

Лабораторная работа 3.

Аппроксимация функции обобщенным рядом Фурье

Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если при всяком $m \neq n$ имеет место равенство

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0.$$

Примером ортогональной системы на отрезке $[-\pi, \pi]$ является **система тригонометрических функций**

$$(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots),$$

Теорема Дирихле. Пусть $f(x)$ — 2π -периодическая функция на отрезке $[-\pi; \pi]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(x)$ — кусочно-непрерывна;
2. $f(x)$ — кусочно-монотонна.

$$\text{Тогда } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и ряд Фурье сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, причем:

1. в точках непрерывности $S(x) = f(x)$;
2. если x_0 — точка разрыва, то $S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$;
3. $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$.

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Пример 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi; 0), \\ 1, & x \in (0; \pi). \end{cases}$$

Решение. По формулам найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = -\frac{1}{\pi} x \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} (0 - (-\pi)) + \frac{1}{\pi} \pi = 0,$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n} \sin n\pi + \frac{1}{\pi n} \sin n\pi = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi n} (1 - \cos n\pi) - \frac{1}{\pi n} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi), \end{aligned}$$

Используя равенство $(-1)^n = \cos n\pi$, $\begin{cases} 1, & n = 2k, \\ -1, & n = 2k + 1 \end{cases}$, вычислим коэффициенты b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \cdot 2k} (1 - 1), n = 2k, \\ \frac{2}{\pi(2k+1)} \cdot 2, n = 2k+1 \end{cases} = \frac{4}{\pi(2k+1)}.$$

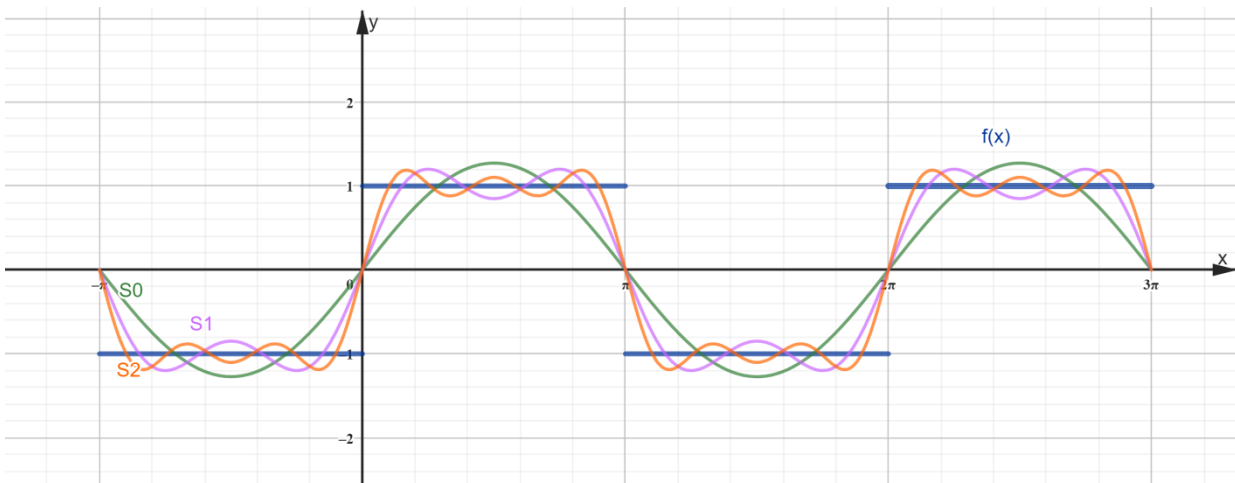
Таким образом, функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin nx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{1} \sin x + \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{2}{5} \sin 5x + \frac{2}{7} \sin 7x + \dots \right).$$

Частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin x, \quad S_3(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \quad S_5(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right)$$



Функция $f(x)$ и первые три, отличные от нуля, частичные суммы ее разложения в ряд Фурье:

Ответ: $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$

Неполные ряды Фурье

В зависимости от четности функции $f(x)$ ее разложение в ряд Фурье может упрощаться и иметь вид соответственно:

- $f(x)$ – четная: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx$;
- $f(x)$ – нечетная: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx$.

Пример 2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = x, x \in (-\pi; \pi)$.

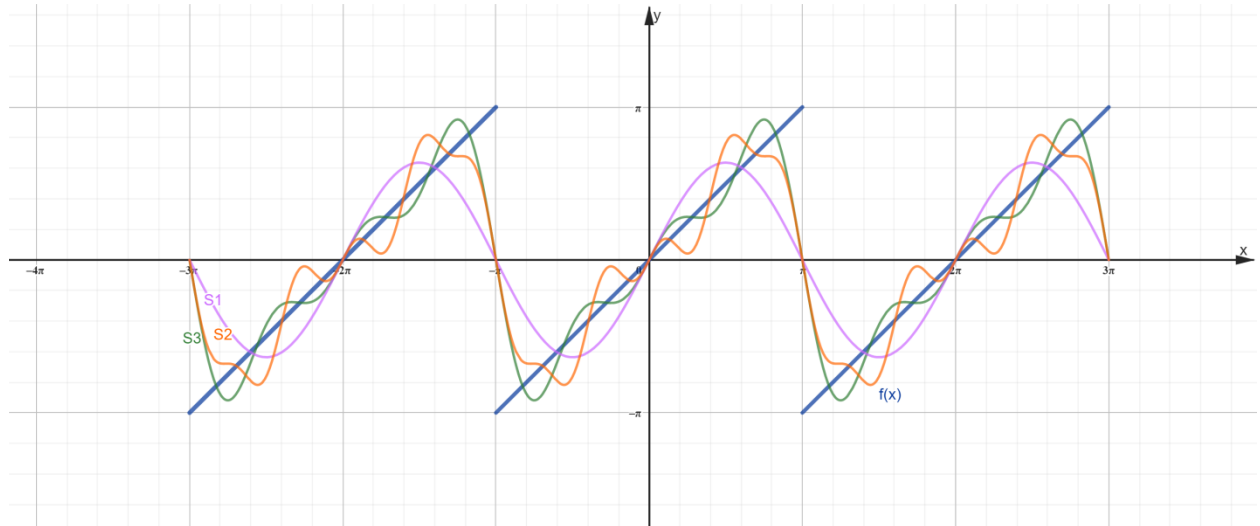
Решение. Так как функция $f(x) = x$ является нечетной, найдем для нее коэффициенты b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{n} \right) \cos \pi n = -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Тогда разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right).$$

Функция $f(x)$ и первые три частичные суммы ее разложения в ряд Фурье:



Ответ: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx.$

Ортогональные многочлены можно получить при помощи ортогонализации по Шмидту системы заданных на отрезке $[a, b]$ функций вида $\sqrt{p(x)}x^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $p(x)$ – некоторая положительная функция, непрерывная на $[a, b]$.

Для отрезка $[-1, 1]$ и $p(x) = 1$ получаем *полиномы Лежандра*;

Многочлены Лежандра	
Общая информация	
Формула	$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$
Скалярное произведение	$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$
Область определения	$[-1, 1]$
Дополнительные характеристики	
Дифференциальное уравнение	$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0$
Норма	$\ P_n(x)\ = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$
Названы в честь	Лежандр, Адриен Мари

Первые многочлены Лежандра в явном виде:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \\ P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x), \end{aligned}$$

Ряд Фурье по полиномам Лежандра для кусочно-гладкой функции $f(x)$ на $[-1, 1]$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots,$$

где коэффициенты

$$c_n = \frac{(f(x), P_n(x))}{\|P_n(x)\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Пример 3. Разложить в обобщенный ряд Фурье по полиномам Лежандра функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$P_0(x) = 1, \quad c_0 = \frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-1) \cdot 1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot 1 dx = -\frac{1}{2} x \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (0 - (-1)) + \frac{1}{2} (1 - 0) = 0.$$

$$P_1(x) = x, \quad c_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^0 (-1) \cdot x dx + \frac{3}{2} \int_0^1 1 \cdot x dx = -\frac{3}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{3}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{3}{2} \left(0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{2}.$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad c_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_2(x) dx = 0, \text{ т.к. } f(x) P_2(x) - \text{нечетная функция на отрезке } [-1, 1].$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad c_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_3(x) dx =$$

|т.к. $f(x) P_3(x)$ – четная функция на отрезке $[-1, 1]$ | $= 2 \cdot \frac{7}{2} \int_0^1 f(x) P_3(x) dx = 2 \cdot$

$$\frac{7}{2} \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) dx = \frac{7}{2} \left(\frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{2} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{7}{8}.$$

И т.д.

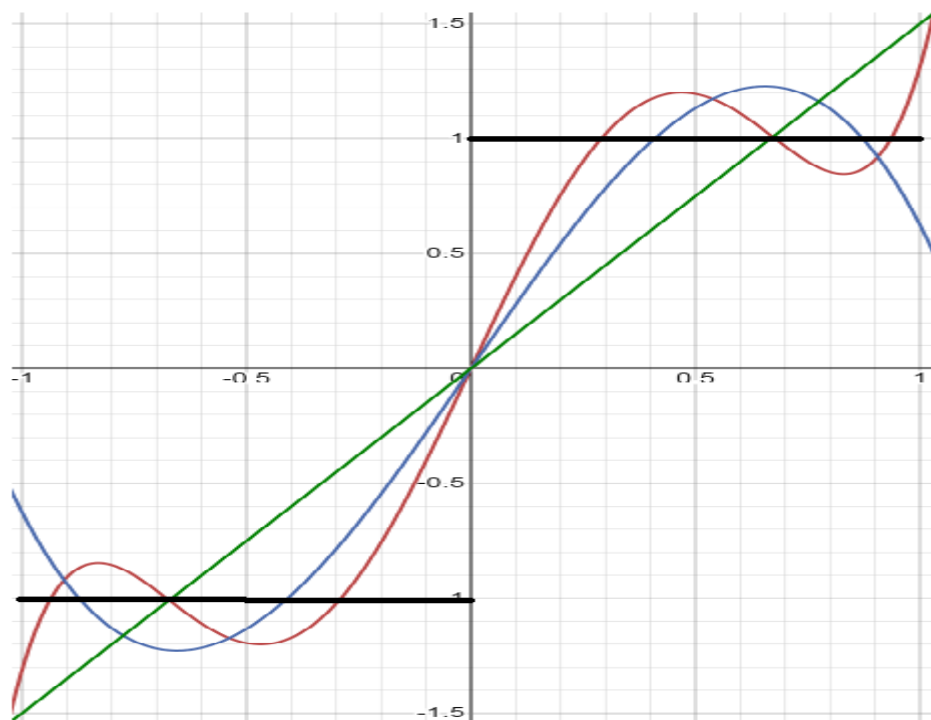
$$c_5 = \frac{2 \cdot 5 + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_5(x) dx = 2 \cdot \frac{11}{2} \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) dx$$

$$= \frac{11}{8} \left(\frac{63x^6}{6} - \frac{70x^4}{4} - \frac{15x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{8} \left(\frac{63}{6} - \frac{70}{4} - \frac{15}{2} \right) = \frac{11}{16}.$$

$$f(x) = 0 \cdot P_0(x) + \frac{3}{2} P_1(x) + 0 \cdot P_2(x) - \frac{7}{8} P_3(x) + 0 \cdot P_4(x) + \frac{11}{16} P_5(x) + \dots$$

Таким образом,

$$f(x) \approx \frac{3}{2} x - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) + \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



Сравните (смотри лекцию)

