Wahadło odwrócone

Krzysztof Piekorz

piotr zając

2021

Spis treści

[2 Wstęp 2](#_Toc69300621)

[3 Model matematyczny wahadła matematycznego 2](#_Toc69300622)

[3.1 Założenia 2](#_Toc69300623)

[3.2 Wyprowadzenie modelu matematycznego 2](#_Toc69300624)

[3.2.1 Równanie ruchu w poziomie 3](#_Toc69300625)

[3.2.2 Równanie ruchu w pionie 4](#_Toc69300626)

[3.2.3 Równanie dla ruchu obrotowego 5](#_Toc69300627)

[3.2.4 Równania ruchu wahadła odwróconego 5](#_Toc69300628)

[3.2.5 Linearyzacja w punkcie pracy 7](#_Toc69300629)

# Wstęp

(dodamy na zakończenie projektu)

# Model matematyczny wahadła matematycznego

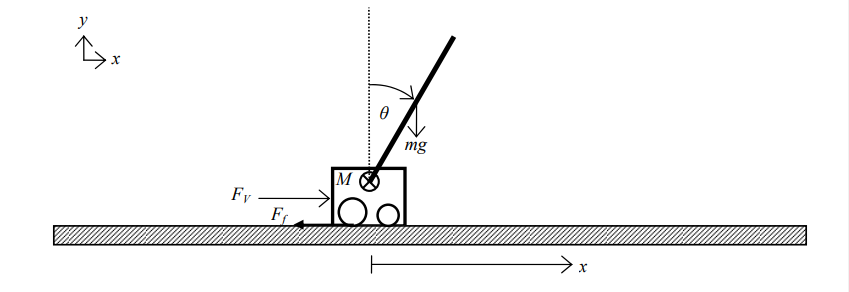
## Założenia

Przed przystąpieniem do modelowania systemu wahadła matematycznego przyjęto kilka założeń:

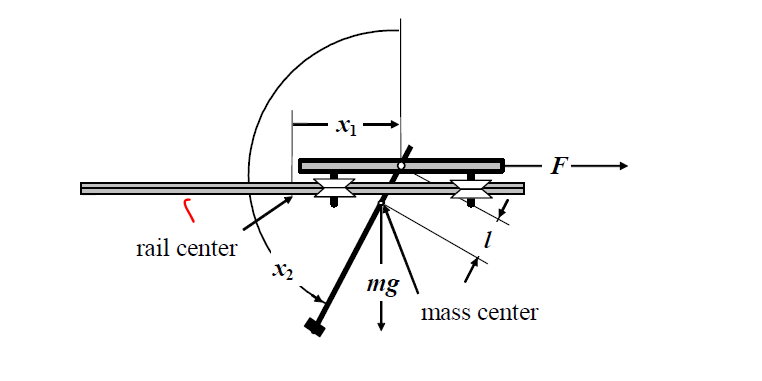
1. Wahadło traktujemy jako punkt masowy;
2. Punkt masowy oddalony jest od osi obrotu o odległość l;

## Wyprowadzenie modelu matematycznego

Rysunki wahadła odwróconego:



Rys. 1 Wahadło odwrócone - pozycja stabilizacji



Rys. 2 Wahadło odwrócone - pozycja startowa

Gdzie:  
 – odległość wózka od środka toru (punktu równowagi),

– odchył wahadła od pozycji pionowej w górę,

F – siła przyłożona do wózka przez napęd,

l – odległość środka ciężkości wahadła od punktu od wózka.­­

### Równanie ruchu w poziomie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, ruch poziomy wózka można zapisać w postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1)­­­ |

Gdzie:

M – masa wózka,

– siła działająca na wahadło,

– siła tarcia wózka, dana jest ona wzorem:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2)­­­ |
|  |  |  |

Po podstawieniu siły tarcia, otrzymujemy:

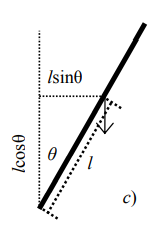
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3)­­­ |

Ruch poziomy wahadła można zapisać następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4)­­­ |

Para ( to współrzędne środka ciężkości wahadła i można je wyrazić z użyciem i :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5)­­­ |

W celu policzenia drugiej pochodnej (), należy podstawić i policzyć najpierw pierwszą pochodną:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6)­­­ |

W ostatnim przejściu wykorzystany został wzór na pochodną funkcji złożonej. Następnie można policzyć drugą pochodną:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7)­­­ |

W powyższych przekształceniach zostały zastosowane kolejno wzory na pochodną sumy, pochodną iloczynu i pochodną funkcji złożonej.

Obliczony wzór można podstawić do równania ruchu i wygląda ono następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8)­­­ |

Po przeniesieniu pochodnych dx/dt na lewą stronę:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9)­­­ |

### Równanie ruchu w pionie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, równanie ruchu w pionie dla wahadła można zapisać następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10)­­­ |

Obliczając kolejno pierwszą i drugą pochodną (5), otrzymujemy (zgodnie ze wzorem na pochodną funkcji złożonej i pochodną iloczynu):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (11)­­­ |

Obliczoną pochodna można podstawić do równania ruchu. Będzie ono postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12)­­­ |

### Równanie dla ruchu obrotowego

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, zależność między momentem siły i przyspieszeniem kątowym obiektu dana jest następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (13)­­­ |

gdzie to wypadkowy moment siły działający na wahadło.

Sumując moment siły działający na wahadło w zależności od kąta wychylenia otrzymujemy zależność:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14)­­­ |

gdzie I to moment bezwładności wahadła.

### Równania ruchu wahadła odwróconego

Znając wzór na (12) i (4) można podstawić do powyższego wzoru i dokonać przekształceń algebraicznych w celu uproszczenia postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (15)­­­ |

po wymnożeniu nawiasów:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (16)­­­ |

podkreślone wyrazy można skrócić:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (17)­­­ |

następnie wyłączyć przed nawias :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (18)­­­ |

wiadomo, że zawsze zachodzi:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (19)­­­ |

więc można równanie uprościć do następującej formy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (20)­­­ |

W ten sposób otrzymano równania ruchu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (21)­­­ |

### Linearyzacja w punkcie pracy

Zakładając sterowanie wahadłem w okolicy punktu pracy, gdzie wahadło będzie skierowane pionowo w górę na środku toru, czyli , , można dokonać przybliżenia:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (22)­­­ |

Dokonując takiego przybliżenia, można przepisać równania (21) ruchu następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (23)­­­ |

Zakładając, że środek masy wahadła jest równy jego środkowi ciężkości, to i dzieląc drugie równanie (23) przez , otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (24)­­­ |

W celu przekształcenia równań tak, żeby zawierały tylko pochodne funkcji lub , należy do pierwszego równania (24) podstawić obliczoną z drugiego wartość , czyli:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (25)­­­ |

W ten sposób otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (26)­­­ |

Podstawiając w ten sposób obliczoną pochodną do drugiego równania (24), otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (27)­­­ |

Ostatecznie otrzymujemy równania:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (28)­­­ |

albo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (29)­­­ |

### Reprezentacja macierzowa

Zakładając wektor stanu i wektor wejść następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (30)­­­ |

Równanie macierzowe można zapisać w sposób następujący:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (31)­­­ |