Wahadło odwrócone

Krzysztof Piekorz

piotr zając

2021

Spis treści

[2 Wstęp 2](#_Toc72937916)

[3 Model matematyczny wahadła matematycznego 2](#_Toc72937917)

[3.1 Założenia 2](#_Toc72937918)

[3.2 Wyprowadzenie modelu matematycznego 2](#_Toc72937919)

[3.2.1 Równanie ruchu w poziomie 3](#_Toc72937920)

[3.2.2 Równanie ruchu w pionie 4](#_Toc72937921)

[3.2.3 Równanie dla ruchu obrotowego 5](#_Toc72937922)

[3.2.4 Równania ruchu wahadła odwróconego 5](#_Toc72937923)

[3.2.5 Linearyzacja w punkcie pracy 7](#_Toc72937924)

[3.2.6 Reprezentacja macierzowa 9](#_Toc72937925)

[4 Identyfikacja parametrów modelu 9](#_Toc72937926)

[4.1 Symulacja modelu rzeczywistego wahadła odwróconego 9](#_Toc72937927)

[4.2 Stworzenie obiektu modelu nieliniowego 10](#_Toc72937928)

[4.3 Identyfikacja parametrów modelu nieliniowego 10](#_Toc72937929)

[5 Algorytm sterujący 11](#_Toc72937930)

[5.1 Cele algorytmu i założenia 11](#_Toc72937931)

[5.2 Normalizacja kąta wychylenia wahadła 11](#_Toc72937932)

[5.3 Ograniczenie położenia wózka 11](#_Toc72937933)

[5.4 Rozbujanie wahadła 12](#_Toc72937934)

[5.5 Przełączanie kontrolerów stabilizującego i wychylającego 13](#_Toc72937935)

[5.6 Regulator stabilizujący 13](#_Toc72937936)

[5.6.1 Regulator LQ 13](#_Toc72937937)

[5.6.2 Regulator PID 14](#_Toc72937938)

[5.7 Saturacja kompensacja tarcia 15](#_Toc72937939)

[6 Symulacja stabilizacji wahadła 15](#_Toc72937940)

[6.1 Stabilizacja w otoczeniu punktu pracy 15](#_Toc72937941)

[6.2 Podniesienie wahadła i stabilizacja 16](#_Toc72937942)

[6.3 Symulacja stabilizacji wahadła dla modelu nieliniowego 17](#_Toc72937943)

# Wstęp

(dodamy na zakończenie projektu)

# Model matematyczny wahadła matematycznego

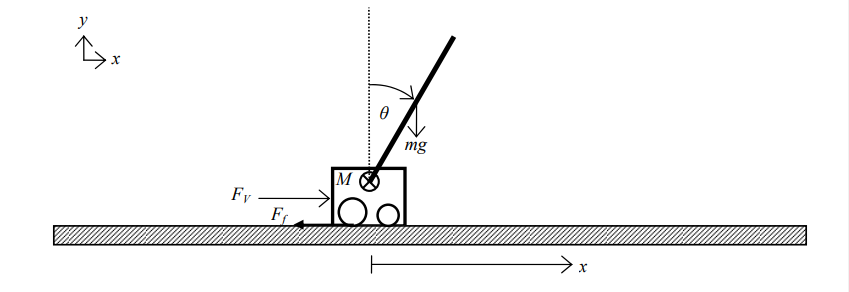
## Założenia

Przed przystąpieniem do modelowania systemu wahadła matematycznego przyjęto kilka założeń:

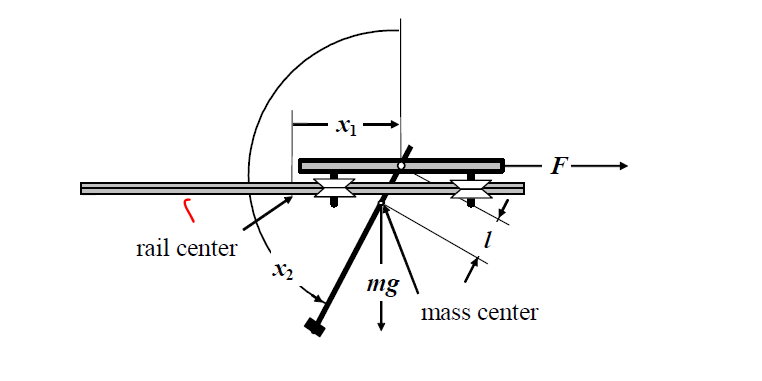
1. Wahadło traktujemy jako punkt masowy;
2. Punkt masowy oddalony jest od osi obrotu o odległość l;

## Wyprowadzenie modelu matematycznego

Rysunki wahadła odwróconego:



Rys. 1 Wahadło odwrócone - pozycja stabilizacji



Rys. 2 Wahadło odwrócone - pozycja startowa

Gdzie:  
 – odległość wózka od środka toru (punktu równowagi),

– odchył wahadła od pozycji pionowej w górę,

F – siła przyłożona do wózka przez napęd,

l – odległość środka ciężkości wahadła od punktu od wózka.­­

### Równanie ruchu w poziomie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, ruch poziomy wózka można zapisać w postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Gdzie:

M – masa wózka,

– siła działająca na wahadło,

– siła tarcia wózka, dana jest ona wzorem:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |
|  |  |  |

Po podstawieniu siły tarcia, otrzymujemy:

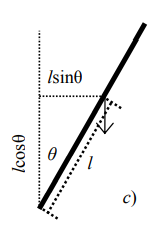
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Ruch poziomy wahadła można zapisać następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4)­­­ |

Para ( to współrzędne środka ciężkości wahadła i można je wyrazić z użyciem i :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5)­­­ |

W celu policzenia drugiej pochodnej (), należy podstawić i policzyć najpierw pierwszą pochodną:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W ostatnim przejściu wykorzystany został wzór na pochodną funkcji złożonej. Następnie można policzyć drugą pochodną:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W powyższych przekształceniach zostały zastosowane kolejno wzory na pochodną sumy, pochodną iloczynu i pochodną funkcji złożonej.

Obliczony wzór można podstawić do równania ruchu i wygląda ono następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Po przeniesieniu pochodnych dx/dt na lewą stronę:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

### Równanie ruchu w pionie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, równanie ruchu w pionie dla wahadła można zapisać następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Obliczając kolejno pierwszą i drugą pochodną (5), otrzymujemy (zgodnie ze wzorem na pochodną funkcji złożonej i pochodną iloczynu):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Obliczoną pochodna można podstawić do równania ruchu. Będzie ono postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12)­­­ |

### Równanie dla ruchu obrotowego

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, zależność między momentem siły i przyspieszeniem kątowym obiektu dana jest następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

gdzie to wypadkowy moment siły działający na wahadło.

Sumując moment siły działający na wahadło w zależności od kąta wychylenia otrzymujemy zależność:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14)­­­ |

gdzie I to moment bezwładności wahadła.

### Równania ruchu wahadła odwróconego

Znając wzór na (12) i (4) można podstawić do powyższego wzoru i dokonać przekształceń algebraicznych w celu uproszczenia postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

po wymnożeniu nawiasów:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

podkreślone wyrazy można skrócić:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

następnie wyłączyć przed nawias :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

wiadomo, że zawsze zachodzi:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

więc można równanie uprościć do następującej formy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W ten sposób otrzymano równania ruchu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (21)­­­ |

### Linearyzacja w punkcie pracy

Zakładając sterowanie wahadłem w okolicy punktu pracy, gdzie wahadło będzie skierowane pionowo w górę na środku toru, czyli , , można dokonać przybliżenia:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Dokonując takiego przybliżenia, można przepisać równania (21) ruchu następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (23)­­­ |

Zakładając, że środek masy wahadła jest równy jego środkowi ciężkości, to i dzieląc drugie równanie (23) przez , otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (24)­­­ |

W celu przekształcenia równań tak, żeby zawierały tylko pochodne funkcji lub , należy do pierwszego równania (24) podstawić obliczoną z drugiego wartość , czyli:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

W ten sposób otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Podstawiając w ten sposób obliczoną pochodną do drugiego równania (24), otrzymujemy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Ostatecznie otrzymujemy równania:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

albo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

### Reprezentacja macierzowa

Zakładając wektor stanu i wektor wejść następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

Równanie macierzowe można zapisać w sposób następujący:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |

# Identyfikacja parametrów modelu

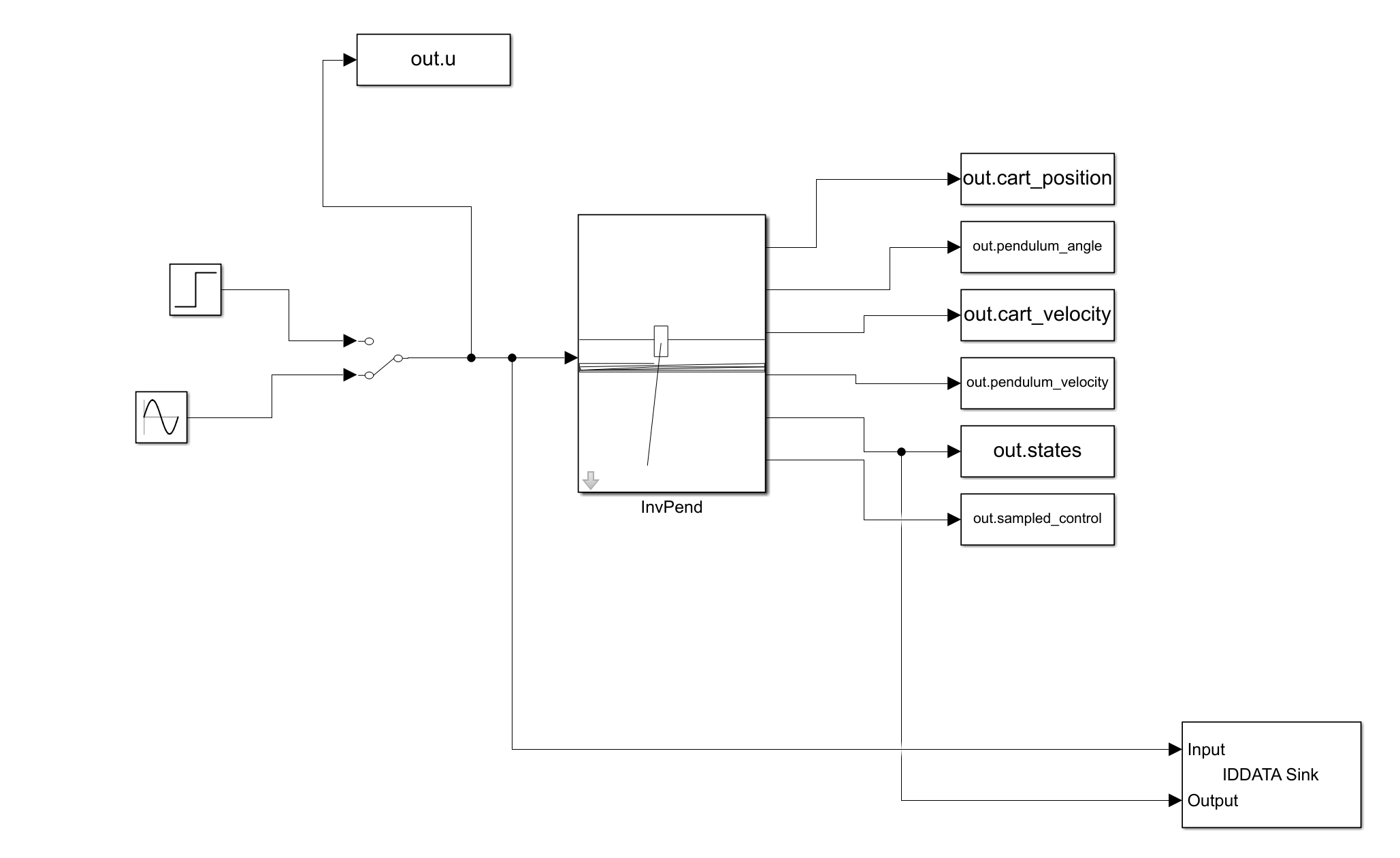
## Symulacja modelu rzeczywistego wahadła odwróconego

Ze względu na brak możliwości fizycznego dostępu do stanowiska wahadła odwróconego konieczne jest skorzystanie z modelu wahadła rzeczywistego stworzonego w Simulinku (udostępnionego przez producenta):

T = 10; % czas symulacji

sim\_step = 0.01; %Krok symulacji

out = sim('pendulum\_dynamics.slx', T)



Blok IDDATA Sink pozwoli na zapisanie danych w odpowiedniej formie, co pozwoli je wykorzystać przez funkcję do identyfikacji nieznanych parametrów modelu wahadła wyprowadzonego w poprzednim rozdziale.

## Stworzenie obiektu modelu nieliniowego

Estymacja parametrów model została przeprowadzona dla pełnego zakresu pracy wahadła, dlatego konieczne było wykorzystanie modelu nieliniowego (21) (model liniowy jest stabilny tylko w pewnym niewielkim zakresie). Przygotowanie modelu do estymacji wymagało przedstawienia jego struktury w specjalnej formie i stworzenia funkcji w języku MATLAB, która jako argumenty przyjmuje między innymi parametry, które są przedmiotem estymacji oraz sygnał wymuszający:

## Identyfikacja parametrów modelu nieliniowego

W celu identyfikacji nieznanych wartości parametrów modelu (greybox parameter identification) wykorzystano funkcję …, która jako argument przyjmuje wcześniej przygotowane dane uzyskane z rzeczywistego obiektu, model oraz tablicę, w której zdefiniowana jest konfiguracja algorytmu optymalizacyjnego, czyli informacje na temat sposobu, w jaki ma przebiegać identyfikacja parametryczna (wybór algorytmu, maksymalnej ilości symulacji itd.).

(teraz po kolie opisać co się, dzieje, że trzeba było ustawić jakieś parametry początkowe, następnie zobaczyć jakie wyniki będą dla tego, a następnie wykonać estymację i przedstawić, czy jest poprawa)

# Algorytm sterujący

## Cele algorytmu i założenia

Algorytm sterujący ma kilka zadań. Najważniejszym jest wychylenia wahadła ze stabilnego punktu równowagi „pionowo w dół” (theta = π) i stabilizacja w punkcie niestabilnym, czyli pionowo w górę. Dodatkowo algorytm powinien ustawiać wahadło na środku toru (x = 0) oraz zapobiegać przekroczeniu ograniczeń mechanicznych, czyli długości toru. Ponadto w projekcie została podjęta próba wyznaczenia i zamodelowania sterowania (stabilizacji) optymalnego na podstawie zidentyfikowanego modelu liniowego i rozwiązania równania Riccatiego.

## Normalizacja kąta wychylenia wahadła

Jednym z pierwszych kroków podjętych podczas tworzenia algorytmu sterowania było utworzenie funkcji normalizującej kąt wychylenia wahadła. Jej celem jest przekształcenie kąta wychylenia wahadła do zakresu , dzięki czemu możliwa jest stabilizacja w kątach będących wielokrotnościami liczby 2π. Na poniższym listingu został zamieszczony fragment funkcji konwertującej kąt.

function angle = angle\_convert(angle\_raw)

if angle\_raw < 0

is\_negative = 1;

else

is\_negative = 0;

end

if ~is\_negative

q = fix(angle\_raw/2\*pi);

rem = mod(angle\_raw,2\*pi);

if (rem >= pi && rem <= 2\*pi)

angle = -(2\*pi - rem);

else

if q > 0

angle = rem;

else

angle = angle\_raw;

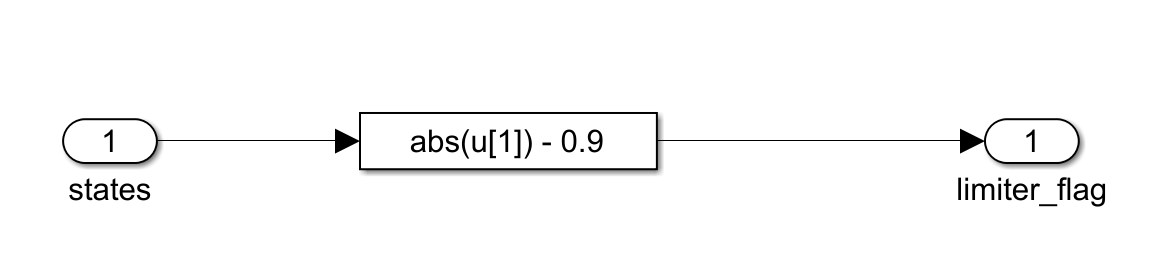
end

end

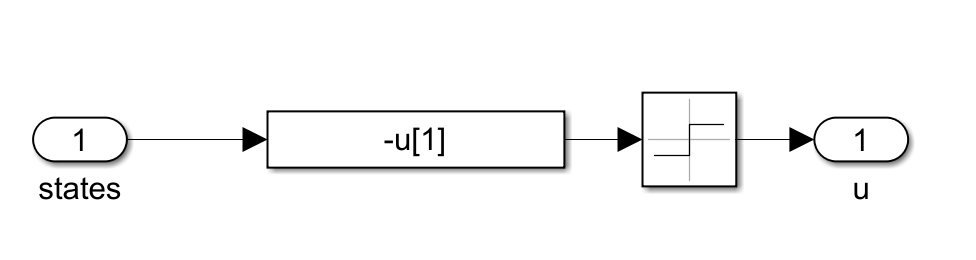
Funkcja działa w taki sposób, że w przypadku dodatnich kątów zamienia wartości z 2 i 3 ćwiartki na zakres , natomiast z ćwiartki 1 i 4 na zakres . Wykorzystywane w tym celu jest wyznaczanie ilorazu oraz reszty z dzielenia przez . Dla liczb ujemnych przekształcanie zrealizowane jest w sposób analogiczny.

## Ograniczenie położenia wózka

W rzeczywistym układzie wahadła na wózku tor, po którym porusza się wózek ma ograniczoną długość. Z tego powodu należy zadbać, aby wartość położenia *x* nie przekraczała granicznych wartości. Rozważany model ma długość toru , dlatego w przypadku osiągnięcia końca toru, czyli kiedy lub trochę mniej, zamiast obliczanego na podstawie algorytmu sterowania, podawane jest w celu „odsunięcia się” od końca toru. Sposób implementacji przedstawiony jest poniżej.



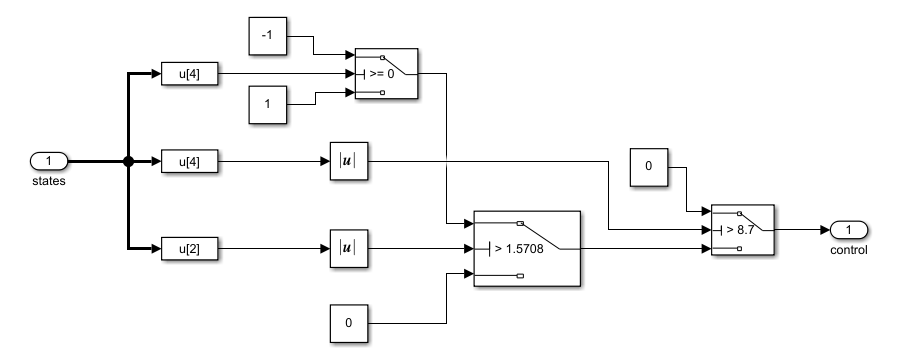
Rys. 3 Sprawdzanie zakresu pierwszej zmiennej stanu (x – położenie wózka na torze)



Rys. 4 Sterowanie w przeciwną stronę do wykrytego ograniczenia

## Rozbujanie wahadła

Do głównych zadań kontrolera oprócz stabilizacji w punkcie równowagi należy rozbujanie wahadła, aby znalazło się ono w okolicy punktu pracy, czyli w takim otoczeniu punktu pracy (), dla którego opracowany na podstawie przybliżenia modelu nieliniowego do liniowego algorytm stabilizacji będzie skuteczny. Zaimplementowany algorytm został nazwany „swinging controller” i zaprezentowany poniżej.

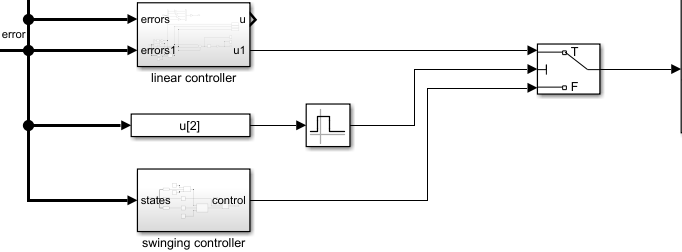


Rys. 5 „swinging controller” – rozbujanie wahadła

Zasada działania jest następująca: kiedy prędkość kątowa wahadła jest większa lub równa 0, to podawane jest sterowanie , dzięki czemu do wahadła jest dostarczana dodatkowa energia kinetyczna. Kiedy zostanie osiągnięty punkt krańcowy wychylenia i zaczyna opadać, a co za tym idzie prędkość kątowa zmienia znak, to podawane jest sterowanie o przeciwnym znaku. W ten sposób za każdym razem wahadło wychyla się dalej niż poprzednio, aż do osiągnięcia strefy, w której zastosowanie ma regulator stabilizujący. Ponadto zostało dodane ograniczenie sterowania, gdy wahadło przekroczy kąt oraz gdy prędkość kątowa przekroczy pewną wartość w celu uniknięcia sytuacji, w której wahadło będzie miało zbyt dużą energię kinetyczną, aby dało się je wyhamować regulatorem stabilizującym.

## Przełączanie kontrolerów stabilizującego i wychylającego

Wybór aktywnego kontrolera, na podstawie którego wyznaczane jest sterowanie odbywa się poprzez sprawdzanie aktualnego kąta wychylenia wahadła. Kiedy kąt mieści się w zakresie stabilizacji, to działa regulator stabilizujący, w przeciwnym przypadku – wychylający. Przełączanie zostało zrealizowane z użyciem bloku *„interval test”* oraz *„switch”*, jak zostało pokazane na poniższym rysunku.



Rys. 6 Przełączanie kontrolerów

## Regulator stabilizujący

Najważniejszym elementem sterownika jest regulator stabilizujący, który ma za zadanie doprowadzenie wahadła do niestabilnego punktu równowagi i utrzymanie go tam, czyli kompensacja zakłóceń. W projekcie została podjęta próba wyznaczenia regulatora optymalnego z równań Riccatiego na podstawie zlinearyzowanego modelu oraz zidentyfikowanych parametrów. Zastosowany został także regulator PID wyznaczający sterowanie na podstawie uchybów wartości stanów od wartości zadanej.

### Regulator LQ

Dzięki przeprowadzonej identyfikacji nieznanych parametrów modelu uzyskano dokładne macierze stanu, na podstawie których możliwe było wyznaczenie wzmocnień regulatora LQ. Na poniższym listingu został zamieszczony sposób wyznaczania tych wzmocnień.

% state matrices after linearization

A = [0 0 1 0;

0 0 0 1;

0 -(m\*g/MM) -gamma2/MM 0;

0 g\*((MM+m))/(MM\*l) gamma2/(MM\*l) 0];

B = [0 0 1/MM -1/(MM\*l)]';

C = [1 1 1 1];

D = 0;

% observability and controllability test

ob = obsv(A,C);

rank(ob); % n=4: observable

ct = ctrb(A,B);

rank(ct); % n=4: controllable

% lqr coefficients calculation

Q = [1 0 0 0;

0 100 0 0;

0 0 10 0;

0 0 0 100];

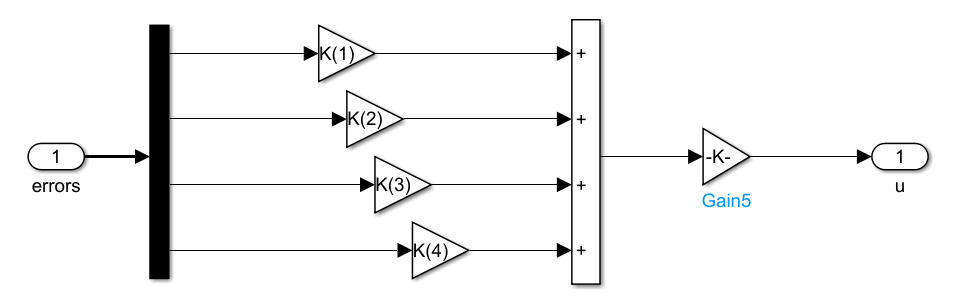
R = 1;

K = lqr(A,B,Q,R); % LQ regulator parameters

Zmienne widoczne na listingu mają następujące znaczenie: *m* oraz *MM* oznaczają odpowiednio masę wahadła oraz wózka, *g* jest przyspieszeniem ziemskim, *l* oraz *gamma2* są identyfikowanymi w poprzednim rozdziale parametrami, *A, B, C, D* są macierzami stanu, natomiast *Q, R* i *K* odpowiednio macierzą wag, ograniczeniem sterowania oraz obliczanym wektorem wzmocnień dla regulatora. W ten sposób uzyskano następujące parametry regulatora proporcjonalnego:

K = [-1,-41.2832,-4.4032,-13.3673];

Mając wyznaczone wzmocnienia można jest w prosty sposób zaimplementować w algorytmie sterującym, jak pokazano na poniższym rysunku.

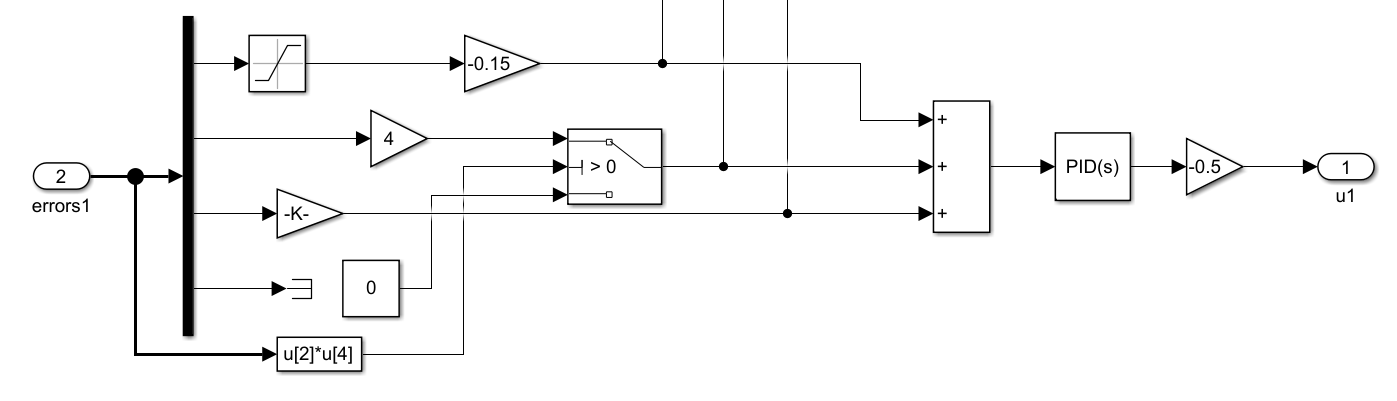


Rys. 7 Implementacja regulatora LQR

Niestety wyznaczony regulator LQ nie był wystarczająco dokładny i nie doprowadzał w skończonym czasie uchybów do zera. Prawdopodobną przyczyną jest niewystarczająco dokładne odwzorowanie rzeczywistego obiektu w sposób matematyczny, w szczególności niedokładnie dobrane parametry tego modelu podczas identyfikacji, na etapie której już były widoczne pewne rozbieżności.

### Regulator PID

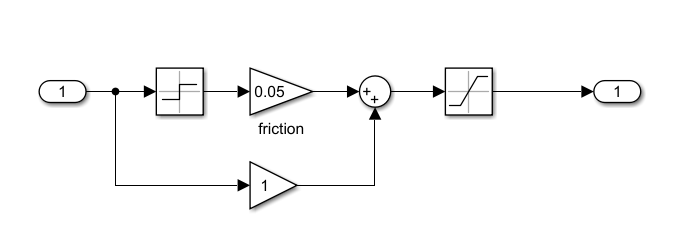
Oprócz regulatora LQ podjęto próbę zastosowania klasycznego regulatora PID, którego zadaniem jest sprowadzanie uchybu do zera. Na jego wejściu podawana jest kombinacja uchybów poszczególnych zmiennych stanu ze współczynnikami wyznaczonymi empirycznie. Ponadto wprowadzona została saturacja uchybu położenia, żeby nie „utrudniał” on stabilizacji wahadło w pionie oraz zerowanie uchybu kąta, jeśli ma on przeciwny znak względem prędkości, gdyż w takim przypadku kąt i tak zmierza do zera. Schemat układu w regulatorem PID został zamieszczony na poniższym rysunku.



Rys. 8 Stabilizacja z wykorzystaniem regulatora PID

## Saturacja kompensacja tarcia

Kompensacja tarcia oraz saturacja została zrealizowana poprzez nieznaczne zwiększenie sterowania o wartość proponowaną w instrukcji do stanowiska (0.05) oraz ograniczenie sterowania obliczanego wszystkimi algorytmami do zakresu .



Rys. 9 Kompensacja tarcia i saturacja sterowania

# Symulacja stabilizacji wahadła

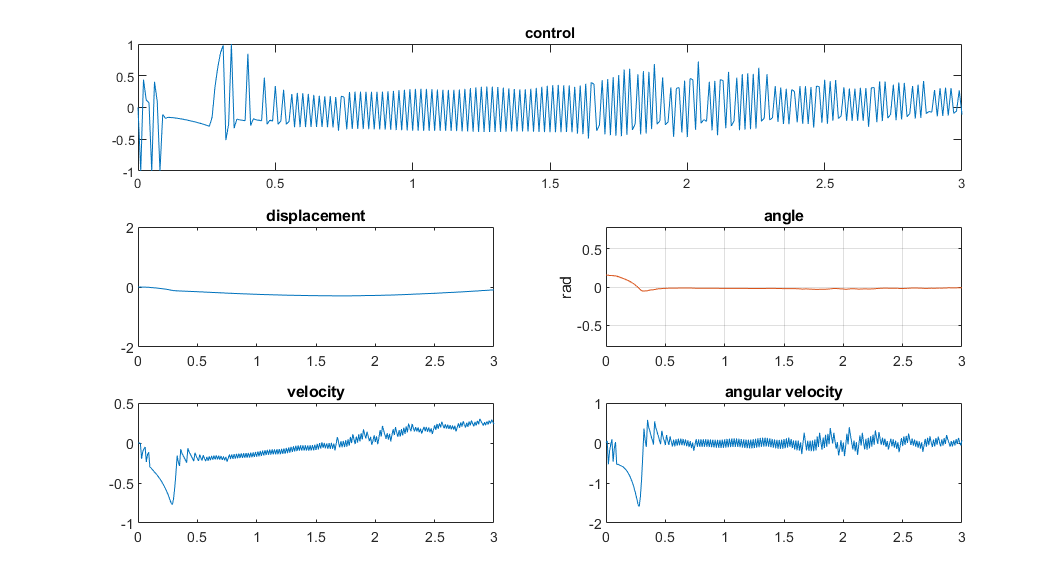
## Stabilizacja w otoczeniu punktu pracy

W pierwszej symulacji sprawdzone zostało działanie algorytmu stabilizacji pozycji wahadła w punkcie pracy. Symulacja została przeprowadzona z warunkami początkowymi:

init\_cond = [0 pi/20 0 0];

stab\_point = [0 0 0 0];

Aktywnym regulatorem jest regulator PID. Na poniższym wykresie można zaobserwować stabilizację z horyzontem czasowym 3s.



Rys. 10 Symulacja regulatora stabilizującego, warunek początkowy

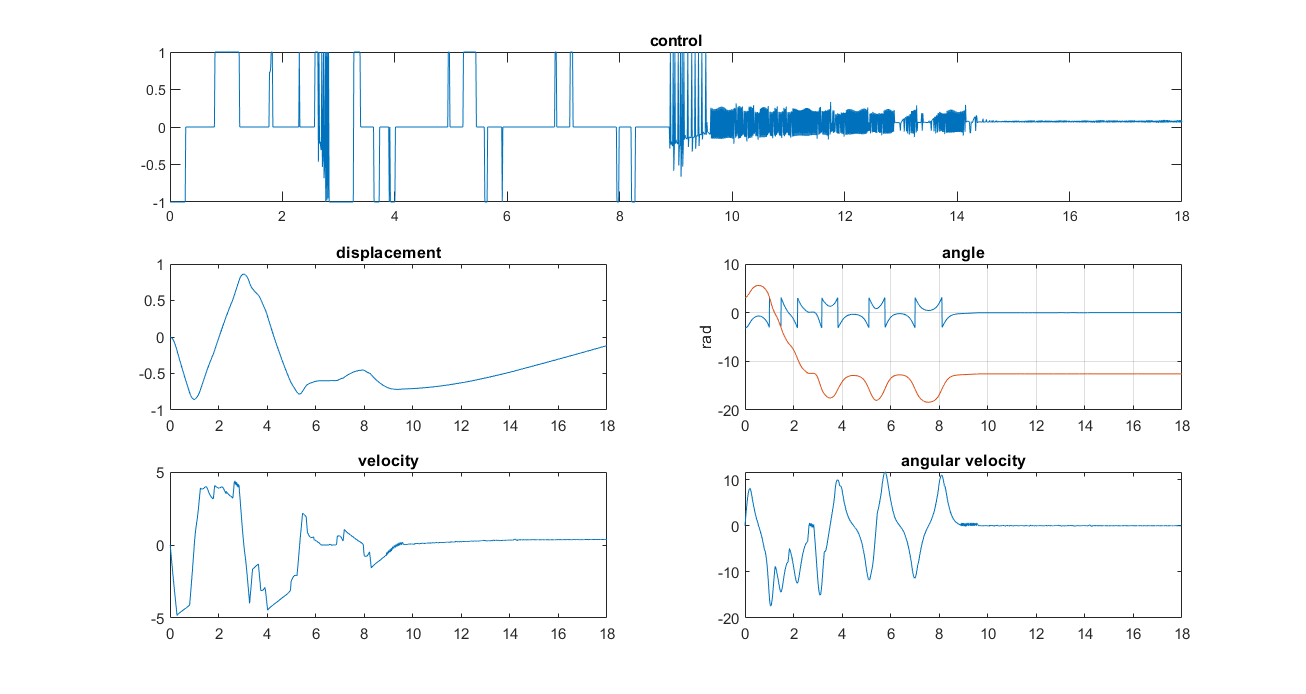
## Podniesienie wahadła i stabilizacja

Kolejna symulacja obejmuje rozbujanie wahadła i stabilizacje w punkcie pracy. Warunki początkowe są następujące:

init\_cond = [0 pi 0 0];

stab\_point = [0 0 0 0];

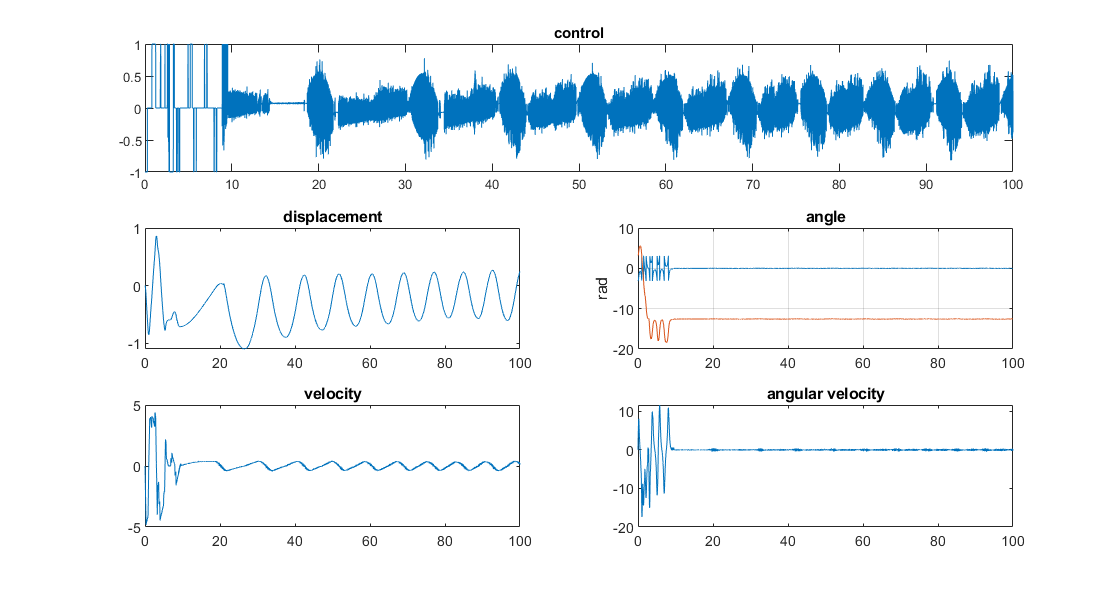
Symulacja została przeprowadzona z horyzontem czasowym 18s.



Rys. 11 Symulacja wychylenia i stabilizacji wahadła

Na powyższych wykresach można zaobserwować, że wszystkie zmienne stanu zostały sprowadzone do 0, jednak nie udało się tego osiągnąć przy pierwszej „okazji”, czyli za pierwszym razem, kiedy wahadło weszło w strefę stabilizacji. Udało się to osiągnąć dopiero wtedy, kiedy prędkość i prędkość kątowa nie są zbyt duże w chwili osiągnięcia zakresu pracy regulatora PID.

W celu sprawdzenia, czy po pewnym czasie uchyby i sterowanie dążą do zera przeprowadzono symulację dla dłuższego czasu. Wynik został zamieszczony na poniższym wykresie.



Rys. 12 Symulacja wychylenia i stabilizacji wahadła dla t=100

Tym razem można zaobserwować, że kąt i prędkość kątowa jest prawidłowo sprowadzana do 0, jednak wózek okresowo przemieszcza się w pewnym zakresie toru. Prawdopodobną przyczyną takiego zachowania jest niezgodność modelu matematycznego i obiektu, na którym były przeprowadzane testy.

W celu sprawdzenia tej hipotezy uruchomiono algorytm sterujący dla modelu nieliniowego danego równaniami (21).

## Symulacja stabilizacji wahadła dla modelu nieliniowego

W modelu nieliniowym przyjęto (tak samo jak podczas procesu identyfikacji parametrycznej modelu), że wahadło ma formę jednorodnego pręta, o momencie bezwładności:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ()­­­ |
|  |  |  |

Po podstawieniu do układu równań (21), model nieliniowy przyjmuje postać:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (33)­­­ |
|  |  |  |

Następnie na podstawie (33) stworzony został model nieliniowy wahadła matematycznego, który posłużyć do testowania oraz dostrajania algorytmu sterowania: