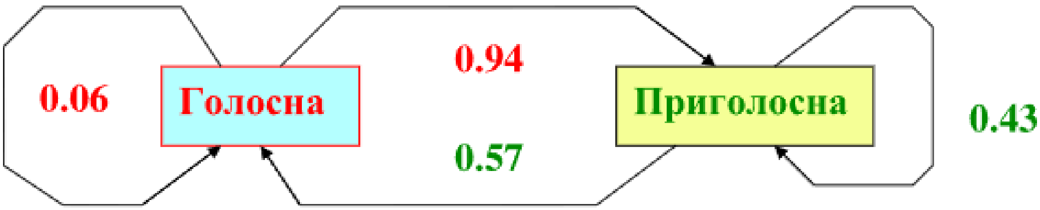
Слайд 1

ЛЕКЦІЯ 15
Процеси Маркова

Процеси Маркова – наступна математична модель теорії випадкових процесів, які активно і широко використовуються для вирішення практичних задач в інформаційних технологіях.

Процеси Маркова – математична модель системи, яка має певну кількість станів і може переходити із одного стану в інший. Перехід із поточного стану в інші стани відбувається випадковим чином. При цьому, ймовірності переходу в інші стани залежать тільки від поточного стану.

Приклад: В українській мові перехід від приголосної до голосної описується наступним процесом Маркова:



Слайд 2

Марковські процеси

ДИСКРЕТНІ
Перехід між станами відбувається в фіксовані моменти часу. На практиці через рівні проміжки часу.

Приклад: Виконання команд в процесорі відбувається по тактам, після кожного з яких він або продовжує виконувати поточну команду, або переходить до наступної

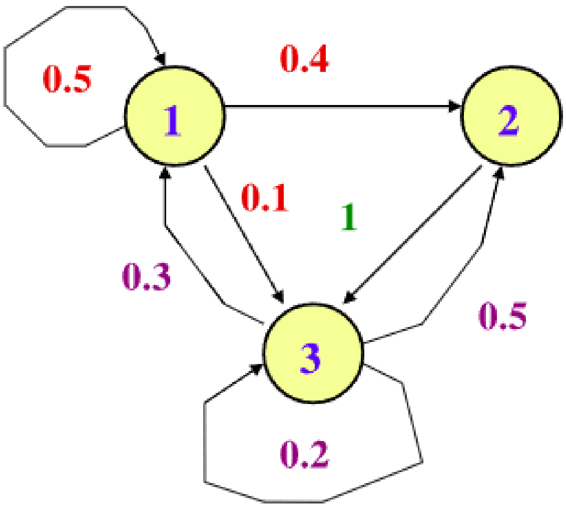
НЕПЕРЕРВНІ
Перехід між станами відбувається в довільні моменти часу

Приклад: Кількість людей в касі магазину

Слайд 3.

Д И С К Р Е Т Н І   М А Р К О В С Ь К І   П Р О Ц Е С И
(Ланцюги Маркова)

Задаються: графом переходів або матрицею переходів



	1	2	3
1	0.5	0.4	0.1
2	0	0	1
3	0.3	0.4	0.2

ПРОЦЕДУРА КОЛМОГОРОВА-ЧЕПМЕНА

Слайд 4

Ймовірність знаходження процесу в кожному із станів після певної кількості кроків може бути обчислена з використанням **процедури Колмогорова-Чепмена**

	1	2	3	крок 0	крок 1	крок 2	крок 3	крок 4
1	0.5	0.4	0.1	1	0.5	0.28	0.281	0.252
2	0	0	1	0	0.4	0.25	0.347	0.298
3	0.3	0.5	0.2	0	0.1	0.47	0.372	0.449

2-й крок: $0.5 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.28$

$0.4 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.25$

$0.1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.47$

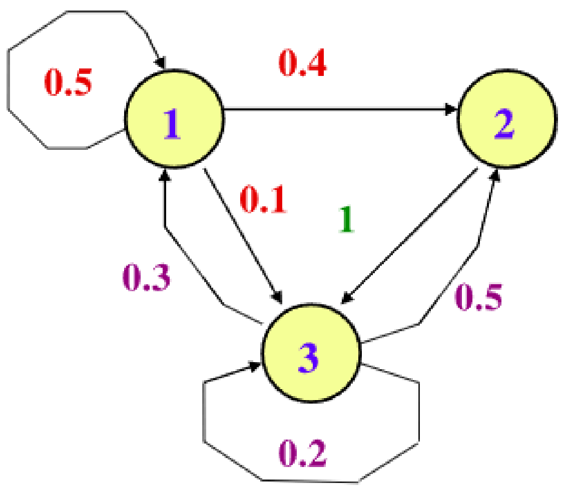
Ймовірності знаходження системи у кожному із станів через певну кількість кроків, незалежно від початкового стану, сходяться до **стаціонарних ймовірностей.**

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Слайд 5.

Аналітичне визначення стаціонарних ймовірностей

Позначимо через p_1, p_2, p_3 – стаціонарні ймовірності



Значення n стаціонарних ймовірностей знаходяться як результат розв'язку системи рівнянь: одного нормуючого і n-1 балансних.

Нормуюче рівняння: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Балансне рівняння для 1-го стану:

$$-0.5 \cdot p_1 + 0.3 \cdot p_3 = 0$$

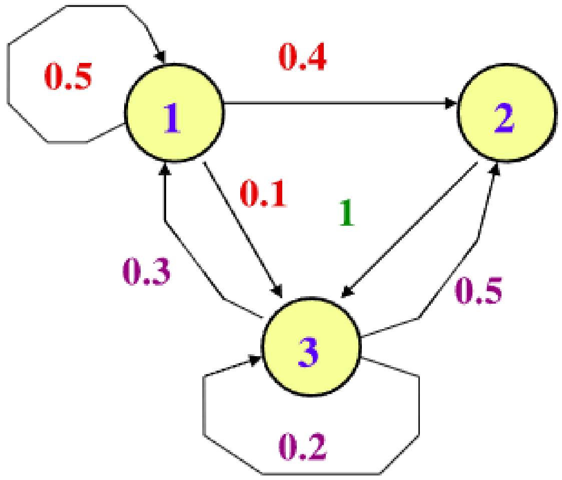
Балансне рівняння для 3-го стану:

Слайд 6

Система рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -0.5 \cdot p_1 + 0.3 \cdot p_3 = 0 \\ 0.1 \cdot p_1 + p_2 - 0.8 \cdot p_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок: $p_1 = 0.256$ $p_2 = 0.316$ $p_3 = 0.428$



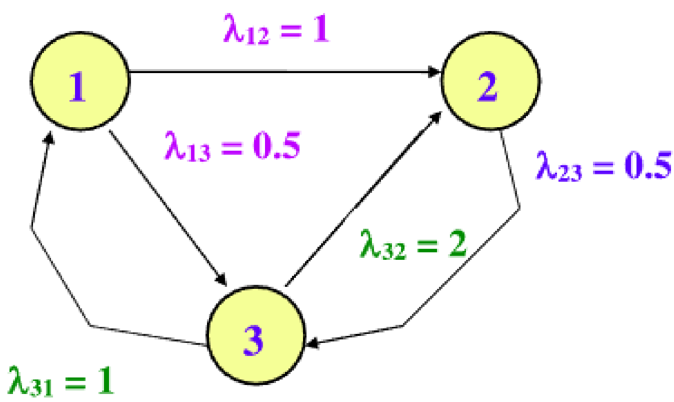
Приклад 1. Знайти середню кількість перебування системи в першому стані

Слайд 7

Розв'язок 1. Сумарна ймовірність того, що система вийде із першого стану становить **$p_{out\_1} = 0.4 + 0.1 = 0.5$. С**ередню кількість перебувань системи в першому стані $m_1 = \frac{1}{p_{OUT\_1}} = \frac{1}{0.5} = 2$

Неперервні марківські процеси

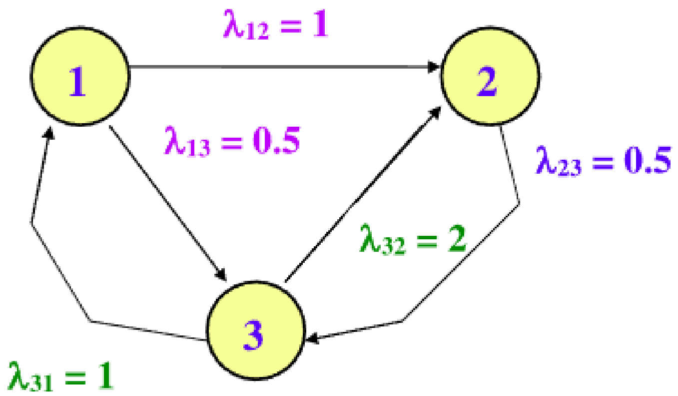
В неперервних марковських процесах є стани, перехід між якими відбувається під дією випадкових пуассонівських потоків різної інтенсивності.



Слайд 8.

Аналітичне визначення стаціонарних ймовірностей

Позначимо через p_1, p_2, p_3 – стаціонарні ймовірності



Значення ***n*** стаціонарних ймовірностей знаходяться як результат розв'язку системи рівнянь: одного нормуючого і ***n*-1** балансних.

Нормуюче рівняння: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Балансне рівняння для 1-го стану:

$$-(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1 + \lambda_{31} \cdot p_3 = 0 \Rightarrow -1.5 \cdot p_1 + 1 \cdot p_3 = 0$$

Балансне рівняння для 3-го стану:

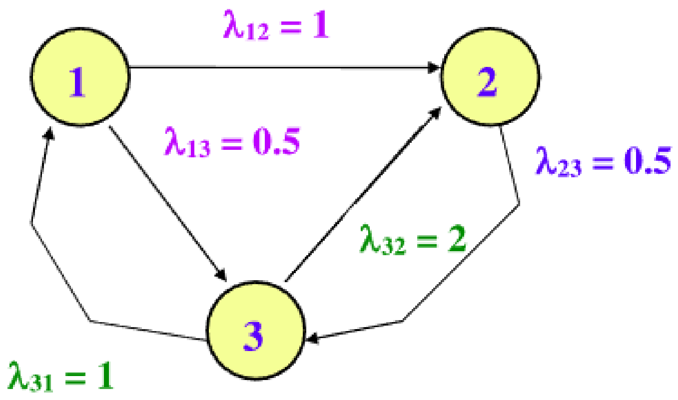
Слайд 9

Система рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -1.5 \cdot p_1 + 1 \cdot p_3 = 0 \\ p_1 - 0.5 \cdot p_2 - 2 \cdot p_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок: $p_1 = 0.095$ $p_2 = 0.762$ $p_3 = 0.143$

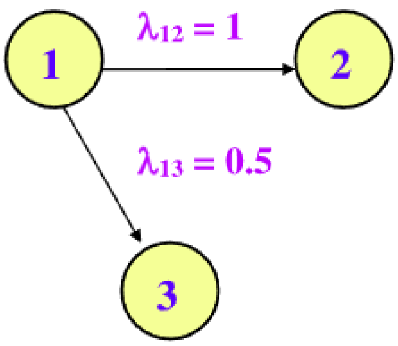
Приклад **3.** Визначити ймовірність, що система перебуватиме в першому стані не менше 1 секунди



Слайд 10

Технологія моделювання переходу із одного стану в інший.

Система потрапила, наприклад, в стан 1.



1. Моделюється час τ_{12} переходу із стану 1 в стан 2 як часовий інтервал між подіями потоку Пуассона з інтенсивністю $\lambda_{12} = 1$

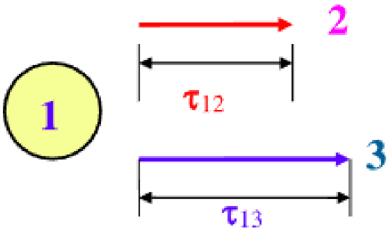
   Для цього з використанням вбудованого генератора отримується $0 \le r_1 \le 1$ та обчислюється $\tau_{12} = -\dfrac{1}{\lambda_{12}} \cdot \ln r_1$.

2. Моделюється час τ_{13} переходу із стану 1 в стан 3 як часовий інтервал між подіями потоку Пуассона з інтенсивністю $\lambda_{13} = 0.5$

   Для цього з використанням вбудованого генератора отримується $0 \le r_2 \le 1$ та обчислюється $\tau_{13} = -\dfrac{1}{\lambda_{13}} \cdot \ln r_2$.

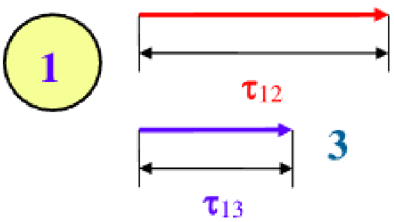
Слайд 11

Технологія моделювання переходу із одного стану в інший
(продовження)



Якщо $\tau_{12} \le \tau_{13}$ то подія переходу в 2-й стан здійснюється раніше і система переходить в 2-й стан.
Час знаходження в першому стані збільшується на τ_{12} : $t_1 = t_1 + \tau_{12}$
Модельний час збільшується на τ_{12} :

$$T = T + \tau_{12}$$



2 Якщо $\tau_{12} > \tau_{13}$ то подія переходу в 3-й стан здійснюється раніше і система переходить в 3-й стан.
Час знаходження в першому стані збільшується на τ_{13} : $t_1 = t_1 + \tau_{13}$
Модельний час збільшується на τ_{13} :

$$T = T + \tau_{13}$$

Приклад. Система перейшла в перший стан.

Визначення τ_{12}. Нехай $r_1 = 0.1$ **тоді** $\tau_{12} = -\frac{1}{\lambda_{12}} \cdot \ln r_1 = -\frac{1}{1} \cdot \ln 0.1 = \mathbf{2.3}$

Визначення τ_{13}. Нехай $r_2 = 0.8$ тоді $\tau_{13} = -\frac{1}{\lambda_{13}} \cdot \ln r_2 = -\frac{1}{0.5} \cdot \ln 0.8 = \mathbf{0.45}$

Оскільки $\tau_{12} \ge \tau_{13}$ то система переходить в 3-й стан

: $t_1 = t_1 + \tau_{13} = t_1 + 0.45$ $\quad T = T + \tau_{13} = T + 0.45$

Слайд 12

Експериментальне визначення стаціонарних ймовірностей

Експериментальне визначення стаціонарних ймовірностей неперервного процесу Маркова здійснюється шляхом **імітаційного моделювання**.

Модельний час – значення певної змінної, яка зберігає поточне значення умовної величини **T** часу життя системи.

В процесі виконання програми здійснюється 1000 переходів з фіксацією:

t_1 – сумарного часу перебування системи в стані 1

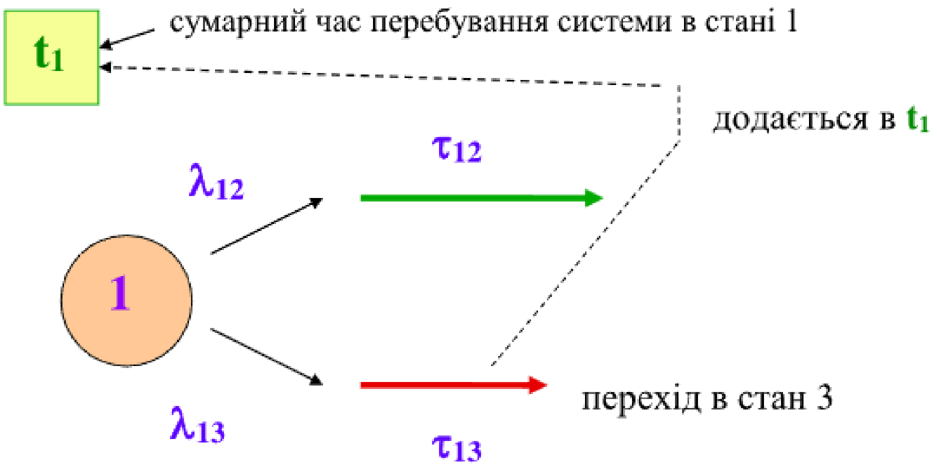
t_2 – сумарного часу перебування системи в стані 2

t_3 - сумарного часу перебування системи в стані 3

T – сумарного модельного часу

$$t_1 + t_2 + t_3 = T$$

Для цього в програмі мають бути відповідні змінні



Стаціонарні ймовірності знаходження у кожному з станів визначаються як:

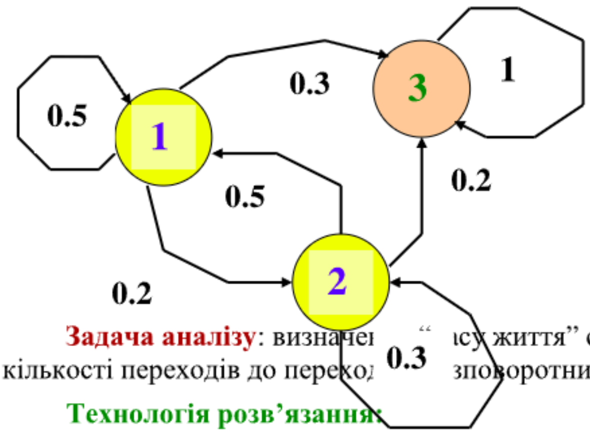
$$p_1 = \frac{t_1}{T}, \qquad p_2 = \frac{t_2}{T}, \qquad p_3 = \frac{t_3}{T}$$

16 лекція (20 грудня)
НЕЕРГОДИЧНІ ДИСКРЕТНІ ПРОЦЕСИ МАРКОВА

Слайд 1 **Л Е К Ц І Я 16**

НЕЕРГОДИЧНІ ДИСКРЕТНІ ПРОЦЕСИ МАРКОВА

Неергодичними називають процеси Маркова для яких не виконуєтьс умова ергодичності – тобто можливості переходу з довільного стану в буд який інший, безпосередньо або через інші стани.



Задача аналізу: визначе “ асу життя” системи – тобто середньої кількості переходів до перехо зповоротний (поглинаючий) стан.

Технологія розв’язання:

1. Приведення матриці переходів по канонічного вигляду (переходи між непоглинаючими станами мають утворювати компактну підматрицю **Q**)

$$\Pi = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q & R \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 \end{vmatrix}$$

Слайд 2.

$$\varPi = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q & R \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 \end{vmatrix}$$

2. Побудова фундаментальної матриці **N**: **N = (E – Q)$^{-1}$**

$$E - Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.5 & 0.7 \end{vmatrix}$$

Обернена матриця:

$$(E - Q)^{-1} = \begin{vmatrix} 2.8 & 0.8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

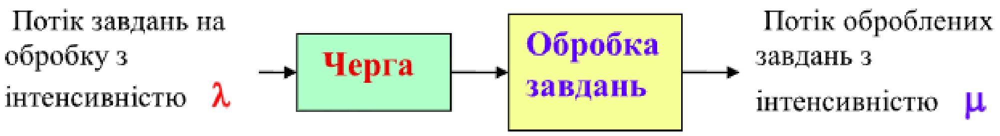
Якщо система стартує з **першого** стану, то до переходу в поглинаючий стан, вона, в середньому зробить **2.8+0.8 = 3.6** переходів, побувавши **2.8** раз в першому стані і **0.8** раз в другому.

Якщо система стартує з **другого** стану, то до переходу в поглинаючий стан, вона, в середньому зробить **2 + 2 = 4** переходів, побувавши **2** рази в першому стані і **2** рази в другому.

Слайд 3

СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ (СМО)

Загальна структура СМО



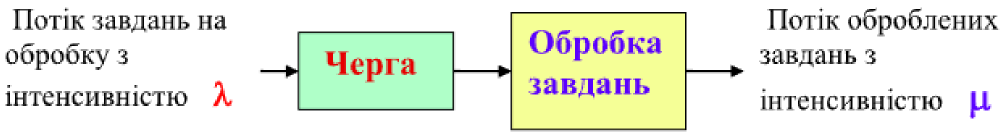
Середній інтервал між приходом завдань - $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$

Середній час обробки завдання - $t = \dfrac{1}{\mu}$

Завантаженість системи $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Слайд 4

Основні формули



Ймовірність того, що черга **пуста:** $P_0 = 1 - \rho$

Ймовірність того, що в черзі знаходиться ***n*** завдань: $P_n = (1-\rho)\cdot\rho^n$

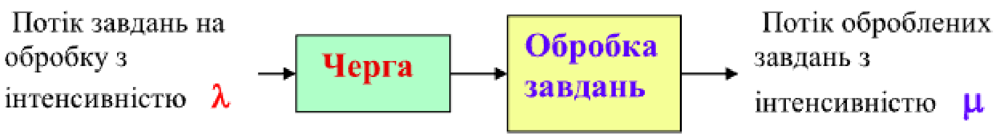
Ймовірність того, що в черзі знаходиться не більше ***n*** завдань: $P_{\leq n} = 1-\rho^n$

Задача **1**(+15,-2) Процесор вирішує, в середньому **1** задачу в секунду. Задачі поступають на процесор з інтенсивністю **0.7** задач/сек. Визначити об'єм буферної пам'яті черги, щоб задача не втрачалася зі ймовірністю **0.99** за умови, що вихідні дані задачі займають 1 Кбайт.

Слайд 5.

Розв'язок 1 . **$P_{\le n}$ = 1-ρ^n = 0.99 ⇒ ρ^n = 0.01.** $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0.7}{1} = 0.7$

$$n = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.7} = 12.9$$ **V=** **13** Кбайт



Середня довжина черги $m(n) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P_j = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$

Середній час обслуговування в СМО: $m(t) = \dfrac{m(n)}{\mu} + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$

час знаходження в черзі

час безпосереднього обслуговування

Задача **2**(+12,-3). В супермаркет за добу приходить **240** машин. Один робітник проводить розгрузку за годину. Скільки має бути робітників за зміні, щоб, в середньому машина знаходилися на складі 1 годину.

Задача **3** (+30,-2). На станцію швидкої допомоги поступає за добу **240** заявок. Машина обслуговує одного хворого, в середньому, 1 годину, з яких **20** хвилин вона їде до хворого. Скільки має бути машин швидкої допомоги, щоб вона, в середньому, прибувала через **півгодини.**

Слайд 9

Розв'язок 2. λ = 10 машин. μ_1 = 1. $\mu = h \cdot \mu_1$ = h. $1 = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = \dfrac{1}{h - 10} \Rightarrow$ ***h*=11**

Розв'язок 3. λ = 10 μ_1 = 1. ***h*** –кількість машин.
Базове рівняння: **0.5** = **час очікування заявки в черзі** + **0.25** (час поїздки)

$0.25 = \dfrac{m(n)}{h \cdot \mu_1} = \dfrac{\lambda}{(h-\lambda)\cdot h}$ $\Rightarrow 0.25 \cdot h^2 - 2.5 \cdot h - 10 = 0 \Rightarrow$ ***h*** = 13.06 ↑ = **14**

$\vec{п}$ $\quad \vec{п} \quad \mu \quad \left(\frac{1}{\mu}\right) \quad \sigma$

Слайд 7

Формули Поллачека- Хінчина

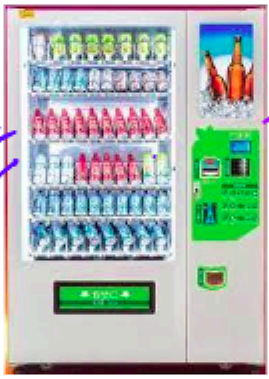
Використовуються за умови, що потік обслуговування не Пуассона, але для нього відоме значення **σ** - середньоквадратичне відхилення часу обслуговування та середній час обслуговування.

Середня довжина черги $m(n) = \dfrac{1}{1-\rho} \cdot (\ \rho - \dfrac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot (1 - \mu^2 \cdot \sigma^2))$

Середній час обслуговування $m(t) = \dfrac{1}{2 \cdot \mu \cdot (1-\rho)} \cdot (2 - \rho \cdot (1 - \mu^2 \cdot \sigma^2))$

Задача **4** (+20/-2) : Підприємець вирішив продавати кока-колу в пляшках. Є два варіанти – торгує продавщиця (потік обслуговування – пуассонівський, середній час обслуговування – 1 хвилина). Другий варіант – продає автомат – час обслуговування – рівно 1 хвилина. Вивчення ринку показало, що потік покупців – пуассонівський з інтенсивністю **0.5** людини на хвилину. Визначити довжину черги для першого та другого варіантів.

+5 −17
+10



$\sigma = 0$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 0,5$

$\dfrac{1}{1-0,5}\left(\underbrace{0,5 - \dfrac{1}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 1}_{0,375}\right) 0,75$ $\quad /2$

Слайд 8. Розв'язок **4**.

По першому варіанту: $m_1(n) = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{0.5}{1 - 0.5} = \mathbf{1}$

По другому варіанту: $\boldsymbol{\sigma = 0}$, $\rho = 0.5$ **0.75**

Слайд 9

СМО з пріоритетами

Середній час очікування в черзі:

Вищий пріоритет: $m_1(t_0) = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu \cdot (\mu - \lambda_2)}$

Нижчий пріоритет: $m_2(t_0) = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\mu - \lambda_1) \cdot (\mu - \lambda_2 - \lambda_2)}$

Задача 5. Аеропорт платить штраф 100 доларів за кожну хвилину затримки на посадці літака іноземної авіакомпанії. Інтенсивність їх прильотів становить 0.05 літаків за хвилину. Інтенсивність прильотів місцевих рейсів становить 0.1 літаків за хвилину. Час циклу посадки літака становить 3 хвилини. На яку суму зменшить штрафи введення пріоритету посадки літаків іноземних авіакомпаній за добу?

Слайд 10

Розв'язок 5.

Загальна черга: $\lambda = 0.15$ $\mu = 0.33$ $m(t_o) = \dfrac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = 2.46$

За добу прилітає 24·3=72 літаки Штраф: 72·2.46·100= **17 712**

Пріоритет: $\lambda_1 = 0.05$ $\lambda_2 = 0.1$ $m_1(t_0) = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu \cdot (\mu - \lambda_2)} = \dfrac{0.15}{0.33 \cdot (0.33 - 0.1)} = 1.93$

За добу прилітає 24·3=72 літаки Штраф: 72·1.93·100= **13 896**

Виграш: 17 712 – 13 896 = **3 816** доларів за добу

17 лекція (27 грудня) ФОРМУЛИ ПОЛЛАЧЕКА-ХІНЧИНА

Слайд 1

Л Е К Ц І Я 18

Формули Поллачека- Хінчина

Використовуються за умови, що потік обслуговування не Пуассона, але для нього відоме значення **σ** - середньоквадратичне відхилення часу обслуговування та середній час обслуговування.

Середня довжина черги $m(n) = \frac{1}{1-\rho} \cdot (\rho - \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot (1 - \mu^2 \cdot \sigma^2))$

Середній час обслуговування $m(t) = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot (1-\rho)} \cdot (2 - \rho \cdot (1 - \mu^2 \cdot \sigma^2))$

Задача **1** (+20,-2) : Підприємець вирішив продавати кока-колу в пляшках. Є два варіанти – торгує продавщиця (потік обслуговування – пуассонівський, середній час обслуговування – 1 хвилина). Другий варіант – продає автомат – час обслуговування – рівно 1 хвилина. Вивчення ринку показало, що потік покупців – пуассонівський з інтенсивністю **0.5** людини на хвилину.
Визначити довжину черги для першого та другого варіантів.

Слайд 2.   Розв'язок 1.

По першому варіанту: $m_1(n) = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{0.5}{1-0.5} = 1$

По другому варіанту: $\sigma = 0$, $\rho = 0.5$ **0.75**

СМО З ПРІОРИТЕТАМИ

Слайд 3   **СМО з пріоритетами**

Середній час очікування в черзі:

Вищий пріоритет: $m_1(t_0) = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu \cdot (\mu - \lambda_2)}$

Нижчий пріоритет: $m_2(t_0) = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\mu - \lambda_1) \cdot (\mu - \lambda_2 - \lambda_2)}$

Задача 2. Аеропорт платить штраф 100 доларів за кожну хвилину затримки на посадці літака іноземної авіакомпанії. Інтенсивність їх прильотів становить 0.05 літаків за хвилину. Інтенсивність прильотів місцевих рейсів становить 0.1 літаків за хвилину. Час циклу посадки літака становить 3 хвилини. На яку суму зменшить штрафи введення пріоритету посадки літаків іноземних авіакомпаній за добу?

Слайд 5

Розв'язок 2.

Загальна черга: $\lambda = 0.15$ $\mu = 0.33$ $m(t_o) = \dfrac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = 2.46$

За добу прилітає 24·3=72 літаки Штраф: 72·2.46·100= **17 712**

Пріоритет: $\lambda_1 = 0.05$ $\lambda_2 = 0.1$

$$m_1(t_0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu \cdot (\mu - \lambda_2)} = \frac{0.15}{0.33 \cdot (0.33 - 0.1)} = 1.93$$

За добу прилітає 24·3=72 літаки Штраф: 72·1.93·100= **13 896**

Виграш: 17 712 – 13 896 = **3 816** доларів за добу

Слайд 5

Базові поняття теорії інформації

Об'єм інформації потрібно вимірювати**.** Він вимірюється через **ентропію** (невизначеність) ситуації, яку описує інформація. Тобто інформація знімає (зменшує) невизначеність ситуації.

Якщо існує n варіантів і їх ймовірності дорівнюють $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, то ентропія **E** ситуації обчислюється у вигляді:

$$E = -\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log_2 p_j$$

Приклад **1.** Ентропія групи крові випадкової людини, наприклад Іллі, для якого $p_1 = 0.18$, $p_2 = 0.23$, $p_3 = 0.31$, $p_4 = 0.28$ дорівнює

$E_к = -1.44\cdot(0.18\cdot\ln 0.18 + 0.23\cdot\ln 0.23 + 0.31\cdot\ln 0.31 + 0.28\cdot\ln 0.28) =$
$-1.44\cdot(-0.309 - 0.338 - 0.425 - 0.356) = -1.44\cdot (- 1.428) =$ **2.05** біт.

Якщо операція переливання пройшла успішно, то ентропії групи крові донора Іллі: $E_к' = -1.44\cdot(0.286\cdot\ln 0.286 + 0.3\cdot\ln 0.3 + 0.29\cdot\ln 0.29 + 0.124\cdot \ln 0.124) = -1.44\cdot(-0.358 - 0.362 - 0.359 - 0.03) = 1.44\cdot (- 1.109) =$ **1.6** біт.

Таким чином, повідомлення про те, що операція переливання крові від Іллі пройшла успішно, зменшила ентропію групи крові Іллі на величину **2.05** – **1.6** = **0.45** біти. Тобто, це повідомлення надало нам **0.45** біти про групу крові Іллі.

З іншого боку, якщо розглядати ситуацію успішності чи неуспішності операції, то повідомлення про те, як пройшла операція містить в собі:

$E_o = -1.44\cdot(0.63\cdot\ln 0.63 + 0.37\cdot\ln 0.37) = -1.44 (-0.29 - 0.38) =$ **0.96** біти

Куди поділася різниця інформації ?

Приклад 5. Визначити інформаційну ентропію (міру невизначеності) дня народження людини (дня в році коли людина святкує день народження).

Слайд 6

Розв'язок 5. В році є 365 днів. Відповідно: $n = 365$ $p=1/n= 1/365$. За формулою інформаційної ентропії:

$$E = -\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log_2 p_j = -1.44 \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \ln p_j = -1.44 \cdot n \cdot \frac{1}{n} \ln p =$$

$$= -1.44 \cdot \ln \frac{1}{365} = -1.44 \cdot (-5.9) = 8.5$$

Ентропія дня народження складає **8.5**. Це означає:

- достатньо **9** питань, відповіді на які може бути ТАК або НІ, щоб дізнатися день народження.

- теоретично достатньо **9**-розрядного коду, щоб представити день народження.

Звичайна система кодування: місяць: **4** біти; день місяця: **5** бітів

Не можна передати повідомлення про день народження, використовуючи менше ніж **9** бітів

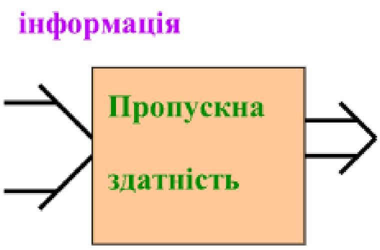
Слайд 7

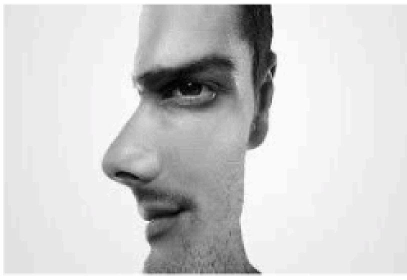
Визначити ентропію складних ситуацій доволі складно.

Для чого нам потрібна кількісна оцінка об'єму інформації ?

- Це дає змогу вибрати ефективний спосіб кодування інформації

- Дозволяє оцінити з позицій інженерної психології можливості людини-оператора сприймати інформацію (час реакції, пропускна здатність, втома)





Пропускна здатність – максимальна кількість інформації, яку конкретна людина здатна сприймати в одиницю часу. Якщо кількість інформації перевищую пропускну здатність – сприймається лише частина інформації

Дослідження показали, що кількість інформації, обчислена за формулою $E = -\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log_2 p_j$ адекватно відповідає психофізичним властивостям людини сприйняття інформації.

Слайд 8

Кількість інформації – це суб’єктивна категорія, яка залежить від знань конкретної людини.

Тренований пілот легко і швидко читає показники приладів.

КОДУВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ. КОД ШЕННОНА

Слайд 9

Кодування інформації

Теорема Шеннона: Середня довжина кодової посилки не може бути меншою за кількість інформації, яка кодується.

Довжина коду для **більш ймовірних** варіантів має бути **коротшим**, а для **менш ймовірних – довшим**.

Код Шеннона: Для кодування більш ймовірних повідомлень має використовуватися короткий код, а для менш ймовірних – більш довгий.

Початок довгого коду не має співпадати з більш короткими.

Приклад 3. Кількість випадання гербів при підкиданні 4-х монет:

$P_0 = 0.5^4 = 1/16$, $P_1 = 4/16$, $P_2 = 6/16$, $P_3 = 4/16$, $P_4 = 1/16$

Визначити: кількість інформації
створити таблицю кодування кодом Шеннона
визначити середню довжину повідомлення

Слайд 6

Розв'язок 3

Випадіння 2-х гербів - **0** **Кількість інформації - 2 біти**

Випадіння одного гербу – **10**

Випадіння трьох гербів - **111**

Випадіння 4-х гербів – **110 1**

Випадіння нуля гербів - **110 0**

Середня довжина коду: $1\cdot0.375 + 2\cdot0.25 + 3\cdot0.25 + 4\cdot0.125 = 2.125$

Приклад 4. Декодувати текст, закодований **кодом Шеннона**:

А – 0.28 0
М – 0.28 1 0
_ - 0.21 1 1 0
И – 0.14 1 1 1 0
Л - 0. 07 1 1 1 1 0
Р - 0.07 1 1 1 1 1

1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0

Коди Шеннона лежать в основі всіх **архіваторів**

Слайд 10

Декодований текст: **МАМА МИЛА РАМИ**

ПРАКТИКИ І КОНСУЛЬТАЦІЇ

Консультація 25.11

[Практика 1.12]
[Консультація 2.12]
[Консультація] 16.12