

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.

Тема 1. Линейные пространства

Вопросы для обсуждения

Линейное (векторное) пространство \mathbb{R}^n
Линейная зависимость (независимость) векторов
Базис линейного пространства
Координаты элемента (вектора) в заданном базисе
Евклидово пространство
Построение ортонормированного базиса
Ортогональные матрицы и их свойства
Прямые методы решения СЛАУ (модификации метода Гаусса, схема Халецкого, применение методов ортогонализации)

ЗАДАНИЕ.

Даны три вектора $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

1. Дополните систему этих векторов вектором $\overline{e_4}$, чтобы система векторов $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}\}$, образовала базис в \mathbb{R}^4 .

2. Найдите координаты вектора $\overline{x} = (1; 2; 3; 4) \in \mathbb{R}^4$ в полученном базисе.

3. Используя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, постройте ортонормированный базис $\{\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}\}$ на основании базиса $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}\}$.

4. Контроль. Докажите, что векторы $\{\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}\}$ образуют ортонормированный базис в \mathbb{R}^4 .

5. Найдите координаты вектора $\overline{x} = (1; 2; 3; 4) \in \mathbb{R}^4$ в базисе $\{\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}\}$.

6. Составьте матрицу, столбцами которой являются базисные векторы $\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}$. Докажите, что эта матрица является ортогональной.

7. Проверьте свойство ортогональной матрицы: $A^{-1} = A^T$.

8. Проверьте свойство ортогональной матрицы: $\det A = \pm 1$.

Оцените погрешности вычислений. При решении систем линейных алгебраических уравнений используйте методы, рассмотренные на лекции.

Вариант 1. $\overline{e_1} = \{1, -4, -8, 0\}$, $\overline{e_2} = \{-4, 7, -4, 1\}$, $\overline{e_3} = \{-8, -4, 1, 1\}$.

Вариант 2. $\overline{e_1} = \{4, 3, 3, 1\}$, $\overline{e_2} = \{-3, 0, -3, 1\}$, $\overline{e_3} = \{1, -1, 2, 0\}$.

Вариант 3. $\overline{e_1} = \{4, 3, 3, 2\}$, $\overline{e_2} = \{-4, -3, -6, 2\}$, $\overline{e_3} = \{2, 2, 5, 0\}$.

Вариант 4. $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, 2\}$, $\overline{e_2} = \{2, -9, -18, 1\}$, $\overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 1\}$.

Вариант 5. $\overline{e_1} = \{1, -4, -8, 1\}$, $\overline{e_2} = \{-4, 7, -4, 1\}$, $\overline{e_3} = \{-8, -4, 1, 0\}$.

Вариант 6. $\overline{e_1} = \{-3, -5, -4, 0\}$, $\overline{e_2} = \{7, 9, 5, 1\}$, $\overline{e_3} = \{-3, -3, 0, 1\}$.

Вариант 7. $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, 0\}$, $\overline{e_2} = \{2, -9, -18, 1\}$, $\overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 1\}$.

Вариант 8. $\overline{e_1} = \{7, 5, 4, 0\}$, $\overline{e_2} = \{-3, -1, -3, -1\}$, $\overline{e_3} = \{-3, -3, 0, 1\}$.

Вариант 9. $\overline{e_1} = \{6, 5, 4, 2\}$, $\overline{e_2} = \{-1, 0, -1, 1\}$, $\overline{e_3} = \{-2, -2, 0, 1\}$.

- Вариант 10.** $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, 1\}, \overline{e_2} = \{2, -9, -18, 0\}, \overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 1\}.$
- Вариант 11.** $\overline{e_1} = \{1, -4, -8, 2\}, \overline{e_2} = \{-4, 7, -4, 1\}, \overline{e_3} = \{-8, -4, 1, -1\}.$
- Вариант 12.** $\overline{e_1} = \{4, 3, 3, 0\}, \overline{e_2} = \{-3, 0, -3, 1\}, \overline{e_3} = \{1, -1, 2, -2\}.$
- Вариант 13.** $\overline{e_1} = \{6, 5, 4, 1\}, \overline{e_2} = \{-1, 0, -1, 0\}, \overline{e_3} = \{-2, -2, 0, 2\}.$
- Вариант 14.** $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, 1\}, \overline{e_2} = \{2, -1, 18, 1\}, \overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 1\}.$
- Вариант 15.** $\overline{e_1} = \{1, -4, -8, -1\}, \overline{e_2} = \{-4, 7, -4, 1\}, \overline{e_3} = \{-8, -4, 1, 0\}.$
- Вариант 16.** $\overline{e_1} = \{-3, -5, -4, 1\}, \overline{e_2} = \{7, 9, 5, 0\}, \overline{e_3} = \{-3, -3, 0, 0\}.$
- Вариант 17.** $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, -2\}, \overline{e_2} = \{2, -9, 18, 2\}, \overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 1\}.$
- Вариант 18.** $\overline{e_1} = \{7, 5, 4, 2\}, \overline{e_2} = \{-3, -1, -3, -3\}, \overline{e_3} = \{-3, -3, 0, -2\}.$
- Вариант 19.** $\overline{e_1} = \{4, 3, 3, 4\}, \overline{e_2} = \{-4, -3, -6, 0\}, \overline{e_3} = \{2, 2, 5, 2\}.$
- Вариант 20.** $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, -3\}, \overline{e_2} = \{2, -9, 18, 9\}, \overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 3\}.$
- Вариант 21.** $\overline{e_1} = \{1, -4, -8, -2\}, \overline{e_2} = \{-4, 7, -4, -1\}, \overline{e_3} = \{-8, -4, 1, 0\}.$
- Вариант 22.** $\overline{e_1} = \{4, 3, 3, -4\}, \overline{e_2} = \{-3, 0, -3, 0\}, \overline{e_3} = \{1, -1, 2, 2\}.$
- Вариант 23.** $\overline{e_1} = \{4, 3, 3, 0\}, \overline{e_2} = \{-4, -3, 6, 0\}, \overline{e_3} = \{2, 2, 5, 10\}.$
- Вариант 24.** $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, 5\}, \overline{e_2} = \{2, -9, 18, 0\}, \overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 1\}.$
- Вариант 25.** $\overline{e_1} = \{1, -4, -8, 8\}, \overline{e_2} = \{-4, 7, -4, 0\}, \overline{e_3} = \{-8, -4, 1, -2\}.$
- Вариант 26.** $\overline{e_1} = \{-3, -5, -4, 4\}, \overline{e_2} = \{7, 9, 5, 1\}, \overline{e_3} = \{-3, -3, 0, -3\}.$
- Вариант 27.** $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, 7\}, \overline{e_2} = \{2, -9, -18, -1\}, \overline{e_3} = \{-2, 6, 12, -1\}.$
- Вариант 28.** $\overline{e_1} = \{7, 5, 4, 7\}, \overline{e_2} = \{-3, -1, -3, 7\}, \overline{e_3} = \{-3, -3, 0, -1\}.$
- Вариант 29.** $\overline{e_1} = \{6, 5, 4, 3\}, \overline{e_2} = \{-1, 0, -1, -1\}, \overline{e_3} = \{-2, -2, 0, -1\}.$
- Вариант 30.** $\overline{e_1} = \{3, 2, 3, 9\}, \overline{e_2} = \{2, -9, 18, -18\}, \overline{e_3} = \{-2, 6, 12, 0\}.$