

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO
Derivadas fraccionarias y su aplicación al
modelo de Black-Scholes subdifusivo



Supervisores:

Félix del Teso & Raúl Ferreira

Autor: **Carlos Romera de Blas**

Resumen

El propósito de este trabajo es entender las derivadas fraccionarias para su aplicación en la ecuación de Black-Scholes subdifusiva. Se dará un paseo por las diferentes definiciones y sus relaciones entre ellas. Se prestará especial atención a la discretización de una de las definiciones por su buen orden de convergencia. Posteriormente se establecerán las bases del modelo económico de Black-Scholes subdifusivo que da lugar a la ecuación diferencial fraccionaria en tiempo. Además, se presentará un esquema en diferencias finitas para resolver dicho modelo aplicado a opciones europeas, demostrando su consistencia, estabilidad y convergencia. Se presentará un *script* de MATLAB con el que corroborar el orden de convergencia del esquema mediante problemas con solución analítica conocida. Por último, se presentan algunos resultados numéricos.

Abstract

The purpose of this work is to comprehend fractional derivatives for their application in the subdiffusive Black-Scholes equation. A walk through the different definitions and their relationships will be given. Special attention will be paid to the Caputo discretization due to its good order of convergence. Subsequently, the bases of the subdiffusive Black-Scholes economic model will be established, which gives rise to the time fractional differential equation. In addition, in order to solve this model applied to European options a finite difference scheme will be presented, providing the consistency, stability and convergence analysis. A MATLAB script will be presented to verify the order of convergence of the scheme by means of problems with known analytical solutions. Finally, some numerical results are presented.

Índice General

1	Introducción	5
1.1	Contenido del trabajo	5
1.2	Motivación y Objetivos	6
2	Definiciones de derivada fraccionaria	7
2.1	Definición de Grünwald-Letnikov	7
2.2	Definición de Riemann-Liouville	9
2.3	Definición de Caputo	10
3	Discretización del operador de Caputo-Eschema L1	11
3.1	Preliminares	12
3.2	Discretización	16
4	Deducción del modelo subdifusivo de Black-Scholes	19
4.1	Introducción	19
4.2	Hipótesis del modelo subdifusivo	20
4.3	Precio justo de una opción call	22
5	Análisis Numérico del modelo subdifusivo de B-S	25
5.1	Consistencia	26
5.2	Estabilidad	28
5.3	Convergencia	31
6	Simulación	35
6.1	Análisis de convergencia	35
6.2	Resultados	40
7	Conclusiones	43
A	Anexo	45
A.1	Diferencias finitas	45
A.2	Función Gamma y propiedades	47
A.3	Interpolación de Lagrange	48
A.4	Transformada de Laplace	49
	Bibliografía	51



Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se va a presentar un resumen de los contenidos del trabajo y seguidamente se va a exponer la motivación del mismo, introduciendo un primer vistazo hacia los resultados de este.

1.1 Contenido del trabajo

El trabajo consta de siete capítulos, además del anexo y de la bibliografía.

- En el Capítulo 1 se expone la estructura del trabajo, su motivación y algunos resultados.
- En el Capítulo 2 se estudian las diferentes definiciones de derivada fraccionaria y se demuestra la relación entre ellas en Material Complementario, disponible en el repositorio <https://github.com/KRomera/TFG-Mathematics>.
- En el Capítulo 3 se obtiene una discretización de orden $2 - \alpha$ de la definición de Caputo mediante una cuadratura.
- En el Capítulo 4 se analizan las bases económicas del modelo de Black-Scholes original hasta el propuesto subdifusivo, introduciendo conceptos varios de economía y mercados financieros.
- En el Capítulo 5 se propone un esquema numérico de la ecuación de Black-Scholes subdifusiva. Además, se realiza el análisis de consistencia, estabilidad y convergencia, obteniendo orden $2 - \alpha$ en tiempo y 2 en espacio.
- En el Capítulo 6 se muestra la implementación del esquema numérico, disponible en el repositorio. Se verifica el orden de convergencia con un par de problemas cuya solución analítica es conocida. Comprobado que el orden es correcto se muestran algunos resultados numéricos del precio de opciones europeas.
- En el Capítulo 7 se exponen las conclusiones que se pueden extraer del trabajo realizado.

- En el Anexo se muestran una serie de definiciones y lemas a los que se recurre durante el desarrollo y demostración del trabajo. Una parte del anexo, con menos importancia, se puede encontrar en el PDF de Material Complementario, disponible en el repositorio mencionado.
- Por último, encontramos la Bibliografía.

1.2 Motivación y Objetivos

Este trabajo tiene como objetivo relacionar diferentes disciplinas, matemáticas y economía. Se busca dar forma a los principios económicos que rigen la bolsa o sus derivados mediante las herramientas matemáticas adquiridas durante la carrera. En busca de información sobre ecuaciones diferenciales en los mercados bursátiles, el autor descubre la ecuación fraccionaria en tiempo de Black-Scholes. Este modelo supone un reto con una serie de objetivos a cumplir. Por un lado, se deben comprender las derivadas fraccionarias y obtener una discretización de buen orden de estas. Por otro lado, se deben comprender en primera instancia las bases económicas del modelo y su deducción. Por último, se debe encontrar un método numérico con buen orden de convergencia para obtener una solución aproximada del modelo y aplicarlo a diferentes situaciones.

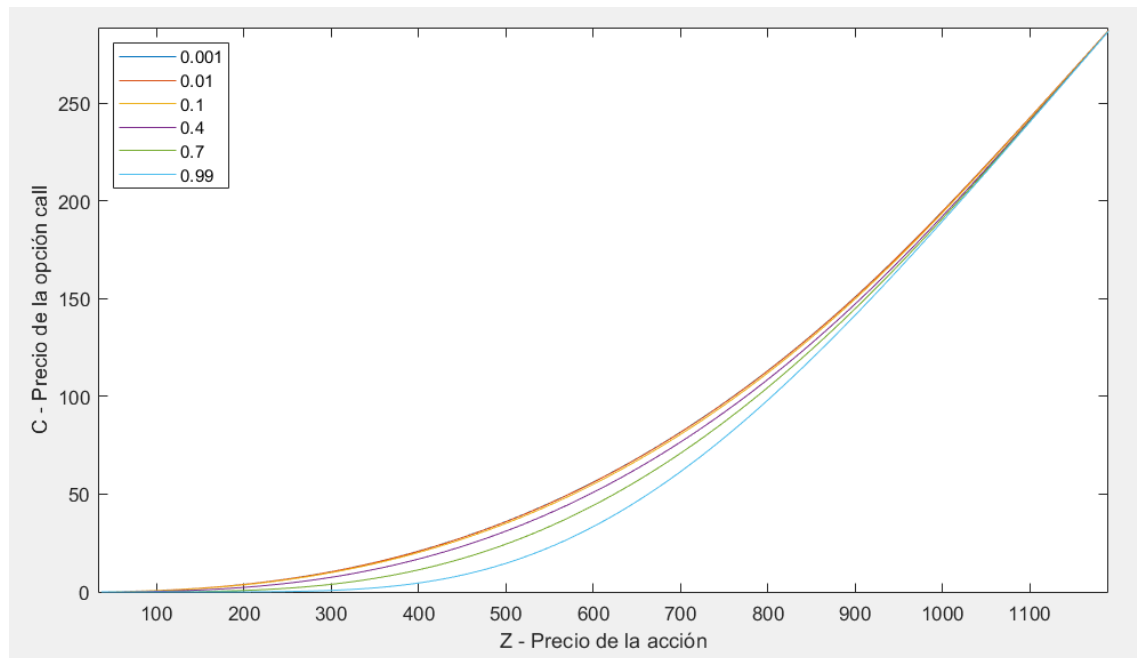


Figura 1.1: Soluciones aproximadas del Ejemplo 6.4 para diferentes α y $z \in [37, 1222]$, para $\Delta x = 2^{-8}$ y $\Delta t = 2^{-9}$.

El objetivo final sería una aplicación real del modelo subdifusivo de Black-Scholes, proponiendo un algoritmo que interpretase datos reales de los mercados bursátiles e indicase qué le conviene hacer a un inversor.

Capítulo 2

Definiciones de derivada fraccionaria

En este capítulo, partiendo de los conceptos de derivada e integral clásicos, vamos a mostrar tres definiciones diferentes de derivada fraccionaria. Para ello nos basamos en las referencias [1], [2] y [3]. Las relaciones entre ellas también se han estudiado y las podemos encontrar en el documento Material Complementario en el repositorio <https://github.com/KRomera/TFG-Mathematics>.

2.1 Definición de Grünwald-Letnikov

Antes de definir la derivada fraccionaria según Grünwald-Letnikov, necesitamos comprender la definición de derivada entera que siempre hemos utilizado.

Definición 2.1 (Derivada) *La derivada primera de f se define como:*

$$f'(x) = \frac{d f}{d x}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{h}.$$

Usando esta fórmula, se obtiene la derivada de orden dos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d^2 f}{d x^2}(x) = \frac{d}{d x} \left(\frac{d f}{d x} \right) (x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(x - h)}{h} - \frac{f(x - h) - f(x - 2h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}. \end{aligned}$$

Observación 2.1 Suponiendo que la n -ésima derivada tiene la forma:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{d x^n}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \underbrace{(-1)^k \binom{n}{k}}_{f_{k,n}(x)} f(x - kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

Demostremos la inducción, probando que se cumple para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\left(\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-(k+1)h) \right) \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \left(\underbrace{f(x)}_{f_{0,n+1}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} f(x-(n+1)h)}_{f_{n+1,n+1}(x)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f(x-kh) \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} f(x-kh).
 \end{aligned}$$

En la última fila se han reintroducido los términos del sumatorio y se ha utilizado propiedades de los números combinatorios.

De manera análoga la definición de derivada es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Observemos que para esta definición análoga se tiene que la n -ésima derivada tiene la forma:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+(n-k)h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x+nh)}{h^n}.$$

$f_{k,n}(x)$

De esta manera, tiene lógica la siguiente definición para las derivadas de orden $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2 (Derivada enésima) Sea $n \in \mathbb{N}$. La derivada n -ésima de una función f viene dada por

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x+nh)}{h^n},$$

$$\text{donde } \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ y } \Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh).$$



Definición 2.3 (Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov) *Se define para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la derivada fraccionaria de orden α según Grünwald-Letnikov de la función u como:*

$$\partial^\alpha[u](x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x - kh). \quad (2.1)$$

Donde $\binom{\alpha}{k}$ viene dado por la Definición A.3.

En todo el documento $\lfloor y \rfloor$, representa el mayor número entero igual o menor que $y \in \mathbb{R}$. En general las propiedades de $\binom{\alpha}{k}$ relacionados con la función Γ las podemos encontrar en el anexo A.2.

2.2 Definición de Riemann-Liouville

Al contrario que la definición de Grünwald-Letnikov que se basa en la derivada de una función, la definición de Riemann-Liouville se va a basar en la definición de integral. Antes de definir la derivada fraccionaria según Riemann-Liouville, necesitamos comprender la definición de integral entera general que siempre hemos utilizado.

Definición 2.4 (Integral) *La integral primera de f se define como*

$$I[f](x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Usando esta fórmula, se obtiene la integral de orden dos de f :

$$\begin{aligned} I^2[f](x) &= \int_0^x \left(\int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 \right) dt_2 = \int_0^x \left(\int_{t_1}^x f(t_1) dt_2 \right) dt_1 \\ &= \int_0^x f(t_1) \int_{t_1}^x dt_2 dt_1 = \int_0^x f(t)(x-t) dt. \end{aligned}$$

La integral de orden n de f es:

$$I^n[f](x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1.$$

Por inducción, se obtiene la llamada Fórmula de Cauchy para la integral de orden $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.1 (Fórmula de Cauchy) *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente regular. Entonces la integral enésima de f es*

$$I^n[f](x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Probamos la inducción partiendo de la hipótesis de que se cumple para n y demostrando que entonces se cumple para $n + 1$:

$$I^{n+1}[f](x) = I[I^n[f]](x) = \int_0^x \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{n-1} f(t) dt \right) dx_1.$$

Cambiamos los límites de integración y sacamos la constante,

$$\begin{aligned} I^{n+1}[f](x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \left(\int_t^x (x_1 - t)^{n-1} dx_1 \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \frac{(x_1 - t)^n}{n} \Big|_t^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x - t)^n f(t) dt. \end{aligned}$$

□

Tomando como base el concepto de integral n -ésima tiene sentido definir el concepto de integral fraccionaria para un $\lambda \in \mathbb{R}^+$, usando la función Γ . Derivando dicha integral, podemos definir la derivada de Riemann-Liouville mediante la integral fraccionaria.

Definición 2.5 (Riemann-Liouville) Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$.

- Si $\alpha < 0$, $\lambda = -\alpha > 0$, se define integral fraccionaria de Riemann-Liouville como

$$\partial_{RL}^\alpha[f](x) := I^\lambda[f](x) := \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x - t)^{\lambda-1} f(t) dt. \quad (2.2)$$

- Si $\alpha > 0$, se define la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como

$$\partial_{RL}^\alpha[f](x) := \frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha}[f](x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Observamos que la derivada de Caputo consiste primero en integrar $n - \alpha$ veces y seguidamente derivar n veces.

2.3 Definición de Caputo

Esta definición se basa en la misma idea de integral fraccionaria, de forma similar a Riemann-Liouville, pero en este caso se deriva antes de integrar.

Definición 2.6 (Derivada fraccionaria de Caputo) La derivada fraccionaria de Caputo de orden α para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ y $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ se define como

$$\partial_C^\alpha[f](x) := I^{n-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n f \right](x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad (2.4)$$

donde $f^{(n)}$ es la n -ésima derivada usual de f .

Observamos que la derivada de Caputo consiste primero en derivar n veces y seguidamente integrar $n - \alpha$ veces.

Capítulo 3

Discretización del operador de Caputo-Esquema L1

En este capítulo vamos a obtener una discretización de la derivada de Caputo de orden $2 - \alpha$. Para demostrar su convergencia utilizamos una cuadratura que se basa en el teorema de Taylor con resto integral y la interpolación de Lagrange. Para ello nos basamos en la referencia [4]. Se puede encontrar una discretización de mayor orden como se muestra en [5], pero para nuestros propósitos es innecesario.

La definición de derivada fraccionaria de Caputo es muy popular en general, por lo que a la hora de resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial fraccionaria va a ser necesaria una discretización del operador de Caputo. Por comodidad, en ocasiones vamos a expresar la derivada fraccionaria de Caputo con la notación usual de derivada parcial, pero con el índice fraccionario α :

$$\partial_C^\alpha[u(x)](t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha},$$

donde $u(x, t)$ es una función que depende de dos variables pues se va a aplicar a problemas de EDP, aunque aquí x no juega ningún papel.

Vamos a establecer una aproximación de diferencias finitas para discretizar la derivada fraccionaria en tiempo de Caputo. Para ello hacemos una partición de $[0, T]$ de N subintervalos. Esto nos define la malla uniforme:

$$G_t := \{t_k = k \cdot \Delta t : k = 0, \dots, N\}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}. \quad (3.1)$$

Buscamos entonces expresar la Definición 2.6 con la siguiente formulación para todo $0 \leq k < N - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x, t_{k+1})}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{j=0}^k \underbrace{\frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\Delta t}}_{L_t^\alpha u(x, t_{k+1})} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} + r_{\Delta t}^{k+1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $r_{\Delta t}^{k+1}$ es el error de truncación y $L_t^\alpha u(x, t_{k+1})$ es la discretización propuesta.

3.1 Preliminares

De manera previa al enunciado del teorema de la discretización de la derivada de Caputo, son necesarios un par de lemas esenciales para su demostración.

Lema 3.1 *Sea la sucesión de funciones $\{f_j(t)\}_{j=0}^k$ dadas por*

$$f_j(t) = (t_{k+1} - t)^{1-\alpha} - \left[\frac{t_{j+1} - t}{\Delta t} (t_{k+1} - t_j)^{1-\alpha} + \frac{t - t_j}{\Delta t} (t_{k+1} - t_{j+1})^{1-\alpha} \right], \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

donde $t_j = j \cdot \Delta t$. Entonces la serie finita $\sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt$ está acotada, donde

$$0 \leq \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt \leq \left(\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{-\alpha}) \right) \Delta t^{2-\alpha},$$

para todo $0 \leq k \leq N-1$.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la función $f_j(t)$, se puede definir la función $g(t) = (t_{k+1} - t)^{1-\alpha}$. De esta forma se puede reescribir como

$$f_j(t) = g(t) - \left[\frac{t_{j+1} - t}{\Delta t} g(t_j) + \frac{t - t_j}{\Delta t} g(t_{j+1}) \right]. \quad (3.3)$$

Podemos aplicar entonces la interpolación de Lagrange dada en el Teorema A.2, en particular, por la Observación A.1 se tiene que para cierto $t \in [t_j, t_{j+1}]$, entonces existe $\xi_j \in (t_j, t_{j+1})$ tal que $f_j(t)$ no es más que el error de interpolación de Lagrange de $g(t)$:

$$f_j(t) = \frac{g''(\xi_j)}{2} \cdot (t - t_j) \cdot (t - t_{j+1}).$$

La función $g(t)$ es conocida por lo que podemos calcular su segunda derivada en todo punto, obteniendo

$$f_j(t) = \frac{-\alpha(1-\alpha)}{2 \cdot (t_{k+1} - \xi_j)^{1+\alpha}} \cdot (t - t_j) \cdot (t - t_{j+1}). \quad (3.4)$$

• **Cota inferior:** Nótese que $f_j(t) \geq 0$, $\forall j = 0, \dots, k$, además la suma de integrales de funciones positivas es positiva, por lo que hemos acotado inferiormente la serie

$$0 \leq \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt. \quad (3.5)$$

• **Cota superior:** Para ver la cota superior, dividimos la serie en dos series

$$\sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt}_{S_1} + \underbrace{\sum_{j=k-1}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt}_{S_2}.$$



La serie se ha dividido porque a los dos últimos términos (S_2) no se les puede aplicar la misma cota que vamos a aplicar a S_1 pues $g''(t_{k+1})$ es una indeterminación.

- **1ª Serie:** Para S_1 vamos a sustituir $f_j(t)$ según la ecuación (3.4)

$$S_1 = \sum_{j=0}^{k-2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{-\alpha(1-\alpha)}{2 \cdot (t_{k+1} - \xi_j)^{1+\alpha}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_j) \cdot (t - t_{j+1}) dt.$$

La integral se resuelve de forma sencilla como

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_j)(t - t_{j+1}) dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t^2 - t \cdot (t_{j+1} + t_j) + t_j \cdot t_{j+1}) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \cdot (2j+1) \cdot \Delta t + t \cdot j \cdot (j+1) \cdot \Delta t^2 \right]_{t_j}^{t_{j+1}} \\ &= \Delta t^3 \cdot \underbrace{\frac{(j+1)^3 - j^3}{3}}_{j^2+j+\frac{1}{3}} - \Delta t^3 \cdot \underbrace{\frac{((j+1)^2 - j)(2j+1)}{2}}_{2j^2+2j+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \Delta t^3 \cdot \underbrace{(j+1-j) \cdot j(j+1)}_{j^2+j} \\ &= -\frac{\Delta t^3}{6}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en S_1 se tiene que

$$S_1 = \Delta t^2 \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)}{12} \sum_{j=0}^{k-2} \Delta t \cdot (t_{k+1} - \xi_j)^{-\alpha-1}.$$

Véase que $\forall j \leq k-2$, entonces

$$t_j < \xi_j < t_{j+1} \implies (t_{k+1} - t_j)^{-1-\alpha} \leq (t_{k+1} - \xi_j)^{-\alpha-1} \leq (t_{k+1} - t_{j+1})^{-1-\alpha}.$$

Además, nótese que tenemos una suma inferior de Riemann (Def ??), basta tomar la partición (Def ??) $P = \{t_1, \dots, t_k\}$, entonces se tiene que la suma inferior de $(t_{k+1} - t)^{-(1+\alpha)}$ en P es

$$L(P) = \sum_{j=0}^{k-2} (t_{k+1} - t_{j+1})^{-1-\alpha} \cdot \Delta t \leq \int_{t_1}^{t_k} (t_{k+1} - t)^{-1-\alpha} dt = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\alpha} \underbrace{(1 - k^{-\alpha})}_{\in(0,1)} \leq \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Por lo que se ha obtenido precisamente que

$$S_1 \leq \frac{1-\alpha}{12} \cdot \Delta t^{2-\alpha}. \quad (3.6)$$

- **2ª Serie:** Para la segunda serie vamos a hacer el cálculo sin utilizar la interpolación de Lagrange:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)^{1-\alpha} dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{t_k - t}{\Delta t} g(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{\Delta t} g(t_k) \right] dt \\
 &\quad - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{t_{k+1} - t}{\Delta t} g(t_k) + \frac{t - t_k}{\Delta t} g(t_{k+1}) \right] dt \\
 &= \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Delta t^{2-\alpha} - \Delta t^{2-\alpha} \left(2^{-\alpha} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{2}.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$S_2 = \left(\frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1 + 2^{-\alpha}) \right) \Delta t^{2-\alpha}. \quad (3.7)$$

Mediante las cotas de S_1 y el valor S_2 , dados por las ecuaciones (3.6) y (3.7) se tiene que la cota superior de la serie es:

$$\sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t) dt \leq \left(\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1 + 2^{-\alpha}) \right) \Delta t^{2-\alpha}. \quad (3.8)$$

Utilizando las ecuaciones (3.5) y (3.8) se obtiene lo enunciado. \square

A partir de los resultados anteriores se puede demostrar el siguiente lema relacionado con el error de truncación de la discretización de Caputo. Para ello primero definimos formalmente el error de truncación.

Definición 3.1 *El error de truncación de la discretización de Caputo viene dado por la diferencia entre la definición y discretización de Caputo, como*

$$r_{\Delta t}^{k+1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} - \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\Delta t} \right) \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha}.$$

Lema 3.2 *El error de truncación $r_{\Delta t}^{k+1}$ está acotado para $0 \leq k \leq N-1$, además*

$$|r_{\Delta t}^{k+1}| \leq c_u \cdot R \cdot \Delta t^{2-\alpha},$$

donde c_u es una constante que depende de la función $u(x, t)$, R es una constante que depende de $0 < \alpha < 1$.

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración utilizamos la expansión de Taylor con resto integral, mediante el Lema A.4, intercambiamos los límites integrales (*) y

desarrollamos la expresión. Se tiene que $\Gamma(1 - \alpha) \cdot r_{\Delta t}^{k+1}$ es

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} - \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\Delta t} \right) \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} \\
&\stackrel{L}{=} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} \\
&\quad \cdot \left(-\frac{1}{\Delta t} \left(\int_s^{t_{j+1}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} (t_{j+1} - t) dt - \int_{t_j}^s \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} (t - t_j) dt \right) \right) \quad (3.9) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dt \\
&\quad \cdot \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \left(-(t_{j+1} - t) \int_{t_j}^t \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} + (t - t_j) \int_t^{t_{j+1}} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} \right)}_A,
\end{aligned}$$

donde en (*) se ha cambian los límites integrales de esa manera pues

$$1^\circ : \left\{ \begin{array}{l} t_j \leq s \leq t_{j+1} \\ s \leq t \leq t_{j+1} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ t_j \leq s \leq t \end{array} \right\}, \quad 2^\circ : \left\{ \begin{array}{l} t_j \leq s \leq t_{j+1} \\ t_j \leq t \leq s \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ t \leq s \leq t_{j+1} \end{array} \right\}.$$

Si desarrollamos el término $A \cdot (1 - \alpha)$, este es

$$\begin{aligned}
&= \frac{(t_{j+1} - t)((t_{k+1} - t)^{1-\alpha} - (t_{k+1} - t_j)^{1-\alpha})}{\Delta t} \\
&\quad - \frac{(t - t_j)((t_{k+1} - t_{j+1})^{1-\alpha} - (t_{k+1} - t)^{1-\alpha})}{\Delta t} \\
&= \frac{\overbrace{(t_{j+1} - t_j)}^{\Delta t} (t_{k+1} - t)^{1-\alpha}}{\Delta t} \quad (3.10) \\
&\quad - \frac{(t_{j+1} - t)(t_{k+1} - t_j)^{1-\alpha} + (t - t_j)(t_{k+1} - t_{j+1})^{1-\alpha}}{\Delta t} \\
&= \underbrace{\left((t_{k+1} - t)^{1-\alpha} - \left[\frac{t_{j+1} - t}{\Delta t} (t_{k+1} - t_j)^{1-\alpha} + \frac{t - t_j}{\Delta t} (t_{k+1} - t_{j+1})^{1-\alpha} \right] \right)}_{f_j(t)}.
\end{aligned}$$

Agrupando las ecuaciones (3.9) y (3.10), se tiene que

$$\begin{aligned}
\Gamma(1 - \alpha) \cdot r_{\Delta t}^{k+1} &\stackrel{(3.9)}{=} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \cdot \frac{(1 - \alpha) \cdot A}{1 - \alpha} dt \\
&\stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \cdot f_j(t) dt.
\end{aligned}$$

Utilizando la Proposición A.1, tenemos $\Gamma(2-\alpha) = (1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)$, pudiendo acotar el error de truncación como

$$\begin{aligned} |r_{\Delta t}^{k+1}| &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right\| |f_j(t)| \, dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \underbrace{\max_{t_0 \leq t \leq t_{k+1}} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right|}_{c_u^{k+1}} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f_j(t)| \, dt, \end{aligned}$$

en particular c_u^{k+1} depende de t_{k+1} , pero $c_u^{k+1} \leq c_u$, donde c_u es independiente de k :

$$c_u = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right|.$$

Utilizando ahora el Lema 3.1, se tiene que

$$|r_{\Delta t}^{k+1}| \leq c_u \cdot \underbrace{\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{-\alpha}) \right)}_R \cdot \Delta t^{2-\alpha} = O(\Delta t^{2-\alpha}).$$

Obteniendo lo enunciado. \square

3.2 Discretización

Ya tenemos todo lo necesario para poder demostrar el siguiente teorema de la discretización de la derivada fraccionaria de Caputo y su orden. Pero primero nótese que la continuidad absoluta AC viene dada por la Definición A.1.

Teorema 3.1 *Sea $u(x, \bullet) \in \mathcal{C}(0, T)$ y $u'(x, \bullet) \in AC(0, T)$ con $0 < \alpha < 1$ y una malla G_t (3.1). Entonces se cumple que para $0 \leq k \leq N-1$*

$$\left| \frac{\partial^\alpha u(x, t_{k+1})}{\partial t^\alpha} - L_t^\alpha u(x, t_{k+1}) \right| \leq c_u \cdot R \cdot \Delta t^{2-\alpha}, \quad (3.11)$$

donde

$$L_t^\alpha u(x, t_{k+1}) := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u(x, t_{k+1-j}) - u(x, t_{k-j})}{\Delta t^\alpha} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] \quad (3.12)$$

y las constantes

$$c_u = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right|,$$

$$R = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{-\alpha}) \right).$$

Diremos entonces que L_t^α es una discretización de orden $2-\alpha$ para la derivada fraccionaria definida según Caputo.



DEMOSTRACIÓN. Si desarrollamos el operador diferencial fraccionario discreto de (3.2), resolviendo la integral, utilizando la Proposición A.1 y reordenando los términos del sumatorio tenemos que

$$\begin{aligned} L_t^\alpha u(x, t_{k+1}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\Delta t} \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{1-\alpha} [(k-j)^{1-\alpha} - (k+1-j)^{1-\alpha}] \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u(x, t_{k+1-j}) - u(x, t_{k-j})}{\Delta t^\alpha} \underbrace{[(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}]}_{b_j}, \end{aligned}$$

es decir, el operador diferencial fraccionario discreto queda definido formalmente como:

$$L_t^\alpha u(x, t_{k+1}) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k b_j \frac{u(x, t_{k+1-j}) - u(x, t_{k-j})}{\Delta t^\alpha}.$$

Demostrando la ecuación (3.12). Para demostrar que tiene orden $2-\alpha$ basta verificar la ecuación (3.11), lo cual es directo por el Lema 3.2. \square



Capítulo 4

Deducción del modelo subdifusivo de Black-Scholes

En este capítulo se muestran las bases del modelo subdifusivo de Black-Scholes y se hace una deducción informal del mismo. No se pretende una exposición precisa y extensa de la deducción del modelo desde los conceptos económicos hasta las ecuaciones matemáticas, sino mostrar una idea eurística del mismo sin entrar a la comprensión de las matemáticas profundas subyacentes y los conceptos económicos complejos. Si el lector tiene un interés mayor en la comprensión de la deducción del modelo a partir de las hipótesis debe remitirse a las referencias [6] y [7], en las que se fundamenta todo el capítulo, además de las diferentes referencias que aparecen durante todo el capítulo. No todos los conceptos se dominan, pero se exponen para mostrar la esencia de la deducción del modelo.

4.1 Introducción

Las opciones son unos de los derivados financieros más populares e importantes, por eso el saber preciarlas de manera adecuada tiene un significado especial para instituciones financieras y la economía global. La famosa fórmula de Black-Scholes (B-S) [6] para valorar las opciones europeas, fue popularizada por Robert C. Merton al incluirla en su publicación “Theory of Rational Option Pricing”. Esta fue tan importante que sus autores Myron Scholes y Merton fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía en 1997, Fischer Black falleció en 1995 por lo que no pudo recibirlo, pero fue reconocido como un contribuidor por la Academia Nobel. Recientes investigaciones han mostrado que la fórmula B-S-Merton, a pesar de su simplicidad y claridad, no puede ser utilizada en multitud de ocasiones. Uno de los ejemplos más remarcables es el caso en el que la dinámica del instrumento subyacente tiene tendencia a tener periodos constantes o saltos repentinos. El rasgo de estancamiento del mercado puede ser observado por ejemplo en mercados emergentes y en el comportamiento de la tasa de interés.

En los últimos años la teoría de las ecuaciones diferenciales fraccionarias ha cobrado importancia de forma aplicable en econometría y finanzas. Además, muchos investigadores han estudiado la generalización de la ecuación B-S en el caso frac-

cionario. La razón para esta generalización es la estructura fractal del mercado bursátil y el aumento de popularidad del cálculo fraccionario. Generalmente el procedimiento se basa en sustituir el movimiento Browniano estándar por el movimiento Browniano fraccionario. En este documento se plantea desde una perspectiva completamente diferente. Se reemplaza el Movimiento Browniano Geométrico $Z(t)$ por el Movimiento Browniano Geométrico subdifusivo $Z(S_\alpha(t))$ con el subordinador inverso $S_\alpha(t)$ en la definición del proceso que describe el activo subyacente.

4.2 Hipótesis del modelo subdifusivo

Basándonos en el modelo original [6], para valorar una opción en términos del precio de la acción, se asumen condiciones ideales en el mercado para la acción y su opción:

1. La tasa de interés a corto plazo es conocida y constante a lo largo del tiempo.
2. El precio de la acción sigue un camino aleatorio en tiempo continuo con una tasa de variación proporcional al cuadrado del precio de la acción. Por lo tanto, la distribución de posibles precios de la acción al final de cualquier intervalo finito es lognormal. La tasa de variación del rendimiento de la acción es constante.
3. La acción no paga dividendos.
4. La opción es europea, es decir, sólo puede ejercerse en su vencimiento.
5. No hay costes de transacción al comprar o vender la acción o su opción.
6. Es posible pedir prestada cualquier fracción del precio de un valor para comprarlo o mantenerlo, con la tasa de interés de corto plazo.
7. No hay penalizaciones por vender en corto. Un vendedor que no posee un valor simplemente aceptará el precio del valor de un comprador, y acordará llegar a un acuerdo con el comprador en una fecha futura pagándole una cantidad igual al precio del valor en esa fecha.

Bajo estas hipótesis, el precio de una opción dependerá exclusivamente del precio de la acción y del tiempo, y de variables constantes conocidas. Cabe mencionar que ninguna de estas hipótesis se satisface al 100% pero la esencia del modelo matemático es transformar la situación que se quiere modelizar en un caso simplificado e idealizado. En el estudio con datos empíricos que hicieron Black-Scholes comprobaron como la formula se ajustaba de mejor o peor manera dependiendo del riesgo de la acción. Sin embargo, estos estudios se realizaron en mercados líquido, por lo que no se observaban los problemas derivados de la falta de liquidez. Para atajar dichos problemas nos basamos en el planteamiento del modelo subdifusivo [7] y sus referencias.



Las hipótesis son similares que para el caso clásico con la excepción de que no tenemos que asumir la liquidez del mercado y que la acción en vez de seguir el Movimiento Browniano Geométrico (GBM) debe seguir el GBM subdifusivo

$$\begin{cases} Z_\alpha(t) = Z(S_\alpha(t)) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases},$$

donde $Z_\alpha(t)$ = precio de la acción, siendo el precio clásico

$$Z(t) = Z(0) \cdot e^{\mu t + \sigma B(t)},$$

siendo σ = volatilidad (cte), μ = deriva (cte), $B(t)$ = movimiento Browniano, $S_\alpha(t)$ = subordinador inverso α -estable definido como:

$$S_\alpha(t) = \inf(\tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t),$$

donde $U_\alpha(t)$ = subordinador α -estable descrito en [8], con $0 < \alpha < 1$. Suponemos que $S_\alpha(t)$ es independiente de $B(t) \forall t \in [0, T]$.

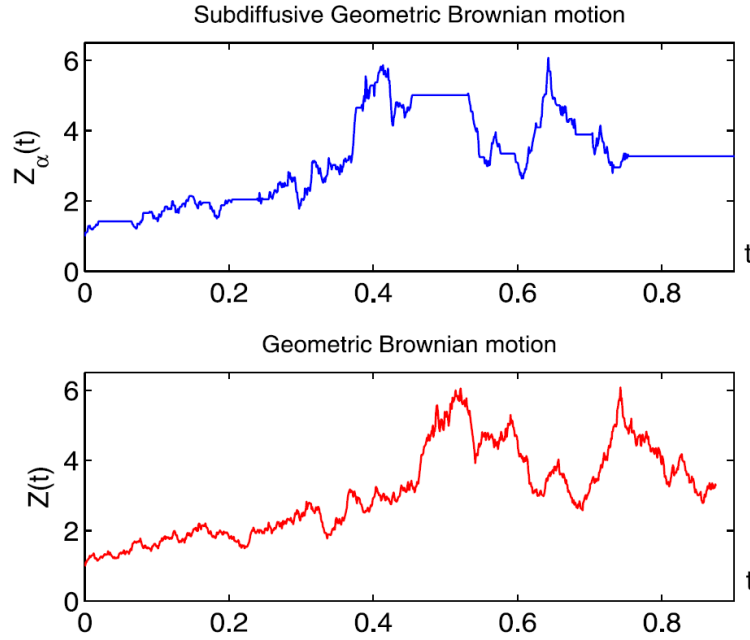


Figura 4.1: Comparación de las trayectorias del GBM clásico y el subdifusivo. Los parámetros son $\alpha = 0.8$, $\sigma = \mu = Z_0 = 1$. Figura extraída de [7].

El modelo B-S subdifusivo es la generalización del modelo estándar para los casos donde los mercados pueden tener falta de liquidez (no líquidos). En nuestro modelo el parámetro $\alpha \in (0, 1)$ puede considerarse como la medida de no liquidez. Los períodos constantes aparecen con más frecuencia a menor α . Cuando $\alpha \rightarrow 1$ entonces el modelo B-S subdifusivo se reduce al modelo clásico (líquido). Debido a

su simplicidad y practicidad, el modelo B-S clásico es de los más usados para valorar una opción, a pesar de que no tiene en cuenta la propiedad empírica de período de precio constante que tiene el modelo subdifusivo.

Cualquier mínimo estancamiento de un mercado no puede ser simulado por el modelo B-S clásico. Como generalización del modelo B-S, su equivalente subdifusivo puede ser usado en gran variedad de casos, incluidos todos los mercados donde el modelo B-S puede ser aplicado.

Una opción europea *call* es un contrato financiero entre dos partes, el comprador y el vendedor. Otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar al vendedor una cantidad especificada del activo subyacente (acción) $Z(t)$ a un precio de ejercicio K especificado dentro de un tiempo de vencimiento T especificado. El comprador paga una tarifa (precio) por este derecho. El valor de una opción *call* en el tiempo de vencimiento es $\max\{Z(T) - K, 0\}$. Una opción *put* es lo contrario a una opción *call*, da derecho al poseedor de vender acciones. Por lo tanto, el valor de una opción *put* en el tiempo de vencimiento es $\max\{K - Z(T), 0\}$. La relación entre el precio C de la opción *call* y el precio P de la opción *put*, ambas con el mismo precio de ejercicio y tiempo de vencimiento viene dado por la paridad *put-call*:

$$C - P = Z_0 - K \cdot e^{-rT},$$

donde r es la tasa de interés.

4.3 Precio justo de una opción call

Basándonos de nuevo en el modelo clásico [6], el modelo subdifusivo [7] y [13], definimos el precio justo de una opción call para los modelos B-S subdifusivo y clásico:

$$v(t) = C_{BS}^{sub}(Z_0, k, t, r, \sigma, \alpha), \quad h(t) = C_{BS}(Z_0, K, t, r, \sigma),$$

Para el modelo clásico [6], la famosa fórmula de Black-Scholes:

$$h(t) = Z_0 \Phi(d_+) - K e^{rt} \Phi(d_-),$$

donde $d_{\pm} = \frac{\log \frac{Z_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$ y Φ denota la función distribución de una distribución normal estándar. La relación entre v y h viene dada por el Teorema 4 de [7]:

$$v(t) = E[h(S_{\alpha}(t))] = \int_0^{\infty} h(z) \varrho_{\alpha}(z, t) dz,$$

donde $\varrho_{\alpha}(x, t)$ es la función de densidad de probabilidad de $S_{\alpha}(t)$. Por la α -autosimilitud de $S_{\alpha}(t)$, tenemos que $\varrho_{\alpha}(x, t) = t^{-\alpha} g_{\alpha}(x/T^{\alpha})$, donde $g_{\alpha}(z)$ es la función de densidad de probabilidad de $S_{\alpha}(1)$. Siguiendo la demostración en [7], la función de densidad viene en función de términos de la función de Fox $g_{\alpha}(z) = H_{1,1}^{1,0} \left(z_{(0,1)}^{(1-\alpha,\alpha)} \right)$ dada en [9].



Nótese que $v(0) = h(0)$. Si consideramos la transformada de Laplace, expuesta en el anexo A.4, de la función v :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v](k) &= \int_0^\infty e^{-kt} v(t) dt = \int_0^\infty e^{-kt} \int_0^\infty h(z) \varrho_\alpha(z, t) dz dt \\ &= \int_0^\infty h(z) \int_0^\infty \varrho_\alpha(z, t) e^{-kt} dt dz = \int_0^\infty h(z) \mathcal{L}[\varrho_\alpha](z, k) dz.\end{aligned}$$

Se tiene que $\mathcal{L}[\varrho_\alpha](z, k) = k^{\alpha-1} e^{-zk^\alpha}$ (demostración del Teorema 1 de [7]). Por tanto,

$$= \int_0^\infty h(z) k^{\alpha-1} e^{-zk^\alpha} dz = k^{\alpha-1} \int_0^\infty h(z) e^{-zk^\alpha} dz = k^{\alpha-1} \mathcal{L}[h](k^\alpha).$$

Por lo que hemos obtenido la siguiente relación:

$$\mathcal{L}[h](k) = k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \mathcal{L}[v](k^{1/\alpha}). \quad (4.1)$$

La ecuación de B-S que describe $h(z, t)$ dada por [10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial h(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial z^2} + rz \frac{\partial h(z, t)}{\partial z} - rh(z, t) = 0 \\ h(z, T) = \max(z - K, 0) \end{cases}.$$

Aplicando la transformada de Laplace y sus propiedades con respecto a t , se tiene

$$k \mathcal{L}[h(z, \cdot)](k) - h(z, 0) + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}[h(z, \cdot)](k)}{\partial z^2} + rz \frac{\partial \mathcal{L}[h(z, \cdot)](k)}{\partial z} - r \mathcal{L}[h(z, \cdot)](k) = 0.$$

Usando (4.1) y que $h(0) = v(0)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k^{1/\alpha}) k^{1/\alpha} - v(z, 0) + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{\partial^2 \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k^{1/\alpha})}{\partial z^2} \\ &\quad + rz k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k^{1/\alpha})}{\partial z} - r k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k^{1/\alpha}).\end{aligned}$$

Si cambiamos las variable k por k^α y agrupando factores comunes podemos reescribir:

$$k \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k) - v(z, 0) = k^{1-\alpha} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k)}{\partial z^2} - rz \frac{\partial \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k)}{\partial z} + r \mathcal{L}[v(z, \cdot)](k) \right).$$

Si invertimos la transformada de Laplace:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = \partial_{RL}^{1-\alpha} \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 v(z, \cdot)}{\partial z^2} - rz \frac{\partial v(z, \cdot)}{\partial z} + r v(z, \cdot) \right] (t), \quad (4.2)$$

donde se ha usado que para $\alpha \in (0, 1)$, la transformada de Laplace de la derivada de Riemann-Liouville dada por el Teorema A.3 cumple para $f \in \mathcal{C}^1$:

$$\mathcal{L}[\partial_{RL}^\alpha[f]](k) = k^\alpha \mathcal{L}[f](k) - \partial_{RL}^{\alpha-1}[f](0) = k^\alpha \mathcal{L}[f](k) - \cancel{I^{1-\alpha}[f](0)}.$$

Aplicando el operador integral fraccionaria $I^{1-\alpha}$ a ambos lados, por las Definiciones 2.6 y 2.5, y usando de nuevo que $\alpha \in (0, 1)$ transformamos (4.2) a

$$\partial_C^\alpha[v(z)](t) = -\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - rz \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} + rv(z, t).$$

De esta manera hemos obtenido el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha v(z, t)}{\partial t^\alpha} = -\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - rz \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} + rv(z, t) \\ v(z, T) = \max(z - K, 0) \\ v(0, t) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} v(z, t) \sim z \end{array} \right.,$$

para $(z, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$. De manera similar a [10], el precio justo de una opción *call* es precisamente $v(Z_0, T)$ siendo Z_0 el precio de la acción en el momento de la compra y T el tiempo de vencimiento.

Para manejar un sistema más cómodo introducimos las variables

$$x = \ln z \tag{4.3}$$

y la función

$$u(x, t) = v(e^x, T - t). \tag{4.4}$$

Teniendo todo lo anterior en cuenta, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.1 *El precio justo para una opción call en el modelo B-S subdifusivo es igual a $v(z, t)$ que satisface (4.3) y (4.4), y $u(x, t)$ es la solución del sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - ru(x, t) \\ u(x, 0) = \max(e^x - K, 0) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) \sim e^x \end{array} \right., \tag{4.5}$$

para $(x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T)$.

La existencia y unicidad de (4.5) se puede ver en la referencia [11] y sus referencias.

Capítulo 5

Análisis Numérico del modelo subdifusivo de B-S

Para resolver el modelo subdifusivo de Black-Scholes de forma numérica aproximaremos los límites por números finitos y las derivadas por diferencias finitas. Después de obtener el análogo discreto de (4.5), demostraremos su estabilidad y convergencia mediante el método de von Neumann, obteniendo un segundo orden de convergencia en tiempo y $2 - \alpha$ en espacio. Para ello nos basamos en las referencias [12] y [13].

El sistema (4.5), lo vamos a estudiar formalmente como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = a \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - c \cdot u(x, t), & (x, t) \in (x_{min}, x_{max}) \times (0, T) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (x_{min}, x_{max}) \\ u(x_{min}, t) = p(t), & t \in (0, T) \\ u(x_{max}, t) = q(t), & t \in (0, T) \end{array} \right. , \quad (5.1)$$

donde la pareja de opciones *put-call* implica que

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\sigma^2, \quad \sigma \in (0, 1), & b &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right), & c &= r, \quad r \in (0, 1), \\ f(x) &= \max(e^x - K, 0), & p(t) &= 0, & q(t) &= e^{x_{max}} - Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Lo cual es una aproximación finita para el problema con límites, que cumple

$$\lim_{x_{min} \rightarrow -\infty} p(t) = 0, \quad \lim_{x_{max} \rightarrow \infty} q(t) = e^{x_{max}}.$$

5.1 Consistencia

Hacemos una partición de $[x_{min}, x_{max}]$ y $[0, T]$ de n y N subintervalos respectivamente, eso nos define la malla uniforme:

$$G_x := \{x_i = x_{min} + i \cdot \Delta x \mid i = 0, \dots, n\}, \quad \Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n},$$

$$G_t := \{t_k = k \cdot \Delta t \mid k = 0, \dots, N\}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Denotamos por otro lado

- $b_j = (j + 1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$.
- $d = \Gamma(2 - \alpha)\Delta t^\alpha$.
- $u^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_{n-1}^k)^T$.
- $G^k = \left(\left(\frac{ad}{\Delta x^2} - \frac{bd}{2\Delta x} \right) u_0^k, 0, \dots, 0, \left(\frac{ad}{\Delta x^2} + \frac{bd}{2\Delta x} \right) u_n^k \right)^T \in \mathbb{R}^{(n-1)}$.
- $f = (0, f_2, f_3, \dots, f_{n-3}, f_{n-2}, q^0)^T$.

donde $u_i^k = u(x_i, t_k)$, $f_i = f(x_i)$, $i = 2, \dots, n - 2$, $q^k = q(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Para las derivadas en espacio usamos la Discretización Centrada (Lema A.2) y la discretización del Lema A.3. Para la derivada fraccionaria en tiempo usamos la discretización del Teorema 3.1. De esta manera se podría reescribir la ecuación (4.5) de forma general para u_i^{k+1} como

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \sum_{j=0}^k \left(u_i^{k+1-j} - u_i^{k-j} \right) b_j + O(\Delta t^{2-\alpha}) &= \frac{a}{\Delta x^2} (u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) + O(\Delta x^2) \\ &+ \frac{b}{2\Delta x} (u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}) + O(\Delta x^2) \\ &- c \cdot u_i^{k+1}. \end{aligned}$$

Agrupando los términos iguales y con sencillas manipulaciones podemos reescribir lo anterior para $1 \leq k \leq N - 1$ como

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} - b_k u_i^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (b_{j+1} - b_j) u_i^{k-j} &= \left(\frac{ad}{\Delta x^2} + \frac{bd}{2\Delta x} \right) u_{i+1}^{k+1} + \left(\frac{ad}{\Delta x^2} - \frac{bd}{2\Delta x} \right) u_{i-1}^{k+1} \\ &+ \left(-\frac{2ad}{\Delta x^2} - dc \right) u_i^{k+1} + O(\Delta t^2 + \Delta t^\alpha \cdot \Delta x^2). \end{aligned}$$



Denotamos los coeficientes

$$\begin{cases} a_0 = 1 + \frac{2ad}{\Delta x^2} + cd \\ a_{+1} = -\left(\frac{ad}{\Delta x^2} + \frac{bd}{2\Delta x}\right) \\ a_{-1} = -\left(\frac{ad}{\Delta x^2} - \frac{bd}{2\Delta x}\right) \end{cases} \quad (5.2)$$

Por lo que el sistema implícito discreto tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{+1}u_{i+1}^1 + a_0u_i^1 + a_{-1}u_{i-1}^1 = u_i^0 + O(\Delta t^2 + \Delta t^\alpha \cdot \Delta x^2) \\ a_{+1}u_{i+1}^{k+1} + a_0u_i^{k+1} + a_{-1}u_{i-1}^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1})u_i^{k-j} + b_k u_i^0 + O(\Delta t^2 + \Delta t^\alpha \Delta x^2) \end{cases} \quad (5.3)$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$; $k \geq 1$.

Siendo las condiciones iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} u^0 = f \\ u_0^k = 0 \\ u_n^k = q^k \end{cases}, \quad k \geq 1. \quad (5.4)$$

Denotando U_i^k como solución aproximada de u_i^k , al omitir los errores de truncación tenemos el esquema implícito discreto aproximado:

$$\begin{cases} A \cdot U^1 = U^0 + G^1 \\ A \cdot U^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1})U^{k-j} + b_k \cdot U^0 + G^{k+1} \quad k \geq 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Siendo las condiciones iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} U^0 = f \\ U_0^k = 0 \\ U_n^k = q^k \end{cases}, \quad k \geq 1 \quad (5.6)$$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_{+1} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{-1} & a_0 & a_{+1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

5.2 Estabilidad

En esta sección demostraremos la estabilidad del esquema implícito discreto (5.5)-(5.6) sobre el valor inicial usando el análisis de von Neumann, mediante la transformada de Fourier discreta.

Suponemos que \tilde{U}_i^k y U_i^k son soluciones del esquema implícito discreto aproximado (5.5)-(5.6) y denotamos

$$\varepsilon_i^k = \tilde{U}_i^k - U_i^k, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

entonces ε_i^k satisface:

$$\begin{cases} a_{+1}\varepsilon_{i+1}^1 + a_0\varepsilon_i^1 + a_{-1}\varepsilon_{i-1}^1 = \varepsilon_i^0 \\ a_{+1}\varepsilon_{i+1}^{k+1} + a_0\varepsilon_i^{k+1} + a_{-1}\varepsilon_{i-1}^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1})\varepsilon_i^{k-j} + b_k\varepsilon_i^0 \end{cases}, \quad (5.7)$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$; $k \geq 1$. Además $\varepsilon_0^k = \varepsilon_n^k = 0$.

Para $k = 0, 1, \dots, N$ definimos la función mallada:

$$\varepsilon^k(x) = \begin{cases} \varepsilon_i^k & x \in \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right], \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 0 & x \in [x_{\min}, x_{\min} + \frac{\Delta x}{2}] \cup [x_{\max} - \frac{\Delta x}{2}, x_{\max}] \end{cases}$$

Como $\varepsilon_0^k = \varepsilon_n^k$, podemos hacer una extensión periódica para ε_i^k con período $X = x_{\max} - x_{\min}$. Entonces $\varepsilon^k(x)$ tiene la siguiente expansión en serie de Fourier:

$$\varepsilon^k(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^k e^{i \frac{2j\pi x}{X}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (5.8)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ representa la unidad imaginaria, y los coeficientes de Fourier tienen la forma:

$$v_j^k = \frac{1}{X} \int_0^X \varepsilon^k(x) e^{i \frac{2j\pi x}{X}} dx, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

Si definimos la norma $\|\cdot\|_{\Delta x}$ como:

$$\|\varepsilon^k\|_{\Delta x} := \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta x |\varepsilon_j^k|^2}, \quad \text{donde} \quad \varepsilon^k = (\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \dots, \varepsilon_{n-1}^k)^T.$$

Como $\varepsilon_0^k = \varepsilon_n^k = 0$, tenemos

$$\|\varepsilon^k\|_{\Delta x}^2 = \int_0^X |\varepsilon^k(x)|^2 dx = \|\varepsilon^k(x)\|^2,$$



donde $\|\cdot\|$ es $L^2[0, X]$. Si ahora utilizamos la identidad de Parseval:

$$\|\varepsilon^k(x)\|^2 = X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_j^k|^2,$$

deducimos pues

$$\|\varepsilon^k\|_{\Delta x}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x |\varepsilon_j^k|^2 = X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_j^k|^2, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (5.9)$$

Basándonos en el análisis anterior y que $x_i = x_{min} + i \cdot \Delta x$, podemos suponer que la solución de la ecuación (5.7) tiene la forma:

$$\varepsilon_i^k = v^k e^{i\lambda(x_{min} + i \cdot \Delta x)}, \quad \left(\lambda = \frac{2\pi i}{X} \right). \quad (5.10)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (5.7) y eliminando el factor común nos queda

$$\begin{cases} (a_{+1}e^{i\lambda\Delta x} + a_0 + a_{-1}e^{-i\lambda\Delta x}) v^1 = v^0 \\ (a_{+1}e^{i\lambda\Delta x} + a_0 + a_{-1}e^{-i\lambda\Delta x}) v^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) v^{k-j} + b_k v^0 \end{cases}, \quad (5.11)$$

donde $k \geq 1$.

Para demostrar la estabilidad necesitamos ver previamente las propiedades de los coeficientes b_j .

Lema 5.1 *Los coeficientes $b_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$ satisfacen:*

1. $b_j > 0$, $j = 0, 1, \dots$.
2. $1 = b_0 > b_1 > b_2 > \dots > b_k$.
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.
4. $\sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) + b_k = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Demostramos cada una de las propiedades:

1. Como $j \geq 0$ y $\alpha \in (0, 1)$ se tiene de manera directa que $b_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha} > 0$.
2. Si definimos la función $b(x) = (x+1)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$ para $x \geq 0$, entonces su derivada

$$b'(x) = (1-\alpha) \left(\frac{1}{(x+1)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} \right)$$

es negativa en todo punto $x \geq 0$ con $\alpha \in (0, 1)$, por lo tanto, es estrictamente decreciente en el dominio. En particular $b_0 = b(0) = 1^{1-\alpha} = 1$.



3. Es consecuencia directa de las dos propiedades anteriores, pues al ser una sucesión positiva y estrictamente decreciente entonces converge a 0.
4. Basta con desarrollar el sumatorio:

$$\sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) + b_k = (b_0 - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_1} - \cancel{b_2}) + \dots + (\cancel{b_{k-1}} - \cancel{b_k}) + \cancel{b_k} = b_0 = 1.$$

□

La siguiente proposición es indispensable para demostrar la estabilidad.

Proposición 5.1 *Para $k > 0$ arbitrario, se cumple $|v^k| \leq |v^0|$.*

DEMOSTRACIÓN. Si tenemos en cuenta la definición de seno a través de la fórmula de Euler:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \implies \sin^2 \frac{z}{2} = -\frac{1}{4} (e^{iz} - 2 + e^{-iz}).$$

Entonces la ecuación (5.11), teniendo en cuenta (5.2), pues ser reescrita como

$$\left(1 + \frac{4ad}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\lambda \Delta x}{2} + cd - 2i \frac{bd}{2\Delta x} \sin \lambda \Delta x \right) v^1 = v^0 \quad (5.12)$$

Teniendo en cuenta que $a, c, d > 0$ se tiene que

$$\left| 1 + \frac{4ad}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\lambda \Delta x}{2} + cd - 2i \frac{bd}{2\Delta x} \sin \lambda \Delta x \right| \geq 1 \implies |v^1| \leq |v^0|. \quad (5.13)$$

Supongamos por inducción que

$$|v^j| \leq |v^0|, \quad j = 2, 3, \dots, k.$$

De acuerdo a la ecuación (5.11) y al Lema 5.1, utilizando la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{4ad}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\lambda \Delta x}{2} + cd - 2i \frac{bd}{2\Delta x} \sin \lambda \Delta x \right) v^{k+1} \right| &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) v^{k-j} + b_k v^0 \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) v^{k-j} \right| + |b_k v^0| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) |v^{k-j}| + b_k |v^0| \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) + b_k \right) |v^0| \\ &= |v^0|, \end{aligned}$$

es decir, $|v^{k+1}| \leq |v^0|$. Demostrando por inducción lo enunciado. □



Teorema 5.1 *El esquema implícito discreto (5.5)-(5.6) es estable incondicionalmente del valor inicial.*

DEMOSTRACIÓN. Por la ecuación (5.9) y la proposición anterior, la ecuación (5.7) satisface

$$\|\varepsilon^k\|_{\Delta x} \leq \|\varepsilon^0\|_{\Delta x}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.14)$$

lo que implica que el sistema implícito discreto (5.5)-(5.6) es estable incondicionalmente del valor inicial. \square

5.3 Convergencia

En esta sección se demuestra la convergencia del esquema implícito discreto (5.5)-(5.6) usando de nuevo el método de von Neumann, utilizando la transformada de Fourier discreta.

Supóngase que U_j^k es la solución del esquema discreto aproximado (5.5)-(5.6) y u_j^k es la solución del esquema discreto (5.3)-(5.4). Restando (5.3) a (5.5) se tiene:

$$\begin{cases} a_{+1}E_{i+1}^1 + a_0E_i^1 + a_{-1}E_{i-1}^1 = E_i^0 + \Delta t^\alpha \cdot R_i^1 \\ a_{+1}E_{i+1}^{k+1} + a_0E_i^{k+1} + a_{-1}E_{i-1}^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1})E_i^{k-j} + b_kE_i^0 + \Delta t^\alpha \cdot R_i^k \end{cases}, \quad (5.15)$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$; $k \geq 1$.

Donde se ha definido $E_i^k = u_i^k - U_i^k$ y $R_i^k = O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2)$ para $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, N$. Además, las condiciones de contorno iniciales (5.4) y (5.6) implican que

$$\begin{cases} E_0^k = E_n^k = 0, & k = 1, \dots, N \\ E_i^0 = 0, & i = 0, 1, \dots, n \end{cases}. \quad (5.16)$$

De manera similar a como hicimos en el sección anterior, para $k = 0, 1, \dots, N$, se definen dos funciones malladas:

$$\begin{aligned} \bullet \quad E^k(x) &= \begin{cases} E_i^k, & x \in \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right], & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, & x \in \left[x_{\min}, x_{\min} + \frac{\Delta x}{2}\right] \cup \left[x_{\max} - \frac{\Delta x}{2}, x_{\max}\right] \end{cases} \\ \bullet \quad R^k(x) &= \begin{cases} R_i^k, & x \in \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right], & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, & x \in \left[x_{\min}, x_{\min} + \frac{\Delta x}{2}\right] \cup \left[x_{\max} - \frac{\Delta x}{2}, x_{\max}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

De esta manera $E^k(x)$ y $R^k(x)$ tienen la siguiente expansión en serie de Fourier:

$$E^k(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \epsilon_j^k e^{i \frac{2j\pi x}{L}}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (5.17)$$

y

$$R^k(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_j^k e^{i \frac{2j\pi x}{L}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (5.18)$$

donde $X = x_{max} - x_{min}$, y

$$\begin{cases} \epsilon_j^k = \frac{1}{X} \int_0^X E^k(x) e^{i \frac{2j\pi x}{X}} dx \\ r_j^k = \frac{1}{X} \int_0^X R^k(x) e^{i \frac{2j\pi x}{X}} dx \end{cases}, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

Si denotamos en forma vectorial

$$E^k = (E_1^k, E_2^k, \dots, E_{n-1}^k)^T, \quad R^k = (R_1^k, R_2^k, \dots, R_{n-1}^k)^T$$

y utilizamos de nuevo la norma $\|\cdot\|_{\Delta x}$:

$$\|E^k\|_{\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta x |E_j^k|^2}, \quad \|R^k\|_{\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta x |R_j^k|^2}.$$

Por lo que de manera similar al utilizar la identidad de Parseval se tiene

$$\|E^k\|_{\Delta x}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x |E_j^k|^2 = X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\epsilon_j^k|^2, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (5.19)$$

y

$$\|R^k\|_{\Delta x}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x |R_j^k|^2 = X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |r_j^k|^2, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (5.20)$$

Si tomamos $x_i = x_{min} + i \cdot \Delta x$, por lo anterior podemos suponer que los coeficientes toman la forma:

$$\begin{cases} E_i^k = \epsilon^k e^{i\lambda(x_{min} + i \cdot \Delta x)} \\ R_i^k = r^k e^{i\lambda(x_{min} + i \cdot \Delta x)} \end{cases}, \quad \left(\lambda = \frac{2\pi i}{X} \right)$$

y los sustituimos en la ecuación (5.15). Por la ecuación (5.16) tenemos:

$$\begin{cases} (a_{+1} e^{i\lambda \Delta x} + a_0 + a_{-1} e^{-i\lambda \Delta x}) \epsilon^1 = \Delta t^\alpha \cdot r^1 \\ (a_{+1} e^{i\lambda \Delta x} + a_0 + a_{-1} e^{-i\lambda \Delta x}) \epsilon^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) \epsilon^{k-j} + \Delta t^\alpha \cdot r^k \end{cases}, \quad (5.21)$$



para $i = 1, 2, \dots, n-1$; $k \geq 1$.

Utilizando de nuevo la relación de Euler que vimos en la demostración de la Proposición 5.1 y por (5.2), la fórmula anterior se puede reescribir como

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 + 4 \frac{ad}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\lambda \Delta x}{2} + cd - 2i \frac{bd}{2\Delta x} \sin \lambda \Delta x \right) \epsilon^1 = \Delta t^\alpha \cdot r^1 \\ \left(1 + 4 \frac{ad}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\lambda \Delta x}{2} + cd - 2i \frac{bd}{2\Delta x} \sin \lambda \Delta x \right) \epsilon^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) \epsilon^{k-j} + \Delta t^\alpha \cdot r^k \end{array} \right., \quad (5.22)$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$; $k \geq 1$.

Proposición 5.2 Si ϵ^k es solución de la ecuación (5.21), entonces existe una constante positiva C_1 tal que

$$|\epsilon^{k+1}| \leq \frac{C_1}{b_k} \Delta t^\alpha |r^1|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $R_i^k = O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2)$ para $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, N$, entonces existe una constante positiva C_2 , tal que

$$|r^k| = |R_i^k| \leq C_2 (\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (5.23)$$

Obtenemos entonces

$$\|R^k\|_{\Delta x} \leq C_2 \sqrt{X} (\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad k = 1, \dots, N, \quad (5.24)$$

de acuerdo a la fórmula (5.20). Además, la convergencia de la serie de la derecha de (5.20) implica que

$$|r^k| = |R_i^k| \leq C_3 |R_i^1| = C_3 |r^1|, \quad k = 2, 3, \dots, N, \quad (5.25)$$

donde $C_3 > 0$.

Por la ecuación (5.22) y la desigualdad de la izquierda de (5.13):

$$|\epsilon^1| = \frac{|\Delta t^\alpha \cdot r^1|}{\left| 1 + 4 \frac{ad}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\lambda \Delta x}{2} + cd - 2i \frac{bd}{2\Delta x} \sin \lambda \Delta x \right|} \leq \Delta t^\alpha |r^1| = b_0^{-1} \Delta t^\alpha |r^1|.$$

Suponemos por inducción que

$$|\epsilon^j| \leq C_1 b_{j-1}^{-1} \Delta t^\alpha |r^1|, \quad j = 2, \dots, k,$$

con $C_1 = \max\{1, C_3\}$, y demostramos que se cumple para $j = k + 1$ de manera análoga a la Proposición 5.1, utilizando el Lema 5.1 y (5.25):

$$\begin{aligned}
|\epsilon^{k+1}| &= \frac{\Delta t^\alpha |r^k| + \left| \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) \epsilon^{k-j} \right|}{\left| 1 + 4 \frac{ad}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\lambda \Delta x}{2} + cd - 2i \frac{bd}{2\Delta x} \sin \lambda \Delta x \right|} \\
&\leq \Delta t^\alpha |r^k| + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) |\epsilon^{k-j}| \\
&\leq C_3 \Delta t^\alpha |r^1| + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) |\epsilon^{k-j}| \\
&\leq C_3 \Delta t^\alpha |r^1| + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) C_1 b_{k-j-1}^{-1} \Delta t^\alpha |r^1| \\
&\leq C_3 \Delta t^\alpha |r^1| + C_1 b_k^{-1} \Delta t^\alpha |r^1| \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) \\
&\leq C_1 b_k^{-1} \Delta t^\alpha |r^1| \left(\sum_{j=0}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) + b_k \right) \\
&= C_1 b_k^{-1} \Delta t^\alpha |r^1|.
\end{aligned}$$

Demostrando por inducción lo enunciado. \square

Teorema 5.2 *El esquema implícito discreto (5.5)-(5.6) es convergente, y la solución satisface*

$$\|u^k - U^k\|_{\Delta x} \leq C (\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad k = 1, \dots, N,$$

con $C > 0$ constante.

DEMOSTRACIÓN. Como $b_{k-1}^{-1} k^{-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}$, para $k = 1, \dots, N$, entonces por la Proposición 5.2 se tiene

$$|\epsilon^k| \leq C_1 b_{k-1}^{-1} \Delta t^\alpha |r^1| = C_1 b_{k-1}^{-1} k^{-\alpha} k^\alpha \Delta t^\alpha |r^1| \leq \frac{C_1}{1-\alpha} (k \Delta t)^\alpha |r^1| \leq \frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha |r^1|.$$

De forma general como $|\epsilon^k| = |E_i^k|$ se tiene por (5.23):

$$|u_i^k - U_i^k| \leq \frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha C_2 (\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, N.$$

Además, por las ecuaciones (5.19), (5.20) y (5.24), tenemos que

$$\|E^k\|_{\Delta x} \leq \frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha \|R^1\|_{\Delta x} \leq \underbrace{\frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha C_2 \sqrt{X}}_C (\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2) = C (\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x^2).$$

\square

Capítulo 6

Simulación

En este capítulo vamos a estudiar computacionalmente el modelo de Black-Scholes dado por (4.5). Para ello hacemos uso de MATLAB, un potente lenguaje a la hora de operar con matrices, lo cual es óptimo para calcular nuestro esquema implícito (5.5)-(5.6). Inicialmente comprobaremos que se cumple la convergencia del esquema (Teorema 5.2) con dos ejemplos cuya solución analítica es conocida. Finalmente veremos unos cuantos casos prácticos de la ecuación de Black-Scholes cuya solución no se conoce.

6.1 Análisis de convergencia

Para hacer el estudio de la convergencia desarrollamos el *script* **AnalisisEf.m**. Este hace uso del esquema implícito modificado cuyas condiciones iniciales varían en función de los ejemplos, estos introducen un término fuente $F(x, t)$ de tal forma que se puede obtener la solución analítica. El esquema implícito viene dado por el *script* **Implicito.m**. Ambos *scripts* son autoexplicativos y se pueden encontrar en el repositorio <https://github.com/KRomera/TFG-Mathematics>. Los ejemplos seleccionados se hacen acorde a la referencia [12].

Ejemplo 6.1 Dado el siguiente modelo fraccionario en tiempo con condiciones de contorno homogéneas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - c \cdot u(x, t) + F(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(0, t) = 0, & t \in (0, 1) \\ u(1, t) = 0, & t \in (0, 1) \\ u(x, 0) = x^2(1 - x) & x \in (0, 1) \end{array} \right. , \quad (6.1)$$

cuyo término fuente es

$$F(x, t) = \left(\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) x^2(1-x) - (t+1)^2 (a(2-6x) + b(2x-3x^2) - cx^2(1-x)) ,$$

de tal manera que la solución exacta es $u(x, t) = (t+1)^2 x^2(1-x)$. Los parámetros utilizados son $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $\alpha = 0.7$, $a = \frac{1}{2}\sigma^2$, $b = r - a$, $c = r$, $x \in (x_{min}, x_{max}) = (0, 1)$ y $t \in (0, T) = (0, 1)$.

Computacionalmente obtenemos los resultados mostrados en la Figuras 6.1, 6.2 y las Tablas 6.1, 6.2, observando unos buenos resultados que se ajustan a nuestro estudio teórico.

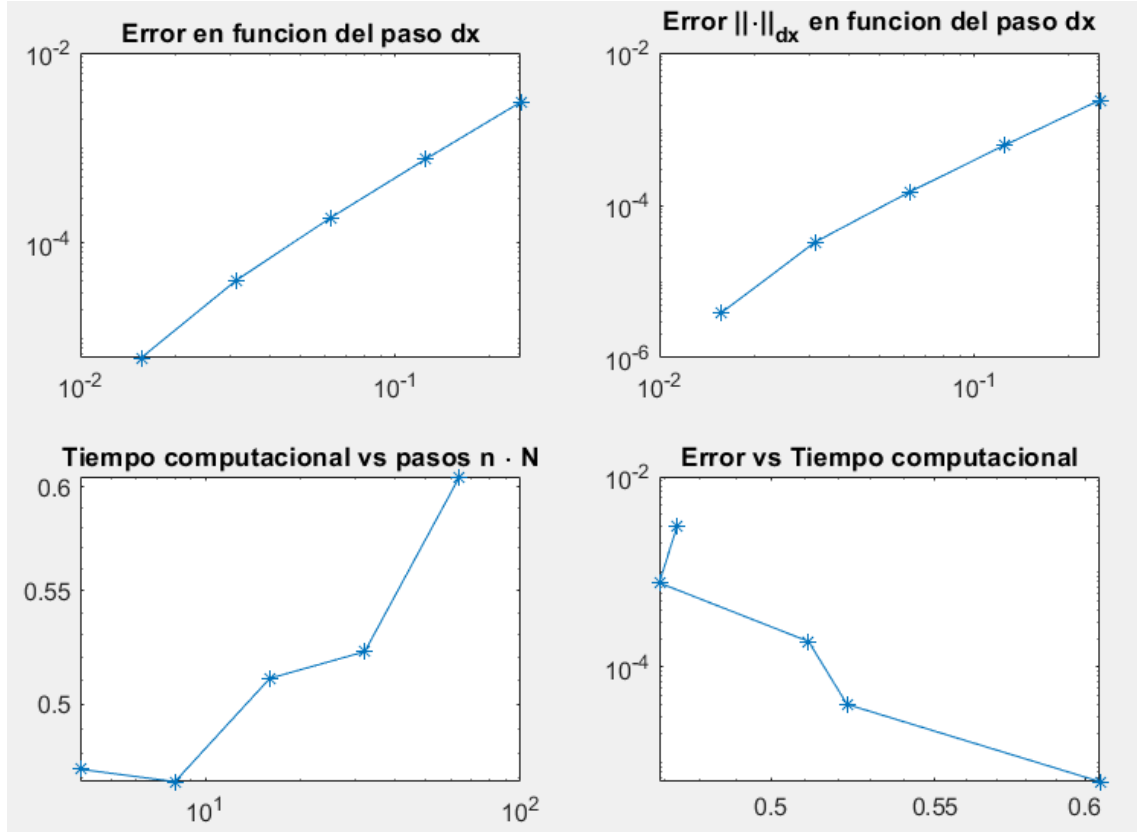


Figura 6.1: Errores numéricos para el Ejemplo 6.1 cuando $N = 1000$ y diferentes $dx = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 6$.

Δx	Max-error	Orden	$\ \cdot\ _{\Delta x}$	Orden
$\frac{1}{4}$	0.0030		0.0024	
$\frac{1}{8}$	$7.5750 \cdot 10^{-4}$	1.98	$6.1678 \cdot 10^{-4}$	1.95
$\frac{1}{16}$	$1.8629 \cdot 10^{-4}$	2.04	$1.5079 \cdot 10^{-4}$	2.03
$\frac{1}{32}$	$4.0698 \cdot 10^{-5}$	2.19	$3.2995 \cdot 10^{-5}$	2.19
$\frac{1}{64}$	$6.2822 \cdot 10^{-6}$	2.70	$3.8070 \cdot 10^{-6}$	3.12

Tabla 6.1: Errores numéricos para el Ejemplo 6.1 cuando $N = 1000$ y diferentes $dx = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 6$.

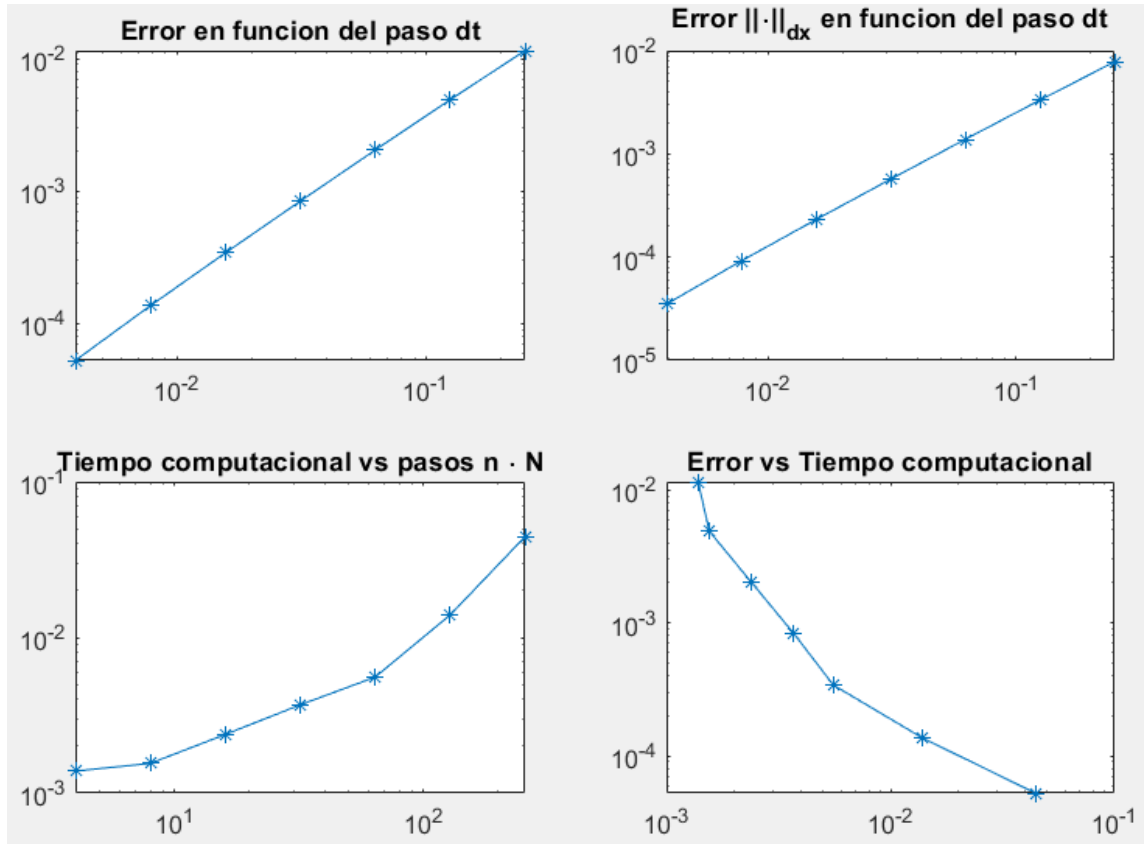


Figura 6.2: Errores numéricos para el Ejemplo 6.1 cuando $n = 100$ y diferentes $dt = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 8$.

Δx	Max-error	Orden	$\ \cdot\ _{\Delta x}$	Orden
$\frac{1}{4}$	0.0115		0.0078	
$\frac{1}{8}$	0.0049	1.23	0.0033	1.23
$\frac{1}{16}$	0.0020	1.26	0.0014	1.26
$\frac{1}{32}$	$8.3696 \cdot 10^{-4}$	1.28	$5.6820 \cdot 10^{-4}$	1.28
$\frac{1}{64}$	$3.4012 \cdot 10^{-4}$	1.30	$2.3059 \cdot 10^{-4}$	1.30
$\frac{1}{128}$	$1.3597 \cdot 10^{-4}$	1.32	$9.1846 \cdot 10^{-5}$	1.33
$\frac{1}{256}$	$5.2499 \cdot 10^{-5}$	1.37	$3.5518 \cdot 10^{-5}$	1.39

Tabla 6.2: Errores numéricos para el Ejemplo 6.1 cuando $n = 100$ y diferentes $dt = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 8$.

Ejemplo 6.2 Dado el siguiente modelo fraccionario en tiempo con condiciones de contorno no homogéneas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - c \cdot u(x,t) + F(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(0,t) = (t+1)^2, \quad t \in (0,1) \\ u(1,t) = 3(t+1)^2, \quad t \in (0,1) \\ u(x,0) = x^3 + x^2 + 1, \quad x \in (0,1) \end{array} \right. , \quad (6.2)$$

cuyo término fuente es

$$F(x,t) = \left(\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) (x^3 + x^2 + 1) - (t+1)^2 (a(2+6x) + b(2x+3x^2) - c(x^2 + x^2 + 1)) ,$$

de tal manera que la solución exacta es $u(x,t) = (t+1)^2(x^3 + x^2 + 1)$. Los parámetros utilizados son $r = 0.5$, $\sigma = \sqrt{2}$, $\alpha = 0.7$, $a = \frac{1}{2}\sigma^2$, $b = r - a$, $c = r$, $x \in (x_{min}, x_{max}) = (0,1)$ y $t \in (0,T) = (0,1)$.

Computacionalmente obtenemos los resultados mostrados en la Figuras 6.3, 6.4 y las Tablas 6.3, 6.4, observando unos buenos resultados que se ajustan a nuestro estudio teórico.

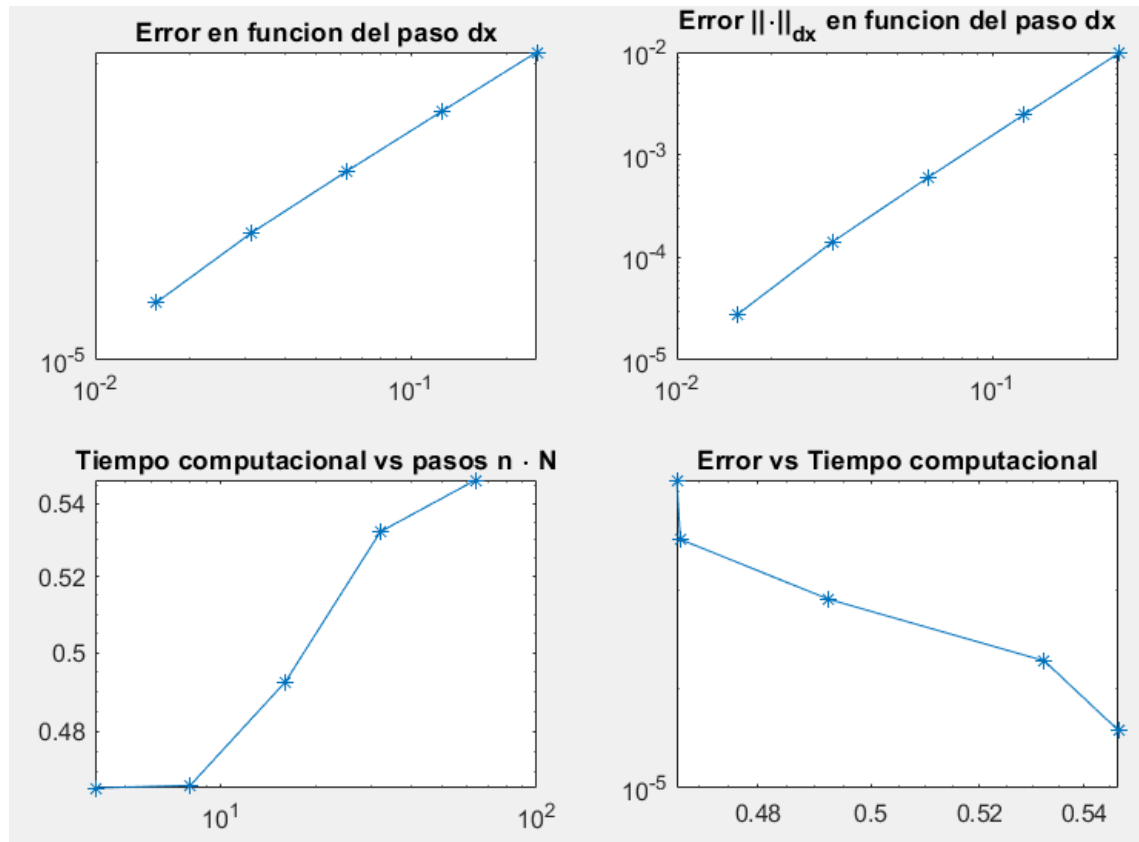


Figura 6.3: Errores numéricos para el Ejemplo 6.2 cuando $N = 1000$ y diferentes $dx = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 6$.



Δx	Max-error	Orden	$\ \cdot \ _{\Delta x}$	Orden
$\frac{1}{4}$	0.0123		0.0097	
$\frac{1}{8}$	0.0033	2.00	0.0024	2.00
$\frac{1}{16}$	$8.1906 \cdot 10^{-4}$	2.02	$6.0151 \cdot 10^{-4}$	2.02
$\frac{1}{32}$	$1.9457 \cdot 10^{-4}$	2.07	$1.4278 \cdot 10^{-4}$	2.07
$\frac{1}{64}$	$3.8364 \cdot 10^{-5}$	2.34	$2.8058 \cdot 10^{-5}$	2.35

Tabla 6.3: Errores numéricos para el Ejemplo 6.2 cuando $N = 1000$ y diferentes $dx = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 6$.

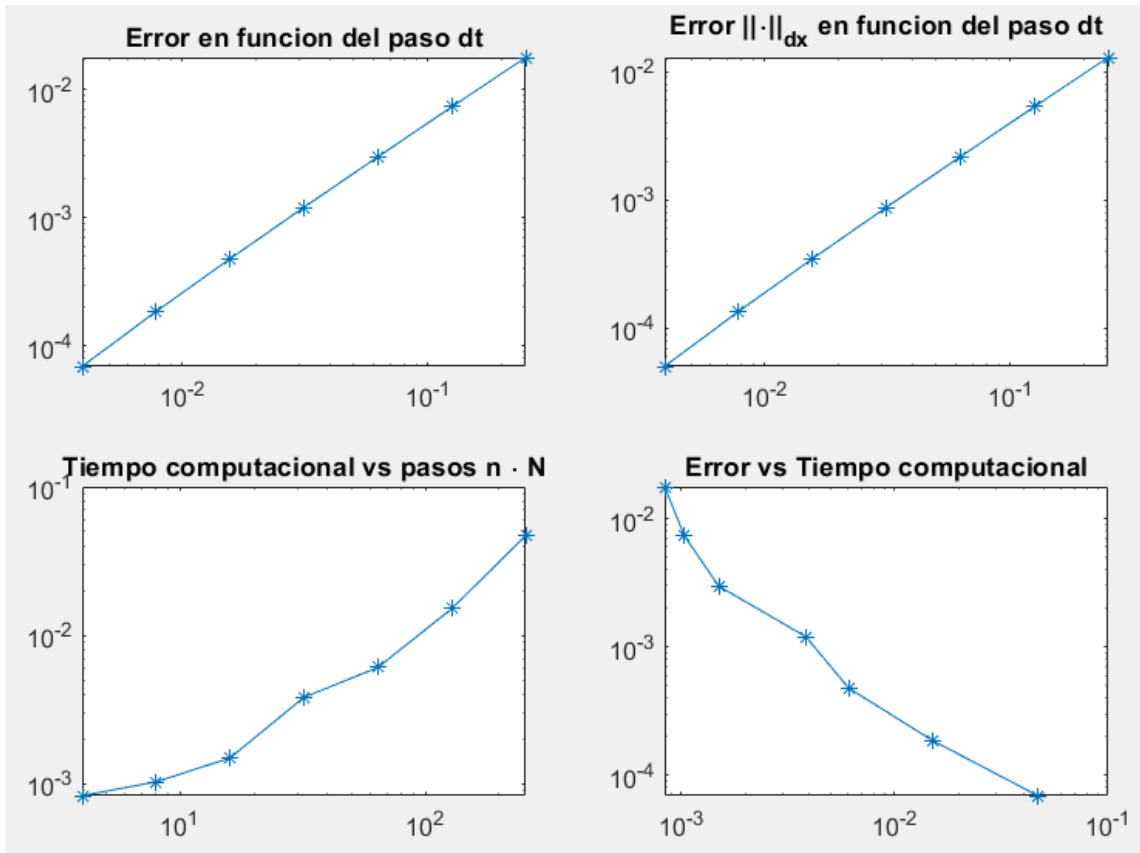


Figura 6.4: Errores numéricos para el Ejemplo 6.2 cuando $n = 100$ y diferentes $dt = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 8$.

Δx	Max-error	Orden	$\ \cdot \ _{\Delta x}$	Orden
$\frac{1}{4}$	0.0176		0.0129	
$\frac{1}{8}$	0.0073	1.28	0.0053	1.28
$\frac{1}{16}$	0.0030	1.29	0.0022	1.29
$\frac{1}{32}$	0.0012	1.31	$8.7577 \cdot 10^{-4}$	1.31
$\frac{1}{64}$	$4.7728 \cdot 10^{-4}$	1.33	$3.4802 \cdot 10^{-4}$	1.33
$\frac{1}{128}$	$1.8565 \cdot 10^{-4}$	1.36	$1.3536 \cdot 10^{-4}$	1.36
$\frac{1}{256}$	$6.9339 \cdot 10^{-5}$	1.42	$5.0516 \cdot 10^{-5}$	1.42

Tabla 6.4: Errores numéricos para el Ejemplo 6.2 cuando $n = 100$ y diferentes $dt = 2^{-i}$, $i = 2, 3, \dots, 8$.

6.2 Resultados

Una vez observada que la convergencia es correcta vamos a estudiar el modelo en opciones europeas basándonos en algunos ejemplos sugeridos en la referencia [14].

Ejemplo 6.3 Sea la ecuación fraccionaria en tiempo de Black-Scholes que describe una opción europea según (5.1). Donde $x \in (x_{min}, x_{max}) = (-2.3026, 4.6052)$ y $t \in (0, T) = (0, 1)$, con precio de ejercicio $K = 50$, volatilidad $\sigma = 0.25$, tasa de interés $r = 0.05$. Se va a estudiar el precio de una opción europea *call*, mediante (4.3)-(4.4), para diferentes medidas de liquidez α .

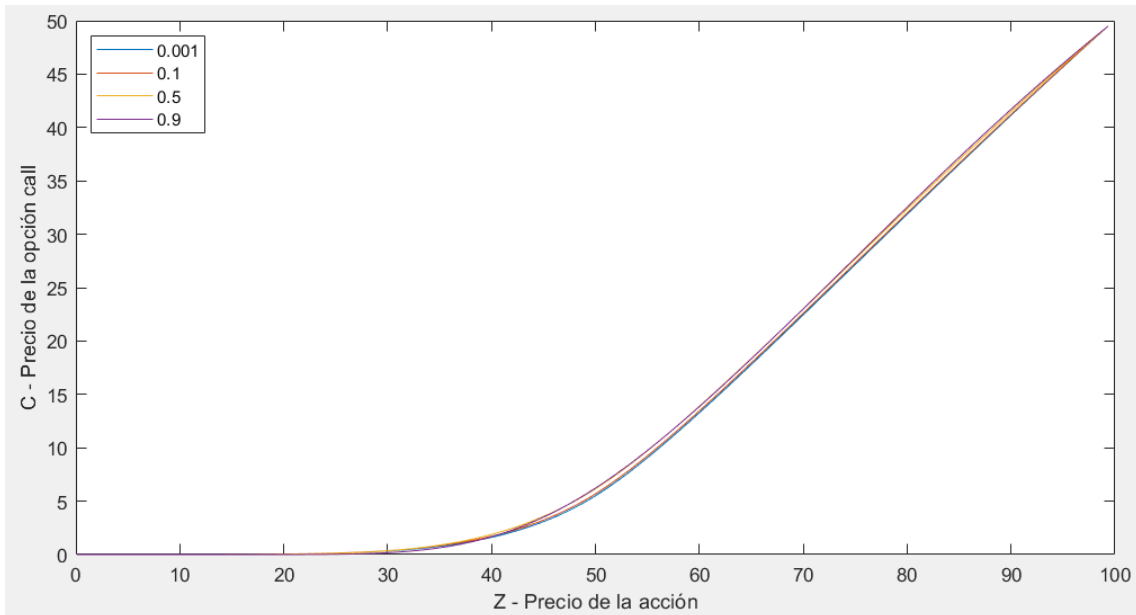


Figura 6.5: Soluciones aproximadas del Ejemplo 6.3 para diferentes valores de α y $z \in [0, 100]$, para $\Delta x = 2^{-8}$ y $\Delta t = 2^{-7}$.

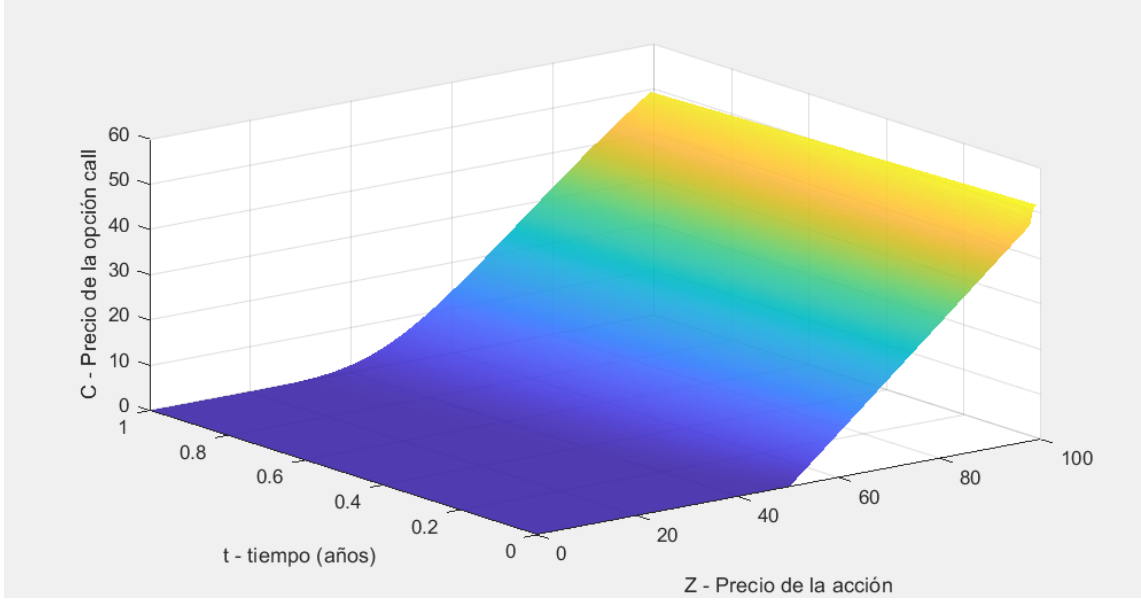


Figura 6.6: Superficie de la solución aproximada del Ejemplo 6.3 con $\alpha = 0.9$, para $\Delta x = 2^{-8}$ y $\Delta t = 2^{-7}$.

Veamos ahora otro ejemplo con un enfoque que acerque al lector a algo conocido.

Ejemplo 6.4 Supongamos que Tesla está en el mercado europeo. Nuestros inversores están interesados en una opción *call* de las acciones de Tesla (TSLA NASDAQ), con fecha de vencimiento el día de sus ganancias del tercer cuartil Q3 de 2022, con un precio de ejercicio un 30% superior al precio actual de la acción. El precio actual de la acción de Tesla según Webull a día de hoy (26 de mayo, 2022) es de $z = \$700.70$. Si multiplicamos el precio actual por 1.3 obtenemos el precio de ejercicio deseado $K = \$920.00$. Sin mucha complicación, en internet encontramos que la fecha de las ganancias del Q3 es 19 de octubre, dándonos un tiempo de vencimiento de 146 días, es decir, $T = 0.4$ años. Para determinar la tasa de interés utilizamos los bonos de estado de Estados Unidos a 10 años (\$USGG10YR) que según CNBC, que actualmente paga a $r = 2.76\%$. La volatilidad del mercado de Tesla es bastante alta, analizando los últimos meses marcados por diferentes crisis como la guerra de Ucrania, podemos establecer la volatilidad en $\sigma = 74\%$. Mirando el gráfico histórico de los últimos cinco años, el mínimo histórico es $z_{min} = \$37$ y el máximo histórico es $z_{max} = \$1222$.

Con el estudio de mercado que hemos realizado, podemos ahora hacer uso de la ecuación fraccionaria en tiempo de Black-Scholes que describe una opción europea según (5.1). Donde $x \in (x_{min}, x_{max}) = (3.61, 7.11)$ y $t \in (0, T) = (0, 0.4)$, con precio de ejercicio $K = 920$, volatilidad $\sigma = 0.74$, tasa de interés $r = 0.0276$. Se va a estudiar el precio de una opción europea *call*, mediante (4.3)-(4.4), para un supuesto mercado no completamente líquido, es decir, $\alpha = 0.9$.

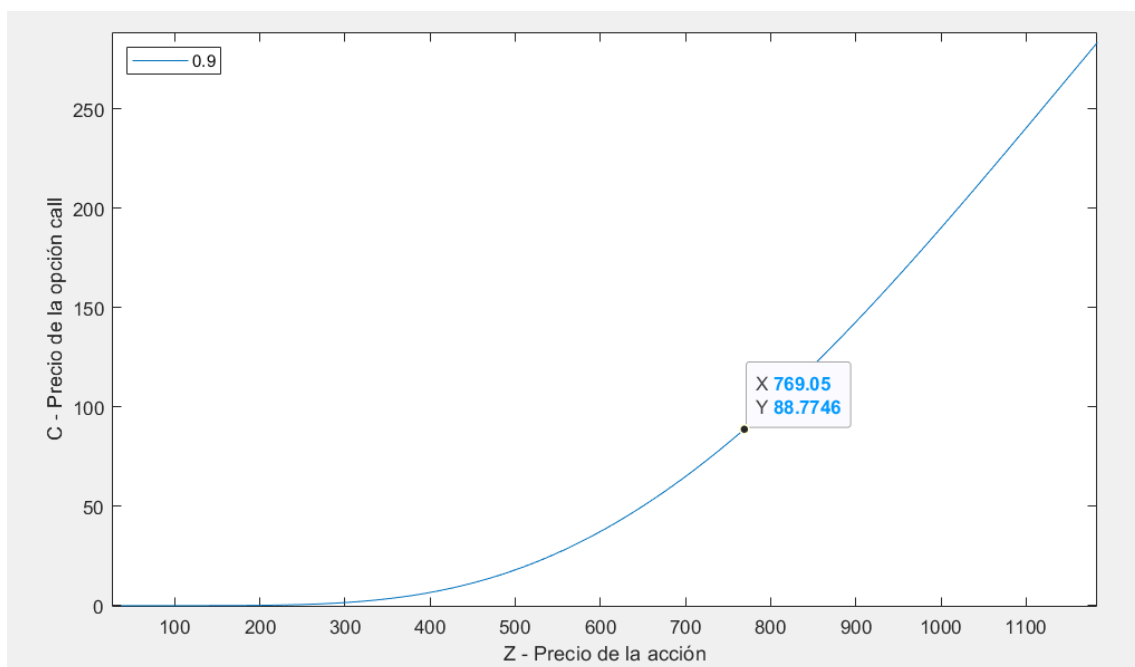


Figura 6.7: Soluciones aproximadas del Ejemplo 6.4 para $\alpha = 0.9$ y $z \in [37, 1222]$, para $\Delta x = 2^{-8}$ y $\Delta t = 2^{-9}$.

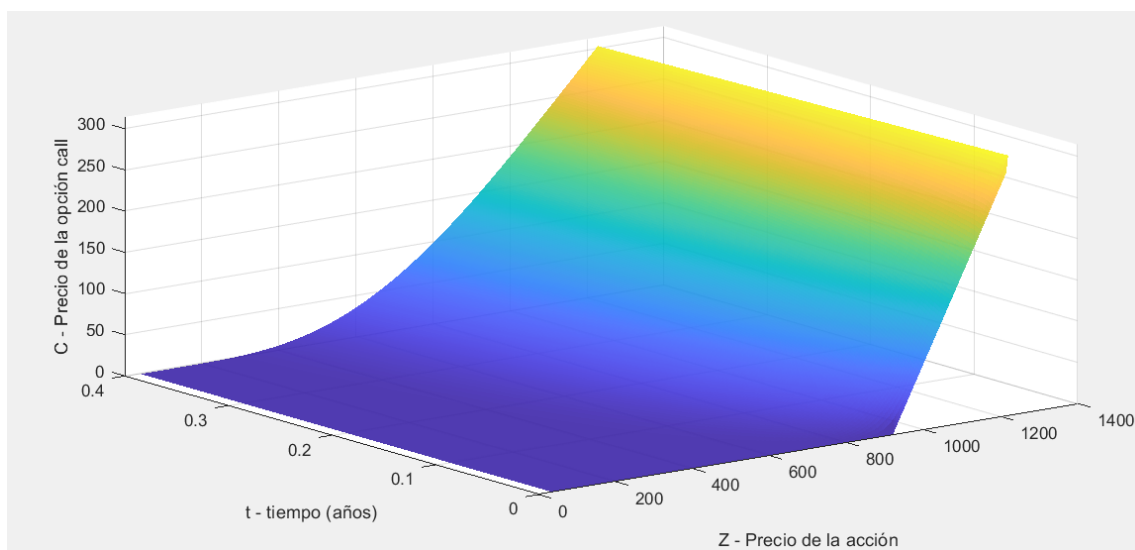


Figura 6.8: Superficie de la solución aproximada del Ejemplo 6.4 con $\alpha = 0.9$, para $\Delta x = 2^{-8}$ y $\Delta t = 2^{-9}$.

De lo anterior podemos deducir que el precio justo de la opción *call* es justamente $C = v(Z_0, T) = \$89$. Sin embargo, si nuestros inversores son especuladores y pretenden enriquecerse con esta operación deben saber que debido a los costes de transacción, que el mercado lo descuenta todo y que los analistas se rigen con la ecuación de Black-Scholes para las opciones europeas, no es una operación con garantía de grandes ganancias y si con cierto riesgo debido a la alta volatilidad de TSLA NASDAQ.

Capítulo 7

Conclusiones

En este documento se ha estudiado el modelo subdifusivo de B-S fraccionario en tiempo como generalización del modelo B-S clásico. Para ello se han estudiado las derivadas fraccionarias en detalle. Por un lado, se ha comprendido el origen de las tres definiciones y se ha demostrado las relaciones entre ellas. Por otro lado, se ha obtenido una discretización de la derivada de Caputo de orden $2 - \alpha$ mediante una cuadratura que hace uso de la interpolación de Lagrange y el Teorema de Taylor con resto integral. Posteriormente, se han estudiado las hipótesis en las que se basaron Fischer Black y Myron Scholes para valorar las opciones europeas, se ha hecho un pequeño análisis, sin entrar en todos los detalles, de las diferencias del modelo clásico y el subdifusivo. Tomando la ecuación del modelo clásico se ha deducido la del modelo subdifusivo mediante la transformada de Laplace, propiedades de las derivadas fraccionarias, etc.

Finalmente se propuesto un método de diferencias finitas para resolver el modelo, el cual no requiere de ninguna condición de estabilidad y tiene un buen orden de convergencia, $O(\Delta x^2 + \Delta t^{2-\alpha})$.

Mediante simulación en MATLAB se ha observado que el orden de convergencia era correcto y se ha aplicado el modelo a un caso práctico, la famosa Tesla.

Durante todo el proceso de desarrollo de este trabajo se ha consultado una extensa bibliografía y, a pesar de la ilusión del autor, se ha claudicado en el intento de desarrollar un algoritmo interesante a nivel especulativo para diferentes activos del mercados. En la variada bibliografía se ha podido observar un extenso desarrollo en la rigurosidad matemática, pero una falta de documentos con mayor interés para un inversor con ambición. Además, los documentos más centrados en la parte económica que rige el modelo bien mencionan que debido a los costes de transacciones y a la volatilidad del mercado, la inversión de opciones europeas no garantiza ganancias.

El autor confía que todo lo expuesto en este documento y su desarrollo con detalle en los diferentes capítulos puedan servir como herramientas para los lectores, que con suerte serán capaces de darle una aplicación más real a todo el conocimiento.



Appendix A

Anexo

El anexo expandido se encuentra en el documento de Material Complementario en el repositorio <https://github.com/KRomera/TFG-Mathematics>.

A.1 Diferencias finitas

Para adentrarnos en el estudio de la derivada primera, vamos a ver primero una versión particular del teorema de Taylor que vamos a utilizar frecuentemente.

Teorema A.1 (Teorema de Taylor) Sea $k \geq 1$ un entero y sea $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^k(\overline{B_R}(x_o))$ con $x_o \in \mathbb{R}$ y $R > 0$. Entonces $\forall h \leq R$:

$$u(x_o + h) = \underbrace{u(x_o) + u'(x_o)h + u''(x_o)\frac{h^2}{2!} + \dots + u^{(k)}(x_o)\frac{h^k}{k!}}_{\text{Polinomio de Taylor}} + \underbrace{R_k(x)}_{\text{Resto}},$$

donde $h > 0$. Existen diferentes formas de expresar $R_k(x)$:

- **Forma de valor medio del resto.** Si $u^{(k+1)} \in \mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$, entonces

$$R_k(x) = \frac{u^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1},$$

donde $\xi \in [x_o, x_o + h]$.

- **Forma integral del resto.** Si $u^{(k)} \in AC(\overline{B_R}(x_o))$, entonces

$$R_k(x) = \int_{x_o}^{x_o+h} \frac{u^{(k+1)}(t)}{k!} (x_o + h - t)^k dt.$$

donde $AC(\overline{B_R}(x_o))$ viene dado por la Definición A.1.

Definición A.1 (Continuidad absoluta) Sea un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua sobre I , es decir, $f \in AC(I)$ si $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que cualquier sucesión de subintervalos disjuntos dos a dos (x_k, y_k) de I con $x_k, y_k \in I$ satisface

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta_\varepsilon \implies \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Donde $AC(I)$ es el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas sobre I .

Es trivial ver que ser absolutamente continua implica ser continua. Además, si $f \in AC(I)$, entonces $f' \in L^1(I)$, integrable, por lo que es consistente la forma integral del resto de Taylor. Mediante el Teorema de Taylor se demuestra de manera inmediata el siguiente lema.

Lema A.1 (Discretización Forward) Sea $u \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R}(x_o))$ con $x_o \in \mathbb{R}$ y $R > 0$. Entonces $\forall h \leq R$ se tiene que

- Si $u'' \in \mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$, usando la forma de valor medio del resto

$$\underbrace{u'(x_o)}_{\text{Derivada}} = \underbrace{\frac{u(x_o + h) - u(x_o)}{h}}_{\text{Diferencias finitas}} - \underbrace{u''(\xi) \frac{h}{2}}_{\text{Error}}, \quad \xi \in [x_o, x_o + h]. \quad (\text{A.1})$$

- Si $u' \in AC(\overline{B_R}(x_o))$, usando la forma integral del resto

$$\underbrace{u'(x_o)}_{\text{Derivada}} = \underbrace{\frac{u(x_o + h) - u(x_o)}{h}}_{\text{Diferencias finitas}} - \underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_o}^{x_o+h} u''(t)(x_o + h - t) dt}_{\text{Error}}. \quad (\text{A.2})$$

De manera similar a la discretización Forward, haciendo uso del Teorema de Taylor, con la forma de valor medio del resto, obtenemos otras discretizaciones de u' de gran utilidad.

Lema A.2 (Discretización Backward y Centrada) Se tiene que:

1. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R}(x_o))$:

$$u'(x_o) = \frac{u(x_o) - u(x_o - h)}{h} + u''(\xi) \frac{h}{2}, \quad \xi \in [x_o - h, x_o].$$

2. Si $u \in \mathcal{C}^3(\overline{B_R}(x_o))$:

$$u'(x_o) = \frac{u(x_o + h) - u(x_o - h)}{2h} - u'''(\eta) \frac{h^2}{6}, \quad \eta \in [x_o - h, x_o + h].$$

También estamos interesados en discretizar la segunda derivada u'' , para lo cual simplemente debemos usar de nuevo el Teorema de Taylor y el Teorema de Bolzano.

Lema A.3 Sea $u \in \mathcal{C}^4(\overline{B_R}(x_o))$. Entonces:

$$u''(x_o) = \frac{u(x_o + h) + u(x_o - h) - 2u(x_o)}{h^2} - u^{(iv)}(\xi) \frac{h^2}{12}, \quad \xi \in [x_o - h, x_o + h]$$



Con el Lema A.1 con la forma integral del resto integral es fácil probar el siguiente lema.

Lema A.4 Si $u \in \mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$ y $u' \in AC(\overline{B_R}(x_o))$:

$$u'(s) = \frac{u(x_o + h) - u(x_o)}{h} - \frac{1}{h} \left(\int_s^{x_o+h} u''(t)(x_o + h - t) dt - \int_{x_o}^s u''(t)(t - x_o) dt \right)$$

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de A.2, vamos a desarrollar el error para ver que este es justamente:

$$Error = u'(x_o) - u'(s) - \frac{1}{h} \left(\int_s^{x_o+h} u''(t)(x_o + h - t) dt - \int_{x_o}^s u''(t)(t - x_o) dt \right)$$

Con lo que se demostraría lo enunciado. Para ello separamos la integral en dos partes, para $s \in (x_o, x_o + h)$:

$$\int_{x_o}^{x_o+h} u''(t)(x_o + h - t) dt = \int_s^{x_o+h} u''(t)(x_o + h - t) dt + \underbrace{\int_{x_o}^s u''(t)(x_o + h - t) dt}_A$$

Si desarrollamos A obtenemos los términos que nos faltan:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_o}^s u''(t)(x_o - t) dt + h \int_{x_o}^s u''(t) dt \\ &= - \int_{x_o}^s u''(t)(t - x_o) dt + h \cdot (u'(s) - u'(x_o)) \end{aligned}$$

□

A.2 Función Gamma y propiedades

Veamos la definición de la siguiente función que va a aparecer de manera recurrente.

Definición A.2 Dado $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$ se define la función Gamma como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

En general dado cualquier $z < 0$ con $z \notin -\mathbb{N}$ se define:

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Veamos ahora una serie de propiedades y definiciones a partir de esta que no se van a demostrar, pero que se pueden encontrar en variedad de libros como en la Referencia [15].



Proposición A.1 (Propiedades de la función Gamma) Sea $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$. La función Gamma cumple las siguientes propiedades:

a) $\Gamma(z + 1) = z \cdot \Gamma(z)$

b) $\Gamma(n) = (n - 1)!$

La siguiente definición es la extensión real del número combinatorio de un no entero sobre un entero que si se tratase de un entero se tendría la expresión con factoriales habitual como podemos observar por la propiedad anterior.

Definición A.3 Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ y $k \in \mathbb{N}$ se define el número combinatorio de α sobre k como:

a) Si $\alpha > 0$:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha + 1 - k)}$$

b) Si $\alpha < 0$:

$$\binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-\alpha)}$$

A.3 Interpolación de Lagrange

El polinomio de Taylor es preciso en el entorno de un punto x_0 . Sin embargo, no sirve para determinar un polinomio que pasa por una serie de $n + 1$ puntos tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Para eso se la interpolación de Lagrange.

Definición A.4 (Polinomio de Lagrange) Si x_0, \dots, x_n son $n+1$ puntos distintos y f es una función cuyos valores $f(x_k)$, $\forall k = 0, \dots, n$ son conocidos, entonces existe un polinomio único $P(x)$ de grado n a lo sumo, tal que $P(x_k) = f(x_k)$, $\forall k = 0, \dots, n$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot L_k(x), \quad L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Además, a partir de esta interpolación se puede determinar el error entre la función $f(x)$ y el polinomio $P(x)$, este viene dado por el siguiente teorema.

Teorema A.2 (Interpolación de Lagrange) Si x_0, \dots, x_n son $n + 1$ puntos distintos en el intervalo $[a, b]$ y $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$. Entonces para cada $x \in [a, b]$, existe un $\xi \in (a, b)$, tal que:

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\text{Error}} \cdot L(x), \quad L(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

donde $P(x)$ es el polinomio de Lagrange de $f(x)$.



Observación A.1 Si tenemos una función g con dos pares de puntos conocidos $(x_0, g(x_0))$ y $(x_1, g(x_1))$ la interpolación es bastante sencilla y queda como:

$$g(x) = P(x) + \frac{g''(\xi)}{2} \cdot L(x),$$

por lo tanto,

$$g(x) = \underbrace{g(x_0) \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + g(x_1) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{P(x)} + \underbrace{\frac{g''(\xi)}{2} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)}_{Error}$$

El error de la interpolación de Lagrange no es más que la diferencia entre la función y su polinomio de Lagrange $Error = g(x) - P(x)$.

A.4 Transformada de Laplace

En esta sección del anexo vamos a ver la definición de la transformada de Laplace y algunas propiedades de la misma sin entrar en demostraciones innecesarias.

Definición A.5 (Transformada de Laplace) Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$. La transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ se define como la integral impropia

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f(t)] := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

para aquellos valores de s donde sea convergente.

Antes de ver las propiedades de la transformada es necesaria definir la convolución de funciones, lo cual nos recordará al operador integral n -ésimo visto para las definiciones de Caputo y Riemann-Liouville.

Definición A.6 Dadas $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables en $[0, \infty)$ se define su convolución como

$$f * g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_0^x f(x - t)g(t) dt,$$

Además, la convolución conmuta, $f * g = g * f$.

Con las definiciones anteriores es casi inmediato probar las siguientes propiedades.

Proposición A.2 (Propiedades) Dadas constantes $A, B \in \mathbb{R}$ y funciones $f(t), g(t)$ cuyas transformadas $F(s), G(s)$ son convergentes, la transformada de Laplace cumple:

- 1) *Linealidad:* $\mathcal{L}[Af + Bg](s) = A\mathcal{L}[f](s) + B\mathcal{L}[g](s)$.
- 2) *Traslación en frecuencia:* $g(t) = e^{\omega t} f(t) \implies G(s) = F(s - \omega)$.
- 3) *Proporcionalidad:* $g(t) = f(At) \implies G(s) = \frac{1}{A} F\left(\frac{s}{A}\right)$.

4) *Primera derivada:* $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

5) *n-ésima derivada:* $\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$.

6) *Si $f(t) = t^x$ entonces $\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$.*

7) *Convolución:* $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s) \cdot G(s)$.

Por último, veamos la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Teorema A.3 *Dada la derivada fraccionaria de orden α de Riemann-Liouville como en la Definición 2.5, su transformada de Laplace es*

- Si $\alpha > 0$

$$\mathcal{L}[\partial_{RL}^\alpha[f(x)]] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \partial_{RL}^{\alpha-k-1}[f](0).$$

- Si $\alpha < 0$

$$\mathcal{L}[\partial_{RL}^\alpha[f(x)]] = s^\alpha F(s)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta hacer uso de la definición de Riemann-Liouville como una convolución y utilizar las últimas tres propiedades de la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\partial_{RL}^\alpha[f(x)]] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dx^n} (t^{n-\alpha-1} * f) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(s^n \mathcal{L} [t^{n-\alpha-1} * f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \cdot (t^{n-\alpha-1} * f)^{(k)}(0) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(s^n \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \Gamma(n-\alpha) \partial_{RL}^{\alpha-n+k} f(0) \right). \end{aligned}$$

Reagrupando términos y reordenando el sumatorio se obtiene lo enunciado.

Para la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, es decir, $\alpha < 0$, $\lambda = -\alpha > 0$, entonces $\partial_{RL}^\alpha[f(x)] = I^\lambda[f](x)$, usando las dos últimas propiedades de la transformada, se tiene que

$$\mathcal{L}[\partial_{RL}^\alpha[f(x)]] = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \mathcal{L} [(t^{\lambda-1} * f)] = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{s^\lambda} \cdot F(s) = \frac{F(s)}{s^\lambda} = s^\alpha \mathcal{L}[f](s)$$

□

Bibliografía

- [1] K.B. OLDHAM, J. SPANIER, *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York and London, 1974.
- [2] I. PODLUBNY, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*. Academic Press, San Diego, Boston, New York, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1999.
- [3] A.G. CIORDAS, *Estudio comparativo de derivadas fraccionarias* (Trabajo fin de grado) Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, Madrid, 2020.
- [4] Z.Z. SUN, X. WU, *A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system*, Applied Numerical Mathematics 56 (2006) 193–209.
- [5] G.H. GAO, Z.Z. SUN, H.W. ZHANG, *A new fractional numerical differentiation formula to approximate the caputo fractional derivative and its applications*, J. Comput. Phys. 259 (2014) 33–50.
- [6] F. BLACK, M. SCHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Political Econ. 81 (3) (1973) 637–654.
- [7] M. MAGDZIARZ, *Black-Scholes Formula in Subdiffusive Regime*, J Stat Phys (2009) 136: 553–564.
- [8] S. KI, S. KEN-ITI, A. KATOK, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge university press, 1999.
- [9] S.G. SAMKO, A.A. KILBAS, D.I. MARITCHEV, , *Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications*. Gordon and Breach, Amsterdam (1993).
- [10] G. KRZYŻANOWSKI, *Selected applications of differential equations in Vanilla Options valuation*, Math. Appl. 46 (2) (2018).
- [11] J. KEMPPAINEN, *Existence and uniqueness of the solution for a time-fractional diffusion equation*, Fract. Calc. Appl. Anal. 14 (3) (2011) 411–417.
- [12] H. ZHANG, F. LIU, I. TURNER, Q. YANG, *Numerical solution of the time fractional Black–Scholes model governing European options*, Computers and Mathematics with Applications 71 (2016) 1772–1783.



- [13] G. KRZYŻANOWSKI, M. MAGDZIARZ, L. PŁOCINICZAK, *A weighted finite difference method for subdiffusive Black–Scholes model*, Computers and Mathematics with Applications 80 (2020) 653–670.
- [14] P. ROUL, *A high accuracy numerical method and its convergence for time-fractional Black-Scholes equation governing European options*, Applied Numerical Mathematics 151 (2020) 472–493.
- [15] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 9th printing, New York: Dover, p. 258, 1972.