Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas

Material Complementario del TFG

Supervisores:

Félix del Teso & Raúl Ferreira

Autor: **Carlos Romera de Blas**

Resumen: Este documento es una expansión del apéndice del TFG - Derivadas fraccionarias y su aplicación al modelo de Black-Scholes subdifusivo. Además incluye material extra que se ha trabajado, pero por falta de espacio no ha podido ser incluido.

Índice General

A Diferencias finitas

En este capítulo vamos a ver una serie de definiciones, lemas y teoremas esenciales para trabajar con el análisis numérico de las ecuaciones en derivadas parciales. Para empezar, vamos a ver una serie de discretizaciones haciendo uso del Teorema de Taylor y el Teorema de Bolzano, pasando por la definición de continuidad absoluta.

Nuestro objetivo es reemplazar las derivadas por objetos más manejables. Como primera aproximación consideramos una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y queremos aproximar $u'(x_o)$ para un cierto $x_o \in \mathbb{R}$.

Para adentrarnos en el estudio de la derivada primera, vamos a ver primero una versión particular del teorema de Taylor que vamos a utilizar frecuentemente.

Teorema 1 (Teorema de Taylor) *Sea $k \geq 1$ un entero y sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^k(\overline{B_R}(x_o))$ con $x_o \in \mathbb{R}$ y $R > 0$. Entonces $\forall h \leq R$:*

$$u(x_o + h) = \underbrace{u(x_o) + u'(x_o)h + u''(x_o)\frac{h^2}{2!} + ... + u^{k)}(x_o)\frac{h^k}{k!}}_{\textit{Polinomio de Taylor}} + \underbrace{R_k(x)}_{\textit{Resto}},$$

donde $h > 0$. Existen diferentes formas de expresar $R_k(x)$:

- ***Forma de valor medio del resto**. Si $u^{k+1)} \in \mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$, entonces*

  $$R_k(x) = \frac{u^{k+1)}}{(k+1)!}h^{k+1},$$

  donde $\xi \in [x_o, x_o + h]$.

- ***Forma integral del resto**. Si $u^{k)} \in A\mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$, entonces*

  $$R_k(x) = \int_{x_o}^{x_o+h} \frac{u^{k+1)}(t)}{k!}(x_o + h - t)^k \, dt.$$

  donde $A\mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$ viene dado por la Definición 1.

Definición 1 (Continuidad absoluta) *Sea un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua sobre I, es decir, $f \in A\mathcal{C}(I)$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que cualquier sucesión de subintervalos disjuntos dos a dos (x_k, y_k) de I con $x_k, y_k \in I$ satisface*

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Donde $A\mathcal{C}(I)$ es el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas sobre I.

Es trivial ver que ser absolutamente continua implica ser continua. Además, si $f \in A\mathcal{C}(I)$, entonces $f' \in L^1(I)$, integrable, por lo que es consistente la forma integral del resto de Taylor. Mediante el Teorema de Taylor se demuestra de manera inmediata el siguiente lema.

Lema 1 (Discretización Forward) *Sea $u \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R}(x_o))$ con $x_o \in \mathbb{R}$ y $R > 0$. Entonces $\forall h \leq R$ se tiene que*

- *Si $u'' \in \mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$, usando la forma de valor medio del resto*

$$\underbrace{u'(x_0)}_{Derivada} = \underbrace{\frac{u(x_o+h)-u(x_o)}{h}}_{Diferencias finitas} \underbrace{-u''(\xi)\frac{h}{2}}_{Error}, \qquad \xi \in [x_o, x_o+h]. \tag{1}$$

- *Si $u' \in \mathcal{AC}(\overline{B_R}(x_o))$, usando la forma integral del resto*

$$\underbrace{u'(x_0)}_{Derivada} = \underbrace{\frac{u(x_o+h)-u(x_o)}{h}}_{Diferencias finitas} \underbrace{-\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_o+h} u''(t)(x_o+h-t)\,dt}_{Error}. \tag{2}$$

De manera similar a la discretización Forward, haciendo uso del Teorema de Taylor, con la forma de valor medio del resto, obtenemos otras discretizaciones de u' de gran utilidad, pero primero vamos a mencionar una versión del teorema del valor intermedio o teorema de Bolzano, necesario para sucesivas demostraciones.

Teorema 2 (Teorema del valor intermedio) *Sea un intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y una función continua $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Con esto podemos enunciar y demostrar las siguientes discretizaciones esenciales.

Lema 2 (Discretización Backward y Centrada) *Se tiene que:*

1. *Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R}(x_o))$:*

$$u'(x_o) = \frac{u(x_o)-u(x_o-h)}{h} + u''(\xi)\frac{h}{2}, \qquad \xi \in [x_o-h, x_o].$$

2. *Si $u \in \mathcal{C}^3(\overline{B_R}(x_o))$:*

$$u'(x_o) = \frac{u(x_o+h)-u(x_o-h)}{2h} - u'''(\eta)\frac{h^2}{6}, \qquad \eta \in [x_0-h, x_o+h].$$

DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso del Teorema 1:

1. $u(x_o-h) = u(x_o) - u'(x_o)h + u''(\xi)\frac{h^2}{2}$.

2. $$\begin{cases} u(x_o+h) = u(x_o) + u'(x_o)h + u''(x_o)\frac{h^2}{2} + u'''(\eta_1)\frac{h^3}{6} \\[2ex] u(x_o-h) = u(x_o) - u'(x_o)h + u''(x_o)\frac{h^2}{2} - u'''(\eta_2)\frac{h^3}{6} \end{cases},$$

   por tanto

$$u(x_o+h) - u(x_o-h) = 2hu'(x_o) + \underbrace{\frac{u'''(\eta_1)+u'''(\eta_2)}{2}}_{u'''(\eta)}\frac{h^3}{3},$$

   pues $u'''(\eta) \in \mathcal{C}([x_o-h, x_o+h])$, y se usa el Teorema 2. □

También estamos interesados en discretizar la segunda derivada u'', para lo cual simplemente debemos usar de nuevo el Teorema de Taylor y el Teorema de Bolzano.

Lema 3 *Sea $u \in \mathcal{C}^4(\overline{B_R}(x_o))$. Entonces:*

$$u''(x_o) = \frac{u(x_o+h) + u(x_o-h) - 2u(x_o)}{h^2} - u^{iv)}(\xi)\frac{h^2}{12}, \qquad \xi \in [x_o - h, x_o + h]$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{cases} u(x_o+h) = u(x_o) + u'(x_o)h + u''(x_o)\frac{h^2}{2} + u'''(x_o)\frac{h^3}{3!} + u^{iv)}(\xi_1)\frac{h^4}{4!} \\ \\ u(x_o-h) = u(x_o) - u'(x_o)h + u''(x_o)\frac{h^2}{2} - u'''(x_o)\frac{h^3}{3!} + u^{iv)}(\xi_2)\frac{h^4}{4!} \end{cases}$$

$$u(x_o+h) + u(x_o-h) - 2u(x_o) = h^2 u''(x_o) + u^{iv)}(\xi)\frac{h^4}{12}$$

□

Con el Lema 1 con la forma integral del resto integral es fácil probar el siguiente lema.

Lema 4 *Si $u \in \mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$ y $u' \in A\mathcal{C}(\overline{B_R}(x_o))$:*

$$u'(s) = \frac{u(x_o+h) - u(x_o)}{h} - \frac{1}{h}\left(\int_s^{x_o+h} u''(t)(x_o+h-t)\,dt - \int_{x_o}^{s} u''(t)(t-x_o)\,dt\right)$$

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de 2, vamos a desarrollar el error para ver que este es justamente:

$$Error = u'(x_0) - u'(s) - \frac{1}{h}\left(\int_s^{x_o+h} u''(t)(x_o+h-t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{x_o}^{s} u''(t)(t-x_o)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

Con lo que se demostraría lo enunciado. Para ello separamos la integral en dos partes, para $s \in (x_0, x_0+h)$:

$$\int_{x_o}^{x_o+h} u''(t)(x_o+h-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_s^{x_o+h} u''(t)(x_0+h-t)\,\mathrm{d}\,t + \underbrace{\int_{x_0}^{s} u''(t)(x_0+h-t)\,\mathrm{d}\,t}_{A}$$

Si desarrollamos A obtenemos los términos que nos faltan:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_0}^{s} u''(t)(x_0-t)\,\mathrm{d}\,t + h\int_{x_0}^{s} u''(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= -\int_{x_0}^{s} u''(t)(t-x_0)\,\mathrm{d}\,t + h\cdot(u'(s) - u'(x_0)) \end{aligned}$$

□

Para nuestros propósitos observemos que en general el error en la discretización lo vamos a denotar con la notación de Landau, para ello es necesaria la siguiente definición.

Definición 2 (O de Landau) *Dadas dos funciones $f(h)$ y $g(h)$. Decimos que:*

$$f(h) = O\left(g(h)\right) \quad \textit{cuando} \quad h \to 0$$

Si $\exists K > 0$ y $h_0 > 0$ tal que:

$$|f(h)| \leq K|g(h)| \qquad \forall h \leq h_0$$

Esto aplicado a las discretizaciones no es más que si se por ejemplo se tiene una discretización centrada, si tomamos el error $f(h) = u'''(\eta)\frac{h^3}{3}$, entonces se puede tomar $g(h) = h^3$, de esa manera podemos decir que la discretización de u'' tiene orden 3 pues:

$$u'(x_o) = \frac{u(x_o+h) - u(x_o-h)}{2h} + O(h^3)$$

B Integral de Riemann

Vamos a introducir las nociones de integral de Riemann para el lector que quiera repasar los conceptos más básicos utilizados en algunas demostraciones.

Definición 3 (Partición) *Una partición de un intervalo $[a, b]$ es un subconjunto finito $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tal que:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

*Cada $[x_k, x_{k+1}]$ se denomina **subintervalo** de la partición. La **norma** de la partición se define como la longitud del subintervalo más grande:*

$$\|P\| = \max_{k\in[0,n-1]} (x_{k+1} - x_k)$$

A partir de esta definición es natural definir una partición con más información.

Definición 4 (Partición Etiquetada) *Una partición etiquetada es una partición con otro subconjunto finito de etiquetas t_k tales que*

$$t_k \in [x_k, x_{k+1}],\ \forall k \in [0, n-1]$$

De esta forma

$$P(x,t) = \{(x_0, ..., x_n),\ (t_0, ..., t_{n-1})\}$$

A partir de esta segunda definición de partición más completa podemos definir el concepto esencial para la posterior definición formal de integral.

Definición 5 (Suma de Riemann) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $P(x, t)$ una partición etiquetada del intervalo $[a, b]$, entonces denominamos suma de Riemann a una suma de la forma:*

$$S(P(x,t), f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Las sumas inferiores $L(P)$ y superiores $S(P)$ de f son tales que:

1. $L(P) \leq S(P(x,t)) \leq U(P)$, $\forall t$
2. $L(P) = \inf\{S(P(x,t))\} = \sum_{k=0}^{n-1} \min_{t_k \in [x_k, x_{k+1}]} f(t_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$
3. $U(P) = \sup\{S(P(x,t))\} = \sum_{k=0}^{n-1} \max_{t_k \in [x_k, x_{k+1}]} f(t_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$

Es fácil ver que estas sumas representan la suma de áreas de rectángulos con base $x_{k+1} - x_k$ y altura $f(t_k)$. En particular si tenemos una partición más regular podemos simplificar todo esto.

Observación 1 Si tomamos una partición etiquetada regular, es decir, tal que:

$$\|P\| = h = x_{k+1} - x_k, \; t_k = x_k = a + k \cdot h, \qquad \forall k \in [0, n-1]$$

Entonces la suma de Riemann de dicha Partición es tal que:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot h$$

Con esta última observación podemos definir la integral de Riemann a nuestra conveniencia para un uso más práctico.

Definición 6 (Integral de Riemann) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y una partición P con $\|P\| = h$, entonces su integral de Riemann es:*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{h \to \infty} S(P)$$

En particular se cumple que

$$L(P) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq U(P)$$

Si se toman límites se da la igualdad.

C Función Gamma y propiedades

Veamos la definición de la siguiente función que va a aparecer de manera recurrente.

Definición 7 *Dado $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$ se define la función Gamma como:*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

En general dado cualquier $z < 0$ con $z \notin -\mathbb{N}$ se define:

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Veamos ahora una serie de propiedades y definiciones a partir de esta que no se van a demostrar, pero que se pueden encontrar en variedad de libros.

Proposición 1 (Propiedades de la función Gamma) *Sea $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$. La función Gamma cumple las siguientes propiedades:*

a) $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$

b) $\Gamma(n) = (n-1)!$

c) $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$

La siguiente definición es la extensión real del número combinatorio de un no entero sobre un entero que si se tratase de un entero se tendría la expresión con factoriales habitual como podemos observar por la propiedad anterior.

Definición 8 *Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ y $k \in \mathbb{N}$ se define el número combinatorio de α sobre k como:*

a) *Si $\alpha > 0$:*
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1-k)}$$

b) *Si $\alpha < 0$:*
$$\binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}$$

La siguiente propiedad es muy útil dentro de los números combinatorios no enteros.

Proposición 2 *Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\alpha > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, se verifica que:*

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} \tag{3}$$

D Interpolación de Lagrange

El polinomio de Taylor es preciso en el entorno de un punto x_0. Sin embargo, no sirve para determinar un polinomio que pasa por una serie de $n+1$ puntos tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, ..., n$. Para eso se la interpolación de Lagrange.

Definición 9 (Polinomio de Lagrange) *Si $x_0, ..., x_n$ son $n+1$ puntos distintos y f es una función cuyos valores $f(x_k)$, $\forall k = 0, ..., n$ son conocidos, entonces existe un polinomio único $P(x)$ de grado n a lo sumo, tal que $P(x_k) = f(x_k)$, $\forall k = 0, ..., n$:*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_k(x), \qquad L_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Además, a partir de esta interpolación se puede determinar el error entre la función $f(x)$ y el polinomio $P(x)$, este viene dado por el siguiente teorema.

Teorema 3 (Interpolación de Lagrange) *Si $x_0, ..., x_n$ son $n+1$ puntos distintos en el intervalo $[a,b]$ y $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$. Entonces para cada $x \in [a,b]$, existe un $\xi \in (a,b)$, tal que:*

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\frac{f^{n+1)}(\xi)}{n+1!} \cdot L(x)}_{Error}, \qquad L(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

donde $P(x)$ es el polinomio de Lagrange de $f(x)$.

Observación 2 Si tenemos una función g con dos pares de puntos conocidos $(x_0, g(x_0))$ y $(x_1, g(x_1))$ la interpolación es bastante sencilla y queda como:

$$g(x) = P(x) + \frac{g''(\xi)}{2} \cdot L(x),$$

por lo tanto,

$$g(x) = \underbrace{g(x_0) \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + g(x_1) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{P(x)} + \underbrace{\frac{g''(\xi)}{2} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)}_{Error}$$

El error de la interpolación de Lagrange no es más que la diferencia entre la función y su polinomio de Lagrange $Error = g(x) - P(x)$.

E Transformada de Laplace

En esta sección del anexo vamos a ver la definición de la transformada de Laplace y algunas propiedades de la misma sin entrar en demostraciones innecesarias.

Definición 10 (Transformada de Laplace) *Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$. La transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ se define como la integral impropia*

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f(t)] := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

para aquellos valores de s donde sea convergente.

Antes de ver las propiedades de la transformada es necesaria definir la convolución de funciones, lo cual nos recordará al operador integral n-ésimo visto para las definiciones de Caputo y Riemann-Liouville.

Definición 11 *Dadas $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones integrables en $[0, \infty)$ se define su convolución como*

$$f * g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad (f * g)(x) = \int_0^x f(x - t) g(t)\, dt,$$

Además, la convolución conmuta, $f * g = g * f$.

Con las definiciones anteriores es casi inmediato probar las siguientes propiedades.

Proposición 3 (Propiedades) *Dadas constantes $A, B \in \mathbb{R}$ y funciones $f(t), g(t)$ cuyas transformadas $F(s), G(s)$ son convergentes, la transformada de Laplace cumple:*

1) *Linealidad:* $\mathcal{L}[Af + Bg](s) = A\mathcal{L}[f](s) + B\mathcal{L}[g](s)$.

2) *Traslación en frecuencia:* $g(t) = e^{\omega t} f(t) \Longrightarrow G(s) = F(s - \omega)$.

3) *Proporcionalidad:* $g(t) = f(At) \Longrightarrow G(s) = \frac{1}{A} F\left(\frac{s}{A}\right)$.

4) *Primera derivada:* $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

5) *n-ésima derivada:* $\mathcal{L}[f^{n)}](s) = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{i)}(0)$.

6) *Si* $f(t) = t^x$ *entonces* $\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$.

7) *Convolución:* $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s) \cdot G(s)$.

Por último, veamos la transformada de Laplace de las derivadas fraccionarias de Caputo y Riemann-Liouville.

Teorema 4 *Dada la derivada fraccionaria de orden α de Caputo, su transformada de Laplace es*

$$\mathcal{L}[\partial_C^\alpha[f(x)]] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{k)}(0).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta hacer uso de la definición de Caputo como una convolución y utilizar las últimas dos propiedades de la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\partial_C^\alpha[f(x)]] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L}\left[t^{n-\alpha-1} * f^{n)}\right] \\
&= \frac{1}{\cancel{\Gamma(n-\alpha)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(n-\alpha)}}{s^{n-\alpha}} \cdot \left(s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{k)}(0)\right).
\end{aligned}$$

Reagrupando términos se obtiene lo enunciado. □

Teorema 5 *Dada la derivada fraccionaria de orden α de Riemann-Liouville, su transformada de Laplace es*

- *Si* $\alpha > 0$
$$\mathcal{L}[\partial_{RL}^\alpha[f(x)]] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \partial_{RL}^{\alpha-k-1}[f](0).$$

- *Si* $\alpha < 0$
$$\mathcal{L}[\partial_{RL}^\alpha[f(x)]] = s^\alpha F(s)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta hacer uso de la definición de Riemann-Liouville como una convolución y utilizar las últimas tres propiedades de la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\partial^{\alpha}_{RL}[f(x)]] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left(t^{n-\alpha-1} * f\right)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(s^n\mathcal{L}\left[t^{n-\alpha-1} * f\right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}\cdot\left(t^{n-\alpha-1} * f\right)^{k)}(0)\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(s^n\cdot\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}\Gamma(n-\alpha)\partial^{\alpha-n+k}_{RL}f(0)\right).
\end{aligned}$$

Reagrupando términos y reordenando el sumatorio se obtiene lo enunciado.

Para la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, es decir, $\alpha < 0$, $\lambda = -\alpha > 0$, entonces $\partial^{\alpha}_{RL}[f(x)] = I^{\lambda}[f](x)$, usando las dos últimas propiedades de la transformada, se tiene que

$$\mathcal{L}[\partial^{\alpha}_{RL}[f(x)]] = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\mathcal{L}\left[\left(t^{\lambda-1} * f\right)\right] = \frac{1}{\cancel{\Gamma(\lambda)}}\cdot\frac{\cancel{\Gamma(\lambda)}}{s^{\lambda}}\cdot F(s) = \frac{F(s)}{s^{\lambda}} = s^{\alpha}\mathcal{L}[f](s)$$

□

F Relación entre las definiciones de derivada fraccionaria

Vamos a observar que las tres definiciones de derivadas fraccionarias están relacionadas. En particular vamos a observar la relación entre la Definición de Riemann-Liouville y la Definición de Caputo. Posteriormente vamos a observar que la Definición de Grünwald-Letnikov y la Definición de Caputo también están relacionadas. Por último, se concluirá con la relación entre la de Grünwald-Letnikov y Riemann-Liouville gracias a las relaciones anteriores.

F.1 Relación entre Riemann-Liouville y Caputo

El teorema siguiente relaciona las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo en el caso $\alpha = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. El resultado es muy potente pues muestra que si una función y sus derivadas son nulas en el origen entonces ambas definiciones coinciden.

Teorema 6 *Sean $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $n = \lfloor\alpha\rfloor + 1$ y f una función n veces diferenciable con todas sus derivadas integrables en $[0, x]$ para $x > 0$. Entonces se verifica la siguiente relación:*

$$\partial^{\alpha}_{RL}[f](x) = \partial^{\alpha}_{C}[f](x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k)}(0)}{\Gamma(-\alpha+k+1)}x^{-\alpha+k}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, por la Definición de Riemann-Liouville tenemos

$$\partial^{\alpha}_{RL}[f](x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (I^{n-\alpha}[f](x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \left(\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\,\mathrm{d}\,t\right).$$

Integrando por partes se llega a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (I^{n-\alpha}[f](x)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \left(\frac{x^{n-\alpha}f(0)}{n-\alpha} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} f'(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \left(\frac{x^{n-\alpha}f(0)}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha} f'(t)\,\mathrm{d}\,t\right),\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la propiedad $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (Proposición 1). Integrando $n-1$ veces más,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (I^{n-\alpha}[f](x)) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n &\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-\alpha+k} f^{k)}(0)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\right.\\ &\left. + \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2n-\alpha-1} f^{n)}(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\\ =&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha} f^{k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{n)}(t)\,\mathrm{d}\,t\\ =&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha} f^{k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \partial^{\alpha}_{C}[f](x),\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. Cabe notar que en la prueba se ha hecho uso de la regla de Leibniz o regla de la cadena, que da la identidad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int_0^x (x-t)^a g(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x a(x-t)^{a-1} g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

□

Observación 3 La derivada de Caputo se puede considerar una regularización de la derivada de Riemann-Liouville efectuada mediante la sustracción de un polinomio de Taylor. Esta tiene ventajas frente a la otra, pues no exige condiciones iniciales de orden fraccionario, que tienen una gran dificultad a la hora de interpretarse física o geométricamente.

F.2 Relación entre Grünwald-Letnikov y Caputo

Antes de enunciar el teorema que establece la equivalencia entre estas dos diferentes definiciones de derivada fraccionaria es necesario enunciar y demostrar un Teorema esencial para su posterior demostración.

Teorema 7 (Letnikov) *Sean $A, K \in \mathbb{R}$, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\alpha_{N,k}\}_{N,k=1}^{\infty}$ dos sucesiones tales que*

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1, \qquad \begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} \alpha_{N,k} = 0, & \forall k \\ \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_{N,k} = A, & \forall k \\ \sum\limits_{k=1}^{N} |\alpha_{N,k}| < K, & \forall N \end{cases} \implies \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_{N,k}\beta_k = A. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la condición de la sucesión de β_k podemos expresar sus términos como

$$\beta_k = 1 - \sigma_k, \ \lim_{k\to\infty} \sigma_k = 0.$$

De la primera condición de la sucesión de $\alpha_{N,k}$ se tiene que $\forall r$ fijado se tiene:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{N,k} = 0 \ \text{ y } \ \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{N,k}\beta_k = 0.$$

Utilizando que los primeros $r-1$ términos del sumatorio son nulos y como hemos expresado β_k, entonces se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_{N,k}\beta_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=r}^{N} \alpha_{N,k}\beta_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=r}^{N} \alpha_{N,k} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=r}^{N} \alpha_{N,k}\sigma_k.$$

Utilizamos ahora de nuevo que los primeros $r-1$ términos del sumatorio de $\alpha_{N,k}$ son nulos y la segunda condición enunciada de dicha sucesión:

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_{N,k} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=r} \alpha_{N,k}\sigma_k = A - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=r}^{N} \alpha_{N,k}\sigma_k.$$

Utilizamos ahora la tercera hipótesis de la sucesión $\alpha_{N,k}$:

$$\begin{aligned} \left| A - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_{N,k}\beta_k \right| &= \left| \lim_{N\to\infty} \sum_{k=r}^{N} \alpha_{N,k}\sigma_k \right| \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=r}^{N} |\alpha_{N,k}| \cdot |\sigma_k| \\ &\leq \max_{k\geq r} |\alpha_k| \cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\alpha_{N,k}| \\ &< \max_{k\geq r} |\sigma_k| \cdot K. \end{aligned}$$

Ahora como teníamos que $\sigma_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces para r arbitrariamente grande entonces existe $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que $\max_{k\geq r} |\sigma_k| = \dfrac{\varepsilon}{K}$, por tanto

$$\left| A - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_{N,k}\beta_k \right| < \varepsilon.$$

De esta manera si $\varepsilon \to 0$ se obtiene lo buscado. $\square$

Teorema 8 *Sean $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $n = \lfloor\alpha\rfloor + 1$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n veces diferenciable tal que $f^{n)}$ es integrable. Entonces la derivada de Grünwald-Letnikov puede expresarse en función de la derivada de Caputo de la siguiente manera:*

$$\partial^\alpha[f](x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k)}(0)x^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \partial_C^\alpha[f](x). \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN. Para empezar, si denotamos a $n = \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor$, se observa que el sumatorio de la Definición de Grünwald-Letnikov es

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}u(x-kh) = u(x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{\alpha}{k}u(x-kh).$$

Añadiéndole $h^{-\alpha}$, se puede reescribir como

$$h^{-\alpha}\left(u(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}u(x-kh)\right) = h^{-\alpha}\left(u(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{k-\alpha-1}{k}u(x-kh)\right).$$

En particular, sin pérdida de generalidad, se puede tomar h tal que $\frac{x}{h} = N \in \mathbb{N}$, entonces la derivada sin el límite es

$$f_h^\alpha(x) := h^{-\alpha}\left(u(x) + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\binom{\alpha}{k}u(x-kh)\right), \tag{7}$$

utilizando además la Proposición 2 se puede expresar como

$$f_h^\alpha = h^{-\alpha}\left(f(x) + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left(\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1}\right)f(x-kh)\right).$$

Separamos el sumatorio con los números combinatorios denotando el segundo con índice $j = k-1$, teniendo

$$f_h^\alpha = h^{-\alpha}\left(f(x) + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k} + \sum_{j=0}^{N-1}(-1)^{j+1}\binom{\alpha-1}{j}f(x-(j+1)h)\right).$$

Como el índice es mudo podemos reagruparlo todo bajo el mismo sumatorio con índice k, pero sacamos el último término del primer sumatorio y el primer término del segundo,

$$\begin{aligned} f_h^\alpha(x) =& h^{-\alpha}\underbrace{(f(x)-f(x-h))}_{\Delta f(x)} + (-1)^N\binom{\alpha-1}{N} f(x-Nh) \\ &+ h^{-\alpha}\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\underbrace{(f(x-kh)-f(x-(k+1)h))}_{\Delta f(x-kh)}. \end{aligned}$$

Observamos que $\Delta f(x) = \Delta f(x-0\cdot h)$ y lo podemos introducir en el sumatorio. Además, teniendo en cuenta que $x - Nh = 0$ por cómo se tomó h,

$$f_h^\alpha(x) = h^{-\alpha}\left((-1)^N\binom{\alpha-1}{N} f(0) + \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\Delta f(x-kh)\right).$$

Entonces supongamos por inducción que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$f_h^\alpha(x) = h^{-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}\Delta^k f(kh) + \sum_{k=0}^{N-n}(-1)^k\binom{\alpha-n}{k}\Delta^n f(x-kh)\right).$$

Y veamos entonces que se cumple para $n+1$, para ello desarrollamos el segundo sumatorio como lo hacíamos para $n = 1$ usando (3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-n}(-1)^k\binom{\alpha-n}{k}\Delta^n f(x-kh) =& \Delta^n f(x) + \sum_{k=1}^{N-n}(-1)^k\binom{\alpha-(n+1)}{k}\Delta^n f(x-kh) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-(n+1)}(-1)^{k+1}\binom{\alpha-(n+1)}{k}\Delta^n f(x-(k+1)h) \\ =& \underbrace{\Delta^n f(x) - \Delta^n f(x-h)}_{\Delta^{n+1} f(x-0\cdot h)} \\ &+ (-1)^{N-n}\binom{\alpha-(n+1)}{N-n}\Delta^n f(x-(N-n)h) \\ &+ \sum_{k=1}^{N-(n+1)}(-1)^k\binom{\alpha-(n+1)}{k}\Delta^{n+1} f(x-kh) \\ =& (-1)^{N-n}\binom{\alpha-(n+1)}{N-n}\Delta^n f(x-(N-n)h) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-(n+1)}(-1)^k\binom{\alpha-(n+1)}{k}\Delta^{n+1} f(x-kh). \end{aligned}$$

Sumándolo a lo anterior, se demuestra la inducción para $n+1$

$$\begin{aligned}f_h^\alpha(x) =& h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}\Delta^k f(kh)\\ &+h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{N-(n+1)}(-1)^k\binom{\alpha-(n+1)}{k}\Delta^n f(x-kh).\end{aligned}$$

Vamos a estudiar el k-ésimo término del primer sumatorio cuando se lleva al límite $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}(-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}\Delta^k f(kh).$$

Hacemos algunas manipulaciones algebraicas, para ello se multiplica y divide por $(N-k)^{\alpha-k}N^{\alpha-k}h^k$

$$=\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}(-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}\Delta^k f(kh)\frac{(N-k)^{\alpha-k}N^{\alpha-k}h^k}{(N-k)^{\alpha-k}N^{\alpha-k}h^k}.$$

Se reagrupan los términos,

$$=\lim_{h\to 0}(-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}(N-k)^{\alpha-k}\left(\frac{N}{N-k}\right)^{\alpha-k}(Nh)^{k-\alpha}\frac{\Delta^k f(kh)}{h^k}.$$

Esto lo podemos dividir en tres límites, teniendo en cuenta que $h\to 0 \iff N\to\infty$ y la relación $Nh=x$,

$$=\lim_{N\to\infty}\left((-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}(N-k)^{\alpha-k}\right)\underbrace{\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N}{N-k}\right)^{\alpha-k}}_{1}\lim_{h\to 0}\left(x^{k-\alpha}\frac{\Delta^k f(kh)}{h^k}\right).$$

Desarrollando el número combinatorio del primer límite utilizando propiedades de la función Gamma (Proposición 1 y Definición 8) tenemos

$$\begin{aligned}&=\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma\left((N-k)-(\alpha-(k+1))\right)}{\Gamma\left((N-k)+1\right)\Gamma\left(-(\alpha-(k+1))\right)}(N-k)^{\alpha-k}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(N+1-\alpha)}{\Gamma(N+1-k)\Gamma((k+1)-\alpha)}(N-k)^{\alpha-k}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{(N-\alpha)\cdots((k+1)-\alpha)\cdot(k-\alpha)\cdots(-\alpha)\Gamma(-\alpha)}{(N-k)!\cdot(k-\alpha)\cdots(-\alpha)\Gamma(-\alpha)}(N-k)^{\alpha-k}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{(N-\alpha)\cdots(k+1-\alpha)}{(N-k)!(N-k)^{k-\alpha}}\\
&=\frac{1}{k-\alpha}\lim_{N\to\infty}\frac{(N-\alpha)\cdots(k+1-\alpha)(k-\alpha)}{(N-k)!(N-k)^{k-\alpha}}\\
&\overset{P\,1}{=}\frac{1}{(k-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)}.\end{aligned}$$

Por otro lado, el último límite no es más que la Definición de derivada k-ésima :

$$\lim_{h\to 0}\left(x^{k-\alpha}\frac{\Delta^k f(kh)}{h^k}\right)=x^{k-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(0+kh)}{h^k}=x^{k-\alpha}f^{k)}(0).$$

De esta manera, hemos obtenido que el límite tiene la forma

$$\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}(-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}\Delta^k f(kh)=\frac{f^{k)}(0)x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}.$$

Por tanto, el límite del primer sumatorio coincide con el enunciado

$$\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{N-k}\binom{\alpha-(k+1)}{N-k}\Delta^k f(kh)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k)}(0)x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \tag{8}$$

Veamos que el límite del segundo sumatorio tiene la forma

$$\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{N-n}(-1)^k\binom{\alpha-n}{k}\Delta^n f(x-kh)$$

Si lo manipulamos de manera simular, pero esta vez multiplicando y dividiendo por $\Gamma(-\alpha+n)k^{n-1-\alpha}h^n$ observamos que es

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{N-n}\underbrace{(-1)^k\Gamma(n-\alpha)\binom{\alpha-n}{k}k^{\alpha+1-n}}_{\beta_k}\underbrace{h(kh)^{n-1-\alpha}\frac{\Delta^n f(x-kh)}{h^n}}_{\alpha_{N,k}}.$$

Para calcular este límite utilizamos el Teorema 7 de Letnikov, con sucesiones β_k y $\alpha_{N,k}$. En particular, la sucesión $\alpha_{N,k}$ depende de N implícitamente a través de h, pues recordamos que $N=\frac{x}{h}$. Utilizando entonces de nuevo propiedades de la función Gamma (Proposición 1 y Definición 8) veamos que se cumplen las hipótesis del teorema:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\beta_k &= \lim_{k\to\infty}(-1)^k\Gamma(n-\alpha)\binom{\alpha-n}{k}k^{\alpha+1-n}\\
&=\Gamma(n-\alpha)\lim_{k\to\infty}\frac{\Gamma(k-(\alpha-n))}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}k^{\alpha+1-n}\\
&=\Gamma(n-\alpha)\lim_{k\to\infty}\frac{(k+n-\alpha-1)\cdots(n-\alpha)\cdot(n-1-\alpha)\cdots(-\alpha)\Gamma(-\alpha)}{(k-1)!\cdot k^{n-\alpha}\cdot(n-1-\alpha)\cdots(-\alpha)\Gamma(-\alpha)}\\
&=\Gamma(n-\alpha)\frac{1}{(n-\alpha-1)}\lim_{k\to\infty}\frac{(k-(n-1-\alpha))\cdots(n-\alpha)(n-1-\alpha)}{k!\cdot k^{n-\alpha-1}}\\
&=\Gamma(n-\alpha)\frac{1}{(n-\alpha-1)\Gamma(n-\alpha-1)}\\
&=\Gamma(n-\alpha)\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\\
&=1.
\end{aligned}$$

Por otro lado, veamos que se cumplen las tres hipótesis necesarias de la sucesión $\alpha_{N,k}$. Para ello primero vamos a definir la partición etiquetada regular:

$$P = \{t_k = x - k \cdot h,\ k \in [0, N-1]\}, \qquad \|P\| = h = \frac{x}{N}.$$

Para la primera hipótesis usamos la relación $Nh = x$ y $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$, por tanto, $n - \alpha = \lfloor \alpha \rfloor - \alpha + 1 \Longrightarrow 0 < n - \alpha < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \alpha_{N,k} &= \lim_{N\to\infty} h(kh)^{n-1-\alpha} \frac{\Delta^n f(x-kh)}{h^n} \\ &= k^{n-1-\alpha} \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{\Delta^n f(t_k)}{h^n} \right) \cdot \lim_{h\to 0} h^{n-\alpha} \\ &= k^{n-1-\alpha} \cdot f^{n)}(t_k) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Veamos que la segunda hipótesis se cumple con $A = \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{n)}(t)\,\mathrm{d}\,t$, pues se trata de una suma de Riemann. Para verlo vamos a utilizar propiedades del límite

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-n} \alpha_{N,k} \right) &= \lim_{h\to 0} \left(\sum_{k=0}^{N-n} h(kh)^{n-1-\alpha} \frac{\Delta^n f(x-kh)}{h^n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-n} \lim_{h\to 0} \left(h \cdot (x - t_k)^{n-1-\alpha} \right) \lim_{h\to 0} \left(\frac{\Delta^n f(t_k)}{h^n} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{N-n} \underbrace{(x-t_k)^{n-1-\alpha} f^{n)}(t_k)}_{g(t_k)} \cdot h. \end{aligned}$$

Ahora como $N \to \infty$, $N - n \sim N - 1$, por tanto, tenemos justamente la Definición 6 de integral de Riemann:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) \cdot h = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{n)}(t)\,\mathrm{d}\,t = A.$$

Por último, veamos que la última hipótesis se cumple pues los términos de la suma de Riemann están acotados por ser $f^{n)}$ continua en el intervalo cerrado $[0, x]$ entonces está acotada, por tanto, $|\alpha_{N,k}| \leq \max_k |\alpha_{N,k}| = \frac{K}{2N}$ y

$$\sum_{k=0}^{N-n} \left| h \cdot (x - t_k)^{n-1-\alpha} \frac{\Delta^n f(t_k)}{h^n} \right| \leq \sum_{k=0}^{N} |\alpha_{N,k}| \leq N \cdot \frac{K}{2N} = \frac{K}{2} < K.$$

Entonces por el Teorema 7 de Letnikov se cumplen las hipótesis y por tanto

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-n} \alpha_{N,k} \beta_k = A.$$

Además, por la Definición de Caputo se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{N-n}(-1)^k\binom{\alpha-n}{k}\Delta^n f(x-kh) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{n)}(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \partial_C^\alpha[f](x).\end{aligned} \tag{9}$$

Agrupando de nuevo los términos obtenidos en (8) y (9), hemos obtenido la relación enunciada entre las dos definiciones diferentes de derivada fraccionaria:

$$\partial^\alpha[f](x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k)}(0)x^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \partial_C^\alpha[f](x).$$

□

F.3 Relación entre las derivadas de Grünwald-Letnikov y Riemann-Liouville

Después de ver las relaciones entre sendas definiciones con la definición de derivada fraccionaria de Caputo se puede ver que coinciden por lo que podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 1 *Las definiciones de derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov y Riemann-Liouville coinciden.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 6 y el Teorema 8 se tiene la relación entre las tres definiciones de derivada fraccionaria:

$$\partial_{RL}^\alpha[f](x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k)}(0)x^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \partial_C^\alpha[f](x) = \partial^\alpha[f](x).$$

Demostrando que las definiciones de Grünwald-Letnikov y Riemann-Liouville coinciden. □

Observación 4 Las definiciones de derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov y Riemann-Liouville tienen usos diferentes. A la hora de obtener la solución numérica de un problema se utiliza la primera por ser más apropiada para ser implementada en cálculos numéricos iterativos. Por otro lado, la segunda es más conveniente a la hora de formular los problemas y consideraciones teóricas de ecuaciones diferenciales fraccionarias.