Wahadło odwrócone

Krzysztof Piekorz

piotr zając

2021

Spis treści

[2 Wstęp 2](#_Toc70365144)

[3 Model matematyczny wahadła matematycznego 2](#_Toc70365145)

[3.1 Założenia 2](#_Toc70365146)

[3.2 Wyprowadzenie modelu matematycznego 2](#_Toc70365147)

[3.2.1 Równanie ruchu w poziomie 3](#_Toc70365148)

[3.2.2 Równanie ruchu w pionie 4](#_Toc70365149)

[3.2.3 Równanie dla ruchu obrotowego 5](#_Toc70365150)

[3.2.4 Równania ruchu wahadła odwróconego 5](#_Toc70365151)

[3.2.5 Linearyzacja w punkcie pracy 7](#_Toc70365152)

[3.2.6 Reprezentacja macierzowa 9](#_Toc70365153)

[4 Identyfikacja parametrów modelu 9](#_Toc70365154)

[4.1 Symulacja modelu rzeczywistego wahadła odwróconego 10](#_Toc70365155)

[4.2 Stworzenie obiektu modelu 10](#_Toc70365156)

[4.3 Identyfikacja parametrów modelu nieliniowego modelu 10](#_Toc70365157)

# Wstęp

(dodamy na zakończenie projektu)

# Model matematyczny wahadła matematycznego

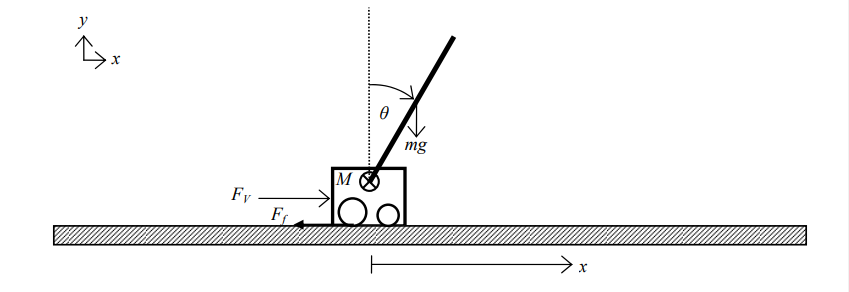
## Założenia

Przed przystąpieniem do modelowania systemu wahadła matematycznego przyjęto kilka założeń:

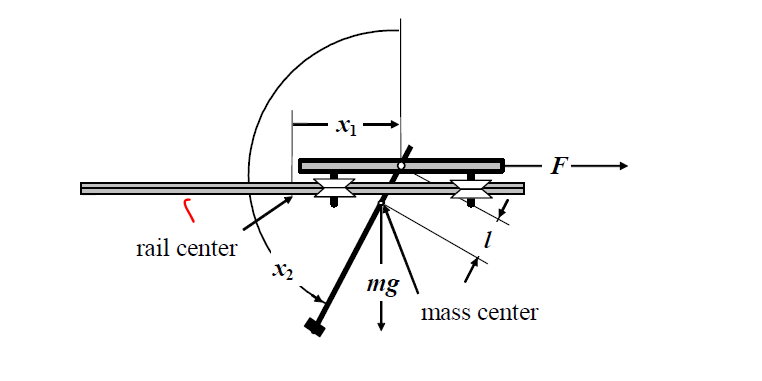
1. Wahadło traktujemy jako punkt masowy;
2. Punkt masowy oddalony jest od osi obrotu o odległość l;

## Wyprowadzenie modelu matematycznego

Rysunki wahadła odwróconego:



Rys. 1 Wahadło odwrócone - pozycja stabilizacji



Rys. 2 Wahadło odwrócone - pozycja startowa

Gdzie:  
 – odległość wózka od środka toru (punktu równowagi),

– odchył wahadła od pozycji pionowej w górę,

F – siła przyłożona do wózka przez napęd,

l – odległość środka ciężkości wahadła od punktu od wózka.­­

### Równanie ruchu w poziomie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, ruch poziomy wózka można zapisać w postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Gdzie:

M – masa wózka,

– siła działająca na wahadło,

– siła tarcia wózka, dana jest ona wzorem:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |
|  |  |  |

Po podstawieniu siły tarcia, otrzymujemy:

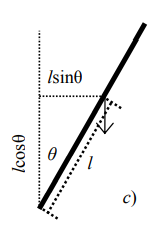
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Ruch poziomy wahadła można zapisać następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4)­­­ |

Para ( to współrzędne środka ciężkości wahadła i można je wyrazić z użyciem i :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5)­­­ |

W celu policzenia drugiej pochodnej (), należy podstawić i policzyć najpierw pierwszą pochodną:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W ostatnim przejściu wykorzystany został wzór na pochodną funkcji złożonej. Następnie można policzyć drugą pochodną:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W powyższych przekształceniach zostały zastosowane kolejno wzory na pochodną sumy, pochodną iloczynu i pochodną funkcji złożonej.

Obliczony wzór można podstawić do równania ruchu i wygląda ono następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Po przeniesieniu pochodnych dx/dt na lewą stronę:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

### Równanie ruchu w pionie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, równanie ruchu w pionie dla wahadła można zapisać następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Obliczając kolejno pierwszą i drugą pochodną (5), otrzymujemy (zgodnie ze wzorem na pochodną funkcji złożonej i pochodną iloczynu):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Obliczoną pochodna można podstawić do równania ruchu. Będzie ono postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12)­­­ |

### Równanie dla ruchu obrotowego

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, zależność między momentem siły i przyspieszeniem kątowym obiektu dana jest następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

gdzie to wypadkowy moment siły działający na wahadło.

Sumując moment siły działający na wahadło w zależności od kąta wychylenia otrzymujemy zależność:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14)­­­ |

gdzie I to moment bezwładności wahadła.

### Równania ruchu wahadła odwróconego

Znając wzór na (12) i (4) można podstawić do powyższego wzoru i dokonać przekształceń algebraicznych w celu uproszczenia postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

po wymnożeniu nawiasów:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

podkreślone wyrazy można skrócić:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

następnie wyłączyć przed nawias :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

wiadomo, że zawsze zachodzi:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

więc można równanie uprościć do następującej formy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W ten sposób otrzymano równania ruchu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (21)­­­ |

### Linearyzacja w punkcie pracy

Zakładając sterowanie wahadłem w okolicy punktu pracy, gdzie wahadło będzie skierowane pionowo w górę na środku toru, czyli , , można dokonać przybliżenia:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Dokonując takiego przybliżenia, można przepisać równania (21) ruchu następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (23)­­­ |

Zakładając, że środek masy wahadła jest równy jego środkowi ciężkości, to i dzieląc drugie równanie (23) przez , otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (24)­­­ |

W celu przekształcenia równań tak, żeby zawierały tylko pochodne funkcji lub , należy do pierwszego równania (24) podstawić obliczoną z drugiego wartość , czyli:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W ten sposób otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Podstawiając w ten sposób obliczoną pochodną do drugiego równania (24), otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Ostatecznie otrzymujemy równania:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

albo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

### Reprezentacja macierzowa

Zakładając wektor stanu i wektor wejść następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Równanie macierzowe można zapisać w sposób następujący:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

# Identyfikacja parametrów modelu

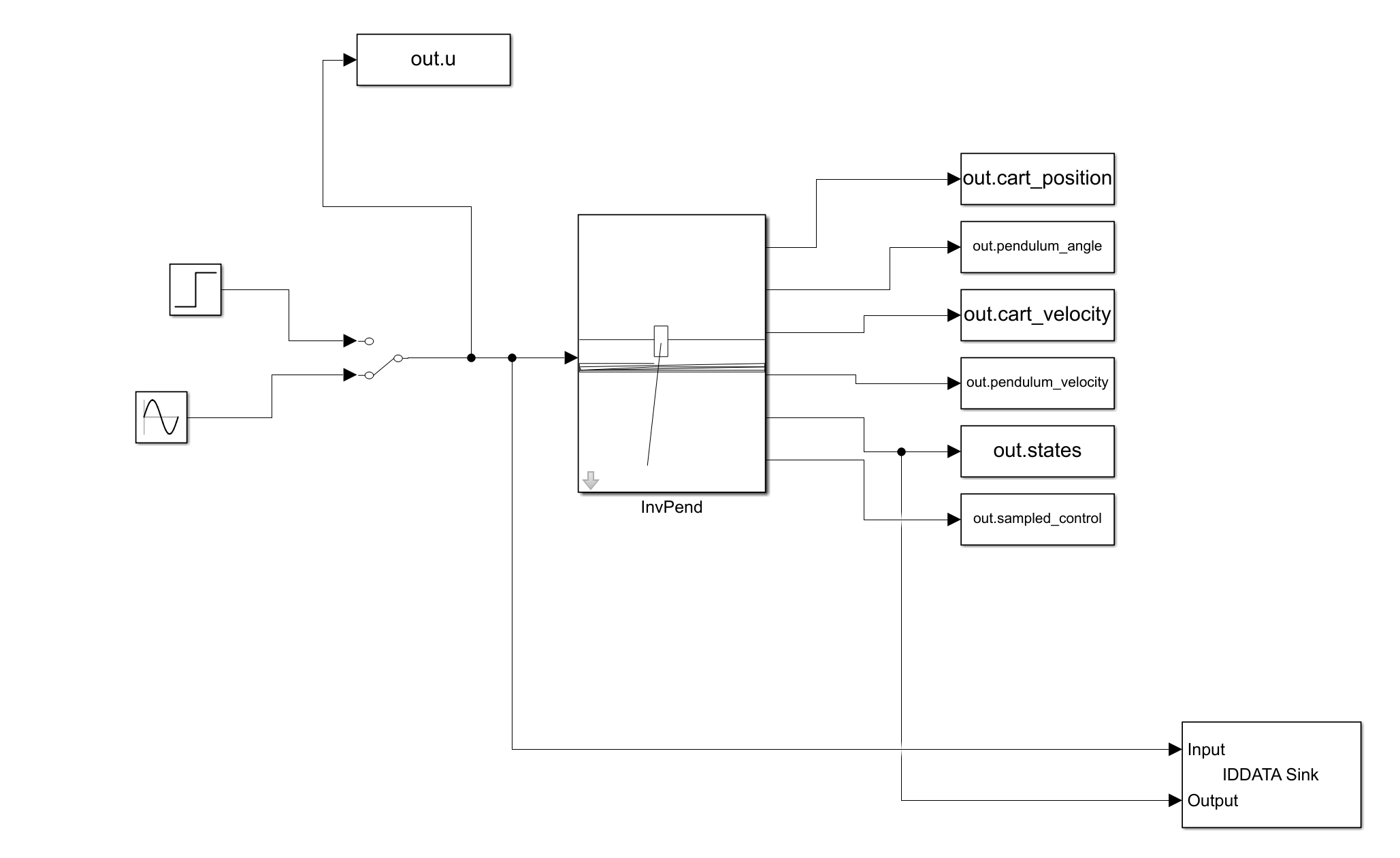
## Symulacja modelu rzeczywistego wahadła odwróconego

Ze względu na brak możliwości fizycznego dostępu do stanowiska wahadła odwróconego konieczne jest skorzystanie z modelu wahadła rzeczywistego stworzonego w Simulinku (udostępnionego przez producenta):

T = 10; % czas symulacji

sim\_step = 0.01; %Krok symulacji

out = sim('pendulum\_dynamics.slx', T)



Blok IDDATA Sink pozwoli na zapisanie danych w odpowiedniej formie, wykorzystywaną przez funkcję do identyfikacji nieznanych parametrów modelu wahadła wyprowadzonego w poprzednim rozdziale.

## Stworzenie obiektu modelu nieliniowego

Estymacja parametrów model została przeprowadzona dla pełnego zakresu pracy wahadła, dlatego konieczne było wykorzystanie modelu nieliniowego (21) (model liniowy jest stabilny tylko w pewnym niewielkim zakresie). Przygotowanie modelu do estymacji wymagało przedstawienia jego struktury w specjalnej formie i stworzeniem funkcji w języku MATLAB, która jako argumenty będzie między innymi parametry, które są przedmiotem estymacji oraz sygnał wymuszający:

## Identyfikacja parametrów modelu nieliniowego modelu

W celu identyfikacji nieznanych wartości parametrów modelu (greybox parameter identyfication) wyskorzytano funkcję …, która jako argument przyjmuje stworzony wcześniej przygotowane dane, obiekt modelu, oraz tablicę w której zdefiniowan jest konfiguracja, w jaki sposób ma przybiegać identyfikacja parametryczna (wybór algorytmu, maksymalnej ilości symulacji it.)

(teraz po kolie opisać co się, dzieje, że trzeba było ustawić jakieś parametry początkowe, następnie zobaczyć jakie wyniki będą dla tego, a następnie wykonać estymację i przedstawić czy jest poprawa)