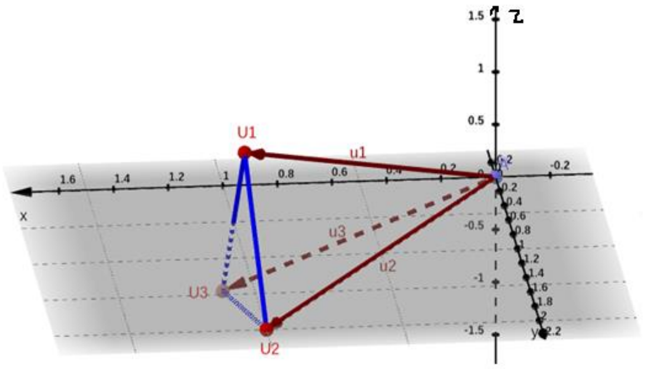
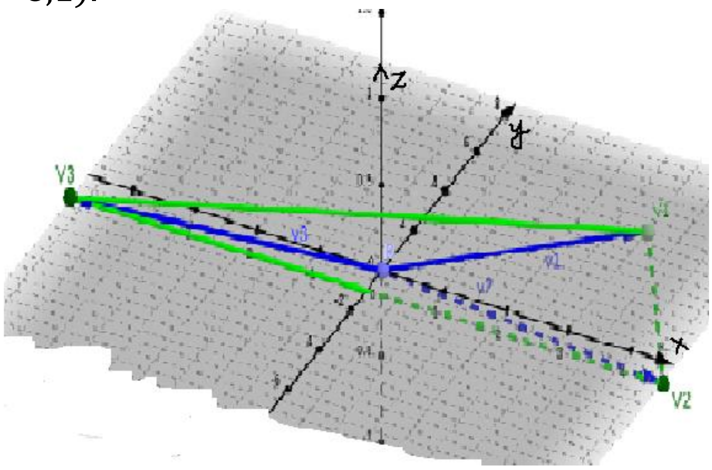
Лабораторная работа 4. Линейные операторы

Линейное преобразование в пространстве $\mathbf{R}^3$
Матрица оператора в разных базисах
Собственные векторы и собственные значения
Характеристический многочлен
Приведение матрицы к диагональному виду

Линейное преобразование A трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$ переводит треугольник с вершинами в точках $U_1(1,1,1)$, $U_2(1,2,0)$, $U_3(1,0,-1)$ соответственно в треугольник с вершинами $V_1(3,5,0), V_2(3,6,-1), V_3(-3,-8,1)$.





Запишем радиус-векторы указанных точек

$$u_1 = (1,1,1)^T, u_2 = (1,2,0)^T, u_3 = (1,0,-1)^T$$
$$v_1 = (3,5,0)^T, v_2 = (3,6,-1)^T, v_3 = (-3,-8,1)^T.$$

Искомое преобразование $V = AU$ существует и единственно, так как векторы u_1, u_2, u_3 – линейно независимы (проверьте!) и, следовательно, составляют базис пространства $\mathbf{R}^3$.

1. Найдем матрицу A_{ijk} преобразования A в ортонормированном базисе *i, j, k*.

Имеют место соотношения $v_i = Au_i,\ i = 1,2,3,$ которые могут быть записаны в виде матричного уравнения $V = A_{ijk}U$ или

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Предложите несколько способов решения матричного уравнения.

Один из способов (не самый рациональный). Умножая каждую строку матрицы A на столбцы матрицы U, запишем и решим три системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3, \\ a_{11} + 2a_{12} = 3, \\ a_{11} - a_{13} = -3, \end{cases} \begin{cases} a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5, \\ a_{21} + 2a_{22} = 6, \\ a_{21} - a_{23} = -8, \end{cases} \begin{cases} a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1, \\ a_{31} + 2a_{32} = -1, \\ a_{31} - a_{33} = 1. \end{cases}$$

Искомая матрица линейного оператора в ортонормированном базисе ***i, j, k*** имеет вид

$$A_{ijk} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение в Excel матричного уравнения $V = A_{ijk} U$: $\boxed{A_{ijk} = V \cdot U^{-1}}$

G6 {=МУМНОЖ(B6:D8;G2:I4)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	U=	1	1	1		U^-1=	0,666667	-0,33333	0,666667
3		1	2	0			-0,33333	0,666667	-0,33333
4		1	0	-1			0,666667	-0,33333	-0,33333
5									
6	V=	3	3	-3		Aijk=VU^-1	-1	2	2
7		5	6	-8			-4	5	4
8		0	-1	1			1	-1	0
9									
10									

2. Найдем матрицу A_u преобразования A в базисе u_1, u_2, u_3.

Матрицу A_u ищем по формуле $A_u = U^{-1} A_{ijk} U$, где

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– матрица перехода от базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ к базису $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$.

Вычислив обратную матрицу U^{-1}, перемножив матрицы, получим

$$A_u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L6 {=МУМНОЖ(L2:N4;B2:D4)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2	U=	1	1	1		U^-1=	0,666667	-0,33333	0,666667		U^-1 Aijk=	1,333333	-1	2,22E-16	
3		1	2	0			-0,33333	0,666667	-0,33333			-2,66667	3	2	
4		1	0	-1			0,666667	-0,33333	-0,33333			0,333333	-1,7E-16	2,22E-16	
5															
6	V=	3	3	-3		Aijk=VU^-1	-1	2	2		Au=	0,333333	-0,66667	1,333333	
7		5	6	-8			-4	5	4			2,333333	3,333333	-4,66667	
8		0	-1	1			1	-1	0			0,333333	0,333333	0,333333	
9															

!!!!!Матрица линейного оператора зависит от выбора базиса.

Утверждение. Матрица линейного оператора позволяет найти образ любого вектора по единому алгоритму в выбранном базисе.

Утверждение. Матрица линейного оператора имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого линейного оператора. В этом случае на главной диагонали матрицы стоят собственные числа.

Собственные значения и собственные векторы оператора *A*.

Опр. *Ненулевой* элемент $\bar{x}\in L$ $(\bar{x}\neq\bar{0})$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора $A: L\to L,$ если существует такое число $\lambda,$ что

$$A\bar{x}=\lambda\bar{x}.$$

Число λ называется ***собственным значением*** (***собственным числом***) линейного оператора A, соответствующим собственному вектору $\bar{x}$.

Характеристический многочлен матрицы линейного оператора

Для нахождения собственных чисел матрицы A следует решить уравнение $\det(A-\lambda E)=0,$ т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A, а его корни называются ***характеристическими числами***, или ***собственными значениями*** матрицы A. Многочлен n-й степени в левой части характеристического уравнения (1), называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Характеристический многочлен имеет n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

Замечание. Собственными значениями линейного оператора в *действительном* линейном пространстве являются только *действительные* корни характеристического уравнения.

!!!!!!Утверждение. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

3. Найдем характеристический многочлен и собственные значения матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1 способ. Собственные значения определим из условия $\boxed{\det(A-\lambda E)=0,}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0;$$

$$(-1-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda)+3)-3(-3+3\lambda-3)-(-9+15-3\lambda)=0;$$

$$-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0;$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

2 способ. Характеристический многочлен матрицы A может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E}) = (-\boldsymbol{\lambda})^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{s_1}(-\boldsymbol{\lambda})^{\boldsymbol{n-1}} + \cdots + \boldsymbol{s_{n-1}}(-\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{s_n},$$

где коэффициент s_k этого многочлена равен сумме диагональных миноров порядка k.

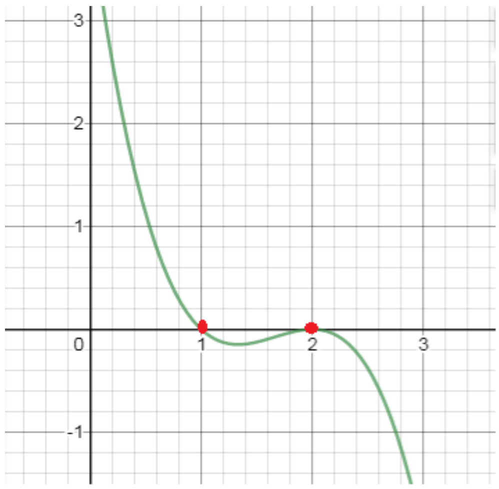
Найдем главные миноры матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$s_1 = -1 + 5 + 1 = 5,$ $\qquad s_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8,$

$$s_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Характеристический многочлен имеет вид $\det(A - \lambda E) = f(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$

4. Построив (он-лайн) график функции $f(\lambda) = 0$, можно оценить корни характеристического уравнения с учетом их кратности.



$f(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$

5. Найдем характеристические числа. Ищем корни среди делителей свободного члена, т.е. среди чисел $\pm1, \pm2, \pm4$. Заметим, что $\lambda_1 = 1$ является корнем этого уравнения. Разделим характеристический многочлен на $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l} \lambda^3 & -5\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \lambda-1 \\ \cline{5-5} \lambda^3 & -\lambda^2 & & & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ \cline{1-2} & -4\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \\ & -4\lambda^2 & +4\lambda & & \\ \cline{2-3} & & 4\lambda & -4 & \\ & & 4\lambda & -4 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Таким образом, $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$, откуда получим **собственные значения матрицы:** $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

6. Найдем собственные векторы оператора.

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A-\lambda E)X=O,$ подставляя $\lambda=1,$ для собственного вектора $X_1=(x_1,x_2,x_3)^T$ получим систему

$$\begin{pmatrix}-1-1 & 3 & -1\\ -3 & 5-1 & -1\\ -3 & 3 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}-2x_1+3x_2-x_3=0,\\ -3x_1+4x_2-x_3=0,\\ -3x_1+3x_2=0.\end{cases}$$

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\ x_2-x_3=0,\\ 0=0,\end{cases}\qquad \text{т. е. } x_1=x_2=x_3.$$

Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид

$$\boxed{X_1=(1,1,1)^T.}$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda=2.$
Их координаты удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix}-1-2 & 3 & -1\\ -3 & 5-2 & -1\\ -3 & 3 & 1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}-3x_1+3x_2-x_3=0,\\ -3x_1+3x_2-x_3=0,\\ -3x_1+3x_2-x_3=0,\end{cases}\qquad -3x_1+3x_2-x_3=0.$$

Полагая $x_1=c_1, x_2=c_2,$ получим $x_3=-3c_1+3c_2.$

Эти формулы при $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ задают все решения системы и, соответственно, все собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda=2.$

При $c_1=1, c_2=0$ получим собственный вектор $\boxed{X_2=(1,0,-3)^T;}$

при $c_1=0, c_2=1$ получим собственный вектор $\boxed{X_3=(0,1,3)^T.}$

Собственные векторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы. Проверьте!

Свойства собственных векторов

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Если $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – два собственных вектора линейного оператора A с одним и тем же собственным значением $\lambda,$ то $\alpha\overline{x_1}+\beta\overline{x_2}$ также является собственным вектором линейного оператора A с тем же собственным значением λ, α, β – числа.

3. Собственные векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}$ линейного оператора A, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k,$ линейно независимы.

!!!!!!!Утверждение. Число линейно независимых собственных векторов, отвечающих одному и тому же корню характеристического уравнения, не превышает кратности этого корня.

!!!!!!!Если ранг матрицы $A - \lambda_j E$ равен r ($r<n$), то существует $k = n - r$ линейно независимых собственных векторов $x^{(1j)}, x^{(2j)}, \ \ldots, x^{(kj)}$, отвечающих корню λ_j

Ранг матрицы – наивысший из порядков всевозможных ненулевых миноров этой матрицы.

В рассмотренном примере ранг матрицы $A - 2E$ равен 1, так как с помощью элементарных преобразований эту матрицу можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, существует k =3–1=2 линейно независимых собственных вектора, соответствующих корню λ=2. Они найдены.

7. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Опр. Матрица A линейного оператора называется ***приводимой к диагональному виду***, если существует такая невырожденная матрица T (такое преобразование базиса), что матрица $D = T^{-1}AT$ является диагональной.

Замечание. Не каждый линейный оператор n-мерного линейного пространства имеет n линейно независимых собственных векторов, а следовательно, не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

Утверждение. Если линейный оператор A, действующий в *действительном* линейном пространстве L, $\dim L = n$, имеет n различных действительных собственных значений, то существует базис пространства L из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A приводима к диагональному виду.

Т.е. ***если корни характеристического уравнения различны, то каждому собственному значению соответствует с точностью до коэффициента пропорциональности один и только один собственный вектор.***

При $n = 3$ и корне характеристического уравнения кратности 2 в каком случае матрица линейного оператора приводима к диагональному виду?

В рассмотренном выше примере матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ приводима к диагональному виду, так как существуют три линейно независимых собственных вектора $X_1 = (1,1,1)^T$, $X_2 = (1,0,-3)^T$, $X_3 = (0,1,3)^T$, образующих базис пространства R^3. Более того, эти векторы являются столбцами матрицы T, такой что $D = T^{-1}AT$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_{ijk}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ также приводима к диагональному виду и справедливо равенство

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1/2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1/2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Контроль. $\boxed{A_{ijk}X=\lambda X}$, где X – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ.

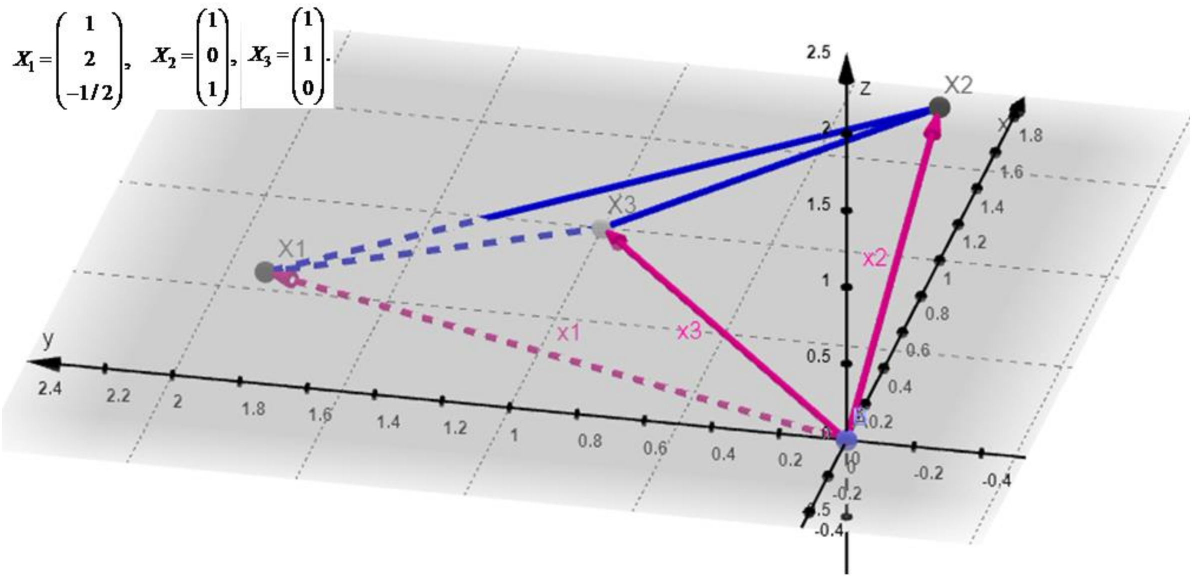
Собственные векторы матрицы A_{ijk}: $X_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1/2\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1+2\cdot2+2\cdot(-1/2)\\ -4\cdot1+5\cdot2+4\cdot(-1/2)\\ 1\cdot1-1\cdot2+0\cdot(-1/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1/2\end{pmatrix}$$

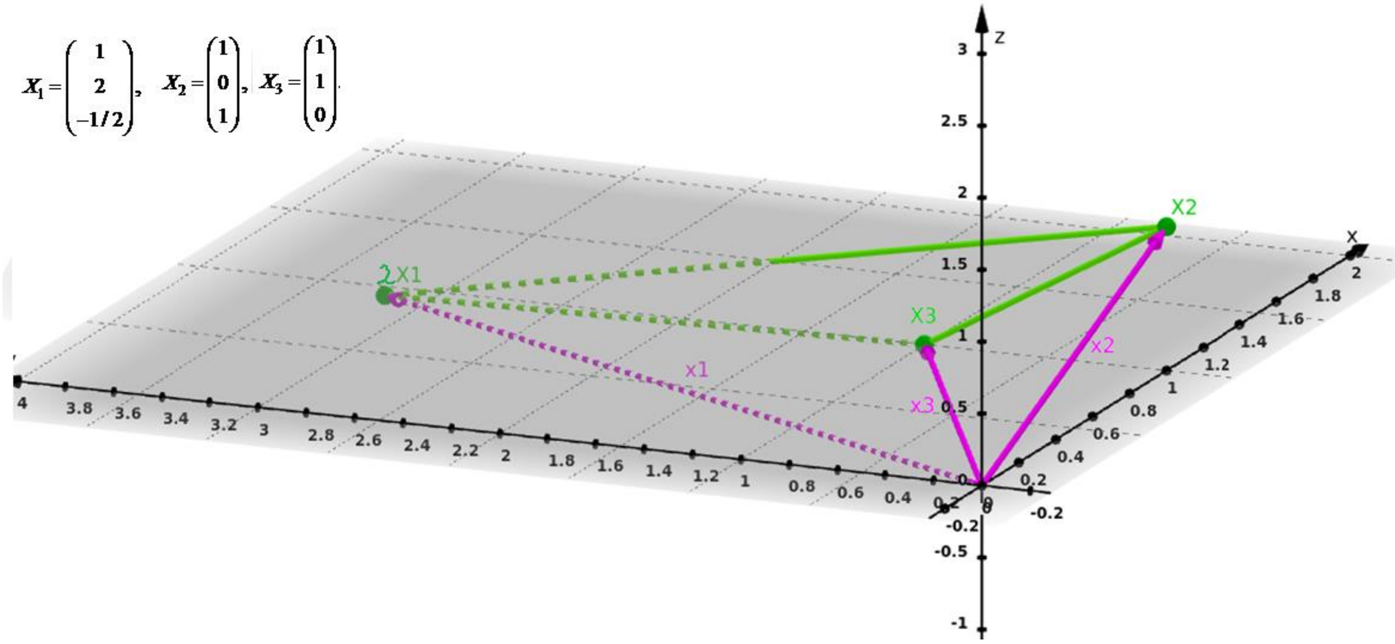
$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1+2\cdot0+2\cdot1\\ -4\cdot1+5\cdot0+4\cdot1\\ 1\cdot1-1\cdot0+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1+2\cdot1+2\cdot0\\ -4\cdot1+5\cdot1+4\cdot0\\ 1\cdot1-1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

Построим треугольник с вершинами в точках, радиус-векторы которых являются собственными векторами матрицы A_{ijk}, и треугольник, полученный в результате линейного преобразования.



В результате линейного преобразования векторы X_2 и X_3 не изменились, вектор X_1 не изменил направления, а его модуль увеличился в два раза



Еще о свойствах спектра……

!!!!!!!! Спектр оператора A содержится в круге радиуса $\|A\|$.

О нормах матриц смотри тему 2.

Критерий сходимости итерационного процесса.

Пусть система $\boldsymbol{AX = B}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{X^*}$. Преобразуем эту систему к виду $\boldsymbol{X = CX + D}$. Итерационный процесс

$$\boldsymbol{X^{(n+1)} = CX^{(n)} + D, \quad n \geq 0,}$$

сходится к решению $\boldsymbol{X^*}$ при любом начальном приближении $\boldsymbol{X^0}$ тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы $\boldsymbol{C}$ по модулю меньше единицы.