Sprawozdanie I

Metody Numeryczne - Laboratoria

Temat:

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i

wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu

rozkładu LU

WFIIS

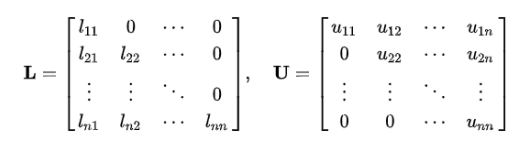
03.03.2024

Kacper Plutowski

1. Wstęp teoretyczny
   1. Rozkład LU oraz dekompozycja macierzy

**Metoda LU** – metoda, służąca do rozwiązywania układu równań liniowych. Dekompozycja LU polega na zamianie macierzy A na jej odpowiednik, złożony z dwóch macierzy trójkątnych

gdzie:



Przy czym zakładamy, że na głównej przekątnej jednej z macierzy są jedynki. Z wykorzystaniem tej techniki możemy efektywnie rozwiązywać układy równań liniowych i wyznaczać determinanty macierzy w krótkim czasie. Metodę zazwyczaj stosuje się do wielu obliczeń, gdzie współczynniki są stałe, a wyrazy wolne w układzie ulegają zmianie.

Rozwiązywanie równań polega na sprowadzeniu

do układu dwóch równań:

Taki układ dzięki właściwościom macierzy trójkątnych pozwala na szybkie rozwiązanie

* 1. Obliczanie wyznacznika macierzy

Rozkład LU macierzy umożliwia obliczenie wyznacznika poprzez skorzystanie z faktu, że wyznacznik macierzy trójkątnej redukuje się do mnożenia elementów znajdujących się na jej przekątnej. W tym przypadku zakłada się, że na głównej przekątnej macierzy L znajdują się jedynki.

Znając twierdzenie Cauchy’ego:



możemy wywnioskować:



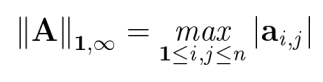
* 1. Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wartość ta wyraża, w jakim stopniu błąd względny obliczeniowy przewyższa błąd względny różnicy pomiędzy przybliżeniem a wartością dokładną.



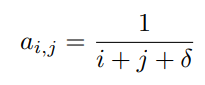
Przyjmujemy, że gdy istnieje znaczna rozbieżność między przybliżeniem a wartością dokładną, wyniki obliczeń będą również istotnie różniły się. Problem charakteryzujący się niskim wskaźnikiem uwarunkowania nazywamy dobrze uwarunkowanym, podczas gdy ten z wysokim wskaźnikiem uwarunkowania określamy jako źle uwarunkowany. Dane dotyczące problemów o znacznym wskaźniku uwarunkowania są mało odpowiednie do rozwiązania numerycznego, ponieważ błąd wynikający z numerycznej reprezentacji liczb wprowadza nieproporcjonalnie dużą niepewność w rezultatach obliczeń.

Wartość wskaźnika zależy od przyjętej normy. Jedna z norm która może być wykorzystana to norma maximum:



1. Problem

Zadaniem było obliczenie wyznacznika oraz wskaźnika uwarunkowania kwadratowej macierzy A o rozmiarze 4 danej wzorem:



Używaliśmy funkcji z biblioteki GSL, więc 𝛿 miało wartość 2.

Do dekompozycji macierzy użyliśmy funkcji:

int gsl\_linalg\_LU\_decomp(gsl\_matrix \*a, gsl\_permutation \*p, int \*signum)

Ponieważ macierze L i U mają wspólną przekątną, gdzie dla macierzy L są to jedynki, możemy efektywnie zarządzać pamięcią, unikając podwójnego zapisu tej samej informacji.

Kontynuując rozwiązywanie zadania, wyznaczyliśmy wartość wyznacznika macierzy, wykorzystując wcześniej omówioną w teorii metodę.

Aby otrzymać macierz odwrotną, rozwiązaliśmy n układów równań, zastosowując je do kolejnych wektorów bazowych kanonicznych. W ten sposób uzyskaliśmy odpowiednie kolumny macierzy odwrotnej. Wykorzystanie jednej dekompozycji do rozwiązania wszystkich układów znacznie upraszczał cały proces.

Sprawdzenie skuteczności naszego rozwiązania polega na obliczeniu iloczynu macierzy A i jej odwrotnej, oznaczonej jako B. Jedną z metod uzyskania tego iloczynu jest zastosowanie algorytmu Cauchy’ego do mnożenia macierzy:

for (i = 0; i < n; ++i)

{

  for (j = 0; j < n; ++j)

  {

    C[i][j] = 0;

    for (k = 0; k < n; ++k)

      C[i][j] += A[i][k] \* B[k][j];

  }

}

Ta metoda jest przydatna dla małych macierzy, ponieważ nie korzysta z dodatkowych stałych.

Obliczyliśmy wskaźnik uwarunkowania, wykorzystując metodę opisaną we wstępie teoretycznym do tego zagadnienia.

1. Wyniki
   1. Elementy leżące na diagonali macierzy U

U1,1 = 0.5

U2,2= 0.0333333

U3,3 = -0.00138889

U4,4 = 0.000102041

* 1. Wyznacznik macierzy A

det(A) = -2.362056 ∙10-9

* 1. Macierz A-1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 200 | -1200 | 2100 | -1120 |
| -1200 | 8100 | -15120 | 8400 |
| 2100 | -15120 | 29400 | -16800 |
| -1120 | 8400 | -16800 | 9800 |

* 1. Iloczyn A · A-1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | -9.09495·10-13 | 4.54747·10-13 | 4.54747·10-13 |
| 2.55795·10-13 | 1 | 4.54747·10-13 | 0 |
| 1.98952·10-13 | -4.54747·10-13 | 1 | 2.27374·10-13 |
| 1.98952·10-13 | -4.54747·10-13 | 0 | 1 |

* 1. Wskaźnik uwarunkowania

κ(A) = 14700

1. Komentarz do wyników

Wyniki są zgodne z przewidywanymi wartościami, z wyjątkiem sytuacji dotyczącej elementów macierzy 𝐴 ⋅ 𝐴-1. W tym przypadku można zauważyć, że elementy pobliskie do przekątnej macierzy, chociaż posiadają bardzo małe wartości, nie są dokładnie równe zero.

1. Wnioski

Wybrana metoda umożliwia obliczenie wyznacznika, odwrócenie macierzy oraz wyznaczenie wskaźnika uwarunkowania. Niemniej jednak, pomimo tego, że macierz 𝐴 ⋅𝐴−1 była bliska jednostkowej, zawierała pewne drobne zakłócenia.

Dodatkowo, wyznacznik macierzy posiada bardzo małą wartość, co wpływa na znaczną niedokładność obliczeń komputerowych a wartość wskaźnika uwarunkowania macierzy jest wysoka, co w rezultacie sprawia, że ta metoda nie jest uznawana za optymalną.